A cohomological study of the existence problem of compact Clifford-Klein forms

その他のタイトル	コンパクトClifford-Klein形の存在問題のコホモロジー的研究
学位授与年月日	2017-03-23
URL	http://doi.org/10.15083/00076099

論文の内容の要旨

論文題目 : A cohomological study of the existence problem of compact Clifford–Klein forms
(コンパクト Clifford–Klein 形の存在問題のコホモロジー的研究)

氏　　名 : 森田 陽介

本論文では, 等質空間がコンパクト Clifford–Klein 形を持つための新しい必要条件を, Lie 環の相対コホモロジーと de Rham コホモロジーを比較する手法により与えた. 等質空間 G/H の Clifford–Klein 形とは, G/H を G の離散部分群 Γ で割った商空間 $\Gamma\backslash G/H$ であって, 射影 $G/H \to \Gamma\backslash G/H$ が主 Γ-束 (平坦束) になるもののことである. このとき Γ を G/H の不連続群と呼ぶ. 射影が主 Γ-束になるという条件は, Γ の G/H への作用が固有 (固有不連続) かつ自由なことと同値である. Clifford–Klein 形には G/H を局所的なモデルとする多様体の構造が自然に定まる. ただし等質空間 G/H を局所的なモデルとする多様体とは, G/H の開集合を G の元の左作用で貼り合わせることで得られる空間のことをいう.

H がコンパクト部分群の場合, あるいはほぼ同値であるが G/H 上の G-作用が効果的で, ある Riemann 計量を保つ場合, 任意の G の離散部分群 Γ が G/H に固有に作用し, 商 $\Gamma\backslash G/H$ は必ず V-多様体 (orbifold) になる. さらに G が線型 Lie 群で Γ が有限生成ならば Selberg の補題より, Γ の有限指数の部分群で G/H への作用が自由なものが常に存在する. 従ってこのとき, G/H の不連続群の研究は G の離散群の研究とほぼ同値である. しかし H が非コンパクトな場合, G の離散部分群が G/H に固有に作用するとは限らず, G/H の不連続群論は本質的に難しくなる. 1980 年代後半に, H が非コンパクトな場合での Clifford–Klein 形の幾何学が小林俊行によって初めて本格的に研究され始めた. 特に以下の問題は小林の研究を嚆矢として, 小野薫, Y. Benoist, F. Labourie, G. Margulis, R. J. Zimmer などの数学者によって注目を集めてきた:

問題 1. 与えられた等質空間 G/H がコンパクト Clifford–Klein 形を持つか否かを判定せよ. あるいはより一般に, G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体が存在するか否かを判定せよ.

注意 2. G/H が簡約型等質空間のときには, G/H を局所的なモデルとするコンパクトな多様体は Clifford–Klein 形に限ると予想されている.

問題 1 はこれまでに, 様々な分野の手法を用いて研究されてきた (小林 [7], [8], [9], 小林–吉野 [11], Labourie [12] などの優れた概説記事がある). 最も重要な場合である半単純対称空間の場合には, 大きく分けて 2 通りの手法が適用可能である:

(I) Cartan 射影を用いた作用の固有性の判定法を用いる手法 (小林 [4], [6], Benoist [1])

(II) Lie 環の相対コホモロジーと de Rham コホモロジーを比較する手法 (小林–小野 [10], [4],

Benoist–Labourie [2])

しかし半単純対称空間の場合に限っても, 問題 1 に対する完全な答えは未だ得られていない. 例えば $\mathrm{SO}_0(4,3)/\mathrm{SO}_0(4,2)$ がコンパクトな Clifford–Klein 形を持つかどうか (または, $\mathrm{SO}_0(4,3)/\mathrm{SO}_0(4,2)$ を局所的なモデルとするコンパクト多様体が存在するかどうか) は未解決問題である. なお, コサイクル超剛性定理や Ratner の定理などの力学系の手法や, ユニタリ表現の行列要素の漸近挙動の解析によっても, 問題 1 に関する部分的な結果が得られているが, 半単純対称空間の場合にはこれらの手法は適用できない.

本論文では手法 (II) を用いて, 問題 1 をいくつかの半単純対称空間 (および, それ以外の種類の等質空間) に対して解決した. この手法の基礎となるのは, M が等質空間 G/H を局所的なモデルとする多様体のとき, G-不変な微分形式の貼り合わせによって自然な写像

$$\eta\colon (\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \simeq \Omega(G/H)^G \to \Omega(M)$$

が定まり, そこからコホモロジーの間の準同型

$$\eta\colon H^\bullet(\mathfrak{g},\mathfrak{h};\mathbb{R}) \to H^\bullet(M;\mathbb{R})$$

が誘導される, という単純な観察である (ここでは簡単のため H が連結であることを仮定した). Lie 環の相対コホモロジー $H^\bullet(\mathfrak{g},\mathfrak{h};\mathbb{R})$ はモデルとなる等質空間 G/H のみから決まり, M の大域的なトポロジーには依存しない. 一方 de Rham コホモロジー $H^\bullet(M;\mathbb{R})$ は大域的なトポロジーのみを反映し, 局所的な幾何構造には依存しない. 両者の振る舞いのズレを準同型 η を通して比べることで, M のトポロジーに関する情報が得られる. この写像 η を問題 1 の研究に初めて用いたのは小林–小野 [10], [4] である. その後, Benoist–Labourie [2] によっても研究された.

本論文は全 5 章からなり, そのうち第 1 章は概要, 第 2 章から第 5 章までが本論である. 第 2 章の前半では, 小林–小野による結果 [10, Cor. 5], [4, Prop. 4.10] と Benoist–Labourie による結果 [2, Th. 1] を同時に一般化する形で, 次の定理を証明した:

定理 3 (Theorem 2.1.2)**.** G を Lie 群, H を G の閉部分群とする. H の連結成分は有限個であるとする. $N=\dim(G/H)$ とおく.

(1) $(\Lambda^N(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \neq 0$ かつ $H^N(\mathfrak{g},\mathfrak{h};\mathbb{R})=0$ ならば, G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体は存在しない.

(2) K_H を H の極大コンパクト部分群とする. 包含 $i\colon (\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \hookrightarrow (\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}_H)^*)^{\mathfrak{k}_H}$ が Lie 環の相対コホモロジーに誘導する準同型 $i\colon H^N(\mathfrak{g},\mathfrak{h};\mathbb{R}) \to H^N(\mathfrak{g},\mathfrak{k}_H;\mathbb{R})$ が単射でないとき, G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体は存在しない.

第 2 章の後半から第 4 章まででは, 定理 3 が適用可能な等質空間の様々な例を与えた. まず第 2 章の後半では, 等質空間 G/H が簡約型でない場合を扱った.

例 4. G を可解な実線型代数群とし, $F\in\mathfrak{g}^*$ とする. G の余随伴軌道 $G/\operatorname{Stab}(F)$ がコンパクト多様体の局所的なモデルになるのは, $G/\operatorname{Stab}(F)$ が 0 次元のときに限る.

これまで G が非簡約な Lie 群の場合には, あまり問題 1 に関する結果が知られていなかったが, 例 4 が示すように定理 3 は非簡約な状況でも有用である.

第 3 章・第 4 章では, G/H が簡約型等質空間の場合を論じた. まず定理 3 (1) は簡約型等質空間に対しては適用できないことを注意しておく. 第 3 章では G/H が簡約型等質空間の場合に, 定理 3 (2) の仮定が成り立つための簡単な必要十分条件を与えた:

定理 5 (Theorem 3.1.3)**.** G/H を簡約型等質空間, θ を $\theta(H) = H$ なる G の Cartan 対合とする. $P_{\mathfrak{g}^*}$, $P_{\mathfrak{h}^*}$ をそれぞれ Hopf 代数 $(\Lambda\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, $(\Lambda\mathfrak{h}^*)^{\mathfrak{h}}$ の原始元全体のなす線型部分空間とする. このとき, 定理 3 (2) の準同型 $i : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R})$ が単射でないことは, 制限 $(\Lambda\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \to (\Lambda\mathfrak{h}^*)^{\mathfrak{h}}$ が誘導する線型写像 $\mathrm{rest} : (P_{\mathfrak{g}^*})^{-\theta} \to (P_{\mathfrak{h}^*})^{-\theta}$ が全射でないことに同値である. ただし θ に関する (-1)-固有空間のことを $(\cdot)^{-\theta}$ と書いた.

定理 5 の証明には, Weil 代数の転入写像から定まる pure Sullivan 代数 (Koszul 複体) のコホモロジー $H^\bullet(\Lambda P_{\mathfrak{g}^*} \otimes (S\widetilde{\mathfrak{h}^*})^{\mathfrak{h}}, -\delta_{\widetilde{\tau_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}}})$ が Lie 環の相対コホモロジー $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ に同型である, という H. Cartan, C. Chevalley, J.-L. Koszul, A. Weil らの結果 [3] を用いる.

定理 3 (2) と定理 5 の応用として, 小林俊行が 1989 年に予想した, 以下の結果の証明が得られた:

予想 6 ([5, 予想 6.4])**.** G/H を簡約型等質空間とし, G, H の極大コンパクト群をそれぞれ $K = G^\theta$, $K_H = H^\theta$ とする. もし $\operatorname{rank} G - \operatorname{rank} K < \operatorname{rank} H - \operatorname{rank} K_H$ ならば, G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

実際には, G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体が存在しないことまで分かる.

第 4 章では定理 5 を用いて, 定理 3 (2) の仮定を満たす半単純対称空間を分類した.

最後に第 5 章では, 不連続群のコホモロジー次元の上界評価 [4, Cor. 5.5] を定理 3 (2) の証明の議論と組み合わせることにより, 以下の定理を証明した:

定理 7 (Theorem 5.1.1)**.** G を線型連結 Lie 群, H を G の連結閉部分群とする. $(\Lambda^N(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H \neq \{0\}$ $(N = \dim G - \dim H)$ を仮定する. K_H を H の極大コンパクト部分群, T_H を K_H の極大トーラスとする. $\bigoplus_{C,\,p} \mathrm{im}(i : H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}; \mathbb{R}) \to H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R}))$ によって生成される $H^\bullet(\mathfrak{g}, T_H; \mathbb{R})$ のイデアルを $I^\bullet$ とおく (ただし直和は T_H を含む G の連結コンパクト部分群 C と $p > N + \dim K_H - \dim C$ なる $p \in \mathbb{N}$ を走るものとする). このときもし $i : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R})$ の像が I^N に含まれるならば, G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

なお今のところ, 定理 7 と同じ仮定の下で, 等質空間 G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体の非存在まで証明できるかどうかは分かっていない.

さらに前述の Cartan–Chevalley–Koszul–Weil の結果 [3] と, 大島–関口 [17] による半単純対称空間の ε-family を用いて, 定理 7 が適用可能な G/H の例を系統的に見つける方法を与えた (Propositions 5.4.1, 5.5.3).

例 8. $p, q \geqslant 1$ で q が奇数のとき, 半単純対称空間 $\mathrm{SO}_0(p+1, q)/\mathrm{SO}_0(p, q)$ はコンパクト Clifford–

Klein 形を持たない. 換言すれば, 完備で正の定曲率を持つ符号 (p,q) の擬 Riemann 多様体は全て非コンパクトである.

例 9. $p,q \geqslant 1$ のとき, 半単純対称空間 $\mathrm{SL}(p+q,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(p,q)$, $\mathrm{SL}(p+q,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(p,q)$, $\mathrm{SL}(p+q,\mathbb{H})/\mathrm{Sp}(p,q)$ はいずれもコンパクト Clifford–Klein 形を持たない. さらに, p,q が奇数ならば, $\mathrm{SL}(p+q,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(p,q)$ を局所的なモデルとするコンパクト多様体は存在しない.

注意 10. 例 8 は p,q がともに奇数の場合, $(p,q)=(2n,2n+1)$ の場合には既知である. また $p \geqslant q \geqslant 1$ のときにもコンパクト Clifford–Klein 形が存在しないことが知られているが, この結果は本論文の手法では得られない. 例 9 は $p=q$, $p=q+1$ の場合には既知である.

予想 6 の解決, 例 9, 例 8 は, N. Tholozan [18] によっても同時期にアナウンスされている.

参考文献

[1] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)* **144** (1996), 315–347.

[2] Y. Benoist and F. Labourie, Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **76** (1992), 99–109.

[3] H. Cartan, La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. *Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950.* pp. 57–71. Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.

[4] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.

[5] ———, 不定値計量を持つ等質空間と不連続群. 第 36 回幾何学シンポジウム, pp. 104–116, 1989, available at: `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi/texpdf/tk12-kika-sympo89.pdf`

[6] ———, A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type. *Duke Math. J.* **67** (1992), 653–664.

[7] ———, Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds. *Algebraic and analytic methods in representation theory (Sønderborg, 1994)*, Perspectives in Mathematics, vol. 17, Academic Press, San Diego, CA, 1997, 99–165.

[8] ———, 非リーマン等質空間の不連続群論, 数学の最先端 21 世紀への挑戦, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002, 18–73.

[9] ———, 非リーマン等質空間の不連続群について, 数学 **57** (2005), 267–281.

[10] T. Kobayashi and K. Ono, Note on Hirzebruch's proportionality principle. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **37** (1990), 71–87.

[11] T. Kobayashi and T. Yoshino, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces — revisited. *Pure Appl. Math. Q.* **1** (2005), 591–663.

[12] F. Labourie, Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts. *Manifolds and geometry (Pisa, 1993), Sympos. Math., XXXVI*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 267–283.

[13] Y. Morita, A topological necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms. *J. Differential Geom.* **100** (2015), 533–545.

[14] ———, Semisimple symmetric spaces without compact manifolds locally modelled thereon. *Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci.* **90** (2015), 29–33.

[15] ———, Homogeneous spaces of nonreductive type locally modelling no compact manifold. arXiv:1508.04862v1, to appear in *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*

[16] ———, A cohomological obstruction to the existence of Clifford–Klein forms. *Selecta Math. (N.S.),* DOI: 10.1007/s00029-016-0295-1 (online first publication).

[17] T. Oshima and J. Sekiguchi, The restricted root system of a semisimple symmetric pair. *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, pp. 433–497, Adv. Stud. Pure Math., 4, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[18] N. Tholozan, Volume and non-existence of compact Clifford–Klein forms. arXiv:1511.09448v2, preprint.