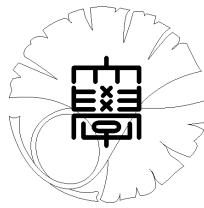


数理科学実践研究レター 2018-20 September 07, 2018

磁気流体緩和法の初期条件依存性
～ 磁力線形状とエネルギー ～

by

渡邊陽太、川畑佑典、三浦達彦、池祐一、江間陽平、
劔持智哉、松原宰栄、米田剛、千葉優作、柏原崇人



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

磁気流体緩和法の初期条件依存性～磁力線形状とエネルギー～

渡邊陽太^{a1}, 川畑佑典^b, 三浦達彦^c, 池祐一^c, 江間陽平^a,
 剣持智哉^c, 松原宰栄^c, 米田剛^c, 千葉優作^d, 柏原崇人^c

^a 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

^b 東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻

^c 東京大学大学院数理科学研究科

^d お茶の水女子大学理学部数学科

概要

太陽フレアという爆発現象は我々の日常生活に様々な悪影響を及ぼすため、いつフレアが起こるかは社会的にも重要である。フレアのエネルギー源は太陽コロナに蓄えられた磁気エネルギーであり、磁場の三次元分布を調べることでその解明に近づくことができる。磁場分布が観測できるのは太陽表面のみであるため、三次元分布はモデルによる推定が行われている。本レターではこの推定に使われている磁気流体緩和法の初期条件依存性を、磁力線形状とエネルギーに焦点を当てて調べる。その結果、磁場の回転を特徴付ける初期パラメータを変えると、長い磁力線の形状や解の収束性、磁気エネルギーが変わってしまうことが分かる。特に、フレアの指標として用いられている自由エネルギーは、初期値の変化が微小でも桁が変わる程変動してしまう場合があるため、指標として用いるのは危険であることが示唆される。

1 はじめに

太陽フレアという爆発現象は我々の日常生活に様々な悪影響を及ぼすため、いつフレアが起こるかを調べることは重要である。フレアのエネルギー源は太陽コロナに蓄えられた磁気エネルギーであるため、磁場の三次元分布が興味の対象となる。磁場分布が観測できるのは太陽表面のみであるため、三次元分布はモデルによる推定が行われている。今回我々が用いるモデルはフォースフリー磁場 $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ である。ここで、 \mathbf{B} は磁束密度、 $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ は電流である。即ち、空間 \mathbf{x} に依存する係数 $\alpha(\mathbf{x})$ を用いて $\nabla \times \mathbf{B} = \alpha(\mathbf{x})\mathbf{B}$ と表すことができ、 $\alpha(\mathbf{x})$ は磁場の回転を特徴付けるパラメータである。境界条件として観測された太陽表面上の磁場を用い、 $\alpha(\mathbf{x})$ の初期値 α_0 を与え、緩和すなわち時間発展させることで磁場の三次元分布を推定する。多くの場合、ポテンシャル磁場と呼ばれる $\alpha_0 = 0$ が採用され、緩和法として磁気流体緩和法 [1] が用いられている。しかし、磁気流体緩和法の初期条件 α_0 による不定性は見積もられていない。そこで本レターでは、磁気流体緩和法により求められた磁場分布は初期条件 α_0 にどの程度依存するのかを調べる。

2 手法

初期パラメータとして $\alpha_0 = 0, -0.05, \pm 0.03, \pm 0.02, \pm 0.01, \pm 0.005, \pm 0.003 \text{ pixel}^{-1}$ の 12 通りを採用し、各々に対して磁気流体緩和法を適用する。磁気流体緩和法は次の方程式系である [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j}) - \nabla \phi, \quad (2)$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \phi, \quad (4)$$

ここで、 \mathbf{v} は速度場、 ρ は密度、 ϕ は補助的に導入した場、 ν は粘性、 η は抵抗率、 c_h と c_p は各々 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ の移流、拡散係数に対応する量である。初期条件は $\mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \phi = 0$ 、境界条件は $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 、上面と側面で $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ 、底面（太陽表面）で $\mathbf{B}_{BC} = \gamma \mathbf{B}_{\text{obs}} + (1 - \gamma) \mathbf{B}_0$ とする。ここで、 \mathbf{B}_0 は

¹yota.watanabe@ipmu.jp

$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha_0 \mathbf{B}$ の解、 \mathbf{B}_{obs} は観測により得られる磁束密度、 γ は時間変化するパラメータで、 $|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|^2$ がある閾値（今回は 0.1 とした）を下回る時にはステップ毎に 0.02 増やし、1 に達するとその値で固定している。

3 結果

磁気流体緩和法を用いて一定時間緩和させた後の磁束密度を以降収束解と呼ぶことにする²。収束解における磁力線の最高点の座標、収束性、磁気エネルギーが初期パラメータ α_0 にどう依存するか調べた結果を本章で記す³。なお、比較に用いる収束解には、計算領域の境界から離れた内部の結果を用いる（ただし太陽表面を除く）⁴。なぜなら、太陽表面には観測データがあるが、それ以外の境界では固定した境界値の影響を小さくしたいからである⁵。

3.1 磁力線の最高点の座標

図 1 は、収束解から磁力線を任意に 100 本選び、各線の最高点（高さ z 座標が最大の点）の座標を α_0 毎に比較した散布図である。初期値 α_0 依存性が顕著になるのは最高点が高い磁力線である。

3.2 解の収束性

図 2 は $|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|^2$ の空間積分値の時間発展である。これは本来フォースフリーモデルにより 0 になるはずの量であり、解の収束性（収束の速さ）を表している。見て取れるように α_0 依存性は大きく、 $|\alpha_0|$ が大きい程収束性が悪い。なお、 $|\alpha_0|$ が同じでも値が負の方が収束性が良いのは、底面の境界条件として与えた観測磁場の α 分布が負に偏っていたからだと考えられる。

3.3 磁気エネルギー

図 3 は、初期条件と収束解の磁気エネルギー

$$\int d^3x \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \tag{5}$$

と、収束解の自由エネルギー（磁気エネルギーとその最小値の差）である。自由エネルギーはフレアのエネルギーの指標として用いられているものである。しかし見て取れるように、 $|\alpha_0|$ が 0.05 を超えると自由エネルギーは桁が変わる程変動してしまうため、フレアの指標として用いるのは危険であることが示唆される。

なお、初期条件の磁気エネルギーが α_0 の小さい所で漸近的に α_0 の二次関数になることは、理想化した状況であれば解析的に示すことができる。フォースフリー磁場 $\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$ において α が定数 α_0 であり、領域が $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq \infty$ の解析解の x, y, z 成分は次のようになる

²ただし、緩和時間を無限大とした時の解が数学的に存在するかどうかは非自明である。

³用いた観測磁場データは、太陽観測衛星「ひので」に搭載された可視光磁場望遠鏡によって 2014 年 2 月 3 日の 7 時 50 分から 8 時 45 分 (UTC) に観測されたものである。この磁場は、この時間帯に太陽中心直交座標 (heliocentric-cartesian coordinates)[2] で (-100 秒角, -100 秒角) に位置する黒点まわりに分布していた。

⁴具体的には、計算領域 (0-550)pixel×(0-350)pixel×(0-180)pixel のうち、(100-500)pixel×(50-250)pixel×(0-100)pixel の結果を用いた。

⁵ただし、境界値の影響がどれだけ小さいのかは評価していない。今後の課題として、新しく側面を周期境界などに変更して結果がどの程度変化するかを確かめる。

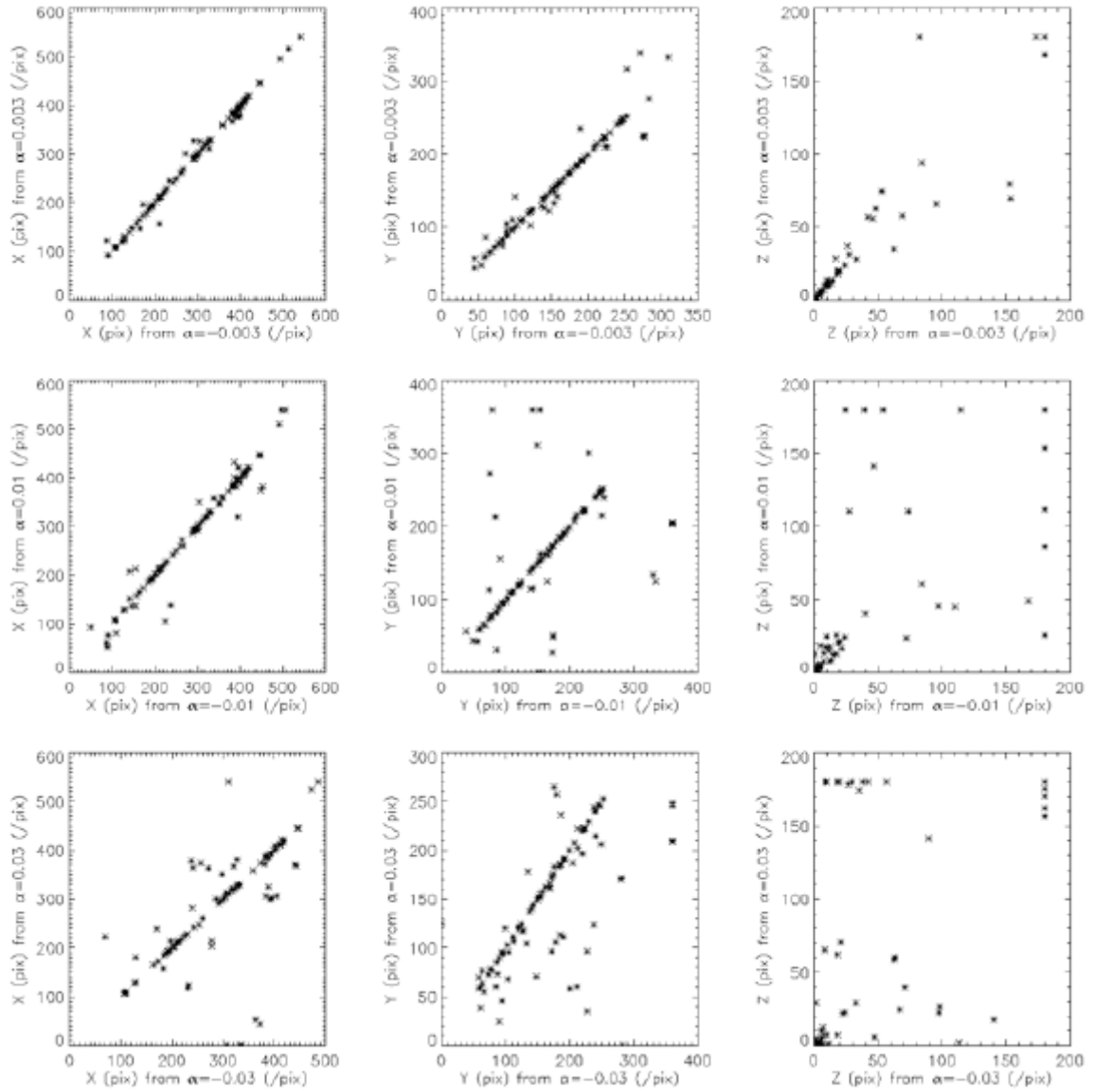


図 1: 各磁力線の最高点の座標の α_0 依存性。左列から x, y, z 座標同士の比較、上行から $|\alpha_0| = 0.003, 0.01, 0.03$ で異符号の比較。

ことが知られている [3] :

$$B_x = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{\lambda_{mn}} \exp(-r_{mn}z) \left[\alpha_0 \frac{\pi n}{L_y} \sin\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right) - r_{mn} \frac{\pi m}{L_x} \cos\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right) \right], \quad (6)$$

$$B_y = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{\lambda_{mn}} \exp(-r_{mn}z) \left[\alpha_0 \frac{\pi m}{L_x} \cos\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right) + r_{mn} \frac{\pi n}{L_y} \sin\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right) \right], \quad (7)$$

$$B_z = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{mn} \exp(-r_{mn}z) \sin\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right), \quad (8)$$

ここで、 $\lambda_{mn} = \pi^2(m^2/L_x^2 + n^2/L_y^2)$, $r_{mn} = \sqrt{\lambda_{mn} - \alpha_0^2}$, C_{mn} は底面の境界条件で決まる定数である。ただし、側面では $B_z = 0$ とし、境界での $|B_z|$ は内部より小さいとした。これを用いて磁気エ

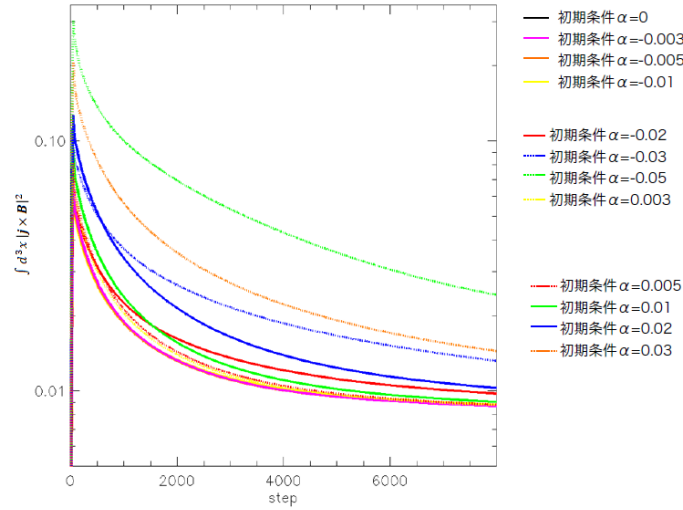


図 2: $|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|^2$ の空間積分値の時間発展。解の収束性を表す。

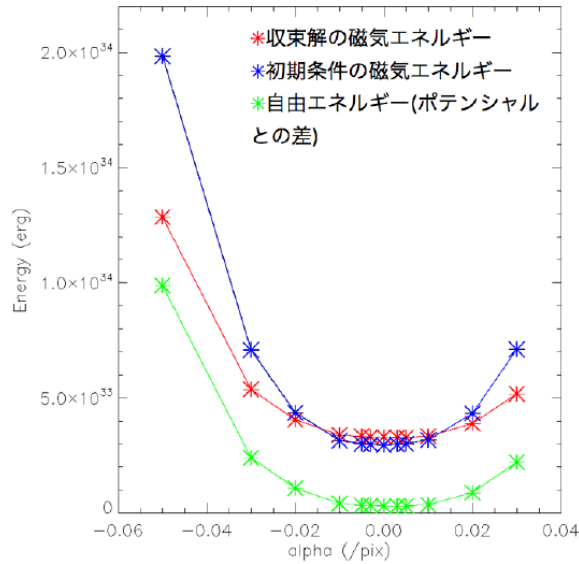


図 3: 大きい方から順に初期条件、収束解の磁気エネルギー、収束解の自由エネルギー（磁気エネルギーとその最小値の差）。

エネルギー (5) を計算し、 α_0 を 0 の周りで Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^\infty dz \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} &= \frac{L_x L_y}{64\pi} \sum_{m,n=1}^\infty C_{mn}^2 \left(\frac{r_{mn}^2 + \alpha_0^2}{\lambda_{mn} r_{mn}} + \frac{1}{r_{mn}} \right) \\ &= \frac{L_x L_y}{64\pi} \sum_{m,n=1}^\infty C_{mn}^2 \left(\frac{2}{\lambda_{mn}^{1/2}} + \frac{\alpha_0^2}{\lambda_{mn}^{3/2}} + \mathcal{O}(\alpha_0^4) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

となり、主要部は α_0 の二次関数になることが分かる。

4 終わりに

磁気流体緩和法の初期パラメータ α_0 の依存性は、最高点の高い磁力線の形状や解の収束性、磁気エネルギーに関して大きいことが分かった。特に、フレアの指標として使われている自由エネルギーは、初期パラメータの変化が微小でも桁が変わる程変動し得るため、指標として用いるのは危険であ

るという示唆を得た。ただし、今回の解析結果はある一つの観測データに関するものであり、この結果があらゆるフレアに対しても成立するかは非自明である。本解析が今後の磁場分布推定の一助になることを切に願う。

参考文献

- [1] S. Inoue, T. Magara, V. S. Pandey, D. Shiota, K. Kusano, G. S. Choe and K. S. Kim, Nonlinear Force-free Extrapolation of the Coronal Magnetic Field Based on the Magnetohydrodynamic Relaxation Method, *The Astrophysical Journal* 780:101 (2014), <https://doi.org/10.1088/0004-637X/780/1/101>
- [2] W. T. Thompson, Coordinate systems for solar image data, *Astronomy & Astrophysics* 449, 791-803 (2006), <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20054262>
- [3] N. Seehafer, Determination of constant α force-free solar magnetic fields from magnetograph data, *Sol Phys* (1978) 58: 215, <https://doi.org/10.1007/BF00157267>