論文審査の結果の要旨

氏 名　伊藤 涼

論文提出者 伊藤 涼 は，ある種の反応拡散方程式に現れる進行波の最小速度に関する変分問題を考察した．扱った方程式は，KPP 型と呼ばれる反応拡散方程式のクラスに属し，具体的には次の形で与えられる．

$$u_t = u_{xx} + r(x)(1-u)u \quad x \in \mathbf{R}, t > 0.$$

ここで $r(x)$ は周期 $L > 0$ の正値周期関数である．この方程式は $u = 0$ と $u = 1$ という二つの定数定常解をもち，前者は不安定で後者は安定である．

この種の方程式は，自然科学の様々な分野に現れる．数理生態学においては，外来生物の侵入を記述する数理モデルとして古くから研究されている．その場合，$u(x,t)$ は場所 x，時刻 t における外来生物の個体数密度を表す．また，r は外来生物の内的自然増加率（intrinsic growth rate），すなわち個体数密度が十分小さいときの増加率を表す．古典的モデルにおいては r は定数であるが，本研究では $r(x)$ が周期関数の場合を扱っている．これは環境が場所によってを表している．

この方程式には進行波と呼ばれる特殊解が存在する．係数 r が定数の場合は，進行波とは形を変えずに一定速度で進む解を意味する．すなわち，ある 1 変数関数 $\psi(z)$ と定数 c を用いて $u(x,t) = \psi(x - ct)$ という形に書ける解である．ここで c は，進行波の速度を表す．一方，方程式の係数が空間周期的な場合は，進行波とは形を周期的に変動させながら一定の平均速度で進む解を指す．本論文で扱っているのは，この種の進行波である．

係数 r が定数の古典的モデルは，1937 年に Kolmogorov，Petrovsky，Piskunov によって先駆的な研究が行われ，進行波が無数にあることや，進行波の中で最小の速度をもつものが存在することが示された．この進行波の「最小速度」(minimal speed) を，以下，c^* という記号で表すことにする．KPP 方程式という呼称は，この 3 人の研究者の名前の頭文字に由来する．

1970 年代になって，進行波の最小速度 c^* が，コンパクトな台をもつ初期値から出発した解の波面が周囲に広がる速さ (spreading speed) と一致することが示された．生態学モデルにおいては，波面の広がり速度は外来生物の侵入速度を表すので，最小速度 c^* は，その観点からも重要な意味をもつ．

1980 年代に入ると，$r(x)$ が空間周期的な場合の進行波や広がり波面の研究が少しずつ現れ始めた．とくに注目されるのは 1986 年に発表された数理生態学者 Shigesada

たちの研究で，そこでは $r(x)$ が空間周期的な階段関数の場合に c^* を具体的に計算して，環境の周期性が進行波の最小速度に及ぼす影響を生態学的観点から詳しく調べている．ただし Shigesada らの研究は，形式的計算の上に組み立てられており，数学的に厳密な結果ではない．$r(x)$ が周期関数の場合の進行波についての本格的な研究は，2000 年代に入ってから盛んに行われるようになった．

進行波の最小速度は係数 $r(x)$ を与えるごとに決まるので，以下，これを $c^*(r)$ という記号で表す．$c^*(r)$ は，ある 2 階楕円型常微分作用素の主固有値を用いて特徴付けることができる．より詳しく述べると，実パラメータ λ を含む微分作用素

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi'' - 2\lambda\varphi' + r(x)\varphi$$

の周期境界条件 $\varphi(x+L) \equiv \varphi(x)$ の下での主固有値を $\mu(\lambda, r)$ とおくと，

$$c^*(r) = \inf_{\lambda>0} \frac{\mu(\lambda, r) + \lambda^2}{\lambda}$$

が成り立つことが知られている．

論文提出者は，係数 r を特定の制約条件の下でいろいろ変えたときに $c^*(r)$ を最小化あるいは最大化する変分問題を考察した．最小速度 c^* に関するこの種の変分問題は上述の Shigesada らの論文でも部分的に論じられているが，本格的な研究が始まったのは比較的最近である．Liang-Lin-Matano (2010) は，r の積分平均が一定という制約条件の下で $c^*(r)$ を最大化する変分問題を考察し，最大化係数 $r(x)$ は周期的に配置された δ 関数（すなわち点測度）であり，関数のクラスの中には最大化問題の解が存在しないことを示した．これは,「集中化現象」が起こることを意味している．また，Nadin (2010) は次の不等式を示した．

$$c^*(r) \leq c^*(r^*).$$

ここで，r^* は r のシュワルツ再配列関数（Schwarz rearrangement）である．この他，ごく最近，Xiao らは係数 r の 2 乗積分が一定という制約条件の下で $c^*(r)$ を最大化する変分問題を考察し，最大化関数の存在を示すとともに，その関数がみたす Euler-Lagrange 方程式を導出している．

本提出論文では，これまでの研究を更に一般化して，内的自然増加率 r が何らかの環境パラメータ b の関数として $r = h(b)$ という形で表される状況を考え，b を何らかの制約条件の下で変化させたときの $c^*(h(b))$ に対する最小化問題や最大化問題を考察した．ここで h は非負連続関数であり，$b(x)$ は周期 L の周期関数である．関数 $b(x)$ には，次の二つの制約条件のいずれかを課した．

(C1) $0 \leq b(x) \leq M$, $b(x+L) \equiv b(x)$, $\frac{1}{L}\int_0^L b(x)dx = \alpha$
(C2) $b(x) \geq 0$, $b(x+L) \equiv b(x)$, $\frac{1}{L}\int_0^L b(x)dx = \alpha$. ;

ここで $M > \alpha > 0$ はそれぞれ与えられた定数である．

これらの変分問題が関数のクラスの中に解をもつためには，最小化列（あるいは最大化列）が何らかの強い位相で極限を持てばよい．そうした極限が存在しないのはどういう場合かというと，最小化列や最大化列が集中現象を起こしたり（例えばデルタ関数に収束するなど），あるいは激しく微細振動 する場合である．集中現象と微細振動を防ぐことができれば，最小化問題や最大化問題が関数のクラスの中に解を持つことが示される．

まず最小化問題をについては，論文提出者は，これを制約条件 **(C1)** の下で考えた．この場合，最小化列は一様有界となるので集中現象は起こらない．よって，関数のクラスの中に解があるかどうかは，最小化列が微細振動を起こすかどうかによる．論文提出者は，微細振動を捉えるために $b \mapsto c^*(h(b))$ の定義域を関数の空間から Young 測度の空間に拡張する手法を用い，拡張された最小化問題を解析した．この拡張された問題は，Young 測度の空間の中に必ず解を持つ．この Young 測度の意味の解の形を解析することによって，制約条件 **(C1)** を課した元の問題に，最小化関数が存在するための非常に簡明な必要十分条件を導出することに成功した．　さらに，極限論法により制約条件 **(C2)** を課した最小化問題についても，下限の値と，最小化関数が存在するための必要十分条件を導出した．

また，最大化問題についても詳しい解析を行い，関数のクラスの中に解が存在するための簡明な十分条件を見いだした．

Young 測度の理論を進行波の最小速度の解析に応用した研究は，これまでに例がなく，本提出論文が最初の成果である．Young 測度の理論を用いることにより，与えられた最小化問題や最大化問題が関数のクラスの中に解を持つための条件を統一的な視点から論じることに成功している．本提出論文は，Young 測度の理論の新しい応用分野を切り開くものであり，その意義は大きい．以上の諸点を考慮した結果，論文提出者 伊藤 涼 は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．