論文の内容の要旨

博士論文題目

A new relationship between the dilatation of pseudo-Anosov braids and fixed point theory
(擬アノソフ組みひもの拡張率と固定点理論との新たな関係)

氏名：川島　夢人

本論文では、擬アノソフ組みひもの拡張率と固定点理論との新たな関係を得た。はじめに擬アノソフ組みひもについて述べる。Σ_g を種数 g の閉曲面とし、P_n を Σ_g の n 点部分集合、$\Sigma_{g,n}$ を Σ_g から P_n を除いた Σ_g の部分集合とする。$\Sigma_{g,n}$ のオイラー数が負の場合を考える。f を Σ_g の同相写像で P_n を集合として保つものとする。f が周期的であるとはある正の数 k が存在して f^k が恒等写像になること、f が可約であるとは f 不変な $\Sigma_{g,n}$ の 1 次元閉部分多様体 J が存在して J の $\Sigma_{g,n}$ での補集合の各連結成分についてオイラー数が負であるかメビウスの帯であるかのいずれかが成り立つことを言う。最後に f が擬アノソフであるとは、1 より大きい定数 $\lambda > 1$ と横断的な measured foliation $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ の組で $f(\mathcal{F}^s) = (1/\lambda)\mathcal{F}^s$ と $f(\mathcal{F}^u) = \lambda\mathcal{F}^u$ を満たすものが取れることを言う。Σ_g の同相写像のイソトピー類 φ に対し、φ が周期的であるとは φ の代表元として周期的な元が取れることを言う。同様に、φ が可約であるとは φ の代表元として可約な元が取れることを言い、φ が擬アノソフであるとは φ の代表元として擬アノソフな元が取れることを言う。

Thurston[8] によって Σ_g 上の P_n を固定する同相写像のイソトピー類は周期的、可約あるいは擬アノソフであることが示された。組みひも群は円板の点付き写像類群とみなせるので、各組みひもも周期的、可約あるいは擬アノソフに分類できる。さらに Bestvina and Handel[2] によって曲面上の同相写像の分類を与えるアルゴリズムが与えられた。彼らはこのアルゴリズムを用いて拡張率と呼ばれる擬アノソフ写像の不変量を計算する方法を確立した。

拡張率自身が様々な分野と関係しており、様々な研究者によって研究されている。一例を挙げると、拡張率の自然対数はエントロピーと呼ばれるエルゴード理論において重要な不変量と一致することが知られている。さらにエントロピーは Ivanov[4] によって漸近的ニールセン数と呼ばれる固定点理論における不変量の自然対数とも一致することが示されている。本論文では、Jiang と Zheng が [5] で用いた表現を使い、擬アノソフな組みひもの拡張率を決定する新たな式を示した。

主定理を述べるためにいくつか定義を述べる。まず複素数列 $\{a_n\}$ の増大率 $\operatorname*{Growth}_{n\to\infty} a_n$ を

$$\operatorname*{Growth}_{n\to\infty} a_n = \max\left\{1, \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right\}$$

で定義する。また任意の集合 S に対して S を基底とする自由可換群 $\mathbb{Z}S$ でのノルムを $x = \sum_{s\in S} k_s s$

が有限和のとき

$$\|x\| = \sum_{s \in S} |k_s|$$

で定義する。また $\mathbb{Z}S$ の有限和を係数に持つ行列 A に対して A のノルム $\|A\|$ を各成分のノルムの行列 $(\|a_{ij}\|)$ で定める。

P_n を $\operatorname{int} D^2$ の $n \geq 0$ 点部分集合とし $D_n = D^2 \setminus P_n$ とする。また

$$\begin{aligned} &F_{n,m}(D^2) = \{(z_1, \ldots, z_m) \in (D_n)^m \mid z_i \neq z_j \text{ for all } i \neq j\} \\ &\mathcal{C}_{n,m}(D^2) = F_{n,m}(D^2)/\mathcal{S}_m \\ &IT_{n,m}(D^2) = F_{0,n+m}(D^2)/\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m \end{aligned}$$

とする。ただし対称群 $\mathcal{S}_m$ は $F_{n,m}(D^2)$ に、$\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m$ は $F_{0,n+m}(D^2)$ に点の入れ替えで作用する。$\mathcal{C}_{n,m}(D^2)$ の元を $\{y_1, \ldots, y_m\}$、$IT_{n,m}(D^2)$ の元を $(\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_m\})$ と書く。

∂D^2 から異なる m 点 $d_1, \ldots, d_m$ をとり、$c = \{d_1, \ldots, d_m\}$ を $\mathcal{C}_{n,m}(D^2)$ の基点、$b = (P_n, c)$ を $IT_{n,m}(D^2)$ の基点とする。また

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{n,m}(D^2) &= \pi_1(\mathcal{C}_{n,m}(D^2), c) \\ \mathbf{E}_{n,m}(D^2) &= \pi_1(IT_{n,m}(D^2), b) \end{aligned}$$

とする。

$$\mathcal{E}_{n,m} = \{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \mid \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} = m\}$$

としたとき、$\mu \in \mathcal{E}_{n,m}$ に対して m 次元部分空間を構成し、それを生成元とする普遍被覆の相対ホモロジーの $\mathbb{Z}[\mathbf{B}_{n,m}(D^2)]$-不変自由 $\mathbb{Z}[\mathbf{B}_{n,m}(D^2)]$-部分加群 $\mathcal{H}_F$ を構成すると、組みひも群 B_n は写像類群として $\mathcal{H}_F$ に作用し、$\mathbb{Z}[\mathbf{E}_{n,m}(D^2)]$ には右からの掛け算で作用する。この 2 つをテンソルすることで、B_n は $\mathbb{Z}[\mathbf{E}_{n,m}(D^2)] \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbf{B}_{n,m}(D^2)]} \mathcal{H}_F$ に作用し、この作用をもとに表現 $\zeta_{n,m}$ を定義する。

群 Γ に対して $\mathbb{Z}\Gamma$ を群環、Γ_c を共役類の集合、$\mathbb{Z}\Gamma$ を Γ_c で生成される自由可換群、$\pi_\Gamma : \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}\Gamma_c$ を射影とする。ζ が自由 $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群の自己準同型で基底 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ に対して $\zeta(v_i) = \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot v_j$ と書けるとき、ζ のトレースを

$$\operatorname{tr}_\Gamma \zeta = \pi_\Gamma \left(\sum_{i=1}^k a_{ii} \right) \in \mathbb{Z}\Gamma_c$$

で定義する。基底 $\mathcal{E}_{n,m}$ において、$\Gamma_{\beta,m}$ を β と $\mathbf{B}_{n,m}(D^2)$ で生成される B_{n+m} の部分群とすると、$\zeta_{n,m}(\beta)$ の各成分は $\mathbb{Z}\Gamma_{\beta,m}$ にいるので、$\zeta_{n,m}(\beta)$ は $\mathcal{E}_{n,m}$ で生成される $\mathbb{Z}\Gamma_{,m}$-加群の自己準同型とみなせる。

このとき主定理は以下のように書き表される。

定理 1. $\beta \in B_n$ を擬アノソフな組みひも、λ をその拡張率とすると

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Growth}_{\mathrm{k}\to\infty} \left\| \operatorname{tr}_{\Gamma_{\beta^k,m}} \zeta_{n,m}(\beta^k) \right\| = \operatorname*{Growth}_{\mathrm{k}\to\infty} \operatorname{tr} \left\| \zeta_{n,m}(\beta^k) \right\| = \lambda^m \\ &\operatorname*{Growth}_{\mathrm{m}\to\infty} \left\| \operatorname{tr}_{\Gamma_{\beta,m}} \zeta_{n,m}(\beta) \right\| = \lambda \end{aligned}$$

が成り立つ。

表現 $\zeta_{n,m}$ は以下のようにして組み紐群のホモロジー表現と関係がある。$m=1$ のときある準同型 $\rho_B : \mathbf{E}_{n,1}(D^2) \to \mathbb{Z}$ が存在し ρ_B から誘導される表現が既約 Burau 表現と同値になる。同様に、$m \geq 2$ のときある準同型 $\rho_{LKB} : \mathbf{E}_{n,m}(D^2) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が存在し ρ_{LKB} から誘導される表現が Lawrence-Krammer-Bigelow 表現と同値になる。

Fried[3] は Burau 行列 $B(t)$ の t に絶対値が 1 の複素数を代入したもののスペクトル半径の自然対数で擬アノソフな組みひものエントロピーが下から評価できることを示し、Kolev[7] も異なる方法で同じ結果を示した。この評価を Burau 評価という。Band and Boyland[1] は t が 1 の冪根のときこの評価がいつ拡張率と一致するかを示した。Koberda[6] は $m=2$ のときの LKB 行列 $LKB(q,t)$ の q と t に絶対値が 1 の複素数を代入したもののスペクトル半径で擬アノソフな組みひもの拡張率の 2 乗が下から評価できることを示した。本論文では [3]、[7] と [6] の評価を主結果を用いて再構成した。

参考文献

[1] **G. Band and P. Boyland**, *The Burau estimate for the entropy of a braid*, Algebr. Geom. Topol. 7 (2007), 1345-1378.

[2] **M. Bestvina and M. Handel**, *Train-tracks for surface homeomorphisms*, Topology 34 (1995), no. 1, 109-140.

[3] **D. Fried**, *Entropy and twisted cohomology*, Topology 25 (1986), 455-470.

[4] **N.V. Ivanov**, *Entropy and the Nielsen numbers*, Soviet Math. DokL, 26 (1982), 63-66.

[5] **B. Jiang and H. Zheng**, *A trace formula for the forcing relation of braids*, Topology 47 (2008), 51-70.

[6] **T. Koberda**, *Asymptotic linearity of the mapping class group and a homological version of the NielsenThurston classification*, Geom. Dedicata 156 (2012), 13-30.

[7] **B. Kolev**, *Entropie topologique et représentation de Burau*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 309 (1989), 835-838.

[8] **W. Thurston**, *On the geometry and dynamics of diffoemorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 19 (1988), 417-431.