Twist maps on quantized coordinate algebras

その他のタイトル	量子座標環における捻り写像
学位授与年月日	2017-03-23
URL	http://doi.org/10.15083/00076083

論文の内容の要旨

論文題目: Twist maps on quantized coordinate algebras
(量子座標環における捻り写像)
氏　名: 大矢 浩徳

本論文では捻り写像 (twist map) と呼ばれるある関数環の間の同型の量子類似を, 双対標準基底との関連から考察した. 双対標準基底とはある量子座標環における特別な基底であり, 特にその積構造は量子座標環の構造のみならず他の数学的対象の "代数的構造" を反映する対象として深く調べられてきた. 双対標準基底の元の代表的な例としては小行列式を下三角行列のなす群上の関数とみたもの (の量子類似) が挙げられる. 本論文の主目的は, 捻り写像と呼ばれる非自明な代数写像を双対標準基底, および関連する数学的対象の対称性を調べる道具として用いるための基礎づけを行うことにある. 本論文では捻り写像として 2 種類, "Fomin-Zelevinsky 型" のもの (FZ 捻り写像と呼ぶ) と "Berenstein-Fomin-Zelevinsky 型" のもの (BFZ 捻り変換と呼ぶ) を考える. なお, 後者は自己同型写像であることを踏まえ, 変換と呼んでいる. 本論文の主結果は以下のように述べられる.

(1) Lenagan-Yakimov により導入された FZ 捻り写像の量子類似が双対標準基底の間の全単射を導くことの証明. および, 量子 FZ 捻り写像の量子冪単小行列式への作用の具体的な記述. (Section II.1, 2)
(2) BFZ 捻り変換の量子類似の一般的な設定での構成, およびそれが双対標準基底の間の全単射を導くことの証明. (Section III.1)
(3) (2) で構成した量子 BFZ 捻り変換が, Geiß-Leclerc-Schröer による量子座標環の量子団代数構造の加法的圏化の言葉で記述されることの証明. 特に, 量子 BFZ 捻り変換が量子団単項式と整合的であることの証明. (Section III.2)
(4) 量子 BFZ 捻り変換を用いた Chamber Ansatz 型公式の導出. (Section III.3)

背景. $\mathfrak{g}$ を有限次元複素半単純 Lie 環 (用語の簡明さのためにここでは $\mathfrak{g}$ をこのように仮定するが本論文の結果は特に言及のない場合全て一般の対称化可能 Kac-Moody 型で得られる), $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ をその三角分解, W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とする. G を $\mathfrak{g}$ を Lie 環に持つ連結単連結複素代数群とし, H, $N_\pm$ をそれぞれ $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_\pm$ を Lie 環に持つ G の閉部分群とする. $B_\pm := N_\pm H$ とし, これらは Borel 部分群と呼ばれる. 各 $w \in W$ に対して, 冪単部分群 $N_-(w)$ は $N_-(w) := N_- \cap w N_+ w^{-1}$ で定義される代数群であり, 冪単胞体 N_-^w とは $N_-^w := B_+ w B_+ \cap N_-$ で定義される代数多様体である. $N_-(w)$ や N_-^w の関数環 $\mathbb{C}[N_-(w)]$, $\mathbb{C}[N_-^w]$ の量子類似が本論文で扱う主たる対象である.

まず量子でない設定で, 捻り写像として知られている写像について説明する. 群 G において Gauss 分解できる元の集合を $G_0 := N_- H N_+$ とし, 各 $g \in G_0$ の分解を $g = [g]_-[g]_0[g]_+$ と書く.

定義 ([1], [3], [4]). 各 $w \in W$ に対し, 以下で与えられる双正則同型 $\eta_w \colon N_-^w \to N_-^w$ が存在する:

$$y \mapsto [y^T \dot{w}]_-,$$

ここで, y^T は G における y の転置であり, $\dot{w}$ は w の $N_G(H)$ への任意の持ち上げとする. これを, BFZ 捻り変換と呼ぶ. さらに, 以下で与えられる双正則同型 $\tau_w \colon N_-(w^{-1}) \to N_-(w)$ が存在する:

$$y \mapsto \overline{w}(y^\vee)^{-1}\overline{w}^{-1},$$

ここで, $\vee$ は G の正と負の Chevalley 生成元を入れ替える群対合, $\overline{w}$ は w の $N_G(H)$ へのある特別な持ち上げとする．これを, ([4] の意味での y 座標に関する)FZ 捻り写像と呼ぶ.

これらの捻り写像はそれぞれ$\mathbb{C}$-代数同型 $\eta_w^*\colon \mathbb{C}[N_-^w] \to \mathbb{C}[N_-^w]$, $\tau_w^*\colon \mathbb{C}[N_-(w)] \to \mathbb{C}[N_-(w^{-1})]$ を誘導していることに注意する．本論文で扱うのはこれらの同型の量子類似である．

ここで BFZ 捻り変換導入の動機となった冪単胞体の分解問題 (Factorization problem) について説明する．実際にこの量子類似の解決は本論文の主結果の一つである (主結果 4)．なお, FZ 捻り写像も同様の問題を動機として導入されている．

$\{\alpha_i \text{ (resp. } h_i) \mid i \in I\}$ を単純ルート (resp. 単純余ルート) の集合とし, $\{s_i \mid i \in I\} \subset W$ を単純鏡映の集合, $\{\varpi_i \mid i \in I\}$ を基本整ウェイト, すなわち, $\langle h_i, \varpi_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j \in I$ とする．ここで, f_i をルート $-\alpha_i$ に対応する $\mathfrak{g}$ のルートベクトルとし, $y_i\colon \mathbb{C} \to N_-, t \mapsto \exp(tf_i)$ を対応する 1-パラメータ部分群とする．Weyl 群の元 $w \in W$ とその最短表示 $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_\ell)$ を固定する．次の写像 $y_{\boldsymbol{i}}\colon (\mathbb{C}^\times)^\ell \to N_-^w$ を考える:

$$(t_1, \ldots, t_\ell) \mapsto \exp(t_1 f_{i_1}) \cdots \exp(t_\ell f_{i_\ell}).$$

このとき, $y_{\boldsymbol{i}}$ は双有理写像になることが知られている．ここで "逆双有理写像 $y_{\boldsymbol{i}}^{-1}$ を具体的に記述せよ" という問が分解問題である．この問題は座標環を用いて以下のようにも定式化される: 写像 $y_{\boldsymbol{i}}$ は代数の埋め込み

$$y_{\boldsymbol{i}}^*\colon \mathbb{C}[N_-^w] \to \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_\ell^{\pm 1}]$$

を与える．このとき分解問題は, "各 t_k $(k = 1, \ldots, \ell)$ を N_-^w 上の有理関数として具体的に記述せよ" という問に他ならない．Berenstein, Fomin, Zelevinsky はこの問を一般化冪単小行列式, BFZ 捻り変換を用いて以下のように与えた．ここで一般化冪単小行列式とは, 支配的整ウェイト P_+ の元 λ の Weyl 群軌道上の元 2 つ $w\lambda, w'\lambda$ から定まる冪単部分群上のある関数 $D_{w\lambda, w'\lambda}$ で, A 型かつ λ が基本整ウェイトの場合には, (ϖ_i であればサイズ $i \times i$ の) 小行列式になるようなものである．以下の公式は Chamber Ansatz 公式と呼ばれる．

定理 ([1], [3])**.** 各 $j = 1, \ldots, \ell$ に対し, $w_{\leq j} = s_{i_1} \cdots s_{i_j}$ と書く．このとき, $k = 1, \ldots, \ell$ に対し,

$$t_k = \frac{\prod_{j \in I \setminus \{i_k\}} (y_{\boldsymbol{i}}^* \circ (\eta_w^*)^{-1})(D_{w_{\leq k}\varpi_j, \varpi_j})^{-a_{j,i_k}}}{(y_{\boldsymbol{i}}^* \circ (\eta_w^*)^{-1})(D_{w_{\leq k-1}\varpi_{i_k}, \varpi_{i_k}})(y_{\boldsymbol{i}}^* \circ (\eta_w^*)^{-1})(D_{w_{\leq k}\varpi_{i_k}, \varpi_{i_k}})},$$

ここで, $a_{ij} := \langle h_i, \alpha_j \rangle$, $i, j \in I$ である．

量子群. $\mathbf{U}_q(= \mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))$ を $\mathfrak{g}$ に付随する Drinfeld-神保の量子包絡環とし, $\mathbf{U}_q^-$ をその三角分解に付随した負部分とする．量子群の特徴として良い非退化双線形形式の存在により, $\mathbf{U}_q^-$ はその双対的対象である N_- の関数環の量子類似 $\mathbf{A}_q[N_-]$ と考えることもできる (量子群でない場合は一方は非可換環, 他方は可換環なのでこのようなことは生じない)．Lusztig, 柏原は独立の手法で $\mathbf{U}_q^-$ に標準基底 (= 下側大域基底) と呼ばれる特別な基底を導入した．上記の非退化双線形形式に関するその双対基底を, $\mathbf{A}_q[N_-]$ の双対標準基底と呼ぶ．さらに, $\mathbf{A}_q[N_-]$ の部分代数として $N_-(w)$ の関数環の量子類似 (= 量子冪単部分群)$\mathbf{A}_q[N_-(w)]$ が構成され $\mathbf{A}_q[N_-]$ の商代数を局所化したものとして, N_-^w の関数環の量子類似 (= 量子冪単胞体)$\mathbf{A}_q[N_-^w]$ が構成される．$\mathbf{A}_q[N_-(w)]$ には $\mathbf{A}[N_-]$ の双対標準基底から定まる双対標準基底が存在することが知られており, $\mathbf{A}_q[N_-^w]$ の双対標準基底は本論文で同様に自然な方法で定義される (Definition III.1.35).

主結果 1:量子 FZ 捻り写像と双対標準基底の整合性. FZ 捻り写像の量子類似 $\tau_{w,q}$(= 量子 FZ 捻り写像) は Lenagan-Yakimov [5] により導入されていた．主結果の一つ目はこの写像と双対標準基底の整合性である．

定理 (Theorem II.1.10)**.** *量子 FZ 捻り写像 $\tau_{w,q}$ は $\mathbf{A}_q[N_-(w)]$ の双対標準基底から $\mathbf{A}_q[N_-(w^{-1})]$ の双対標準基底への全単射を導く.*

量子冪単部分群は双対標準基底だけでなく双対 PBW 基底と呼ばれる基底を持つことが知られている．これは冪単部分群の通常の関数環における双対 PBW 基底の類似であり, 特に非負整数の組で添え字づけられる．これを用いて, 双対標準基底の元も非負整数の組で添え字づけられることが知られているが, この添え字付けに関して上の全単射は簡明に記述される．また上の定理の系として双対標準基底と双対 PBW 基底の間の基底の変換に関するある対称性が得られる (Corollary II.1.11).

冪単小行列式の量子類似 (= 冪単量子小行列式) は双対標準基底の元として代表的なものである．冪単量子小行列式に対する量子 FZ 捻り写像については以下のような記述を得た．これは, Fomin-Zelevinsky の補題 [4, Lemma 2.25] の量子類似である．

定理 (Theorem II.2.8)**.** *$w_1, w_2 \in W$ とする．ここで, w_1, w_2 は弱右 Bruhat 順序に関して w 以下であるとする．このとき, $D_{w_2\lambda,w_1\lambda} \in \mathbf{A}_q[N_-(w)]$, $D_{w^{-1}w_1\lambda,w^{-1}w_2\lambda} \in \mathbf{A}_q[N_-(w^{-1})]$ であり,*

$$\tau_{w,q}(D_{w_2\lambda,w_1\lambda}) = D_{w^{-1}w_1\lambda,w^{-1}w_2\lambda}.$$

と表される．

この表示は特に, $\tau_{w,q}$ が "量子 T-系" と呼ばれる $\mathbf{A}_q[N_-(w)]$ における特別な行列式等式の量子類似を $\mathbf{A}_q[N_-(w^{-1})]$ のそれに移すことを直ちに導く (Corollary II.2.14).

主結果 2:量子 BFZ 捻り変換の構成と双対標準基底との整合性. BFZ 捻り変換の量子類似 (= 量子 BFZ 捻り変換) は Berernstein-Rupel [2] によって w が Coxeter 元の 2 乗という特別な場合に限り構成されていた．彼らの手法は量子冪単胞体の "量子団代数構造" を用いるものであったが, 本論文では様々な量子座標環の間の関係を用いて, より直接的な手法で量子 BFZ 捻り変換を一般の量子冪単胞体に対して構成した．以下では各 $\lambda \in P_+$ と対応する最高ウェイト可積分表現の元 $u, u' \in V(\lambda)$ に対して, $[D_{u,u'}] \in \mathbf{A}_q[N_-^w]$ を行列要素の N_-^w への制限の量子類似とし, $u_{w\lambda}$ を定数倍の差を除いて唯一に定まる $V(\lambda)$ のウェイト $w\lambda$ の元 (の適切な正規化) とする．

定理 (Theorem III.1.42)**.** *各 $w \in W$ に対し, 以下で定まる代数自己同型 $\eta_{w,q}\colon \mathbf{A}_q[N_-^w] \to \mathbf{A}_q[N_-^w]$ が一意的に存在する: 各 $\lambda \in P_+$ と対応する最高ウェイト可積分表現のウェイトベクトル $u \in V(\lambda)$(ウェイト μ) に対して,*

$$\eta_{q,w}([D_{u,u_\lambda}]) = q^{-(\lambda,\mu-\lambda)}[D_{u_{w\lambda},u_\lambda}]^{-1}[D_{u_{w\lambda},u}].$$

さらに, $\mathbf{A}_q[N_-^w]$ には自然に Lusztig, 柏原の意味での双対標準基底を定めることができ, $\eta_{w,q}$ は双対標準基底の全単射を導く．

この結果から特に, 双対 $\overline{(-)}$-対合と呼ばれる操作と $\eta_{w,q}$ が可換であることがわかり, この事実は主結果 3 の証明において鍵となる．なお $\eta_{w,q}$ は適切に q を 1 とする操作を考えると実際に BFZ 捻り変換に一致することがで確かめられる．

主結果 3:量子 BFZ 捻り変換と量子団代数構造の整合性–Geiß-Leclerc-Schröer による加法的圏化を介して–. Lusztig は $\mathfrak{g}$ が対称型の場合に, $\mathfrak{g}$ に付随する前射影的多元環 Π の各有限次元冪零表現 X に対してある $\mathbb{C}[N_-]$ の元 φ_X を与え, 特に準双対標準基底と呼ばれる対象を構成した．Geiß-Leclerc-Schröer は Weyl 群の各元に付随して定まる Π の表現の圏の部分圏 $\mathcal{C}_w$ を用いて座標環 $\mathbb{C}[N_-(w)]$ の "団代数構造" を定め, 特に $\{\varphi_X \mid X \in \mathcal{C}_w\}$ らが $\mathbb{C}[N_-(w)]$ を張ることを示した．Geiß-Leclerc-Schröer はさらに BFZ 捻り変換 $\eta_w^*\colon \mathbb{C}[N_-^w] \to \mathbb{C}[N_-^w]$ の以下のような記述を得ている:

定理 ([6])**.** *各 $X \in \mathcal{C}_w$ に対し,*

$$\eta_w^*(\varphi_X) = \frac{\varphi_{\Omega_w^{-1}(X)}}{\varphi_{I(X)}}.$$

ここで, $I(X)$ は X の $\mathcal{C}_w$ における入射包絡, $\Omega_w^{-1}(X)$ は $X \to I(X)$ の余核とする．すなわち以下の Π-加群の完全系列が存在する．

$$0 \to X \to I(X) \to \Omega_w^{-1}(X) \to 0.$$

Geiß-Leclerc-Schröer はさらに $\mathcal{C}_w$ を用いて, 量子冪単部分群 $\mathbf{A}_q[N_-(w)]$ の "量子団代数構造" も導出した．特にそこにおいて重要な元である量子団単項式は "到達可能"$\mathcal{C}_w$-団傾加群 T によって Y_T と書かれる．本論文では Geiß-Leclerc-Schröer の上記の定理と主結果 2 を合わせ, この q-類似を得た．すなわち,

定理 (Theorem III.2.20)**.** 各到達可能 $\mathcal{C}_w$-団傾加群 T に対し,

$$\eta_{w,q}(Y_T) \simeq Y_{I(T)}^{-1} Y_{\Omega_w^{-1}(X)}$$

ここで, $\simeq$ は q べきの差を除いた一致を意味する．

この結果は特に, 本論文で構成した量子 BFZ 捻り変換 $\eta_{w,q}$ が量子団単項式を保つものであることを意味する．

主結果 4:Chamber Ansatz 型公式の量子類似の導出. 再び $\mathfrak{g}$ を一般の複素半単純 Lie 環 (対称化可能 Kac-Moody Lie 環) として, Chamber Ansatz 型公式の量子類似を述べる．背景で述べた記号を踏襲する．写像 $y_{\boldsymbol{i}}^*\colon \mathbb{C}[N_-^w] \to \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_\ell^{\pm}]$ の量子類似としては Feigin 写像として知られている単射代数準同型 $\Phi_{\boldsymbol{i}}\colon \mathbf{A}_q[N_-^w] \to \mathcal{L}_{\boldsymbol{i}}$ が存在する．ここで, $\mathcal{L}_{\boldsymbol{i}}$ は ℓ 変数 $t_1, \cdots t_\ell$ の Laurent 多項式環の非可換類似 (量子トーラス) である．本論文で構成した量子 BFZ 捻り変換 $\eta_{w,q}$ はこの設定と整合的な量子類似であることが以下のように確かめられる．

定理 (Theorem III 3.6, Corollary III.3.9)**.** 各 $k = 1, \ldots, \ell$ に対し,

$$t_k \simeq (D'^{(\boldsymbol{i})}_{w_{\leq k-1}\varpi_{i_k}, \varpi_{i_k}})^{-1} (D'^{(\boldsymbol{i})}_{w_{\leq k}\varpi_{i_k}, \varpi_{i_k}})^{-1} \prod_{j \in I \setminus \{i_k\}} (D'^{(\boldsymbol{i})}_{w_{\leq k}\varpi_j, \varpi_j})^{-a_{j,i_k}},$$

ここで, $D'^{(\boldsymbol{i})}_{w_{\leq k}\varpi_{i_k}, \varpi_{i_k}} := (\Phi_{\boldsymbol{i}} \circ \eta_{w,q}^{-1})([D_{w_{\leq k}\varpi_{i_k}, \varpi_{i_k}}])$ である．なお, 右辺は q 冪の差を除くとただ一つに定まる．

これは Berenstein-Rupel の結果 [2, Corollary 1.2] の一般化である．このことから本論文で構成した量子 BFZ 捻り変換が, Berenstein-Rupel の予想 [2, Conjecture 2.12 (c)] に対応するものであることも確かめられ, このとき主結果 2 は [2, Conjecture 2.17 (a)] で予想された性質に対応する．

References

[1] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky: Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices. Adv. Math. **122**, no. 1, 49–149 (1996).

[2] A. Berenstein and D. Rupel: Quantum cluster characters of Hall algebras. Sel. Math. New Ser. **21**, no. 4, 1121–1176 (2015).

[3] A. Berenstein and A. Zelevinsky: Total positivity in Schubert varieties. Comment. Math. Helv. **72**, no. 1, 128–166 (1997).

[4] S. Fomin and A. Zelevinsky: Double Bruhat cells and total positivity, J. Amer. Math. Soc. **12**, no. 2, 335–380 (1999).

[5] T. Lenagan and M. Yakimov: Prime factors of quantum Schubert cell algebras and clusters for quantum Richardson varieties. J. reine angew. Math. ahead of print.

[6] C. Geiss, B. Leclerc, and J. Schröer: Generic bases for cluster algebras and the Chamber ansatz. J. Amer. Math. Soc. **25**, no. 1, 21–76 (2012).