The nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric stacks

論文内容の要旨

論文題目:

The nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric stacks
(トーリックスタックに対する非同変連接-構成可能対応)

氏名: 桑垣 樹

本論文の目的は、Fang–Liu–Treumann–Zaslow によって定式化された連接-構成可能対応を一般化し証明することである。連接-構成可能対応とはトーリック多様体に対するホモロジー的ミラー対称性予想を超局所幾何的に定式化したものである。証明はホモロジー的ミラー対称性に現れる二つの圏それぞれの貼り合わせ性質に基づいている。

ミラー対称性とは複素幾何とシンプレクティック幾何の間に予想されている非自明な関係である。ホモロジー的ミラー対称性とは、Kontsevich [Kon95] が 1994 年に定式化した予想でミラー対称性を二つの異なる由来を持つ (無限) 圏（連接層の導来圏と導来深谷圏）の圏同値としていいあらわす。例えば、Fano 多様体 X に対し連接層の導来圏 $\mathbf{coh}\, X$ を考え、ミラーの Landau–Ginzburg 模型 W に対して導来深谷–Seidel 圏 $\mathfrak{Fuk}\, W$ を考え、

$$\mathbf{coh}\, X \simeq \mathfrak{Fuk}\, W \tag{1}$$

を予想する。導来深谷–Seidel 圏 $\mathfrak{Fuk}\, W$ は W の Lefschetz 指貫に対するラグランジアン交叉 Floer 理論を用いて定義される。

一方で、超局所幾何の近年の進展は、シンプレクティック幾何の少なくとも一部は超局所層理論でとらえられることを示唆している。柏原–Schapira [KS90] によって発展させられた超局所層理論における「超局所台」という概念は、多様体 Z 上の層に余接束 T^*Z の部分集合を対応させる。特に層が構成可能層であるときには、超局所台はラグランジアンになる。Nadler–Zaslow [NZ09, Nad09] はこの対応を精密化し、Z 上の構成可能層の導来圏と、T^*Z の無限小巻きつき深谷圏が圏同値であることを示した。

上記の Nadler–Zaslow の定理は、「位相的深谷圏」の最初の例の一つと考えれる。ここで、位相的深谷圏とは、Floer 理論を使わないで定義されながら、深谷圏と圏同値になると期待される圏を大雑把に指す。Kontsevich [Kon] は任意の Stein 多様体が位相的深谷圏を持つと予想し、穴あき Riemann 面についてはDyckerhoff-Kapranov [DK13]、Haiden-Katzarkov-Kontsevich [HKK14]、Nadler [Nad16] によって記述が得られている。また、Landau-Ginzburg 模型に対する深谷圏にも位相的な記述が提案されているものがある：Fang–Liu–Treumann–Zaslow [FLTZ11, FLTZ12] はトーリック多様体のミラーに対する位相的深谷圏の候補を与え、Sibilla-Treumann-Zaslow [STZ14] は射影直線鎖に対する記述、Nadler はパンツ対のミラーに対して記述を与えた。

ホモロジー的ミラー対称性の定式化に位相的深谷圏を用いることも議論されてきている。Fang–Liu–Treumann–Zaslow [FLTZ11, FLTZ12] は連接-構成可能対応を完備トーリック多様体に対し定式化し証明した。ここで連接-構成可能対応とは、トーリック多様体にたいするトーラス同変なホモロジー的ミラー

対称性である。Sibilla–Treumann–Zaslow [STZ14] はこれを射影直線鎖に一般化した。Nadler [Nad16] はパンツ対に対し、Pascallef–Sibilla [PS16] は穴あきリーマン面に対し、それぞれ位相的深谷圏をもちいてホモロジー的ミラー対称性を証明した。

本論文では、トーリックスタックに対するホモロジー的ミラー対称性 (非同変連接-構成可能対応) を、Fang–Liu–Treumann–Zaslow によって導入された位相的深谷圏を用いて研究した。すなわち、(1) の右辺にある圏を超局所幾何的に定義された圏に置き換えて研究した。このような設定は、Bondal [Bon06] の先駆的な仕事に端を発し、Fang–Liu–Treumann-Zaslow [FLTZ11, FLTZ12] によって定式化された。

本論文では常に $\mathbb{C}$ 上で議論を行う。M を階数 n の自由アーベル群、N をその双対とする。Σ を $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ で定義された有理有限扇とし、Σ で定義されるトーリック多様体を X_Σ と書く。また、

$$\Lambda_\Sigma := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} p(\sigma^\perp) \times (-\sigma) \tag{2}$$

とする。ここで、$p\colon M_{\mathbb{R}} \to M_{\mathbb{R}}/M =: T^n$ は射影であり、$\sigma^\perp$ は σ の任意の元で消される $M_{\mathbb{R}}$ の部分集合である。すると、Λ_Σ は $T^*T^n \cong M_{\mathbb{R}}/M \times N_{\mathbb{R}}$ 内のラグランジアン部分集合になる。このような設定は Tyomkin [Tyo12] および Geraschenko–Satoriano [GS15] の意味でのトーリックスタックのあるクラスにも拡張できる。すなわち、$\beta\colon L \to N$ を有限階数自由アーベル群の間の有限余核をもつ射とし、$\hat{\Sigma}$ と Σ を $L_{\mathbb{R}}$、$N_{\mathbb{R}}$ で定義された有限有理扇とする。本論文では以下を常に仮定する：$\beta_{\mathbb{R}}$ は $\hat{\Sigma}$ と Σ の間の半順序集合としての同型を誘導する。対応するトーリックスタックを $\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$ と書き、上記の構成を一般化して定義されるラグランジアン部分集合を $\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}$ とかく。

連接側に現れる無限圏としては、

(i) $\mathbf{Ind\,coh}\,\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$: $\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$ 上の帰納連接層の導来無限圏、

(ii) $\mathbf{Qcoh}\,\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$: $\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$ 上の準連接層の導来無限圏、

(iii) $\mathbf{coh}\,\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$: $\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$ 上の連接層の導来無限圏、

(iv) $\mathbf{perf}\,\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$: $\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$ 上のパーフェクト複体の無限圏

を用いる。構成可能側は次のように定義される。まず、$\mathbf{Sh}^c(T^n)$ を T^n 上の構成可能層の導来無限圏とし、$\mathbf{Sh}^\diamondsuit(T^n)$ を準構成可能層の導来無限圏とする。すると、

(i) $\mathbf{Sh}^\diamondsuit_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n)$: 超局所台が $\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}$ に含まれる対象で張られる $\mathbf{Sh}^\diamondsuit(T^n)$ の充満部分圏、

(ii) $\mathbf{Sh}^w_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n)$: $\mathbf{Sh}^\diamondsuit_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n)$ のコンパクト対象からなる部分圏、

(iii) $\mathbf{Sh}^c_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n)$: 超局所台が $\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}$ に含まれる対象で張られる $\mathbf{Sh}^c(T^n)$ の充満部分圏

が定義され、これらを用いる。 ここで、$\mathbf{Sh}^w_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n)$ は Nadler [Nad16] によって導入された巻き付き構成可能層と呼ばれるもので、巻き付き深谷圏の超局所幾何での対応概念と考えられている。

本論文の第一主結果は次である。

定理 1. ∞ 圏の圏同値

$$\mathbf{coh}\,\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta} \simeq \mathbf{Sh}^w_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n) \tag{3}$$

が存在する。さらに Σ が完備であれば、∞ 圏の圏同値

$$\mathbf{perf}\,\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta} \simeq \mathbf{Sh}^c_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n). \tag{4}$$

が存在する。$\hat{\Sigma}$ が非特異で Σ が完備であれば、

$$\mathbf{Sh}^w_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n) \simeq \mathbf{Sh}^c_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n) \tag{5}$$

が存在し、特に

$$\mathbf{perf}\,\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta} \simeq \mathbf{Sh}^c_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n) \tag{6}$$

である。

このような形の定理はもともと Bondal [Bon06] によって Fano 多様体の中の特別なクラスについて提起され、Fang–Liu–Treumann–Zaslow [FLTZ11, FLTZ12] により超局所幾何をもちいて非特異完備トーリック多様体について定式化・予想された。これを連接-構成可能予想と呼ぶ。その後、Scherotzke–Sibilla によってトーリック軌道体の場合に定式化され、池と著者 [IK16] によって非完備の場合に一般化された。

完備の場合に、予想の証明は、(i) zonotopal の場合に Treumann [Tre10]、(ii) cragged の場合に Scherotzke–Sibilla [SS16]、(iii) 二次元の場合に著者 [Kuw15] によって与えられている。非完備の場合は、完備化について証明できれば十分であることが池と著者 [IK16] によって示されている。Fang–Liu–Treumann–Zaslow [FLTZ11] はトーラス同変のヴァージョンを証明している。

定理 1 は次の定理の系として得られる。

定理 2. ∞ 圏の圏同値

$$\mathbf{Ind}\,\mathbf{coh}\,\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta} \simeq \mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n) \tag{7}$$

が存在する。

実際、定理 1 (3) は定理 2 (7) のコンパクト対象をとることで得られる。

定理 2 の証明は、両辺の無限圏の貼り合わせに基づいている。すなわち、アファインの場合に証明を行い、それらを貼り合わせることによって定理 2 を得る。非特異アファインの場合には、$\mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n)$ に自己射が $\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta}$ の座標環と同型である生成子を見つけることで証明できる。特異アファインの場合は、トーリック特異点解消をとることで、非特異の場合に帰着して証明する。

貼り合わせについては、連接側では Zariski 降下という貼り合わせ定理がある。これに対応して、構成可能側では以下のような貼り合わせ定理を証明できる。$\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}$ を $\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\Lambda_\sigma$ という形で書く。ここで、Λ_σ は各アファイン座標と対応して定義される。$C(\Sigma)$ を Σ から定義される Čech 半順序集合とする。本論文の第二主結果は次である。

定理 3. ∞ 圏の圏同値

$$\mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(T^n) \simeq \varprojlim_{C(\Sigma)} \mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_\bullet}(T^n). \tag{8}$$

が存在する。

定理 1 と定理 3 は並行に証明される。定理 3 の証明の鍵となるのは、連接側での開集合への制限関手のミラー対応物を具体的に記述することである。その記述は Tamarkin の射影 [Tam08] を、この設定に書き直すことで得られる。位相的深谷圏の貼り合わせ性質は、Pascaleff–Sibilla [PS16] でも 1 次元の場合に記述されており、定理 3 は高次元への一般化となっている。

References

[Bon06] A. I. Bondal, *Derived categories of toric varieties*, Convex and Algebraic geometry, Oberwolfach conference reports **3** (2006), 284–286.

[DK13] Tobias Dyckerhoff and Mikhail Kapranov, *Triangulated surfaces in triangulated categories*, eprint arXiv:1306.2545 (2013).

[FLTZ11] Bohan Fang, Chiu-Chu Melissa Liu, David Treumann, and Eric Zaslow, *A categorification of Morelli's theorem*, Invent. Math. **186** (2011), no. 1, 79–114. MR 2836052

[FLTZ12] ———, *T-duality and homological mirror symmetry for toric varieties*, Adv. Math. **229** (2012), no. 3, 1875–1911. MR 2871160

[GS15] Anton Geraschenko and Matthew Satriano, *Toric stacks I: The theory of stacky fans*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 2, 1033–1071. MR 3280036

[HKK14] Fabian Haiden, Ludmil Katzarkov, and Maxim Kontsevich, *Flat surfaces and stability structures*, arXiv preprint arXiv:1409.8611 (2014).

[IK16] Yuichi Ike and Tatsuki Kuwagaki, *Categorical localization for the coherent-constructible correspondence*, eprint arXiv:1609.01177 (2016).

[Kon] Maxim Kontsevich, *Symplectic geometry of homological algebra*, available at http://www.ihes.fr/ maxim/publicationsanglais.html.

[Kon95] Maxim Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 120–139. MR 1403918 (97f:32040)

[KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990. MR 1299726 (95g:58222)

[Kuw15] Tatsuki Kuwagaki, *The nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric surfaces*, arXiv preprint arXiv:1507.05393, to appear in Journal of Differential Geometry (2015).

[Nad09] David Nadler, *Microlocal branes are constructible sheaves*, Selecta Math. (N.S.) **15** (2009), no. 4, 563–619. MR 2565051

[Nad16] David Nadler, *Wrapped microlocal sheaves on pair of pants*, eprint arXiv:1604.00114 (2016).

[NZ09] David Nadler and Eric Zaslow, *Constructible sheaves and the Fukaya category*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 1, 233–286. MR 2449059

[PS16] James Pascaleff and Nicolo Sibilla, *Topological Fukaya categories and mirror symmetry for puctured surfaces*, eprint arXiv:1604.06448 (2016).

[SS16] Sarah Scherotzke and Nicolò Sibilla, *The non-equivariant coherent-constructible correspondence and a conjecture of King*, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 1, 389–416. MR 3437841

[STZ14] Nicolò Sibilla, David Treumann, and Eric Zaslow, *Ribbon graphs and mirror symmetry*, Selecta Math. (N.S.) **20** (2014), no. 4, 979–1002. MR 3273628

[Tam08] Dmitry Tamarkin, *Microlocal condition for non-displaceablility*, eprint arXiv:0809.1584 (2008).

[Tre10] David Treumann, *Remarks on the nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric varieties*, arXiv preprint arXiv:1006.5756 (2010).

[Tyo12] Ilya Tyomkin, *Tropical geometry and correspondence theorems via toric stacks*, Math. Ann. **353** (2012), no. 3, 945–995. MR 2923954