入門的極限指導の研究動向と展望

—C. Nagle（2013）の極限概念構築モデルに着目して—

教職開発コース　　茂　野　賢　治

Perspectives of the Instructional Study in an Introductory Calculus Conception of a Limit
－Focusing on the Model Invented by C. Nagle－

Kenji SHIGENO

The purpose of this study is to get a viewpoint in an introductory calculus conception of a limit. This study focuses on the reviews based on Formalizing Introductory Notions invented by Nagle（2013）of limit conceptualizations promoted in introductory calculus. From these reviews, three important findings of instructional design were indicated. First, the construction of a dynamic introductory calculus conception of a limit led to a perspective of instructional design. Second, students' reasoning were encouraged to construct the dynamic introductory calculus conception of a limit. Third, including pedagogical activities promoted students' reasoning in the dynamic introductory calculus conception of a limit.

目　　次

１　はじめに

Ａ　本稿の目的

本稿の目的は，高等教育において正式に学習する前の高等学校や大学初年次での入門的な微分学習における極限の指導に関する研究を整理し，その研究動向を捉え今後の極限指導における実践上の視座を得ることである。

現代社会では，数学が様々な場面で活用され特に，微積分は様々な場面に応用されている。その微積分の根幹をなす極限概念を理解することは重要であり，社会実践上の応用と後に続く微積分学習導入の双方において基本的な数学概念の一つであると言われている（e.g., Cornu, 1991）。日本の高等学校において初出する微積分の学習は，極限の考えを通して微分の概念を導くとされ（文部科学省，2009），中村（1980）は，微積分は極限概念に基礎をおいた数学であると述べている。一方，大田（2009）は，入門的微積分学習における概念指導の不足を指摘する。そこでは，高等学校での計算指導のみの概念指導のない数学教育を受けた暗記中心の大学生が，そのまま教師となる状況下での概念指導の脆弱を指摘している（Ibid, p22）。

これまでの数学教育における極限概念の研究は，学習者である生徒たちの概念理解の困難性や誤概念を描いている（e.g., Bezuidenhout, 2001）。また，極限に関する研究者の一人Nagle（2013）は，これまでの極限概念の研究は，主に入門的微分学習における概念イメージの弱さの研究（e.g., Coitrill, et, al., 1996）あるいは, 正式な定義の理解のための概念移行への困難性の研究（e.g., Boester, 2010）であったことを指摘する（Nagle, 2013, pp8-9）。

また，Nagle（2013）は, 上述した概念イメージの弱さの研究（e.g., Coitrill, et, al., 1996）や概念移行への困難性の研究（e.g., Boester, 2010）は見方を変えれば, 極限の学習における指導改善の研究として捉えられることも指摘する。さらに，Nagle（2013）は，極限概念に関するこれまでの研究を極限概念に存在する二つの対立する見方をもとに整理している。この対立する二つの見方の一つには，数値の動きをもとにある数値への近接を捉える動的見方と数字や記号を用いて形式的にある数値への近接を捉える静的見方があると述べている。そして，この見方をもとに，新たな極限概念構築のモデル及び，入門的微分学習における極限の指導アプローチをNagle（2013）は提案している（Ibid, pp9-10）。

しかし，極限概念に関する指導の研究においては，Nagle (2013）の研究においても指導法の提案に留まっており，生徒の概念構築の理論に沿った指導原理に基づく研究の整理がされているとはいえない。そこで，Nagle（2013）の指導アプローチによる極限研究の推奨に依拠し，入門的微分学習における極限概念の研究を指導面から整理し，極限概念の指導研究としてその動向を捉えることは今後の極限概念の研究及び教育実践上においても意義のあることと考える。まずは，極限概念構築に関する研究を概観することで，生徒たちを極限概念構築に導くための指導に関する知見を得ていく必要があるといえる。

以上，これまでの極限概念の研究をもとに，指導研究の側面から研究をここで改めて整理し，研究動向を考察することで，今後の極限指導に関する実践上の視座が得られると考え，本稿の目的を設定した。

尚，本稿でいう指導原理とは生徒たちの概念構築のための指導をする際の拠り所，あるいはそのカテゴリーを指し，指導アプローチとは指導目標達成のための指導方法を指す。例えば，指導原理とは極限のある概念を発展させたり，別の概念を取り込んだりする指導全体の枠組みを指し，指導アプローチとはその枠組みの中での指導の具体の方法や順序などを指す。

また，本稿では指導研究を整理する上で，ある一定の極限の概念構築として整理された研究をもとに整理を行う。なぜなら，それら極限概念研究の示唆する指導アプローチから極限概念指導の研究動向を探ることで，極限概念構築の知見が指導アプローチを特徴づける上での根拠になると考えたからである。

そこで，本稿は今後の研究としてNagle（2013）が指導アプローチによる研究を推奨したことを踏まえ，Nagle（2013）の整理した研究に焦点化して再度，指導アプローチの面からそれら研究を整理する。そして，今後の入門的極限学習における実践上の視座を目標とするため，最近（2010年代）の研究を中心に紹介していく。

B 極限概念

1 極限概念のインフォーマルとフォーマル二つの定義

数学学習において極限概念という場合，二つの定義が存在する。この定義の違いにより，研究の対象が異なるため極限概念及びその指導研究の研究目的も異なってくる。

この二つの定義の微分学習における段階を簡潔に述べると現在，我が国の学校教育では高等学校で主に学習する操作的なインフォーマル定義と大学で主に学習する数学の集合論を基にしたフォーマル定義に大別できる。

微分学習における極限のインフォーマル定義[1)]とは，グラフを描くなど経験の概念的具象化と数学の代数の操作的記号化を用いて同時に定義するものである。フォーマル定義[1)]とは，εやδの記号を用いて形式的に定義するものである（Tall, 2013, pp307-341）。この定義の違いは，極限概念の歴史的な発生に由来するものであり（Tall, 2013, p307），数学では現在，後者つまり，フォーマル定義を正式な極限概念として定義している。一方，Tall（2013）は人間の思考の発達の段階としてインフォーマル概念からフォーマル概念への移行，そして人の生活や活動のフィールドにおいては，必要となる概念の段階は異なることを指摘している（Tall, 2013, pp281-287）。

2 極限の二つの概念の違いによる対立する概念の見方

極限概念には上述した二つの定義の違いにより, インフォーマル概念とフォーマル概念が存在する。この

二つの概念には対立する二つの概念の見方がある。それは主に，インフォーマルとフォーマル概念の順に述べると，「プロセスと対象」，どちらを先に変数として捉えていくのか二変数関数の場合の「xを先に捉える見方とyを先に捉える見方」，「動的と静的」，「分断と連続」，「実践と理論」，「過程のシンボルと公理の形式」の対立である（Nagle, 2013, pp4-6）。そのため極限概念の構築においても，これまで二つの見方を対比的に捉えた研究が存在し，Nagle（2013）もそれら研究を対比的な概念としてまとめ整理している（表1参照）。

表１：入門と正式な微分学習における極限概念の対比表（Nagle, 2013, p5, Table 1.より一部引用）

入門の微分における極限概念	正式な微分における極限概念
プロセス	対象
xを最初に捉える見方(定義域から捉える)	yを最初に捉える見方(値域から捉える)
動的	静的
分断	連続
実践	理論
過程のシンボル	公理の形式

2　入門的極限指導[2]の研究動向

A　微積分学習における入門的極限指導のアプローチの経緯

1　フォーマル概念獲得のためのインフォーマル概念を除く指導研究

インフォーマル概念の構築はフォーマル概念獲得を抑制するので，$\varepsilon-\delta$で定義されるフォーマル定義においては，インフォーマル概念を指導者が取り除くことを示唆する研究がある（e.g., Tall & Vinner, 1981）。

また，Tirosh（1991）もフォーマル定義理解のためには入門的な極限のインフォーマル定義の理解がフォーマル定義理解を抑制することを指摘している。Tirosh（1991）によると，$\varepsilon-\delta$定義や現代数学のほとんどは，実際に現実に生じる無限の概念を全面的に除いている。一方，現実に生じる無限概念が内在する極限のインフォーマル概念に生徒たちは依存しているので，数学の形式化に生徒たちは困難を覚えることになる。したがって，フォーマルな$\varepsilon-\delta$定義の理解において，生徒自身の持つインフォーマル概念が取り除かれることが必要であると，Tirosh（1991）は理由づけている。

つまり，極限概念の指導研究においてインフォーマル概念はフォーマル概念の構築において不必要な概念と指摘されている。このような研究動向の所以は，極限概念に存在する概念の二面性による所が大きいと考える。

2　フォーマル概念構築のためのインフォーマル概念構築から始める指導研究

一方，上述した二つの対立する概念の統合を目指す研究も現れた。極限概念をインフォーマル概念，フォーマル概念の二つに分け，フォーマル概念構築のためにインフォーマル概念から出発し，最終的にフォーマル概念構築を目指す段階的な指導研究である。

例えば，Coitrill, et, al.（1996）は極限概念の発生的分析過程を調査する中で，大学生の極限概念理解の困難さの中心を動的プロセス概念と静的フォーマル概念の二分にあるとし，その困難性を克服するための指導アプローチを示唆している。それは，インフォーマルとフォーマルの二分を克服するためのインフォーマル概念理解へのアプローチである。この結論に至る過程で，Coitrill, et, al.（1996）はAPOS理論[3]を基に，七つのステップに生徒たちの学習過程をわけ，極限概念を動的プロセスとして捉えることから，静的対象として捉えるフォーマル概念への生徒たちの移行を段階的に描いている。七つのステップとは，フォーマル概念である$\varepsilon-\delta$定義の理解の順番で述べると，①x=aに近いある一つの点の数値を求める。②x=aに近づくようないくつかの点の数値を求める。③関数y=f（x）がLに近づくプロセスを得るために，xがaに近づく領域の範囲をyがLに近づく幅を作成するプロセスで順序よく調整する。④ステップ③のプロセスを対象として要約する。⑤xがaに近づく領域の範囲とyがLに近づく幅の不均衡や間隔の観点からステップ③を再解釈する。つまりどんなにyの幅εを小さくしても，その間隔に入る対応するxの幅δが存在することを解釈する。⑥ステップ⑤のプロセスを描くため数量詞（数字や絶対値，不等号記号などを使用したことば）を組み込む。⑦一つの完全な$\varepsilon-\delta$定義の概念が完成する（Cottrill et al., 1996, pp177-178）である。

具体的な指導として，シェーマ[3]へより注意を払う必要性からシェーマの様々な構成上の関連した重要点が変更できるアプローチを提案している。その理由

を分析結果から極限の動的概念は，活動の内面化によって捉えられる過程よりさらに多くの困難を強いることが明らかになったからである。例えば，上述したステップ③の段階からステップ④の段階に移行する際，生徒たちの困難性が見られるのであった。

これまでの研究では，動的概念がフォーマル概念理解の発達に妨げとなるといった指摘もあったが，Coitrill, et, al.（1996）の研究ではフォーマル概念の移行の難しさは少なくとも，動的な近接の記述とその記述の定量化を同時に行う強い動的概念発達の不足の結果であると指摘している。

Coitrill, et, al.（1996）は続けてまた，極限のフォーマル概念は一般的に信じられている静的概念ではなく，実際にはとても複雑なシェーマがあり，そのシェーマには重要な動的側面と生徒たちには強固な関数の値として，上述したステップ④の段階から始まるyの領域の幅とxの領域の幅とを調整する定量化の概念をつくることが要求されることも指摘している。

つまり，指導面における示唆として新たなシェーマの構築が必要であり，そのためにはインフォーマル概念に含まれている動的過程の中にある精緻に詳述された動的過程と関数の値を定量化する過程の同時の調整が必要であり，ほとんどの生徒たちにとって近づきにくい極限概念を創り出すためのフォーマル定義の正確な性質の理解ではないと結論づけている。そして，今後の研究の方向性を生徒たちが定量化の概念をどのように学ぶかを調査することとしている。

また，Boester（2010）は，極限概念のインフォーマルな動的概念（関数の値の動きを基本として，グラフ上のある点を別の点に近づける操作などを伴う概念）とフォーマルな静的概念（数字や不等号記号などを用いて，論理的に関数の値の幅を形式的に統制する概念）における生徒の概念構築の仕方を三つの枠組み（APOS理論，後述するメタファーを用いる理論そして，以下に述べるBoester（2010）の理論）を用いて試すことで，自身の作成した枠組みの有効性を指摘した。その中で，Boester（2010）は，生徒たちの極限概念の構築の仕方として，インフォーマル概念にある動的概念とフォーマル概念にある静的概念との関係から四つの構築段階（①動的概念のみ②動的概念と静的概念の分割③静的概念を組み込む動的概念④動的概念を組み込む静的概念）として最終段階では，動的概念は静的概念に統合されると指摘する。上述したCoitrill, et, al.（1996）の枠組みは，生徒たちが強固な動的概念の基礎から静的極限の概念を構築していくが，Boester（2010）の枠組みは，四つの段階において，動的概念と静的概念の関係性から静的概念を構築していく点が異なっている。

そして，Boester（2010）は極限指導の提案までは言及していないが，Boester（2010）の枠組みは，インフォーマルな動的概念から始め，動的概念を含むフォーマルな静的概念の指導を段階的に行うことで，動的概念と静的概念の橋渡しができる指導アプローチの可能性を示唆しているのである。

また，Swinyard（2011）は生徒たちの定義の進展に焦点をあて，生徒たちが極限のフォーマル概念について筋道のある推論の仕方を描いている。それは，インフォーマル概念からフォーマル概念への移行のための指導と解せる。その概念移行には，実践上の結果から，二つの重要な概念シフトを指摘する。それは，動的概念において「xの値を最初に捉える見方」から「yの値を最初に捉えた後でxの値を一致させ，極限候補を探る見方」へのシフトつまり，ある任意の値に近接する無限のプロセスへの認知シフトの指摘である。

この理由をSwinyard（2011）は，「yを最初に捉える見方」によって生徒たちは，グラフ探索として焦点化された極限値がはっきりとわかり，フォーマル定義の認識に拍車がかかり，極限候補の存在を仮定するための構築ができることによるものとしている。そして，極限値とそうでない場合を区別する能力は，極限概念に本来備わっている微細な区別をじっと見る経験によって助けられるとしている。

これらの結果から示唆された指導アプローチとして，グラフの表象に関する議論の中心に生徒たちを向けることや無限の極限定義の再考に焦点化した指導デザインに移行することそして，yの値やその範囲を先に捉える見方を引き出すためのデザインされた会話を教師や研究者が生徒たちに与えることを指摘している。

3　極限の二つの概念の見方を統合しフォーマル概念構築を目指す指導研究

Nagle（2013）は，これまで多くの研究知見として生徒たちの極限概念においてインフォーマルとフォーマル概念の不一致があること，そして不一致の要因としてフォーマル概念が入門的な微分学習の中でインフォーマル概念として，生徒たちに経験されていないことを示唆した。その上で，これまでの極限概念に関する研究を整理し，インフォーマルとフォーマル概念双方の統合した極限概念指導の必要性を指摘してい

る。そこでは，まずインフォーマル概念とフォーマル概念の構築や指導に関して２項で上述した三つの研究と後述する４項の研究を整理（Ibid，pp４-７）した上で，もう一つ別の強固なインフォーマルから始めるフォーマル概念構築を目指したモデル（図１参照）を提案している（Ibid, pp9-10)。

このモデルの概念構築は，フォーマル概念をインフォーマル概念に組み込むことで，インフォーマル概念と統合し，双方の概念の見方を同時に形づくっていくことを目指している。

そして，概念構築に至るプロセスを指導アプローチとして，Nagle（2013）はインフォーマル概念をフォーマル概念に置き換えていくのではなく，インフォーマル概念をより強固に形づくっていくことを指摘している。この点では，インフォーマル概念を指導の中心とするアプローチとして，その理由は異なるが伝統的な入門的微分学習の方法と同じであることも示唆している（Ibid, p９)。

Nagle（2013）のモデルは,「動的と静的」（Boester, 2010; Lakoff & Núñez, 2000. 訳 植野・重光，2012)，「プロセスと対象」（Coitrill, el, et., 1996）,「xとyのどちらかを先に捉える見方」（Swinyard, 2011）をインフォーマル概念に統合した方法をとっている点がオリジナルな提案になっている。これは，Nagle（2013）が整理した四つの研究における統合として，それぞれの研究知見における極限概念を単独な概念の見方の移行で捉え，構築しようとする欠点を克服するとも指摘している。

このモデルを仮名リサによる入門的微分を行った教室から，Nagle（2013）はインフォーマル概念とフォーマル概念を統合した概念構築モデルの根拠を実証している。

例えば，関数の値を予想することが難しい場面を設定し，微分を初めて学習する生徒たちが極限の値を探る経験によって，リサはこれらの状況では極限の値が存在しないことを推測できることを示している（図２参照)。

さらに，動的概念をズームする方法によってリサはまた，極限概念の $\varepsilon-\delta$ 定義のより小さくすることができるという静的概念の気づきの発達も見られた。このズームする方法とは，$y=f(x)=x^2$ のグラフにおいて，$x=2$ のとき $f(2)=4$ に近づくことを示すために $x=2$ を含む区間の幅をより小さくしても，確かに $f(2)$ に近づいていくことが強調できる方法である（図３参照)。この方法により，インフォーマルな極限概念の $\varepsilon-\delta$ 定義を生徒たちが気づいていくことを指摘した。

そして，これら教室での議論によって生徒たちは極限の動的概念である「限りなく近づいていくこと」を納得していったと結論づけている。さらに，生徒たちの極限における注目を関数の予想された値として $\varepsilon-\delta$ 定義が紹介される前に焦点化することは，極限理解を長く対象として構築することができることも指摘している。

”Formalizing Introductory Notions”

「入門的極限概念の見方を形づくっていくモデル」

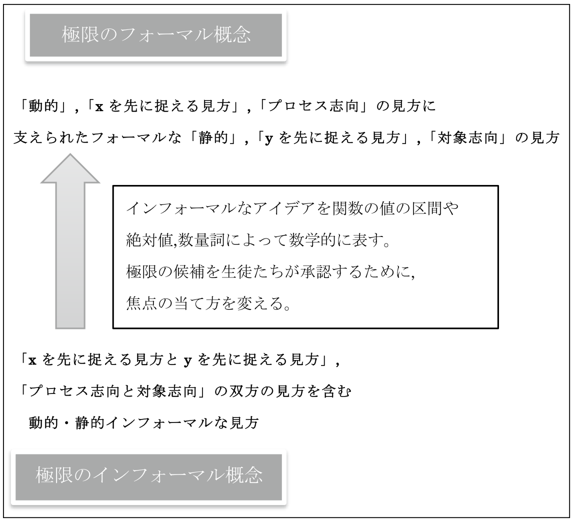
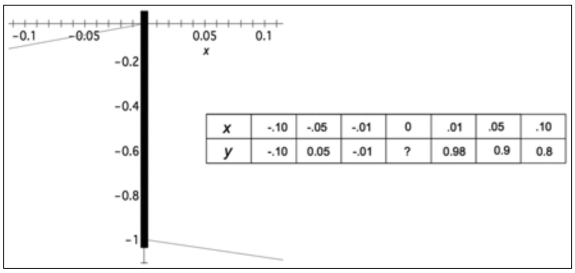


図１：置き換えよりむしろ形づくっていくことに焦点化したより強固な入門的極限概念構築の別モデル

(Nagle, 2013, p9, *Figure* 9.より引用)



x	-.10	-.05	-.01	0	.01	.05	.10
y	-.10	0.05	-.01	?	0.98	0.9	0.8

図２：極限値が断定できない場合のグラフ図と表

(Nagle, 2013, p9, *Figure* 8.より一部引用)

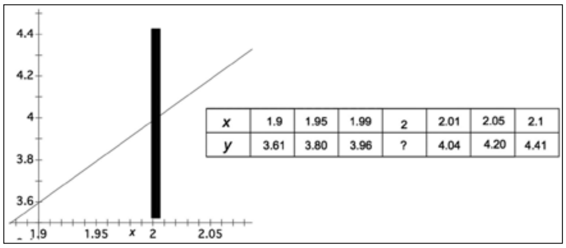


図３：リサがx= 2 をおきズームして調べ，説明を行う時のグラフ図と表

（Nagle, 2013, p8, *Figure* 7.より一部引用）

以上をまとめてNagle（2013）は，極限の静的概念は実際に生じる関数では，けして表れないので，根拠のある値を近接の値としてみなすための話し合いの必要性を指摘する。その話し合いとは，グラフや表を見たり操作する活動を通して，静的概念の説明を行うことやその説明を聴くことである。これにより，生徒たちにとって難しいε－δの概念を解釈しなくても，「yを先に捉える見方」（図４参照）を助長することやまた，生徒たち自らが近接概念を処理することで，静的概念が発達することを指摘する。

そして，極限のフォーマル定義に対してこのようなより建設的で微分の入門的な組み立て方を学ぶ利点に加えて，「静的と動的」，「対象とプロセス」，「yとxのどちらかを先に捉える見方」の概念の見方を統合することはまた，生徒たちが誤概念を持たないことや入門的な微分を学ぶ際の手続き的な計算の背景にある概念を与えるためのサポートとなることも指摘している。

これら結果から，Nagle（2013）は今後，生徒たちがフォーマル定義への移行を楽にする極限の強固なインフォーマル概念の作り方を，入門的微分指導の研究として考慮することを提言しているのである。

４ インフォーマル概念を極限概念の中心に据えた指導研究

認知科学，経験科学の台頭による学習者主体の認識や経験を中心とする研究の興隆からフォーマル定義をインフォーマル定義に適合させ，インフォーマルな動的概念を極限概念の中心とする研究がある（e.g., Lakoff & Núñez , 2000）。

Lakoff & Núñez（2000）は極限の定義においてε－δなどを使用するフォーマル定義の理解は必要のないことを示唆している。そこでは，フォーマル定義におけるε－δなどの静的概念で使用する用語をインフォーマル概念に適合させ，極限概念には動的概念で

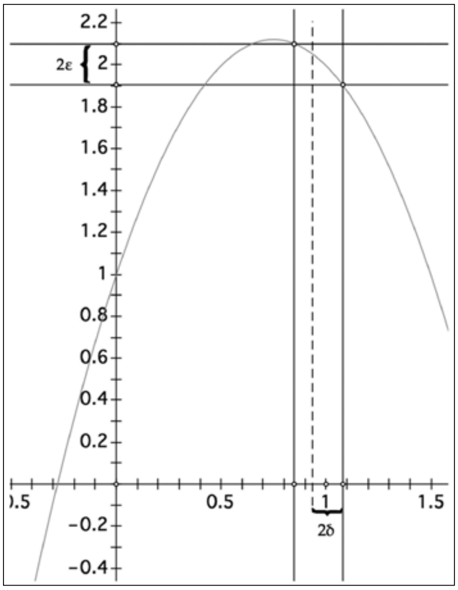


図４：ε—δ定義のグラフ図における表象

（Nagle, 2013, p4, *Figure* 3.より引用）

使用する用語を含むものとしたフォーマル定義を変換する理論を用いている。その理論に使用されるのがメタファーである。Lakoff & Núñez (2000) はメタファーを，“the Basic Metaphor of Infinity（BMI以下，略記する）”「無限の基本メタファー」によって定義づけしている。極限概念におけるBMIとはフォーマル概念を定義するために関数極限を動的に定義する方法である。具体的には，関数の連続する数値列の幅や範囲，領域を広げたり，狭めたりする人が最初に心に描くイメージを関数極限の動的概念のフォーマル概念として定義している。

そして，Lakoff & Núñez（2000）はこの理論を用いた指導提案は行っていないのだが，入門的微分学習において，動的概念を軽視せずフォーマル概念を適合させる中で，関数の定義域と値域を広げたり崩したりする動的イメージを生徒たちが持つことで，静的概念が強調されることを示唆している（Ibid, pp258-261）。

以上, これまでの指導研究の経緯をまとめると,

①数学ではフォーマル概念が極限概念の正式な概念であるとすることから，インフォーマル概念はフォーマル概念理解の妨げになるとするインフォーマル概念に対する排他的な指導研究から，②インフォーマル概念とフォーマル概念の拮抗によるフォーマル概念構築のためインフォーマル概念から始める概念構築の研究が登場し，それら研究も極限概念の中にある対比的な

概念の見方ごと（「動的と静的」「プロセスと対象」など）に整理され（Nagle,2013），③インフォーマル概念構築のため動的概念に着目した生徒の活動や経験を通してフォーマル概念をインフォーマル概念に組み込んだ指導アプローチや，④インフォーマル概念の動的概念にフォーマル概念の存在を認め，インフォーマル概念自体がすでにフォーマル概念を強調するものとした動的概念構築を目指す指導研究が登場している。そして特に，後者二つは極限の動的概念に着目した研究となっている。

そこで，近年（2000年代）の研究動向として動的概念を中心とした指導研究に移行している背景を以下で述べる。Lakoff & Núñez（2000）によると極限の $\varepsilon-\delta$ 定義は，極限に近づくという数学的概念を特徴付けていないと指摘する。この定義は，「接近」の概念がなく，動的概念と偶然に同じ場合を含む別の概念を定義したものと指摘している（Ibid, p260）。この指摘に従うと元来，極限概念は数学的に「近接」や「接近」の概念を含むものである。この近接概念を数学的に矛盾なく形式的に整理統合した方法として $\varepsilon-\delta$ 定義が存在する。つまり，静的概念である $\varepsilon-\delta$ 定義は極限本来の動的概念とは異なる定義付けといえる。従って，極限の動的概念に焦点化していく指導研究の動向は当然の成り行きといえるかもしれない。

B　動的概念に着目した入門的極限指導研究の動向

今後は，インフォーマル概念とフォーマル概念，二つの概念を統合し動的概念構築へ向かう指導の研究が展開されていくことが予想される。実際，二つの概念を統合した指導研究の中には，動的概念へ注目し，実践上の指導における活動や経験を重視する研究が登場している（e.g., Nagle, et al., 2017）。

そこで，上述したNagle（2013）とLakoff & Núñez（2000）の二つを代表とする研究をインフォーマルとフォーマル概念を統合した研究としてここで整理してみる。

まず，この二つの研究は共通点として，他の研究とは異なる指導研究の動向が見いだせる。それは，インフォーマル概念は動的概念，フォーマル概念は静的概念として動的静的概念をインフォーマル，フォーマルそれぞれの定義に基づく概念によって二分にセパレートせずに，動的静的概念を統合している点である。

具体的には，フォーマル概念の一つである静的概念をインフォーマル概念の中に静的概念として取り込み，動的概念とともにフォーマル概念を形づくっていく点（Nagle, 2013），フォーマル概念にある静的概念をメタファーによって動的概念として扱っている点（Lakoff & Núñez, 2000）である。つまり，インフォーマルが動的概念，フォーマルが静的概念といったセパレートをしない概念の捉え方が相似点である。もう一つの相似点は共に，フォーマル定義の静的な専門用語に基づいている $\varepsilon-\delta$ を取り除いている点である。つまり，$\varepsilon-\delta$ 定義の表記は除き，概念は残すことで動的静的概念構築を同時に目指している点である。これは，動的な専門用語での解釈を生徒たちが行う際，形式的 $\varepsilon-\delta$ の定義によって生徒は困難を感じるといった知見に基づくものである。

一方，この二つの研究は極限概念の指導をインフォーマル概念構築に軸足をおき，動的概念をインフォーマル概念における中心的概念として焦点化し考察する点は同じだが，異なる指導原理が存在する。その違いとは，一つはフォーマル概念をインフォーマル概念の指導に組み込む原理であり（Nagle, 2013），もう一方はインフォーマル定義の中心である動的概念そのものがすでにフォーマル概念を含むあるいは動的概念には静的概念が含まれていると解釈することで導かれるメタファーを用いた指導原理である（Lakoff & Núñez , 2000）。そこで，インフォーマル概念指導の大別したこの二つの研究を潮流とする研究の概観を以下に述べることで，今後の実践における指導研究の示唆を得ることを試みる。

1　インフォーマル概念にフォーマル概念を組み込んだ指導研究

この研究は，フォーマル概念をインフォーマル概念の指導に組み込むことによる極限概念構築を探る特徴がある。さらに，どんな活動が必要でその活動からどのような指導の効果があるのかを探る研究となる。

例えば，遠山（1958）は高等学校の指導における量の数学学習のゴールを微積分学におき，指導においてインフォーマル定義だけではなく，フォーマル定義も高等学校数学に導入する必要性及び指導方法を解説している（遠山，1969，再版2013）。さらに，指導の目的を高等数学から眺めた初等中等数学におき，仮名の生徒たちの対話を想定し，概念構築していく様子を捉えている (Ibid, pp418-425)。その指導アプローチは，瞬間変化率である微分係数の導入に，フォーマル概念である $\varepsilon-\delta$ 定義を組み込んでいる（Ibid, pp254-304）。

また，動的概念を極限概念の中心概念と捉え，極限

のフォーマル概念を動的概念に組み込んだ極限概念の研究としてJones（2015）がある。この研究は，上述した遠山（1969）の指導アプローチを実証していくと考え紹介する。Jones（2015）の研究では，入門的微分学習を選択した７名の大学生たちの動的推論と無限を扱う極限の計算と解釈及び概念理解との関係が調査されている。遠山（1969）の指導アプローチにある瞬間変化率を生徒たちが思考する際に，「だんだん近づく」という概念が動的推論を通して，極限の無限概念にどのように関与するのかを，極限の問題を解いた生徒のインタビューからJones（2015）が描いている点で，遠山（1969）を実証する研究と考える。

調査結果として，動的推論を行った生徒たちは極限の問題の解答に対して，根拠のある説明を行っていた。一方，生徒たちがほとんど動的推論を行わないと解答が混乱し，答えの解釈の理由付けは，ほとんどなかった。この結果をJones（2015）は，動的推論が極限の無限概念の持つ意味の推定と無限概念の実体の存在の気づきの双方から，生徒たちの解答が誘われた結果と解釈している。つまり，極限概念に本来内在するプロセスと対象に生徒たちの動的推論が作用することで，生徒たちは単に計算の手続きとして解答をするもしくは，解答に至る思考過程で混乱することなく，極限概念の意味に対して根拠を持って，説明することができるようになっていくことをJones（2015）は示唆しているのである。

さらに，動的推論は生徒たちの学習における間違いやすい点をサポートし，共変数の推論を促進したのであった。同時に，また実践上で適用された科学の文脈は，生徒たちを動的推論に没頭させてもいたのであった。

これらの結果からJones（2015）は，極限指導のアプローチにおける示唆として動的推論の必要性を述べている。そして，現実世界の文脈における公式の適用によって生徒たちが様々な量の性質を心に描くことをサポートしていることから，今後の研究上の示唆としてより強固な動的概念と共変数の推論との関係を探ることを示唆している。

この動的概念と共変数の関係を Nagle, et al.（2017）では，上述した概念構築のモデル”Formalizing Introductory Notions”（Nagle, 2013, p 9）をもとに改良した指導アプローチから調査している。その中で強調していることは，極限と関数の値とは独立していることと動的概念を軽視しない静的概念と合体することを提起している（Nagle, et al., 2017, p574）。

Nagle, et al.（2017）の研究では，関数の極限値を予想し，その予想を説明することで極限概念を紹介する教育的活動を奨励した研究（Nagle, 2013）を受け，極限の動的概念を無視しないで，フォーマル概念をインフォーマル概念に組み込むことで，インフォーマル概念の育成をサポートするための活動を指摘する。ここでいうフォーマル概念とは，関数において二つの値が共変する近接概念であり，この概念をインフォーマル概念指導における活動に組み込む指導アプローチを提示している。

具体的には，x軸とy軸双方の同時に起こる値の変化を捉える活動を通して，生徒たちの動的概念を育成し，xとyの共変する動的専門用語（「x→c」:xがcに限りなく近づく時，「lim f（x）＝L」: 関数y＝f（x）が一定の値Lに限りなく近づくならば，その値Lを極限値とする）を育成するものである。

この活動には，生徒たちが極限のインフォーマルな理解を関数の値に基づいて発達させていくことが目指されている。ここに，Nagle, et al.（2017）による生徒たちの極限の共変数の解釈と一般的な極限記号で結びつけるNagle（2013）の改良の拠り所がある。この改良の前提として，生徒たちの共変数の推論の不足を指摘している。それは事例分析の結果，xとyが同時に，変化するときの極限とは，ほぼx=cに到達するとする誤概念が表出したことを受けている。

つまり，多くの生徒たちが同じようにほぼx＝cに到達するという概念が極限であるといった誤概念の表出は，出力の変数yと結びつけて考える動きの欠如によるものと指摘しているのである。生徒たちは，Lに近づくというよりむしろyの値に等しくなるという引き出し方をするという指摘である。

また，極限表記の中にある「「x→c」は，xはシンボルとしてxがcに近づくことが強調されるが，「lim f（x）＝L」はシンボルとしてLに等しいとして生徒たちの心に浮かんでいる。」ことに由来する誤概念があることも同時に指摘している（Ibid, p583）。

さらに，教師のふるまいも同時に指摘する。特に，表の値や関数のグラフ表示を見る活動を通して，xとyの値の双方が変化していく仕方を生徒に思考してもらうことや活動を終えた時に，「xの値やyの値がどうなっている？」と訊く事で，極限の値を関数の値とするミスを予想することやなぜそうなのかあるいは，なぜそうではないのか根拠を持って生徒たちが説明することができることを指摘し推奨もしている。また，これらのことは極限の値はxの値として到達する必要が

ないこと，x＝cかx＝cに近づくかであることが強調できることも指摘する。

そして，極限表記自体に極限概念がほぼx＝cに到達するという別の意味を持つことにもなるので，極限表記の使用を極限概念がインフォーマルに探究されるまで待つことも指導において奨励している。

Nagle, et al.（2017）は，最後にxとyの共変数の推論の不足からくる「極限は関数の値と同じである」という概念を減らすことを強調している。そのためには，入門的微分学習で極限のフォーマルな見方とインフォーマルな見方の双方が前進した数学として学ばれることが必要で，そのための研究の蓄積が求められるということでまとめている。

2　メタファーの使用によるインフォーマル概念を極限概念の中心とする指導研究

この研究の特徴は，インフォーマル定義の概念理解のために，メタファーを用いて極限概念イメージと指導における活動や経験を結ぶもしくは，どれだけ結びつけられるのかを探る研究である。

極限概念理解のためのメタファーと推論との関係を調査した研究がある。Oehrtman（2009）は，極限のインフォーマル概念に関する大学生たちの自発的な推論を入門的微分学習において五つのメタファーを用いて調査している。それら五つのメタファーとは対象，関係性，論理に関する直感的なものである。具体的には①「Collapse metaphors:次元を崩すこと」多項式の関数を微分すると次数が下がること，②「Approximation metaphors:近似」極限を求める操作として微分するとは，関数を近似する意味があること，③「Proximity metaphors:近接」極限の意味として，ある点における間隔の中で近接すること，④「Physical Limitation metaphors:身体的極限」ある点の極限をとる際の全く存在がなくなる前の小さな縮小，⑤「Infinity as Number metaphors:数としての無限」数の無限の扱い方の五つである（Ibid, p396）。

結果から,極限概念に関する生徒たちの推論は,経験的な概念領域のメタファーの応用による影響から表れていることを指摘している。

メタファーの応用に関しては,一連のメタファーと生徒たちとの共鳴が，メタファーの含意する生徒たちの推論から確認されている。また，生徒たちは極限概念構築に適用するため，前もってメタファーを壊し，新たにメタファーを自主的に再構築する場面も見られたのであった。

このような結果から，指導アプローチとしてOehrtman（2009）は，生徒たちの強調や共鳴の基準を一連のメタファーとして分類し，生徒たちが難しい問題に対した時，これらのメタファーを適切に使用できるようにすることを示唆している。そして，この研究で特徴付けられた詳細で強固な一連のメタファーが極限概念の持つ様々な概念理解のための含意する点に，今後の研究の可能性を見いだしている。

このOehrtman（2009）の研究をもとにした教師のメタファーに関する研究としてPatel, McCombs&Zollman（2014）の研究を紹介する。この研究は，教師のメタファーの使用と推論及び生徒のそれとの関連で，極限のメタファーを用いた指導研究として実践上の示唆に富むと考える。

Patel, McCombs&Zollman（2014）は，教師のメタファーを用いた推論の調査を行っている。メタファーを扱った研究として上述したOehrtman（2009）が明らかにした初学者において，微分学習で極限を解き明かすためには，メタファーの様々な見地と移行が正確にできる能力が必要となる知見をもとに，生徒の推論過程に対する教師のメタファーとの関連を調査した。

具体的には，Oehrtman（2009）の研究で調査した入門的な微分を学習する生徒のメタファーを用いた推論に基づいて，11大学の微分を指導する教師に極限概念のメタファーを用いた推論を調査した。

結果として，教師は自身の中にある推論のメタファーを分類するために問われたとき，何人かの教師は研究者が割り当てた項目とは一致しなかった。さらに，教師が問題解決の際に使用した項目は，教師の見方あるいはメタファーとは全く一致しなかった。例えば，ある教師がグラフの見方をする項目を選んだとしてもそれは，別の代数的見方をするためのものであった。

これらの結果から，Patel, McCombs&Zollman（2014）は，教師は自分自身のメタファーの使用に気づいていないこと，また自身の選択したメタファーの不一致にも気づいていないことを指摘する。そして，この結論から導く洞察として，教師がメタファーや見方を変えるたびに，生徒たちは教師とメタファーや見方が一致せず，メタファーを使用することができないのでフラストレーションがたまることを示唆した。

これらを踏まえ，Patel, McCombs&Zollman（2014）は，さらに指導アプローチとして以下を指摘している。それは，教師のメタファーを用いた推論の知識は生徒たちの学習機会のよりよい推進のため，指導実践

に形づくられ使用することができることを指摘する。

具体的には，微分学習において極限を指導する教師が一連のメタファーに気づき，それらを深めていくことで，極限概念について生徒たちの未理解あるいは生徒たちが正しいメタファーを用いた推論を保つことができると結論づけている。教師がメタファーを使用していることに気づくことで，生徒たちの極限概念が明らかになることを促進するとしている。

さらに，それら研究の実践上の効果として，生徒たちが正確に教師の概念の意味を反映した理解を知覚するならば，生徒たちのメタファーの間違った解釈が避けられることも述べている。

そして，今後の研究として生徒たちの極限概念のメタファーを用いた理解と教師によって使用されたメタファーとの関連が多数存在することを予想し，それらを調査することを示唆している。

また，山口（2014）は，メタファーの表現は直接用いていないが，実際の授業において「時間の幅が 0（ゼロ)」というメタファーを使用し，x の幅を限りなく 0（ゼロ）に近づけることで，日常に潜む瞬間の速さの概念に至るプロセス（具体的には，平均の速さとの違いの考察）を通して，入門的微分学習における極限の段階的理解を示している。そこでは，動的推論を導く指導アプローチとして，瞬間の速さを求める前段階（様々な小区間の幅の平均の速さを求めること）が意味ある活動となることを示唆している。

3　おわりに

A　極限指導研究の展望

本稿では，Nagle（2013）の整理した極限概念研究及び概念構築モデルをもとに，入門的極限指導における二つの研究動向の潮流を明らかにした。そして，その研究動向から今後の極限指導研究への展望として以下，三つの示唆を述べる。

一つは，二つの研究の接点及び動的概念構築との関係である。この二つの研究から得る動向は見方を変えれば，同じことを追求しているといえる。なぜなら，フォーマル概念をインフォーマル概念に組み込むにせよ，フォーマル概念をインフォーマル概念として扱うにせよ何れにしてもインフォーマル概念の構築が極限概念の構築として入門的極限指導の研究においては重要な要素を持つということである。

次に，動的概念構築のための静的概念との同時追求する指導研究の必要性である。このことはまた，見方を変えると静的概念への着目といえる。つまり，静的概念を動的概念に組み込むにしても，あるいは静的概念を動的概念とみなすにしても静的概念をどう扱うかの研究ともいえる。

従って，前者であれば静的概念をどのようにして組み込んでいくか，そして Nagle, et al.（2017）も今後の研究としてあげている静的概念構築もしくはフォーマル概念の $\varepsilon-\delta$ 定義の理解にどう迫っていくのかが課題となるだろう。そして，後者であれば Williams（2001）も指摘している静的概念をメタファーの使用によりどこまで表現できるのだろうか。また，BMI の批判的な指摘でもある「有限から無限にさっと飛ぶ認識」が表現できるのかどうかが課題となるだろう。

最後は，動的概念構築と共変数の推論の関係である。そこには，概念構築の前段階として，グラフや表などのツール使用から推論を誘発させるもしくは誘発する研究が示唆される。さらには，極限概念を構成する他の概念（例えば，連続性や無限など）における推論との関係を調査することが今後の可能性として示唆される。

B　入門的極限指導の教育実践への示唆

本稿では，入門的微分学習における極限指導研究の動向を捉え，今後の研究の展望を行った。これらを踏まえ最後に教育実践上の示唆を述べる。

先ず，第一に動的概念構築のための指導アプローチの適用の可能性である。本稿ではインフォーマル概念指導のための研究を概観した中で，動的概念構築の有用性及び指導上の示唆を得た。第二に，動的概念構築のための極限概念における推論及びそれを促進するための指導上の示唆も得た。第三に，その推論のための活動や経験を学習過程に取り入れることの示唆も得た。

今後はこれらの示唆を受け，実践上では動的概念構築のための指導の在り方，例えば $\varepsilon-\delta$ 定義は示さないが，高等学校の微分学習において，動的概念に静的概念を取り入れた授業構想及びその実践，その実践のためのグラフや表などを活用した活動などが求められるといえよう。

注

1）極限のインフォーマル定義とは“f（x）を実関数とし，c を実数とする。式 $\lim_{x\to c} f(x)=L$ または $f(x)\to L\ (x\to c)$
は x の値を c に“十分に近づければ” f（x）の値を L に望む限りいくらでも近づけることができることを意味する。このとき「x を

c に近づけたときの f（x）の極限は L である」という。”

また極限のフォーマル定義として“インフォーマル定義は ε − δ 論法により

$\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x\,[\,0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\,]$

という形で厳密に定義される。このとき、この極限と関数 f（x）の x = c における値は無関係であり，f（c）≠ L であることもあれば f が c において定義されている必要もないのである。”と説明されている（https://ja.wikipedia.org/wiki/極限,2018年 9 月13日参照.）。

2）本稿でいう入門的極限指導とは，微分学習における ε − δ の記号を用いるフォーマル定義を学習する前の極限指導を指す。また，指導におけるインフォーマル定義に含まれる概念をインフォーマル概念とする。そして，フォーマル定義についても同様にフォーマル概念とする。

3）Coitrill, et, al.（1996）の研究では，数学知識をActions, Processes, and Objects, and they are organized into Structuresの 4 つの頭文字をとったAPOS理論の分析単位とし,これらをシェーマとして扱っている（Ibid,pp171-172)。

引用文献

Bezuidenhout, J.（2001）. Limits and continuity: Some conceptions of first- year students. *International Journal of Mathematics Education and Science Technology*, 32 (4)，487-500.

Boester, T.（2010）. Testing conceptual frameworks of limit: a classroom-based case study. *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* 13th Annual Meeting, 2010 February 25-28, Raleigh, NC.

Cornu, B.（1991）. Limits. In Tall, D. O.（Ed.）*Advanced Mathematical Thinking,* 153-166. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D.（1996）. Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior,* 15, 167-192.

Jones, S.R.（2015）. Calculus limits involving infinity: the role of students' informal dynamic reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 46, No. 1, 105-126.

文部科学省.（2009）. *高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編*，東京，実教出版.

Lakoff, G. & Núñez, R.（2000）. *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.（訳 植野義明・重光由加.（2013）. *数学の認知科学*. 東京，丸善出版.）

Nagle, C.（2013）. Transitioning from introductory calculus to formal limit conceptions. *For the Learning Mathmatics.* 33 (2)，2-10.

Nagle, C., Tracy, T., Adamas, G. and Scutella, D. (2017). Thr notion of motion: convariational reasoning and the limit concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol.48, No.4, 573-586.

中村幸四郎.（1980）. *近世数学の歴史－微積分の形成をめぐって－.* 東京，日本評論社.

大田邦郎.（2009）. 高等学校の積分指導におけるいくつかの問題. 北海道大学大学院教育学研究院紀要, 108, pp21-29.

Oehrtman, M.（2009）. Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (4)，396-426.

Patel, R. M., McCombs, P., Zollman, A.（2014）. Metaphor clusters: characterizing instructor metaphorical reasoning on limit concepts in college calculus. *School Science and Mathematic.*, 114 (5): 236-245.

Swinyard, C.（2011）. Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 93-114.

Tall, D. & Vinner, S.（1981）. Concept image and concept definition in math- ematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12 (2), 151-169.

Tall, D.（2013）. *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics.* England,Cambridge University Press.（監訳 磯田正美・岸本忠之.（2016）. *数学的思考－人間の心と学び－.* 東京，共立出版.）

Tirosh, D.（1991）. The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorial theory. In D. O. Tall（Ed.）*Advanced mathematical thinking*（pp.199-214）. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

遠山啓.（1958）. 量の問題について. *数学教室*，国土社, 8 月号，32.

遠山啓.（2013）. *基礎からわかる 数学入門*，ソフトバンククリエイティブ株式会社.

山口昌広.（2014）. 高等学校数学Ⅱにおける微分学習の指導改善に関する研究－微分することの意味理解に着目して－. 上越教育大学学校教育研究科修士論文（未公刊）.

Williams, S. R.（2001）. Predictions of the limit concept: an application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education* 32 (4)，341-367.

（指導教員　秋田喜代美教授）