

回転系 Rayleigh-Bénard 対流における Ekman 層の解析

Analysis of Ekman Layer in Rayleigh-Bénard Convection with Rotation

小 山 省 司*
Shoji KOYAMA

1. は じ め に

系の回転が浮力乱流に与える影響を調べている。本研究では、上下の壁で温度を固定し、その不安定な温度分布で駆動する Rayleigh-Bénard 対流 (RBC) をターゲットにして、3次元直接数値シミュレーション (DNS) を行った。特に今回は、回転系で発達する境界層、いわゆる Ekman 層を温度場の影響を考慮した線形解析の範疇で、どの程度補正されるのか局所的な解析を試みた。

密度ゆらぎを伴わない粘性流体を仮定すると系の回転が強い場合、壁から離れて粘性力がほとんど効かない内部領域では、流れ場は圧力勾配とコリオリ力の釣り合いでほとんど決まってしまう。この流れ場を地衡流と呼び、上記の力の釣り合いを地衡流近似という。この場合の地衡流は、速度場が水平非発散で、回転軸方向に依存しないという性質を持つ。これを Taylor-Proudman の定理と呼び、この結果と壁上の粘着条件 (no-slip 条件) を考慮すると非物理解しか得られないことになる。この不整合を解消するのが Ekman 層で、回転系における粘性境界層である。Ekman 層の研究は、Ekman¹⁾ による線形解析がなされており、その他、Gill²⁾ や Pedlosky³⁾ により詳細な記述がされている。その結果、境界層中では Ekman スパイラルと呼ばれる螺旋構造をした速度場を示すことや、Ekman ポンピングと呼ばれる境界層から内部領域へ運動量を輸送する機構が知られている。また線形解析の拡張として、Rossby 数をパラメータにとった摂動展開により、非線形効果を取り組んだ研究も Hart⁴⁻⁶⁾ により報告されている。

上記で解説した例は、熱による密度ゆらぎを伴わない粘性流体を仮定したが、例えば実際の気象境界層では、地球表面の機械的 (つまり摩擦的) 影響および熱的 (温度差の日変化) 影響を直接受ける。このため、後者の熱が境界層

に及ぼす影響も考慮する必要があると思われる。Hide⁷⁾ は Boussinesq 流体を仮定し、境界条件として stress-free 条件を課した線形解析を行っている。その結果、内部領域の力の釣り合い式から水平速度の鉛直シアーが密度ゆらぎの水平勾配に比例するという結果が得られる。これは温度風平衡と呼ばれている。しかしこの結果は、stress-free 条件と矛盾することになる。そこでこの二つの結果に折り合いをつけるのが境界層で、本研究ではこれを温度 Ekman 層と呼ぶ。つまり流体の密度変化を考慮すれば、たとえ stress-free 条件を課して粘性 Ekman 層を除外しても、温度 Ekman 層が存在することを意味している。Hide⁷⁾ の結果によると、速度場の大きさは、境界条件として stress-free 条件の方が no-slip 条件を課した場合と比べて 1 オーダー小さくなるのが分かっている。また Julien *et al.*⁸⁾ は、RBC の DNS の結果を線形解析のそれと比較しているが、温度境界層の厚み λ の与え方に任意性があり正確な結論には至っていない。

そこで本研究は、RBC の DNS を実行し、そのデータから Ekman 層の解析を行った。特に Julien *et al.*⁸⁾ が求めた線形解 (以降 Julien 解と呼ぶ) に対し、具体的に DNS のデータから λ の分布を求めて温度補正を施した速度場と DNS のそれとを比較検討した。

また本報告書の以降の構成は以下の通りになっている。第 2 節では問題の定式化として RBC の DNS の設定とその計算例を解説し、第 3 節では線形解と DNS の結果を示してそれらの考察を行い、そして最後に第 4 節で今回のまとめを行う。

2. 問題の定式化

本研究では、二つの無限水平プレートに挟まれた Boussinesq 流体に対し、上から見て反時計回りをする回転を与え、上下壁の温度を固定して不安定な温度分布により駆動する回転系 Rayleigh-Bénard 対流を想定している。無

*東京大学生産技術研究所 情報・システム部門 (半場研究室)

次元化された基礎方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \Delta u + \frac{1}{Ro} v, \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \Delta v - \frac{1}{Ro} u, \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla w = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \Delta w + \theta, \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{(PrRa)^{1/2}} \Delta \theta, \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \dots\dots\dots (2.5)$$

ここで x と y は水平方向を、そして z は鉛直方向をそれぞれ表す。 \bar{u} は速度ベクトルで、 u と v は水平速度成分、そして w は鉛直速度成分に相当する。 p と θ はそれぞれ圧力と温度で、 ∇ は nabla 演算子、そして Δ は Laplace 演算子である。また無次元パラメータ Pr , Ra , そして Ro はそれぞれ Prandtl 数, Rayleigh 数, そして Rossby 数で

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\kappa \nu}, \quad Ro = \frac{U}{fd} \dots\dots\dots (2.6)$$

となる。ここで現れるシンボル d , U , β , g , ν , κ , そして f はそれぞれ系の代表長さ, 系の代表速度, 体積膨張率, 重力加速度, 動粘性係数, 熱拡散率, そしてコリオリパラメータ (系の回転角速度の 2 倍) である。長さ, 速度, そして温度の規格化因子はそれぞれプレート幅 d , 浮力速度 $U = (\beta g \Delta T d)^{1/2}$, そして上下壁温度差 ΔT である。また Reynolds 数 $Re = Ud/\nu$ と Taylor 数 $Ta = (fd^2/\nu)^2$ は Pr , Ra , そして Ro を通してそれぞれ $Re^2 = Ra/Pr$ と $Ta = Ra/PrRo^2$ という関係がある。

基礎方程式系の時間発展を進行させるため、速度場と温度場には初期条件と境界条件が必要となる。本研究では、初期条件として流体は時刻 $t = 0$ の時に静水圧平衡を保ち静止しているとし、その時の熱伝達は伝導のみで温度場は鉛直方向に線形分布をしている状態を設定して、そこに最大振幅が 0.05 となる乱数値を温度場に重ね合わせ対流を引き起こしている。また境界条件は上下の壁上で速度場には no-slip 条件を課し、温度場は下記の一定値に固定した。

$$\bar{u}(x, y, 0) = 0, \quad \bar{u}(x, y, 1) = 0, \dots\dots\dots (2.7)$$

$$\theta(x, y, 0) = 0.5, \quad \theta(x, y, 1) = -0.5. \dots\dots\dots (2.8)$$

そして水平方向に関しては速度場、温度場とも周期境界条件を課した。

$$\bar{u}(x+6, y+6, z) = \bar{u}(x, y, z), \dots\dots\dots (2.9)$$

$$\theta(x+6, y+6, z) = \theta(x, y, z). \dots\dots\dots (2.10)$$

また今回の計算例は、各パラメータの値をそれぞれ

$Ra = 2.53 \times 10^6$ ($\sim 1481 Ra_c$), $Pr = 1$ ($Re \approx 1590$), そして $Ro = 1$ ($Ta = 2.53 \times 10^6$) に設定している。ここで Ra_c は臨界 Rayleigh 数で、no-slip 条件のとき 1708 である。計算領域は $6 \times 6 \times 1$ で、数値解像度は $256 \times 256 \times 96$ 格子点とし、鉛直方向を両壁近傍で細くなるような不等間隔格子で刻んでいる (最小格子間隔は 0.002)。時間間隔は 0.0005 で、時間進行は 4×10^5 ステップ、つまり $t = 200$ まで実行し、乱流場が殆ど統計平衡に達している $100 \leq t \leq 200$ のデータを解析した。なお、本研究の数値計算スキームは、方程式中の全ての空間微分項に対し有限差分法を、時間積分に対し Adams-Bashforth 法をそれぞれ 2 次精度で適用した。

3. Ekman 層の解析結果

3.1 Julien 解の解説

ここで Julien 解を簡単に解説する。Julien *et al.*⁸⁾ では、線形化した運動方程式を解析する際に、下壁近傍における温度分布を下記のような鉛直方向に対して線形となる分布を仮定した。

$$\theta = \begin{cases} \alpha(1-z/\lambda) & (z < \lambda) \\ 0 & (z \geq \lambda) \end{cases} \dots\dots\dots (2.11)$$

ここで α は下壁の温度で、本研究では式 (2.8) より $\alpha = 0.5$ である。また λ は局所的な温度境界層の厚みで、 $\lambda = \lambda(x, y)$ である。このように未知変数の 1 つである温度 θ を式 (2.11) のように仮定することにより得られる水平速度場は

$$X = X_E + X_{th}, \dots\dots\dots (2.12)$$

$$X_E = q^{-1} \partial_z X_0 (1 - e^{-qz}) \dots\dots\dots (2.13)$$

$$X_{th} = \begin{cases} (\Lambda/q^4 \lambda^2)(1+q\lambda)e^{-q\lambda}(e^{qz} + e^{-qz} - 2) \\ -(\Lambda/q^2)(z/\lambda)^2 & (z < \lambda) \\ (\Lambda/q^4 \lambda^2) \{ (2-q^2 \lambda^2) - 2(1+q\lambda)e^{-qz} \\ + [(1+q\lambda)e^{-q\lambda} - (1+q\lambda)e^{q\lambda}]e^{-qz} \} & (z \geq \lambda) \end{cases} \dots\dots\dots (2.14)$$

$$X = u + iv, q = (-Ta)^{1/4}, \Lambda = \frac{\alpha}{2} Re (\partial_x \lambda + i \partial_y \lambda) \dots (2.15)$$

と求まる。ここで式 (2.15) より X , q , そして Λ はそれぞれ水平速度場, Ekman 層の厚みの逆数, そして熱境界層の厚みの水平勾配の複素表示である。但し式 (2.11) から式 (2.15) の記述は, Julien *et al.*⁸⁾ の本論文の記述と若干異なる点がある。これは両者間で規格化が異なるため

研 究 速 報

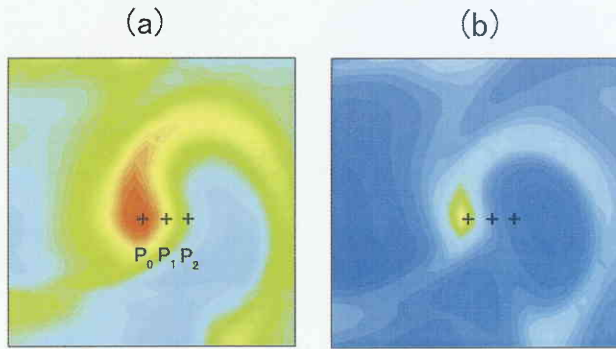


図 1 (a) 温度場と (b) 温度境界層の厚み λ の水平面図

あるので注意されたい. 線形解 (2.12) は粘性効果だけによる通常の Ekman 層解 X_E と温度による補正解 X_{th} の重ね合わせになっている. この温度補正項の効果は λ に依存し, λ の水平勾配が存在するところでは効いてくるが, 存在しないところでは殆ど効かず, 通常の解に近づくことを意味している. ここで問題になることは, 第一に λ をどのように評価するかということであり, 第二にその求めた λ を用いて実際の温度分布が式 (2.11) の線形分布で近似できるのか否かの 2 つである.

上記の 2 つの問題に対する 1 つの提案として, 今回本研究では, 下記に示すように λ を下壁における温度勾配の逆数で定義した.

$$\lambda(x, y) = -1 / \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0} \dots \dots \dots (2.16)$$

そして次に式 (2.16) で定義した λ で線形近似がどの程度成り立つかを調べるため, 図 1 に (a) 温度場と (b) 温度境界層の厚みの等高線図をそれぞれ示す. また図 1(a) と (b) とともに赤味がかかった色の方が値の大きいことを表している. 図 1(a) を見て分かるように, 今回選んだ解析点は周囲より温度の高い場所, つまり上昇ブルームが生成しているポイントである. それらを上昇ブルームの中心と思われる点から右に向かってそれぞれ P_0 , P_1 , そして P_2 と名づける. そして図 1(b) から, λ の水平分布は温度場のそれとほぼ相似的な分布を示し, この周囲に λ の水平勾配が存在することが分かる. 図 2 は解析点 P_0 , P_1 , そして P_2 の温度の鉛直分布とそれぞれの λ から求めた線形分布である. ここで各解析点における式 (2.16) より求めた λ の値はそれぞれ $\lambda(P_0) = 0.63$, $\lambda(P_1) = 0.21$, そして $\lambda(P_2) = 0.08$ である. DNS のデータから, 下層部における各点の平均温度分布からのずれは, ブルームの中心部に相当する P_0 が最も大きく, その外側に向かう P_1 , P_2 に従って小さくなること分かる. ここでは壁近傍の急激な変化をする

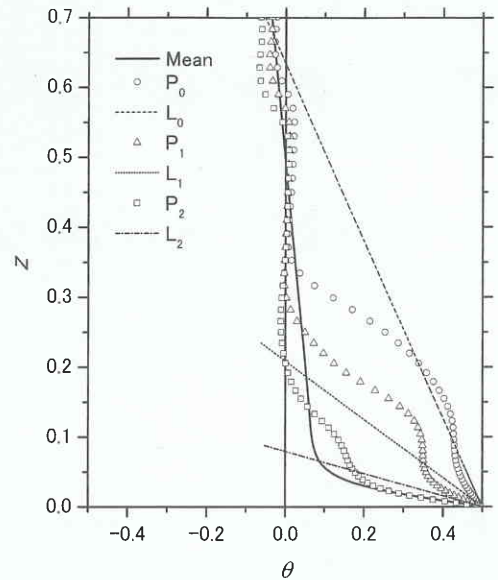


図 2 局所的な温度場の鉛直分布図

層を温度境界層と仮定し, 温度がほぼ一様になると思われる高さ (この場合は $\theta = 0$ 付近) までをその厚みと考えると, やはり P_0 から P_1 , P_2 と次第に小さくなること分かる. また上記で示した λ の値を用いた各点の線形分布をそれぞれ L_0 , L_1 , そして L_2 とすると, DNS のデータから仮定した温度境界層内全体は一致していないことが分かる. この原因は, 式 (2.16) で予想した λ の値が壁近傍の温度勾配のみから定義されていて, 他の様々な要素が含まれるそれらは上方に向かうに従ってその予想から逸脱してくるためだと考えられる. つまり, この線形分布が適用できるのは壁近傍のみに対してであり, そもそも線形解析自身为非線形効果の弱いこの場所を対象にしているのである. 以上のような考えから, 壁付近およそ $z < 0.1$ までの範囲で線形解が DNS の速度場をどの程度補正できるのか考察する.

3.2 Julien 解と DNS の比較

図 3 に解析点 P_0 における (a) $u-v$ ホドグラフ, (b) u の鉛直分布, そして (c) v の鉛直分布をそれぞれ示す. 但しここで ξ は, 鉛直座標を Ekman 層の厚み δ_E で規格化した拡張座標で, $\xi = z/\sqrt{2}\delta_E$ である. 図 3(a) における拡張座標の範囲はおよそ $0 \leq \xi \leq 2.4$ で, 粘性 Ekman 層解 X_E よりも温度補正項 X_{th} を足し合わせた $X_E + X_{th}$ の方が DNS の速度場を良く再現していることが分かる. 特に上方において, DNS における速度の大きさが粘性 Ekman 層解よりも小さくなることは Carrier⁹⁾ 等により非線形効果が原因であると指摘されているが, これにより温度補正項を施すことでも解消に向かう可能性があることが分かる. 次に図 3(b) と

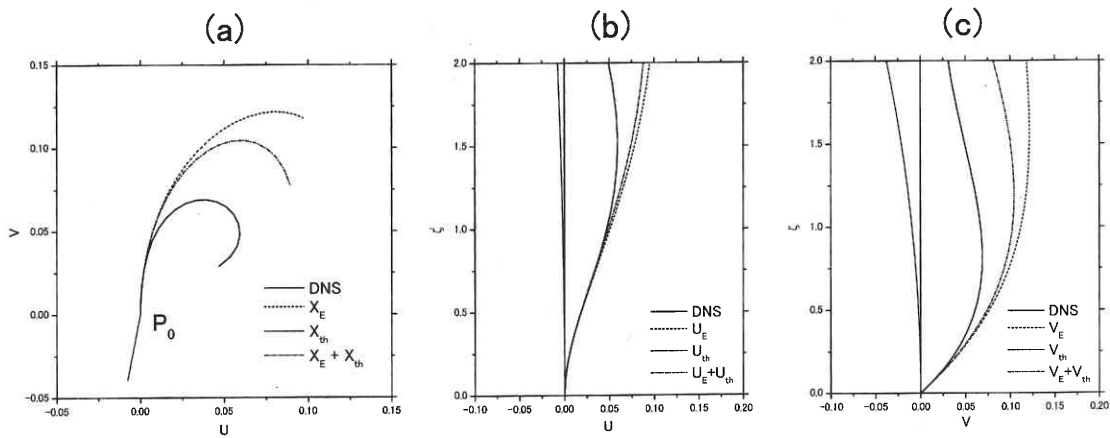


図3 点 P_0 における (a) u - v ホドグラフ, (b) u の鉛直分布図, そして (c) v の鉛直分布図

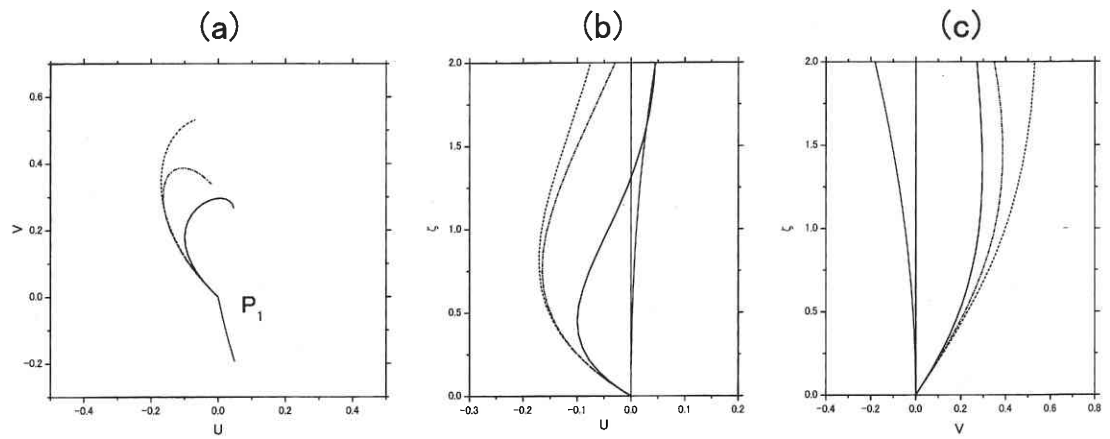


図4 点 P_1 (内容は図3に同じ)

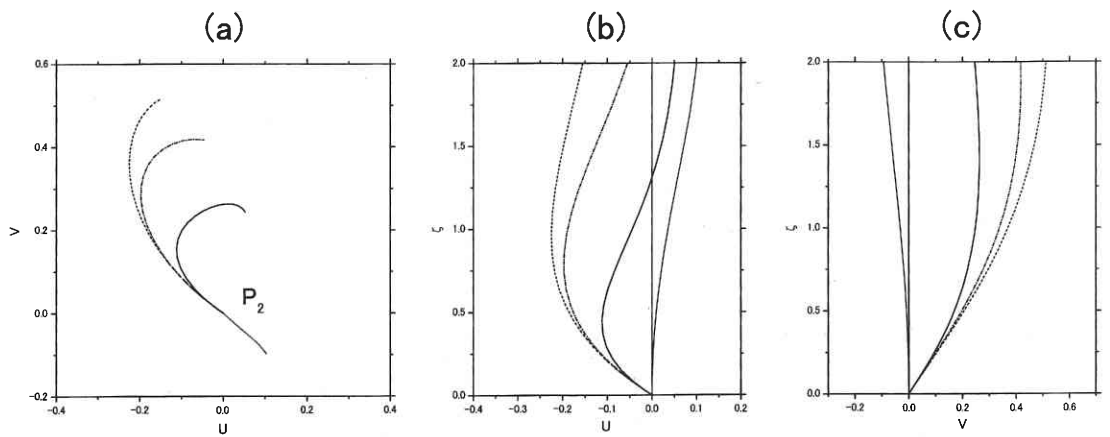


図5 点 P_2 (内容は図3に同じ)

(c) から温度補正項の鉛直依存性の詳細を調べると, u_{th} と v_{th} の両方とも上方に向かうに従いその値が大きくなるものの, 壁の極近傍では殆ど効いていないことが分かる. u においては, u_E のみで約 $\zeta = 0.75$ まで DNS の値を厳密に再現できるが, それより上方では u_{th} が効き始めるものの約 $\zeta = 1$ 程度までしか再現できない. v に至っては, DNS の値を厳密に再現している約 $\zeta = 0.2$ まで v_{th} は殆ど効いていない. つまり壁の極近傍を取り扱う限り, 温度補正項を考慮しなくても良いという結果になる. 次に図4と図5に解析点 P_1 と P_2 における図3と同じ内容を示す. プルームの中心から外側に位置する两点であるが, 図4(a)と図5(a)を見ても粘性 Ekman 層解に対する温度補正項の効果は P_0 と定性的に一致する. 図4(b)と(c)や図5(b)と(c)から判断しても, 壁の極近傍(およそ $\zeta = 0.2$ 以下)においてのみ DNS の値を再現し, そこでは温度補正項は殆ど効かない. 以上の結果により, プルームの周辺における温度補正項の効果は, ほぼ同じように働くことが分かった.

4. ま と め

本研究は回転系 Rayleigh-Bénard 対流の直接数値計算を行いその Ekman 層について解析した. 特に Julien *et al.*⁸⁾ が提示した線形解における温度補正項を DNS のデータから

評価しそれを見積もった. その結果, 壁に近い下層部において, 従来の粘性 Ekman 層解に温度の効果の補正をすることにより改善される可能性があることが分かった. 但し DNS の値を厳密に再現できるのは壁の極近傍だけで, ここでは温度補正項の効果が殆どないことが分かった. また次回の課題として, 今回のような局所的考察ではなく系全体の統計的考察も行う予定である.

(2002年11月25日受理)

参 照 文 献

- 1) V. W. Ekman, Arkiv. Matem. Astr. Fysik, Stockholm **2-11**, 1-52 (1905).
- 2) A. E. Gill, Atmosphere-Ocean Dynamics (Academic Press, 1982).
- 3) J. Pedlosky, Geophysical Fluid Dynamics, 2nd edition (Springer-Verlag, 1987).
- 4) J. H. Hart, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **79**, 201-222 (1995).
- 5) J. H. Hart, J. Phys. Oceanogr. **26**, 1370-1374 (1996).
- 6) J. H. Hart, Phys. Fluids **12**, 131-135 (2000).
- 7) R. Hide, Tellus **XVI**, 522-529 (1964).
- 8) K. Julien, S. Legg, J. McWilliams and J. Werne, J. Fluid Mech. **322**, 243-273 (1996).
- 9) G. F. Carrier, J. Fluid Mech. **49**, 133-144 (1971).