論文の内容の要旨

博士論文題目　A study on $(\mathfrak{g}, K)$-modules over commutative rings
(可換環上の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の研究)

氏名　林 拓磨

本論文の目的は可換環上定義された関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ およびその導来関手を圏論を用いた抽象的方法と具体的な計算による 2 つの側面から調べることである。

対の射 $(\mathfrak{q}, M) \to (\mathfrak{g}, K)$ に対して関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ とは $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の圏から $(\mathfrak{q}, M)$ 加群の圏への忘却関手 $\mathcal{F}_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{q},M}$ の右随伴関手である。本紙の内容に入る前にまず背景となる複素数上での実簡約 Lie 群の表現論から始めることにする。$(\mathfrak{g}, K)$ 加群とは実簡約リー群の表現論における代数的対象である。実簡約リー群 G が与えられたときその Lie 環の複素化と極大コンパクト群 (の複素化) は Harish-Chandra 対と呼ばれる対 $(\mathfrak{g}, K)$ をなす。簡単のため本紙中では単に対と呼ぶ。また G の認容 Hilbert 表現に対してその K 有限部分と呼ばれる稠密部分空間には $\mathfrak{g}$ と K の整合的な作用が入り、$(\mathfrak{g}, K)$ 加群の例となる。関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ とその導来関手またはそのコホモロジーは小さい対の上の加群から大きい対の上の加群を構成するものである。関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ は Hecke 環と呼ばれる約単位的環を用いて Hom 型の随伴関手として構成される。また導来関手は自明表現の Koszul 解消から得られる標準単射解消、標準射影解消複体を用いて計算することができる。関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ とそれによって得られる表現の例としてまず実放物誘導の場合があげられる。これは G の実放物部分群 Q とその Langlands 分解 $Q = MAN$ があったとき、付随する部分対 $(\mathfrak{q}, M \cap K) \subset (\mathfrak{g}, K)$ によって関手 $I_{\mathfrak{q},M\cap K}^{\mathfrak{g},K}$ として定義される。M の認容 Hilbert 表現と A の 1 次元表現からの誘導で得られた表現は連続系列表現と呼ばれ、特に Q が極小放物部分群の場合には主系列表現と呼ばれる。また重要な例として他にはコホモロジカル誘導が挙げられる。$(\mathfrak{q}, L \cap K)$ が $(\mathfrak{g}, K)$ の θ 不変放物部分対であるとする (θ は Cartan 対合)。L は $\mathfrak{q}$ より定まる G の Levi 部分群であり、$\mathfrak{q}$ の G における正規化群と定義される。また $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を Levi 分解とすれば、対の射の列

$$(\mathfrak{l}, L \cap K) \leftarrow (\mathfrak{q}, L \cap K) \to (\mathfrak{g}, K)$$

を得ることができる。このときコホモロジカル誘導とは

$$\mathcal{R}^{\bullet}(-) = R^{\bullet} I_{\mathfrak{q},L\cap K}^{\mathfrak{g},K} \mathcal{F}_{\mathfrak{l},L\cap K}^{\mathfrak{q},L\cap K}(- \otimes \wedge^{\dim \mathfrak{u}} \mathfrak{u})$$

である。特に $S = \frac{1}{2}(\dim K - \dim L)$、$\lambda$ が L のユニタリ指標に付随する $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群の時

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) = \mathcal{R}^{S}(\lambda)$$

は (λ が良い場合に)G の離散系列表現や非自明な $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーを持つ既約ユニタリ表現を与えることが知られている。

近年、何人かの研究者によって複素数体上以外の体、より一般に可換環上定義される対 $(\mathfrak{g}, K)$ および $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の理論が提唱された。そのうち Günter Harder 氏、Fabian Januszewski 氏はそれぞれ整数環上の $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジー及び標数 0 の体上の関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ とその導来関手を論文中で与えた。標数 0 の体上では導来関手は複素数体上同様に標準解消を用いて計算することができる。さらに、Januszewski 氏は論文の中で体拡大 k'/k に対して底変換関手 $\otimes_k k'$ を導入し、いくらかの重要な場合にコホモロジー表現と底変換の可換性を証明した。これは、対や表現が小さい体上で定義されているときコホモロジー $R^{\bullet} I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ によって得られる表現も小さい体上で定義されているということを言っている。一方、整数環上ではホモロジー代数の観点からは同じこ

とはできない。Harder 氏は Koszul 複体を用いて得られる具体的な複体のコホモロジーを逆に $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーの定義とした。

私は本論文以前に一般の可換環上の対と $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の枠組みを提唱し、特に関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ とその (ホモロジー代数的な意味での) 導来関手を構成した。しかしその時点では複素数体または標数 0 の体上のような Hecke 環の理論を用いた構成がなく、極度に抽象的であった。また、標準分解のような具体的な分解を一般にはホモロジー代数の文脈で用いることもできなかった。このため関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ とその導来関手がどのような対象を与えるかは本論文以前には全くわからない状態であった。なお、本論文でも群 K に関する条件を以前より弱め、この新しい定義の下でも以前と同じ議論が機能することをいくらかの補題を用いて示した。特により広い意味での対の間の射に対して関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ を与えた。

本論文の目的は対や加群の良い条件または具体例を見つけ、その場合に関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ から得られる表現を記述することである。まず抽象的に表現を理解する方法として環の平坦準同型 $k \to k'$ に対して対および $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の底変換 $\otimes_k k'$ を導入した。本論文の主な結果はある一般的な条件下で関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ およびその導来関手が底変換と交換するという定理 (平坦底変換定理) およびこれを満たさない場合に起こる新しい現象の発見である。

定理 1 Noether 環 k、環の平坦準同型 $k \to k'$、対の射 $(\mathfrak{q}, M) \to (\mathfrak{g}, K)$ が次の条件を満たすとする。

(i) $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{q} \to \mathfrak{g}$ は全射。ここで $\mathfrak{k}$ は K の Lie 環である。

(ii) $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{g}$ は有限生成。

この時下に有界な $(\mathfrak{q}, M)$ 加群の複体の成す導来圏 $D^+(\mathfrak{q}, M)$ 上で

$$(\mathbb{R}I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K} -) \otimes_k k' \simeq \mathbb{R}I_{\mathfrak{q}\otimes k', M\otimes k'}^{\mathfrak{g}\otimes k', K\otimes k'}(- \otimes_k k')$$

が成り立つ。

定理 2 $k \to k'$ を Noether 環間の平坦準同型、$(\mathfrak{q}, M) \to (\mathfrak{g}, M)$ を $M \to M$ が恒等射な k 上の対の単射、Z を $(\mathfrak{q}, M)$ 加群とする。次を仮定する。

(i) ある M 同変 Lie 部分代数 $\bar{\mathfrak{u}} \subset \mathfrak{g}$ であって和写像 $\mathfrak{q} \oplus \bar{\mathfrak{u}} \to \mathfrak{g}$ が k 加群の同型である。

(ii) $\mathfrak{q}$ と $\bar{\mathfrak{u}}$ は自由基底を持つ。

(iii) 包絡環 $U(\bar{\mathfrak{u}})$ がある有限生成 M 加群 $U(\bar{\mathfrak{u}})_{\mathcal{O}}$ の直和に分解する。

(iv) 任意の有限生成 M 加群 Q に対して有限個を除く $\mathcal{O}$ について $\mathrm{Hom}_M(Q, \mathrm{Hom}(U(\bar{\mathfrak{u}})_{\mathcal{O}}, Z))$ が消滅する。

このとき、$I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},M}$、$I_{\mathfrak{q}\otimes k', M\otimes k'}^{\mathfrak{g}\otimes k', M\otimes k'}$ を各々 $\mathrm{pro}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$、$\mathrm{pro}_{\mathfrak{q}\otimes k'}^{\mathfrak{g}\otimes k'}$ と書くことにすると、

$$\mathrm{pro}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}(Z) \otimes k' \cong \mathrm{pro}_{\mathfrak{q}\otimes k'}^{\mathfrak{g}\otimes k'}(Z \otimes k')$$

が成り立つ。

これらの定理は例えば整数環 $\mathbb{Z}$ から複素数体 $\mathbb{C}$ への埋め込みの場合に適用することで、$\mathbb{Z}$ 上で関手 $I_{\mathfrak{q},M}^{\mathfrak{g},K}$ によって構成された表現が (捻じれを除いて)$\mathbb{C}$ 上で対応して得られる表現の整形式であるということを主張するものであり、$\mathbb{C}$ 上の表現の内部に新しい構造があることを示唆している。これらの系として $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ を (暫定的に)

$$R^S I_{\mathfrak{g},L\cap K}^{\mathfrak{g},K} \mathrm{pro}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} \mathcal{F}_{\mathfrak{l},L\cap K}^{\mathfrak{q},L\cap K}(\lambda \otimes \wedge^{\dim \mathfrak{u}} \mathfrak{u})$$

とみなすことで、$\mathbb{C}$ の Noether 部分環 k と対 $(\mathfrak{g}, K)$、$(\mathfrak{q}, L \cap K)$(実際には K と $L \cap K$ は複素化して複素代

数群とみなす) 及び分解 $\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{u}}\oplus\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{u}$ の適切な k 形式ごとに $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の底変換定理が得られる。定理 1 は余加群に関する一般論と、局所 Noether 圏とコンパクト生成族に関する一般的な議論を組み合わせることで証明される。定理 2 は、上記の条件のもとで $I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{q},M}(Z)$ の具体的な記述を与えることができ、その帰結として得られる。

平坦底変換定理は $\mathbb{Z}$ 上の代数的 Borel-Weil-Bott 誘導に応用することができる。特に次を得た。

定理 3 $\mathbb{Z}$ 上の分裂半単純群 SL_2 と、下三角行列、対角行列のなす部分群に付随する $\mathbb{Z}$ 上の対 $(\bar{\mathfrak{b}},T^1)\subset(\mathfrak{sl}_2,\mathrm{SL}_2)$ を考える。有理数体を $\mathbb{Q}$ と書く。λ を整数とし、$\mathbb{Z}$ 加群 V に対して T^1 の λ 乗指標に付随する V の上の $(\bar{\mathfrak{b}},T^1)$ 加群を V_λ と書く。このとき余単位射 $I^{\mathfrak{sl}_2,\mathrm{SL}_2}_{\bar{\mathfrak{b}},T^1}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_\lambda)\to(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_\lambda$ は全射である。特に λ が負のとき、$R^1I^{\mathfrak{sl}_2,\mathrm{SL}_2}_{\bar{\mathfrak{b}},T^1}(\mathbb{Z}_\lambda)$ は無限にねじれを持つ。

前半は SL_2 の $\mathbb{Z}$ 上の表現 (認容格子) の具体例を用いて $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_\lambda$ への非自明な $(\bar{\mathfrak{b}},T^1)$ 準同型を構成することで得られる。後者は

$$0\to\mathbb{Z}_\lambda\to\mathbb{Q}_\lambda\to(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_\lambda\to 0$$

に付随する長完全系列、$\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ の底変換定理、そして標数 0 の体上の代数的 Borel-Weil-Bott の定理 (または複素数体上の代数的 Borel-Weil-Bott の定理と $\mathbb{Q}\to\mathbb{C}$ の底変換定理) から示される。

一方底変換が交換しない例として次の特異な現象を発見した。

定理 4 半単純群 PU(1,1) の有限被覆群 G の離散系列表現のある整形式は、G とその実放物部分群に付随する対 $(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}},M_{\mathbb{C}})\subset(\mathfrak{sl}_2,T^1)$ のある整形式についての $\mathbb{Z}$ を下に持つ加群からの誘導で得られる。

つまり離散系列のある整形式が主系列型の普遍性を満たす。この結果は岩沢分解 $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{t}^1=\mathfrak{sl}_2$ ($\mathfrak{t}^1$ は T^1 の Lie 環) が整形式をとったときに成立しなくなるということに大きく起因している。証明には $(\mathfrak{sl}_2,T^1)$ の分裂整形式と呼ばれる $\mathbb{Z}$ 上の対と $(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}},M_{\mathbb{C}})$ に対応するその部分対を具体的に与え、対応して定義される誘導を計算することで得られる。複素数体上ではこの誘導は対応するコンパクト群 (複素簡約代数群) の表現の誘導として記述できたが、その証明において岩沢分解が成り立たないことで破綻する議論を精密に解析することで表現を具体的に記述することができる。また、複素数体上での Hecke 環の計算を再現するために分裂トーラスの表現論を Hecke 環を定義することで書き直した。