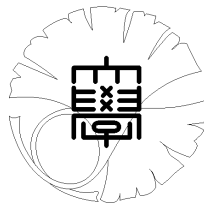


数理科学実践研究レター 2018-10 August 20, 2018

磁気流体緩和法の初期条件依存性  
~force-free  $\alpha$  の空間分布~

by

川畑佑典、三浦達彦、渡邊陽太、池祐一、江間陽平、  
劔持智哉、松原宰栄、米田剛、千葉優作、柏原崇人



**UNIVERSITY OF TOKYO**

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

## 磁気流体緩和法の初期条件依存性 ～force-free alpha の空間分布～

川畑佑典<sup>1,2</sup>, 三浦達彦<sup>3</sup>, 渡邊陽太<sup>4</sup>, 池祐一<sup>3</sup>, 江間陽平<sup>4</sup>, 剣持智哉<sup>3</sup>, 松原宰栄<sup>3</sup>, 米田剛<sup>3</sup>, 千葉優作<sup>5</sup>, 柏原崇人<sup>3</sup>

Yusuke Kawabata<sup>1,2</sup>, Tatsu-Hiko Miura<sup>3</sup>, Yota Watanabe<sup>4</sup>, Yuichi Ike<sup>3</sup>, Yohei Ema<sup>4</sup>, Tomoya Kemmochi<sup>3</sup>, Saiei Matsubara<sup>3</sup>, Tsuyoshi Yoneda<sup>3</sup>, Yusaku Tiba<sup>5</sup>, Takahito Kashiwabara<sup>3</sup>

### 概要

太陽上層大気の3次元磁場推定手法である非線形フォースフリー磁場モデリングの初期条件依存性について調べた。計算には磁気流体緩和法を用いた。初期条件を12個の異なる線形フォースフリー磁場で与え、それぞれ解を比較したところ、高高度において、初期条件依存性が強く現われていることがわかった。

## 1 はじめに

本論文では、太陽上層大気の3次元磁場推定手法である、非線形フォースフリー磁場モデリングの初期依存性について調べた結果について報告する。太陽表面から数千 km から数万 km 上空のコロナでは、太陽フレアと呼ばれる、磁気エネルギーの解放による爆発現象がしばしば発生する [?]. 太陽フレアの物理メカニズムを理解するためには、コロナの3次元磁場構造を取得する必要がある。定量的に磁場を測定する手法の一つとして、偏光観測を行い、量子力学的効果であるゼーマン効果やハンレ効果を用いて磁場を導出する方法がある。この偏光観測を用いてコロナの磁場を測定する試みも行われているが、コロナでは偏光信号が非常に小さいため、現状では主に太陽表面付近の磁場観測に限られている [?]. この観測的困難を解決するために、近年では、太陽表面の磁場観測データから上空の磁場を推定する非線形フォースフリー磁場 (Nonlinear force-free field; NLFFF) モデリングがよく用いられている [?]. NLFFF モデリングは、

1. コロナではプラズマに働く力はローレンツ力が支配的、
  2. フレア発生前のプラズマは力学的に平衡状態、
- という二つの仮定から成り、

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

という方程式にマクスウェル方程式の一つである

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

を加えた二つの式で記述される。  $\mathbf{j}$  は電流、  $\mathbf{B}$  は磁束密度を表す。 (1) 式はマクスウェル方程式の  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$  を用いると

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha(\mathbf{x})\mathbf{B}, \tag{3}$$

とも書ける。  $\alpha(\mathbf{x})$  は磁力線の単位長さあたりのねじれを表す。この式に太陽表面の観測データを境界条件として与えることで、上空の磁場の外挿が可能になる。しかし、この式を数値計算により直接解いた場合、数値的に安定しないことが多く、別の手法により2式を近似的に満たすような磁場を導出することが多い。そのようにして導出される結果は、手法依存性 [?] や観測データの空間分解能依存性 [?] が報告されており、不定性が大きいことも知られている。NLFFF 計算ではまず3次元計算領域に初期条件として、任意の磁場を与える。その後、底の境界に観測データの磁場を与えて、緩和させることで、NLFFF 解を得る。この初期条件として、解析解が知られており計算が容易なポテンシャル磁場 ( $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ) が用いられることが多い。しかしポテンシャル磁場は磁気エネルギー最低状態の解であ

<sup>1</sup>kawabata.yusuke@ac.jaxa.jp,

<sup>2</sup>東京大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻 (Department of Earth and Planetary Science, School of Science, The University of Tokyo)

<sup>3</sup>東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate school of Mathematical Science, The University of Tokyo)

<sup>4</sup>東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 (Department of Physics, School of Science, The University of Tokyo)

<sup>5</sup>お茶ノ水女子大学理学部数学科 (Department of Mathematics, Ochanomizu University)

り、フレアを引き起こすような磁場構造とはかけ離れているため、NLFFF 計算を行った際に現実に近い解に収束することが困難であることが予想される。そのため今回は NLFFF 手法のうちの一つである磁気流体緩和法 [?] について、初期条件を変えることで、どのように解が変化するかを調べた。

## 2 磁気流体緩和法とその初期条件

磁気流体緩和法では以下の 4 つの式から成る磁気流体方程式について、3 次元空間において有限差分法で数値的に解く。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j}) - \nabla \phi, \quad (5)$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \phi, \quad (7)$$

$\mathbf{v}$  はプラズマの速度、 $\rho$  はプラズマの密度 (今回は  $\rho = |\mathbf{B}|$  で与えた)、 $\nu$  は粘性、 $\eta$  は電気抵抗、 $c_h$ 、 $c_p$  は経験的に決められる定数のパラメータ、 $\phi$  は式 (2) を数値的に満たすために擬似的に入れられたパラメータである。式 (4) の  $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$  の項により  $\mathbf{v}$  は数値的に 0 に近づき、最終的に  $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$  を満たす磁場構造になることが期待される。計算に用いるパラメータ、境界条件に用いた太陽表面磁場の観測データは [?] と同じものを用いた。計算領域は  $540 \text{ pix} \times 360 \text{ pix} \times 180 \text{ pix}$  の直方体で、1 pix は太陽大気中の約 450 km に相当する。底面の境界条件  $B_{\text{BC}}$  は

$$\mathbf{B}_{\text{BC}}(t) = \gamma(t) \mathbf{B}_{\text{obs}} + (1 - \gamma(t)) \mathbf{B}_{\text{init}}, \quad (8)$$

に従って時間で変化させる。 $B_{\text{obs}}$  は観測された磁場、 $B_{\text{init}}$  は初期条件として与える磁場である。計算開始時において  $\gamma(t=0) = 0$  であり、 $\mathbf{j} \times \mathbf{B} < 0.1$  が満たされていれば、 $\gamma(t + \Delta t) = \gamma(t) + 0.02$  とする。計算の時間ステップを進めていくと最終的には  $B_{\text{BC}} = B_{\text{obs}}$ 、 $\partial v / \partial t \approx 0$  となり、NLFFF 解が得られることになる。

初期条件として、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha_0 \mathbf{B}, \quad (9)$$

の解を用いる。 $\alpha_0$  は空間で一定である。式 (9) は底の境界条件に磁場の法線成分を与えることで解析的に解くことができる。 $v$ 、 $\phi$  の初期条件は全空間で 0 を与えた。側面・上面の境界は初期条件に固定した。得られる NLFFF 結果の初期条件依存性を調べるために  $\alpha_0 = 0, \pm 0.003, \pm 0.005, \pm 0.01, \pm 0.02, \pm 0.03, -0.05 \text{ pix}^{-1}$  の 12 個の初期条件を用いた。計算ステップ数は、同じ計算ステップ数で比較するために、どの初期条件の計算でも  $\int \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV$  がピーク時の 1 桁下になっている 8000 ステップで固定した。

## 3 結果

本論文では収束解の  $\alpha(\mathbf{x})$  の空間分布に着目した。(3) 式から

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}{|\mathbf{B}|^2}, \quad (10)$$

図 1 左に初期条件  $\alpha_0 = -0.01, 0, 0.01, 0.03 \text{ pix}^{-1}$  で得られた 3 次元磁場から計算した  $\alpha(\mathbf{x})$  のヒストグラムを示す。色はそれぞれ初期条件の  $\alpha_0$  の値を示している。ヒストグラムから分かるように、今回の計算ステップ数では初期条件の値の近くでピークを持っている。図 1 右には底の境界条件に用いた観測データの  $\alpha(\mathbf{x})$  のヒストグラムを示している。ピークはほぼ 0 付近に立っており、NLFFF の解と比較すると、より広い範囲の  $\alpha(\mathbf{x})$  を持っている。

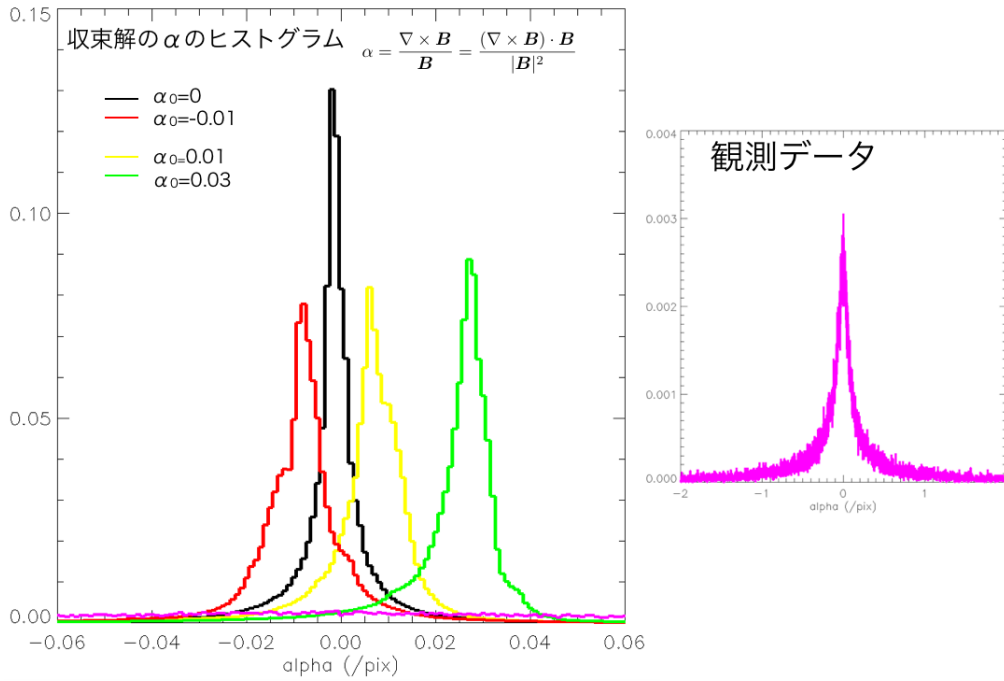


図 1: 左: $\alpha_0 = -0.01, 0, 0.01, 0.03 \text{ pix}^{-1}$  から得られた収束解の  $\alpha(\mathbf{x})$  のヒストグラム. 色はそれぞれの初期条件の  $\alpha_0$  を示す. 右:底の境界条件に用いた観測データの  $\alpha(\mathbf{x})$  のヒストグラム.

図 2 はある高さにおける典型的な  $\alpha(\mathbf{x})$  の値を示している. 図 2 右は図 2 左の黄色枠内の拡大図である. 典型的な値は, ある高さにおいてヒストグラムのピークの値として定義した. 高さが 30pix 以上になると典型的な  $\alpha(\mathbf{x})$  が初期値  $\alpha_0$  の値と等しくなっていることが分かる. つまり高高度では初期条件依存性が強く現われていることがわかった.

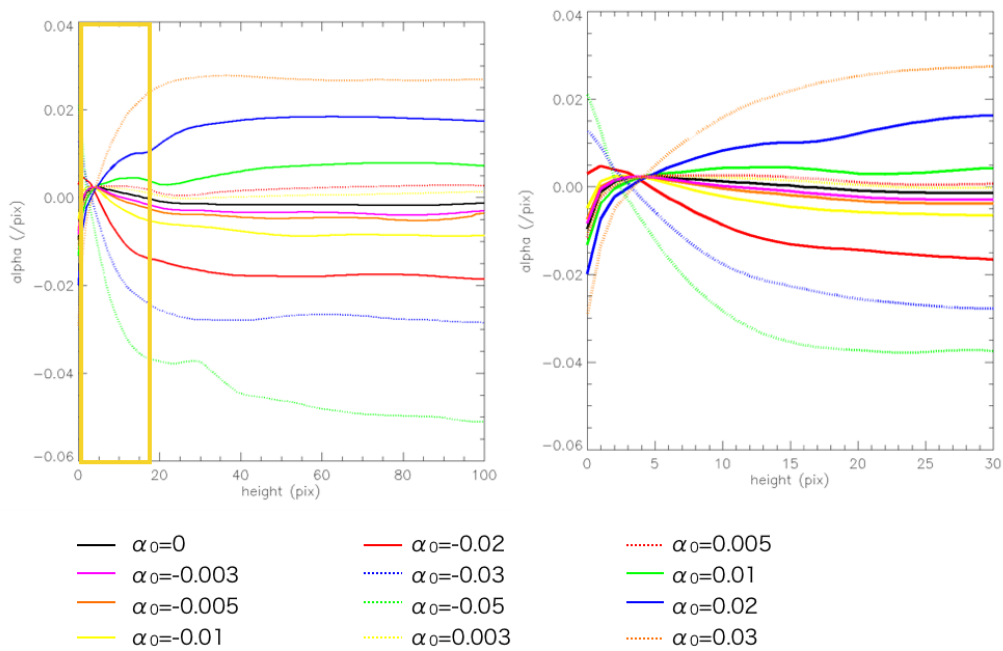


図 2: 右:ある高さにおける典型的な  $\alpha(\mathbf{x})$  の値. 左:右図の黄色枠内の拡大図.

## 4 議論・今後の展望

図 1 において太陽表面の観測データのヒストグラムが広がりを持っているのは、低高度で大きな  $|\alpha|$  が集中し、高高度に行くにつれて次第に  $|\alpha|$  が減少していることを反映していると考えられる。そのことは図 1 左と図 1 右を比較すると理解できる。図 1 右は底面のみのヒストグラムであることに對して、図 1 左は計算領域全体のヒストグラムを表しており、計算領域全体としては、大きな  $|\alpha|$  の割合が少ないと考えられる。

図 2 では高高度で強く初期条件依存性が出ていることが分かった。この結果の原因の一つとして、側面と上部の境界を初期条件で固定したことがあげられる。また高度 0 において、12 個の初期値から始めたそれぞれの解の  $\alpha$  の値が一致していないのは式 (10) から

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{B_x}{|\mathbf{B}|^2} \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \frac{B_y}{|\mathbf{B}|^2} \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \frac{B_z}{|\mathbf{B}|^2} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (11)$$

であり、それぞれの解において  $\partial B_y / \partial z$  と  $\partial B_x / \partial z$  が異なるのが原因である。初期条件  $\alpha_0 < 0$  で始めると高度 0 の  $\alpha$  が正になり、初期条件  $\alpha_0 > 0$  で始めると高度 0 の  $\alpha$  が負になる傾向があるのは以下のことから理解出来る。式 (11) を差分化した時、値の違いを生むのは  $-B_x(z=0\text{pix})B_y(z=1\text{pix}) + B_y(z=0\text{pix})B_x(z=1\text{pix})$  である。ここで太陽表面の  $B_x, B_y$  の中央値はそれぞれ、-2.7 G と 6.4 G であった。その 1pix 上空の  $B_x$  と  $B_y$  の中央値に関しては、 $\alpha_0 = 0.03 \text{ pix}^{-1}$  を初期値とした場合はそれぞれ -21 G と 34 G であり、 $\alpha_0 = -0.03 \text{ pix}^{-1}$  を初期値とした場合はそれぞれ 8.8 G と 17 G であった。 $\alpha_0 < 0$  を初期値にとったことで、1pix 上空の  $B_x$  の符号が  $\alpha_0 > 0$  の場合と異なる符号になったことが高度 0 における違いを生んだと考えられる。

今後の課題としては側面と上部の境界を変更することがあげられる。側面に関しては周期境界とする。上部に関しては、すべての初期条件において、共通の値で固定したほうが比較を行う上で好ましい。上で議論したように、実際の太陽大気では上空に行くにつれて  $|\alpha|$  の値は小さくなっていき、上面境界に近い部分ではポテンシャル磁場に近い状態にあることが期待される。そこで上部の数 pix をポテンシャル磁場として上部境界をポテンシャル磁場で固定するといった対策が考えられる。また高高度で初期条件依存性が強く出た原因は境界条件以外にも、まだ高高度の解が収束していない、または別の解に収束しているという可能性も考えられるため、その原因の調査の必要がある。

## 5 謝辞

数物フロンティア・リーディング大学院のプログラムコーディネーターとして、数理科学実践研究を実施し、太陽班の議論にも積極的にご参加くださった儀我美一教授に感謝の意を表す。また多くの価値あるコメントをくださった査読者にも深謝する。

## 参考文献

- [1] Shibata K., and Magara T., Solar Flares: Magnetohydrodynamic Processes, Living Reviews in Solar Physics, Volume 8, Issue 1, article id. 6, 99 pp., 2011
- [2] Lagg A., Lites B., Harvey J., Gosain S., and Centeno R., Measurements of Photospheric and Chromospheric Magnetic Fields, Space Science Reviews, Volume 210, Issue 1-4, pp. 37-76, 2017
- [3] Wiegmann T., and Sakurai T., Solar Force-free Magnetic Fields, Living Reviews in Solar Physics, Volume 9, Issue 1, article id. 5, 49 pp., 2012
- [4] De Rosa M., Schrijver-M., Barnes G., Leka K. D., Lites B., Aschwanden M., Amari T., Canou A., McTiernan J., Régnier S., Talmann J., Valori G., Wheatland M., Wiegmann T., Cheung M.,

- Fuhrmann N., Inhester B., and Tadesse T., A Critical Assessment of Nonlinear Force-Free Field Modeling of the Solar Corona for Active Region 10953, *The Astrophysical Journal*, Volume 696, Issue 2, pp. 1780-1791, 2009
- [5] DeRosa M., Wheatland M., Leka K. D., Barnes G., Amari T., Canou A., Gilchrist S., Thalmann J., Valori G., Wiegmann T., Schrijver C., Malanushenko A., Sun X., and Régnier S., The Influence of Spatial resolution on Nonlinear Force-free Modeling, *The Astrophysical Journal*, Volume 811, Issue 2, article id. 107, 21 pp., 2015
- [6] Inoue S., Magara T., Pandey V. S., Shiota D., Kusano K., Choe G. S., and Kim K. S., Nonlinear Force-free Extrapolation of the Coronal Magnetic Field Based on the Magnetohydrodynamic Relaxation Method, *The Astrophysical Journal*, Volume 780, Issue 1, article id. 101, 13 pp., 2014
- [7] Kawabata Y., Inoue S., and Shimizu T., Non-potential Field Formation in the X-shaped Quadrupole Magnetic Field Configuration, *The Astrophysical Journal*, Volume 842, Issue 2, article id. 106, 15 pp., 2017