

Actions on noncommutative tori and classification of the crossed products

その他のタイトル	非可換トーラス上の作用と接合積の分類
学位授与年月日	2018-03-22
URL	http://hdl.handle.net/2261/00078430

論文審査の結果の要旨

賀卓豊

本論文において論文提出者は、非可換 2 次元トーラス上の群作用と接合積について新たな研究を行った。

非可換 2 次元トーラスは、無理数回転 C^* 環とも呼ばれ、作用素環論においても、非可換幾何学においても大変重要な研究対象である。この作用素環の自己同型はさまざまなものが研究されてきているが、本論文では、Brenken, Watatani によって構成された $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用を考察した。この作用から生じる一つの自己同型を用いて接合積を作った時に得られる C^* 環については、Echterhoff-Lück-Phillips-Walters の研究がある。彼らは自己同型が有限位数の時に、 K -theory を用いて、接合積がどのような C^* 環になるかを完全に決定した。

本論文の前半では、非可換 2 次元トーラス 2 個をテンソル積して得られる非可換 4 次元トーラスについて、上述の有限位数の自己同型 2 つの直積で得られる群作用を考えた。これについて、接合積が AF 環になることを示し、接合積の K -theory を計算し、また trace による K -theory の像を決定した。これには C^* 環の K -theory についての Künneth の公式を用いる。

さらに本論文の後半では、非可換 2 次元トーラスについて、上述の $SL_2(\mathbb{Z})$ 作用から生じる自己同型が無限度数の場合について、この自己同型から生じる無限巡回群による接合積を考察した。特に、この接合積がいつ互いに同型になるか、いつ互いに森田同値になるか、という問題について、無理数回転 C^* 環の回転角度と、 $SL_2(\mathbb{Z})$ の元を用いて、完全な答えを得た。ここには 2×2 行列の Smith 標準形の条件が自然なものとして現れる。

この結果の証明法は、 K -theory の計算によるものであり、そのためには Pimsner-Voiculescu 完全列が本質的に重要である。また、この接合積が K -theory で分類できるということを示すには、Osaka-Phillips, Lin, Echterhoff-Lück-Phillips-Walters の手法を用いる。特に接合積の trace が一意であることが重要な役割を果たす。また、 K -theory の計算においては、単にアーベル群がどの群になるかを決定するだけでなく、生成元を明示的に記述することが重要であるが、これには Isely の手法を応用する。

この結果、 K -theory の計算結果は、 $SL_2(\mathbb{Z})$ の元の trace に依存することがわかる。特に trace の値が 3 の場合には、これまでに知られていなかった新しい現象が起きていることがわかる。

本論文は、Echterhoff-Lück-Phillips-Walters の結果を自然かつ興味深い方向に拡張しており、その結果自体も証明の手法も興味を呼ぶものであると言える。

よって、論文提出賀卓豊は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわし

い十分な資格があると認める。