On simultaneous approximation to a pair of powers of a real number by rational numbers

その他のタイトル	実数の冪の対の有理数による同時近似について
学位授与年月日	2017-03-23
URL	http://doi.org/10.15083/00076085

論文審査の結果の要旨

氏名　ガンツォージ　バタザヤ

いくつかの実数の組を，同じ分母を持つ有理数の組によりいかによく一様同時に近似できるかを問う一様同時近似問題はディオファントス近似論における重要な主題の一つである．正整数 n と実数の組 $\Xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ で $\xi_0 \neq 0$ であるものを固定したとき，実数 λ が Ξ の有理数による一様近似指数であるとは，ある定数 $c > 0$ が存在し，任意の $X > 1$ に対して変数 $\mathbf{x} := (x_0, \ldots, x_n)$ に関する連立方程式

$$\max_{0 \le i \le n} |x_i| \le X, \quad \max_{1 \le i \le n} |x_i \xi_0 - x_0 \xi_i| \le cX^{-\lambda}$$

が非自明な整数解を持つことである．一様同時近似問題とはそのような指数 λ の上限 $\lambda(\Xi)$ を評価する問題である．

Ξ がある実数の冪たち $(1, \xi, \ldots, \xi^n)$ で $1, \xi, \ldots, \xi^n$ が有理数体上線型独立なとき，この一様同時近似問題は実数の代数的整数による近似問題に関連しており，Davenport-Schmidt の 1969 年の論文において研究が始められた．Laurent, Roy による改良を経て現在知られている評価は，$n = 2$ のとき $\lambda(\Xi) \le (\sqrt{5} - 1)/2$, $n = 3$ のとき $\lambda(\Xi) \le$ 約 0.4245，$n \ge 4$ のとき $\lambda(\Xi) \le \lceil n/2 \rceil^{-1}$ である．$n = 2$ のときの上記の評価は最良である (Roy) が，それ以外の場合は最良の評価は知られていない．

Lozier-Roy は 2012 年に $\Xi = (1, \xi, \xi^3)$ で $1, \xi, \xi^3$ が有理数体上線型独立な場合の一様同時近似問題の研究を行い，$\lambda(\Xi) \le 2(9 + \sqrt{11})/35 \cong 0.7038$ という結果を得た．この場合の最良の評価も未解決である．

Lozier-Roy の問題の一般化として，ガンツォージ バタザヤ氏は $\Xi = (1, \xi^l, \xi^k)$ で $1, \xi^l, \xi^k$ が有理数体上線型独立な場合 (ここで $1 \le l < k$ は整数) の一様同時近似問題の研究を始め，修士論文 (2015 年に出版済) において，任意の $k \ge 3$ に対して成り立つ評価として $\lambda(\Xi) \le \frac{\sqrt{(k-1)(k+3)} - (k-1)}{2}$ を得た．また，k が奇数のとき成り立つより良い評価として $\lambda(\Xi) \le \frac{(k-1)(k+2)}{k^2+2k-1}$ を得た．

ガンツォージ バタザヤ氏の博士論文の主題はこの以前の評価の改良である．まず，任意の $k \ge 3$ に対して成り立つ評価として $\lambda(\Xi) \le \frac{k^2-1}{k^2+k-1}$ という評価を得た．これは以前の一つめの結果を改良するものである．また，$k = 5, 7, 9$ のときに，μ_k を

$$\begin{aligned}
\mu_5 &:= 31t^3 + 120t^2 - 144t + 20 \text{ の最大の根}, \\
\mu_7 &:= 278t^3 + 171t^2 - 432t + 63 \text{ の最大の根}, \\
\mu_5 &:= 983t^3 + 8t^2 - 960t + 144 \text{ の最大の根}
\end{aligned}$$

とおいたときに $\lambda(\Xi) \le \mu_k$ という評価を得た．これは以前の二つめの結果を $k = 5, 7, 9$ の場合に改良するものである．

ガンツォージ バタザヤ氏によるこれらの結果の証明は Lozier-Roy の証明法の極めて精緻かつ複雑な一般化である．ここでは二つめの結果の証明の概略を述べる．証明の基本方針は背理法による，つまり $\lambda > \mu_k$ と仮定して，任意の $X > 1$ に対して変数 $\mathbf{x} := (x_0, x_1, x_2)$ に関する連立方程式

$$\max_{0\le i\le 2} |x_i| \le X, \quad \max(|x_1 - x_0\xi^l|, |x_2 - x_0\xi^k|) \le cX^{-\lambda}$$

が非自明な整数解を持つと仮定して矛盾を導く．この仮定の下で，最小点列と呼ばれる最良の解の列 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,2,\dots}$ の存在が言え，$\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}$ が $\mathbb{Q}$ 上線型独立となるような添字 i の集合 I が無限集合となることが知られている．$i \in I$ に対して I における i の次の元を $n(i)$ とする．$\varphi(\mathbf{x}) = x_0^{k-l}x_2^l - x_1^k$ とし，$3k$ 変数多項式 $\Phi(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)})$ を $\Phi(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) = \binom{k}{l}\varphi(\mathbf{x})$ を満たす唯一の対称多重線型形式とする．そして $0 \le a \le k$ に対して

$$\Phi_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \underbrace{\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}}_{a})$$

とおき，$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を $\Phi_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Phi_{k-1-a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,(0 \le a \le (k-1)/2)$ の適切な $\mathbb{Z}$ 係数線型結合として定義する．更に多項式 $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{k-1}\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{k-2}$$

と定め，$D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を次の形で定義する．

$$D = aG^k + b\Phi_0^{k+1}\Phi_k^{k-1} + cQ + \sum_{\nu=1}^{m} d_\nu F_\nu \Phi_0^{k+1+\beta_\nu-\alpha_\nu}\Phi_k^{k-1-\beta_\nu}.$$

但し $m \in \mathbb{N}, a, b, c, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{Z}_{\ne 0}, \alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{N}$ で F_ν は $G|F_\nu$ を満たすある多項式である．この係数 $a, b, c, d_1, \dots, d_m$，多項式 F_ν たちをコンピュータを用いてうまくとると，$D(i) := D(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{n(i)}) \ne 0\,(i \in I, \gg 0)$ となることが言え，また $D(i)$ の増大度の上からの評価が得られる．一方，$D(i)$ のある種の加除性も示され，それにより $D(i)$ の増大度の下からの評価が得られ，矛盾を得て証明が終わる．

以上で説明したガンツォージ バタザヤ氏の証明は極めて精緻なもので，その独創性は高く評価される．また，得られた結果は一様同時近似の難しい問題に対する従来の結果を改良する，意義あるものである．よって，論文提出者　ガンツォージ バタザヤ　は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．