論文の内容の要旨

論文題目 Analysis of the minimal travelling wave speed via the methods of Young measures
（進行波の最小速度の Young 測度による解析）

氏名　伊藤　涼

本論文では，次の反応拡散方程式を考えた．

$$u_t = u_{xx} + r(x)(1-u)u \quad x \in \mathbf{R}, t > 0. \tag{1}$$

ここで $r(x)$ は周期 $L > 0$ の正値周期関数である．この方程式は外来生物の侵入モデルを記述している．t は時刻，x は位置，u は外来生物の個体数密度，r が外来生物の内的自然増加率（intrinsic growth rate），すなわちこの場合は個体数密度が非常に小さい場合の増加率を表している．

この方程式は，一定の時間間隔では解の波面の形状を変えずに進む進行波と呼ばれるタイプの解を持つことが知られている．係数 r が定数である場合の方程式 (1) については，1937 年に Kolmogorov，Petrovsky，Piskunov によって先駆的な研究が行われ，様々な速度の進行波が存在すること，またそれらの進行波の速度のうちで最小のもの（以下，これを「最小速度」と呼んで $c^* > 0$ で表す）が集団遺伝学への応用上の観点から最も重要であることが示された．

1951 年に Skellam は生態学における外来生物の侵入モデルとして方程式 (1) を提唱し，この方程式が再び脚光を浴びることになった．この方程式（ただし，係数 r が定数の場合）において，コンパクトな台を持つ初期値から出発した解の波面の広がり速度（spreading speed）が進行波の最小速度 c^* に一致することがわかっている（Aronson-Weinberger 1978）．生態学モデルの観点からは，波面の広がり速度は外来生物の侵入速度を表す．

その後，1986 年に Shigesada et al [6] によって空間周期的な環境における外来生物の侵入を記述するモデルとして，(1) で $r(x)$ が周期的階段関数の場合が研究され，環境の周期性が進行波の最小速度に及ぼす影響が調べられた．ただし，Shigesada らの研究は空間周期的な環境における進行波の存在を仮定した形式的な議論の上に組み立てられており，数学的に厳密な結果ではない．また，進行波の最小速度 c^* と波面の広がり速度が，係数が空間周期的な場合にも等しいかどうかは，当時はわかっていなかった．係数が空間周期的な場合の (1) の進行波の存在は，2002 年に Weinberger [7] と Berestycki-Hamel [1] によって，初めて数学的に厳密に証明された．

進行波の最小速度は係数 r に依存するので，以下，これを $c^*(r)$ という記号で表すことにする．係数 r が空間周期的な場合にも，$c^*(r)$ はコンパクトな台をもつ解の波の広がり速度（spreading speed）と一致することも 2002 年の Weiberger [7] の結果や，2005 年の Berestycki et al [2] によって証明されている．生態学の観点からいえば，波面の広がり速度とは，外来生物の侵入速度に他ならない．以下で説明するように本学位論文では，係数 r を特定の制約条件の下でいろいろ変えて，$c^*(r)$ を最小化あるいは最大化する変分問題を考えた．

最小速度 c^* に関する変分問題は上記の Shigesada らの論文 [6] においても部分的に論じられているが，厳密な数学的な研究としては，2010 年に Liang-Lin-Matano [4] が積分平

均が一定という制約条件の下で最小速度を最大化する変分問題を考察し，最大化係数 $r(x)$ は周期的に配置された δ 関数（すなわち点測度）であり，関数のクラスには最大化問題の解が存在しないことを示した．これは,「集中化現象」（定義は後述）が起こることを意味している．また，Nadin は 2010 年に次の不等式を示した．

$$c^*(r) \leq c^*(r^*). \tag{2}$$

ここで，r^* は r のシュワルツ再配列関数（Schwarz rearrangement）である．再配列関数とは，関数を等位集合の測度を変えずに，中心を軸に対称でそこから単調に減少する関数に変換した関数のことをいう．その他にも，ごく最近，Matano, Mori, Xiao が係数 r の 2 乗の積分平均が一定という制約条件の下で，最小速度を最大化する変分問題を解析し，最大化関数の存在を示すと共に，Euler-Lagrange 方程式を導出している．

本論文では，これまでの研究を更に一般化して，内的自然増加率 r が，何らかの環境パラメータ b の関数として $h(b)$ という形で表される状況を考察した．ここで b は空間変数 x の周期関数であるとする．つまり，係数 $r(x)$ は，次の関係式によって $\mathbf{R}$ 上の周期関数となる．

$$r(x) = h(b(x)) \tag{3}$$

ここで，h は非負値連続関数である．従来の研究では，主として $h(b) = b$ の場合が扱われていた．しかし，自然科学に現れる現象のなかには，内的自然増加率が環境パラメータに単純に比例しない場合が数多くある．例えば，Chen-Mertiri-Holland-Basu [3] の実験で，藻の内的自然増加率は光の量に線形に依存しないことが示されている．

本論文では，$c^*(h(b))$ を周期関数 $b(x)$ を変数として，次の 2 つの制約条件の下で最大化，或いは最小化することを考察した．

(C1) $0 \leq b(x) \leq M$, $b(x+L) \equiv b(x)$, $\frac{1}{L}\int_0^L b(x)dx = \alpha$.

(C2) $b(x) \geq 0$, $b(x+L) \equiv b(x)$, $\frac{1}{L}\int_0^L b(x)dx = \alpha$.

ここで $M > \alpha > 0$ はそれぞれ与えられた定数である．制約条件 **(C2)** は，環境パラメータ $b(x)$（例えば光の量など）の平均値が，あらかじめ与えられた値 α に等しいことを意味している．また，**(C1)** は，更に $b(x)$ の最大値を上から押える条件を加えている．

本論文では，上記の問題を変分法の直接法で解析した．つまり，c^* を下限（上限）に近づける関数列 $\{b_n\}$ を調べることによって $c^*(h(b))$ の変分問題を解析した．関数列 $\{b_n\}$ が $L^1(0,L)$ で強収束する部分列を持つことは，次の 2 条件が成立することと同値である．

(i) $\{b_n\}$ は一様可積分，つまり

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\{b_n \geq M\}} b_n(x)dx = 0.$$

(ii) $\{b_n\}$ はある関数 b に測度収束する，つまり

$$\lim_{n\to\infty} |\{\ x \in (0,L) \mid |b_n(x) - b(x)| \geq \varepsilon\ \}| = 0$$

が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成立する．

(i) が成立しない場合，$\{b_n\}$ は集中化するといい，**(ii)** が成立しない場合，$\{b_n\}$ は微細に振動するという．例えば b_n が Dirac 測度に収束するケースは集中化現象の典型的な事例である．一方，微細な振動は Young 測度によって記述される．上記の事実から，関数列が L^1 強収束する部分列を持たないとき，集中化現象か微細な振動のいずれか（または両方）が起こっている．

Liang-Lin-Matano [4] は集中化現象を捉えるために $b \mapsto c^*(b)$ の定義域を関数の空間から測度の空間に拡張した．制約条件 **(C1)** の下では，上からの有界性を課しているため集中化現象は起こり得ない．そのため，最小化列が強収束する部分列を持たない場合は，必ず微細な振動が起こっている．

まず最小化問題について述べる．本論文では，微細な振動を捉えるために $b \mapsto c^*(h(b))$ の定義域を関数の空間から Young 測度の空間に拡張する手法を用い，制約条件 **(C1)** の下で拡張された最小化問題を解析した．この制約条件の下では集中化現象が起こらないので，最小化列が強収束する部分列を持たない場合，微細な振動が起こるが Young 測度の意味では収束する．これにより，Young 測度の空間に拡張した問題は解を持つことを示すことに成功した．次に，得られた Young 測度の意味の解の形を解析することによって，制約条件 **(C1)** を課した元の問題に，最小化関数が存在するための必要十分条件を導出した．さらに，極限論法により制約条件 **(C2)** を課した最小化問題についても，下限の値と，最小化関数が存在するための必要十分条件を導出した．

次に最大化問題について述べる．最大化問題においては，Nadin [5] が示した不等式 (2) が重要な役割を演じる．というのも，不等式 (2) から，再配列関数からなる最大化列を考えれば十分であることがわかるからである．再配列関数からなる最大化列は微細に振動しないことが期待できるので，あとは，集中化現象が起こらないことを確認すれば十分である．本論文では，最大化列の極限として定まる関数の積分平均を精査することによって，この問題を解析した．

本論文では，以下のことを証明した．最小化問題については，任意の非負値連続関数 h に対して，制約条件 **(C1)** 及び **(C2)** を課した場合の $c^*(h(b))$ の下限の値を決定した．具体的には，制約条件 **(C1)** の下で $C[h_M](\alpha)$，制約条件 **(C2)** の下で $C[h](\alpha)$ となることを示した．ここで h_M は次式で定まる関数で，$C[g]$ は関数 g を超えない最大の凸関数である．

$$h_M(b) \quad := \quad \begin{cases} h(b) & \text{if } 0 \le b \le M \\ +\infty & \text{if } b > M. \end{cases}$$

次の条件が制約条件 **(C1)** の下で最小化関数が（関数のクラスの中に）存在するための必要十分条件であることを示した．

$$h(b_-^M) = h(b_+^M).$$

ここで $b_\pm^M$ は α に最も近い h_M と $C[h_M]$ が一致する点である．制約条件 **(C2)** を課した最小化問題に関しては，次の条件が最小化関数が存在するための必要十分条件であることを示した．

$$h(b_-) = h(b_+),\ b_+ < +\infty.$$

ここで $b_\pm$ は α に最も近い h と $C[h]$ が一致する点である．

最大化問題については，h が劣線形である場合，次の条件の下で制約条件 **(C1)** 及び **(C2)** を課した $c^*(h(b))$ の最大化問題が解を持つことを示した．

$$\text{定数 } b_0 \ge \alpha \text{ で } h(b_0) \ge \sup_{0 \le b \le \alpha} h(b) \text{ をみたすものが存在する．}$$

さらに，上記の条件が成立しない場合は集中化現象が起こることを示した．

制約条件 (1) を課した $c^*(h(b))$ の最大化問題に関しては，最大化関数 $B^{\max,L}$ の性質に関しても考察した．具体的には $L \to 0$ とした場合の $B^{\max,L}$ の挙動を解析した．$B^{\max,L}$ の漸近挙動は $\bar{C}[h]$ の α での接線の様子に依存する．ここで $\bar{C}[h]$ は h より大きい最小の凹関数．$\bar{C}[h]$ の α での接線の内，傾きが最小なものを $l_+[h]$，最大なものを $l_-[h]$ とおく．$l_+[h]$, $l_-[h]$，h の全てが交わる点が α のみであるとき，$B^{\max,L}$ は $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ の意味で収束することを示した．また，２つの接線と h の交点に α が含まれない場合，$B^{\max,L}$ は微細に振動することを示した．

Young 測度の理論を進行波の最小速度の解析に応用した研究は，これまでに例がなく，本論文が最初である．Young 測度の理論を用いることにより，与えられた最小化問題や最大化問題が関数のクラスの中に解を持つかどうか，また，解を持つためには関係式 (3) に現れる関数 h がどのような条件をみたせばよいかを，統一的な視点から論じることができた本論文の結果は，Young 測度の理論の新しい応用分野を切り開くものであり，その点でも意義は大きいと考える．

参考文献

[1] H. Berestycki and F. Hamel, *Front propagation in periodic excitable media*, Communications on Pure and Applied Mathematics, LV, 949-1032, 2002.

[2] H. Berestycki, F. Hamel and N. Nadirashvili, *The speed of propagation for KPP type problems. I-Periodic framework*, J. Eur. Math. Soc., 7: 173-213, 2005.

[3] M. Chen, T. Mertiri, T. Holland and A. S. Basu, *Optical microplates for high-throughput screening of photosynthesis in lipidproducing algae*, J. RSC, 12: 3870-3874, 2012.

[4] X. Liang, X. Lin and H. Matano, *A variational problem associated with the minimal speed of travelling wave for spatially periodic reaction-diffusion equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 362: 5605-5633, 2010.

[5] N. Nadin, *The effect of the Schwarz rearrangement on the periodic principal eigenvalue of a nonsymmetric operator*, SIAM J. Math. Anal., 41:2388-2406, 2010.

[6] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Traveling periodic waves in heterogeneous environments*, Theor. Population Biol., 30: 143-160, 1986.

[7] H. F. Weinberger, *On spreading speeds and traveling waves for growth and migration models in a periodic habitat*, J. Math. Biol. 45: 511-548, 2002.