A cohomological study of the existence problem of compact Clifford-Klein forms

その他のタイトル	コンパクトClifford-Klein形の存在問題のコホモロジー的研究
学位授与年月日	2017-03-23
URL	http://doi.org/10.15083/00076099

論文審査の結果の要旨

氏名　森田 陽介

20 世紀以来のリーマン幾何学は「局所から大域へ」という大きな潮流に乗って発展した．一方，より一般の幾何学，たとえば，相対論のローレンツ時空のように不定符号の計量をもつ幾何学は,「局所から大域へ」の潮流から取り残されていた．1980 年代後半，小林俊行氏は，局所的な均質性が大域的な形をどの程度束縛するか，逆に，どの程度の自由度を許すか，という問題を提起し，リーマン幾何の枠組を超えた設定で
A. 不連続性の判定法，
B. 閉じた局所等質空間の存在問題，
C. 不定符号の計量を持つ高次元既約対称空間における不連続群の変形理論
などの研究で,「局所等質空間の大域理論」を創始し，その基盤づくりを行った．

小林氏が構築した幾何学は，群論的な観点からは，H を非コンパクトな閉部分群に対する等質空間 $X = G/H$ の不連続群の理論と捉えることができる．局所構造はリー群の組 (G, H) で決定され，大域構造は不連続群，すなわち，X に固有不連続に作用する G の離散部分群 Γ が司る．Γ による X の商空間 $X_\Gamma := \Gamma\backslash G/H$ は $X = G/H$ を局所的なモデルとする多様体である．商多様体 X_Γ を X の Clifford–Klein 形と呼ぶ．

(G, H) が簡約リー群の組である場合，X には自然な擬リーマン計量 g が入り，群 G は X に等長に作用する．H が G の極大コンパクト部分群の場合は，この計量 g は正定値となり，X はリーマン多様体となる．この場合は不連続群と離散部分群の差はなく，算術的部分群や双曲多様体など古くから豊かな研究対象となっていた．しかし，部分群 H が非コンパクトである場合 Γ が G の離散部分群であることと，X の不連続群であることとは大きく乖離するため，G/H の不連続群論は本質的に難しくなる．論文提出者，森田陽介氏は，H が非コンパクトの場合に以下の問題に対する必要条件を与えた．

問題 1 (小林俊行)**.** 等質空間 G/H が与えられた時，そのコンパクト Clifford–Klein 形が存在するか？また，G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体が存在するか？

小林氏自身は，不連続性の判定法を確立して問題 1 の肯定的な例を系統的に構成し (1989)，逆に，特性類の比例性原理 (1989, 1990) や不連続性の判定条件とコホモロジー次元による比較定理 (1992) 等により，問題 1 の 2 種類の必要条件を発見した．問題 1 は局所と大域の関係を問う重要なテーマであり，小林氏の先行研究以降も様々なアプローチで研究が行われてきた．例えば，Benoist–Labourie, Zimmer, Mozes, Shalom 等は，力学系，ユニタリ表現論，離散群論などによる，アプローチで問題 1 に（とりわけ，別の必要条件を探す方向で）挑戦した.（ただし，これらの手法が適用できる等質空間は極めて限定的で，小林氏の先行結果よりも強い結果はあまり得られていなかった.）

森田陽介氏の博士論文では小林–小野薫氏の特性類を使った幾何的な障害条件 (1990) や小林氏のコホモロジー次元の比較定理 (1992) を分析して，その幾何的なアイディアを代数的な言葉に翻訳し，適用範囲の広い必要条件を証明した．
その一つとしてランク予想の解決を挙げよう．以下では簡約リー群 $G \supset H$ の極大コンパクト群をそれぞれ K, K_H と表記する．

予想 2 (小林俊行, 1989). $\mathrm{rank}G - \mathrm{rank}K < \mathrm{rank}H - \mathrm{rank}K_H$ ならば，G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない．

定理 3 (森田). 予想 *2* は正しい．

定理3は特性類に関するHirzebruch–Kobayashi–Onoの比例性原理とBenoist–Labourieによる幾何学的な結果を拡張することで証明された．具体的には下記の定理を用いる．以下ではG をリー群，H を G の連結な閉部分群とし，$N = \dim(G/H)$ とおく．

定理 4 (森田，Theorem 2.1.2). (1) $(\Lambda^N(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \neq 0$ かつ $H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) = 0$ ならば，G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体は存在しない．

(2) 自然な準同型 $i\colon H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R})$ が単射でないならば，G/H を局所的なモデルとするコンパクト多様体は存在しない．

また森田氏は，不連続群のコホモロジー次元に関する小林氏の定理(Math. Ann. 1989）と定理 4 (2) の証明の議論と組み合わせることにより, 以下の定理を得た:

定理 5 (森田). T_H を K_H の極大トーラスとする．$\bigoplus_{C,p} \mathrm{Image}(\pi^*\colon H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}; \mathbb{R}) \to H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R}))$ によって生成される $H^\bullet(\mathfrak{g}, T_H; \mathbb{R})$ のイデアルを $I^\bullet$ とおく *(*ただし直和は T_H を含む G の連結コンパクト部分群 C と $p > N + \dim K_H - \dim C$ なる $p \in \mathbb{N}$ に関するものとする*)*. もし $(\Lambda^N(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H \neq \{0\}$ であり，かつ $\pi^*\colon H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_H; \mathbb{R})$ の像が I^N に含まれるならば, G/H はコンパクト *Clifford–Klein* 形を持たない．

定理 5の仮定は複雑で技術的に見えるが，森田氏はこの仮定を検証するための代数的手法の研究を推し進め，多くの新しい具体例を得た．その一例を挙げる．

例 6 (森田). $p, q \geq 1$ のとき, 半単純対称空間 $SL(p+q, \mathbb{R})/SO(p, q)$ にはコンパクト Clifford–Klein 形が存在しない．

これは，$p = q$ (Kobayashi 1992), $p = q + 1$ (Benoist 1996) の場合の拡張である．
さて，小林氏は問題 1 に対して大胆な予想を提起しているが，それを特殊例に適用した以下の予想 7 は，さまざまな手法による部分解決が数学の最高峰のジャーナルを賑わしてきたことで知られる．

予想 7 (小林). $SL(n)/SL(m)$ $(n > m)$ にはコンパクト Clifford–Klein 形が存在しない．

予想 7 は $n > \frac{3}{2}m + C$ (C は定義体に依存する -1 から $3/2$ までの定数) の場合正しい (Kobayashi, 1990, Duke Math. 1992)．その後，Zimmer(J. Amer. Math. Soc. 1994) は $n \geq 2m$ の場合というやや弱い形ではあるが別証明を与え，さらに弱い形の別証明が $m = 2$ のときにShalom (Ann. Math. 2000) によって得られた．なお，Zimmer の手法はその後$n \geq m+3$ まで改良され，一方，Benoist(Ann. Math. 1996) は$n = m+1$ かつ m は偶数の場合も予想 7 が正しいことを証明した．森田氏は次の結果を証明した．

定理 8 (森田). $n = m + 2$ かつ m は偶数のとき予想が正しい．

上記に述べた以外にも森田氏は問題 1 に対するいくつかの注目すべき新しい結果を得た．森田氏の博士論文の主要部は単著論文として国際学術誌である Journal of Differential Geometry, Selecta Mathematica などに掲載が決まっている．

以上のように，当該論文は等質空間の不連続群論に新しい知見を与えたものであり，論文提出者 森田陽介氏は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．