On simultaneous approximation to a pair of powers of a real number by rational numbers

その他のタイトル	実数の冪の対の有理数による同時近似について
学位授与年月日	2017-03-23
URL	http://doi.org/10.15083/00076085

論文内容の要旨

論文題目

On simultaneous approximation to a pair of powers of a real number by rational numbers
（実数の冪の対の有理数による同時近似について）

氏名　ガンツォージ バタザヤ

この博士論文では, いくつかの実数の組の有理数による一様同時近似問題について研究した. それは実数の代数的整数による近似問題に関連しており，Davenport-Schmidt[1] により研究が始められたものである．正の整数 n および, ベクトル $\Xi = (\xi_0, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ で $\xi_0 \neq 0$ を満たすものを固定する. 実数 λ が Ξ の有理数による一様近似指数であるとは, ある定数 $c > 0$ が存在して，任意の実数 $X > 1$ に対し連立不等式

$$\max_{0 \le i \le n}(|x_i|) \le X, \quad \max_{0 \le i \le n}(|x_0\xi_i - x_i\xi_0|) \le cX^{-\lambda}$$

が非自明な解 $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ をもつことである. $\lambda(\Xi)$ でこのような指数 λ の上限を表す. まずこれまでに知られている結果を復習する. 整数 $1 \le l < k$ および, ベクトル $\Xi = (1, \xi^l, \xi^k) \in \mathbb{R}^3$ で, $1, \xi^l, \xi^k$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立となものが与えられたとする. Davenport-Schmidt は [1] において次の定理を得た [Theorem 1a, 1].

定理 1 (Davenport-Schmidt 1969)**.** $(l, k) = (1, 2)$ のとき, $\lambda(\Xi) \le (\sqrt{5} - 1)/2 \cong 0.618$ である.

$k = 2$ の場合, Roy はこの不等式が最良であることを示した [4]．つまり，彼は ξ を動かしたとき, $\lambda(\Xi)$ の上限が $(\sqrt{5} - 1)/2 \cong 0.618$ に等しいことを示した. Lozier-Roy は $(l, k) = (1, 3)$ の場合に同様の問題を研究し, 以下の定理を得た [2].

定理 2 (Lozier-Roy 2012)**.** $(l, k) = (1, 3)$ のとき, $\lambda(\Xi) \le 2(9 + \sqrt{11})/35 \cong 0.7038$ である.

Lozier-Roy は $(l, k) = (1, 3)$ のとき，最良の上界は $(1 + 3\sqrt{5})/11 \cong 0.7007$ であると予想しているが，これは未解決である. 私は前論文 [3] において, 一般の (l, k) に対する同様の問題を研究し, 以下の定理を証明した.

定理 3. (1)　$\lambda(\Xi) \le \frac{\sqrt{(k-1)(k+3)} - (k-1)}{2}$ である.
(2)　k が奇数のとき, $\lambda(\Xi) \le \frac{(k-1)(k+2)}{k^2+2k-1}$ である.

k が奇数のとき, 不等式 (2) は (1) よりも精密である. しかしながら, $(l, k) = (1, 3)$ の場合と同様に, 定理 3 は最良の上界ではないであろうと思われる．この博士論文の目標は, いくつかの場合に定理 3 の上界を改善することである.

まず私は次の定理を証明した.

定理 4. $k \geq 3$ のとき, $\lambda(\Xi) \leq (k^2-1)/(k^2+k-1)$ である.

定理 4 は, 定理 3 (1) の上界を改善している. しかし, $k \geq 3$ なる奇数に対しては, 定理 3 (2) の方が良い上界を与えている. この博士論文における主定理では，$k \in \{5,7,9\}$ の場合に, 定理 3 (2) における上界を改善した. 定数 μ_5, μ_7, μ_9 を次で定義する.

- μ_5 は $31t^3 + 120t^2 - 144t + 20 \in \mathbb{Q}[t]$ の最大の根.
- μ_7 は $278t^3 + 171t^2 - 432t + 63 \in \mathbb{Q}[t]$ の最大の根.
- μ_9 は $983t^3 + 8t^2 - 960t + 144 \in \mathbb{Q}[t]$ の最大の根.

この記号を用いると博士論文における主定理は次のように述べられる.

定理 5. (1) $k=5$ のとき, $\lambda(\Xi) \leq \mu_5 \cong 0.822586$ である.
(2) $k=7$ のとき, $\lambda(\Xi) \leq \mu_7 \cong 0.870696$ である.
(3) $k=9$ のとき, $\lambda(\Xi) \leq \mu_9 \cong 0.897852$ である.

定理 5 は, $k \in \{5,7,9\}$ の場合に, 定理 3 (2) の上界を改善している.

定理 5 の証明は, Lozier-Roy [2] の手法をある意味で一般化することで行った. Lozier-Roy は, 定理 2 を, 彼らによって構成されたある多項式 $D^{(2)}, D^{(3)}, D^{(6)}$ の漸近挙動，非消滅性および可除性を用いて示した. 私は博士論文において, 彼らの手法を一般化し, Lozier-Roy よりも複雑な多項式 D で, 期待すべき漸近挙動，非消滅性および可除性を持つものを構成した. 以下により詳しい説明を行う. $k \in \{5,7,9\}$ とし, $\mathbf{x} := (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$\|\mathbf{x}\| := \max(|x_0|, |x_1|, |x_2|), \quad L(\mathbf{x}) := \max(|x_1 - x_0\xi^l|, |x_2 - x_0\xi^k|)$$

と定義する. 実数 $\lambda, c > 0$ で $\lambda > \mu_k$ を満たすものを固定する. 証明は背理法で行う. すなわち，任意の実数 $X > 1$ に対し, 不等式

$$\|\mathbf{x}\| \leq X, \quad L(\mathbf{x}) \leq cX^{-\lambda}$$

が非自明な整数解 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ を持つと仮定して矛盾を導く. この仮定の下で, 最小点列と呼ばれる良い整数解の列 $\{\mathbf{x}_i\}_i \subseteq \mathbb{Z}^3$ の存在が知られている. 集合 I を

$$I := \{i \mid i \geq 2,\ \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上線形独立である } \}$$

と定義する. 集合 I は無限集合であることが知られている. 各 $i \in I$ に対して, $n(i)$ を I における i の次の元とする. また整数 p_i および q_i $(i \in I)$ を $\mathbf{x}_{n(i)} = p_i\mathbf{x}_i + q_i\mathbf{x}_{i+1}$ により定義する.

変数 $\mathbf{x} := (x_0, x_1, x_2)$ および $\mathbf{x}^{(a)} := (x_0^{(a)}, x_1^{(a)}, x_2^{(a)})$ $(1 \leq a \leq k)$ に対し $\varphi(\mathbf{x}) := x_0^{k-l}x_2^l - x_1^k$ と定め, さらに $\Phi(\mathbf{x}^{(1)}, ..., \mathbf{x}^{(k)})$ を，$\Phi(\mathbf{x}, ..., \mathbf{x}) = \binom{k}{l}\varphi(\mathbf{x})$ を満たす唯一つの対称多重線形形式とする. 各 $a \in \{0, 1, ..., k\}$ に対し,

$$\Phi_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x}, ..., \mathbf{x}, \underbrace{\mathbf{y}, ..., \mathbf{y}}_{a})$$

と定義する. このとき, 前論文 [3, Section 4] において，$\Phi_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Phi_{k-1-a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $(0 \leq a \leq (k-1)/2)$ のある $\mathbb{Z}$ 係数線形結合として，ある漸近挙動と非消滅性を持つ多項式 $G \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ が構成されていた.

以上の準備の下で, 定理 5 の証明の概略は以下の通りである. 多項式 $Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$ を

$$Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) := G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\Phi_0(\mathbf{x},\mathbf{y})^{k-1}\Phi_k(\mathbf{x},\mathbf{y})^{k-2}$$

と定義する. 多項式 $D(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ を次の形で定義する:

$$D = aG^k + b\Phi_0^{k+1}\Phi_k^{k-1} + cQ + \sum_{\nu=1}^{m} d_\nu F_\nu \Phi_0^{k+1+\beta_\nu-\alpha_\nu}\Phi_k^{k-1-\beta_\nu}.$$

ここに $m \in \mathbb{N}$, F_ν 達は $\mathbb{Z}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ の元で $G|F_\nu$ をみたすもの, また $a,b,c,d_1,...,d_m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, $\alpha_\nu,\beta_\nu \in \mathbb{N}$ である. 多項式 $f \in \mathbb{Z}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ に対して $f(i) := f(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{n(i)})$ とおく. F_ν 達を, $\Phi_a(\mathbf{x},\mathbf{y})$ の形の多項式の適当な積の適当な $\mathbb{Z}$ 係数線形結合で, $i \in I$ を無限大に飛ばしたときに $F_\nu(i)$ 達が良い上からの評価を持つように定める. このような F_ν 達の探索にはコンピューターを用いた. そして,「無限個の $i \in I$ について $D(i) = 0$ をみたすならば, $D(i)$ の主要項は $cQ(i)$ である」ことを示す. 一方で十分大きな $i \in I$ に対して $Q(i) \neq 0$ であることを示せる. 従って, 十分大きな $i \in I$ に対して $D(i) \neq 0$ であると帰結される.

次に $D(i)$ が q_i^k で割り切れるような係数 $a,b,c,d_1,...,d_m$ を, 再びコンピューターを用いて探索する. これと $D(i) \neq 0$ であることを組み合わせると, $i \in I$ を無限大に飛ばしたとき $|q_i|^k \ll |D(i)|$ であることがわかる. 一方で, $D(i)$ の主要項は $aG(i)^k + cQ(i)$ であり, $G(i)^k$ および $Q(i)$ は $i \in I$ を無限大に飛ばしたとき, それぞれオーダー $o(|q_i|^k)$ となることが示される. これは不等式 $|q_i|^k \ll |D(i)|$ に矛盾し定理 5 の証明が終わる. 一般の k に対して通用する多項式 D のより本質的な構成法を見つけることが今後の興味深い研究課題である.

参考文献

[1] H. Davenport and W. M. Schmidt, Approximation to real numbers by algebraic integers, Acta. Arith. **15** (1969), 393–416.

[2] S. Lozier and D. Roy, Simultaneous approximation to a real number and its cube by rational numbers, Acta Arith. **156** (2012), 39–73.

[3] G. Batzaya, On simultaneous approximation to powers of a real number by rational numbers, J. Number Theory, **147**(2015) 141–155.

[4] D. Roy, Approximation to real numbers by cubic algebraic integers I, Proc. London. Math. Soc. **88** (2004), 42–62.