研究速報 : フィルタリングされたナヴィエ・ストークス方程式の数値的無条件不安定性

その他のタイトル	Numerical Unconditional Instability of the Filtered Navier-Stokes Equations
著者	井田 真人, 谷口 伸行
雑誌名	生産研究
巻	56
号	1
ページ	44-48
発行年	2004
URL	http://hdl.handle.net/2261/00078618

doi: info:doi/10.11188/seisankenkyu.56.44

研究速報
研究速報

フィルタリングされたナヴィエ・ストークス方程式の数値的無条件不安定性

Numerical Unconditional Instability of the Filtered Navier—Stokes Equations

井田真人*・谷口伸行**
Masato IDA and Nobuyuki TANIGUCHI

I．はじめに

乱流は未解決の物理の一つである[1]．比較的単純な流れの場合ですら完全な理論的記述が得られていないため，乱流の研究では数値シミュレーションが非常に重用されている．典型的なシミュレーション技法としてはdirect numercal simulation（DNS），Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS)，そしてlarge eddy simulation（LES）を挙げることができる．DNSでは乱流中の全てのスケールが十分な格子数で解像される一方，RANSでは平均量の時間発展のみが解かれる．LESはその両者の中間的アプローチであり，大スケールは直接的に解くが，小スケールの渦が大スケールに与える影響はsubgrid-scale（SGS）モデル（もしくはsubfilter-scaleモデル）によって近似的に評価する[2]．LESはDNSと比べ少ない計算時間と計算機容量で非定常大規模乱流の計算を可能にするため，学術研究のみならず実際的な工学的流れ計算でも用いられてきている．

LESの持つ大きな問題の一つが数値不安定である．すでに良く知られているように，複数の既存のSGSモデル（例えばtensor-diffusivity[3]，scale-similarity[4]，dynamic Smagorinsky[5]モデル）が数値的に不安定な性質を持ち，そのため数値安定性を保障するために何らかの人工的な数値的操作（SGS応力のsmoothingあるいはclippingなど）が併用される[2,5-8]．それらのモデルの不安定な振る舞いのメカニズムに関しては幾つかの文献で議論されてきているが，[2,8-11] SGSモデルがそのような不安定性を持つ根源的要因に関しては，著者らの知るところではまだ十分な理解は得られていない．この数値的問題はモデリング過程に潜む何らかの失敗からくるのであろうか？あるいは他の要因が関係しているのだろうか？この問に答えるには，類似する，しかし理想化された問“完全に正確なSGSモデル（仮に存在するとして）は数値的に安定か？”について考えてみることが有益であろう．

Leonard[9]はSGS応力項の正確な展開式を打ち切ることで得られたtensor-diffusivityモデルが流体の伸張方向に不安定的に振舞う可能性を示唆した．この不安定な振る舞いは，支配方程式をill-conditionedにし数値計算に不向きにする負の拡散性からくるものである．Winckelmansら[8]は純粋なtensor-diffusivityモデル（およびtensor-diffusivityモデルベースの混合モデル）を用いた数値実験により，このモデルが壁乱流条件下では不安定に振舞う一方，一様減衰乱流に関しては安定な解を供給することを指摘した．最近の論文[12]で我々は，LESの最も基本的な要素であるフィルター操作がLESの数値不安定の原因の一つになっていることを示した．特定のSGSモデルの利用を仮定せず，主流速度成分に関する簡単な仮定の下，我々はGaussianフィルター（LESにおいて最も良く用いられるフィルターの一つ[13]）のNavier—Stokes方程式への適用が数値的に不安定なクロス微分項（正と負の拡散項に分離することができる）を派生させることを示した．これらの仕事は，一見すると支配方程式の物理的性質を安定化させるように思えるGaussianフィルター操作が数値不安定の原因になり得ることを示している．この結果は，SGS応力項の性質を完全に再現することのできる完璧なモデルであっても数値的に安定であるとは限らないことを暗にほのめかしているように思える．

本論分[14]では，より受け入れやすい結論を得るべく前論文[12]の研究を拡張する．前の仕事では主流速度成分の瞬時値が流れに平行に置かれた平板からの距離に線形比例すると仮定した．対照的に，本論分では主流速度の統計平均値が壁からの距離に線形比例すると仮定する．これは平板近傍に形成される粘性底層の場合に相当する，より現実的な仮定である．以下の章で示されるように，この仮定の下でも数値的に無条件不安定になる項が導出される．

Sec.Ⅱで支配方程式とフィルター関数について簡単に紹介し，Sec.Ⅲで壁乱流の場合に関する再検討を行う．最後にSec.Ⅳで結論を述べる．

Ⅱ．支配方程式とフィルター操作

非圧縮性粘性流はNavier-Stokes方程式で記述される：

*東京大学生産技術研究所　計算科学技術連携研究センター
**東京大学生産技術研究所　情報・システム部門

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\ \text{for}\ i=1,2,3, \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ここでは総和規約の適用が仮定されている．また，$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ は速度成分，p は定数密度で割られた圧力，ν は動粘度を示す．LESでは大スケールと小スケールを分離するためにこの方程式系にフィルター操作を施す．フィルター操作は以下の畳み込み積分によって遂行される：

$$\bar{F}(x,\ldots,t)=\int_{X=-\infty}^{X=\infty} L(x-X)F(x,\ldots,t)dX, \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ここで$\overline{(\cdot)}$ はフィルター値，x は任意の関数 F の独立変数の一つ，$L(X)$はフィルター関数を示す．本研究では$L(X)$をGaussian関数とする．

$$L(X)=\sqrt{\frac{\gamma}{\Delta^2\pi}}\exp\left(-\frac{\gamma X^2}{\Delta^2}\right), \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

これは $\int_{X=-\infty}^{X=\infty} L(X)dX=1$ を満たす．ここでΔはフィルター幅（定数と仮定），γは実定数である（LESでは一般に$\gamma = 6$とされる[13]）．Eqs.（1）と（2）にフィルター操作を施すと

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial \overline{u_j u_i}}{\partial x_j}=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

もしくは

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$
$$\tau_{ij}\equiv\overline{u_i u_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j, \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

および

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=0, \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

を得る．ここで

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\ \text{and}\ \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}$$

（f は従属変数）を用いた．τ_{ij}はいわゆるSGS応力テンソルで，一般にモデリングを必要とする．

本題に入る前に，我々の議論に有用な数学的道具をここで幾つか紹介する．Gaussianフィルターがx_i方向に適用されると仮定すると，

$$\overline{(x_i f)}=x_i\bar{f}+\frac{\Delta^2}{2\gamma}\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\overline{(x_j f)}=x_j\bar{f}\quad \text{for}\ j\neq i, \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

を得る．（これらは部分積分によって導くことができる．[12,15,16] また，これらは既にLESに関する幾つかの研究で活用されてきている．[17]）Eq.（8）を用いると例えば

$$\bar{x}_i=x_i, \quad \cdots\cdots\cdots(10)$$

を得ることができる．

これらの結果に基づき，以下では平板乱流条件下でGaussianフィルタリングされたNavier-Stokes方程式に関する理論解析を行う．

Ⅲ．平板乱流に関する理論解析

x_1，x_2，およびx_3をそれぞれ主流方向，壁法線方向，スパン方向とし，また，平らな剛体壁が$x_2\leq 0$に置かれているとする．速度成分を統計平均値U_iと擾乱成分u'_iに分離すると，

$$u_i(\mathbf{x},t)=U_i(\mathbf{x})+u'_i(\mathbf{x},t), \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

を得る．ここでU_iは時間に依存しないとしている．さらに，以下を仮定する：

$$\mathbf{U}(\mathbf{x})=(U_1(\mathbf{x}),U_2(\mathbf{x}),U_3(\mathbf{x}))$$
$$=(\beta x_2,0,0) \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

ここでβは実定数である．これはつまり，主流速度成分が壁からの距離に線形比例することを意味する．（より一般的な場合への拡張に関してはAppendixで簡単に論じる．）これらの仮定の下では

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=\frac{\partial u'_i}{\partial x_i}=0. \quad \cdots\cdots\cdots(13)$$

となる．Eqs.（11）と（12）をu_1についての方程式の対流項に代入し，Eq.（13）を用いると

$$\frac{\partial u_j u_1}{\partial x_j}=U_1\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_1}{\partial x_2}u'_2+\frac{\partial u'_j u'_1}{\partial x_j}$$
$$=\beta x_2\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}+\beta u'_2+\frac{\partial u'_j u'_1}{\partial x_j} \quad \cdots\cdots\cdots(14)$$

を得る．壁法線方向にGaussianフィルタリングを施すとこの式は

$$\frac{\partial \overline{u_j u_1}}{\partial x_j}=\bar{U}_1\frac{\partial \bar{u}'_1}{\partial x_1}+\beta\frac{\Delta^2}{2\gamma}\frac{\partial^2 \bar{u}'_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}\bar{u}'_2+\frac{\partial \overline{u'_j u'_1}}{\partial x_j} \quad \cdots(15)$$

となる．ここでEq.（8）と$U_1=\bar{U}_1$（Eq.（10）から容易に導ける）を用いた．U_1がx_2のみに依存するため，3次元のGaussianフィルターを用いた場合にも同じ結果が得られる．言い換えると，他の方向にフィルタリングを行っても付加項は導出されない．ところで，フィルタリングされた速度成分を用いて見積もった対流項$\partial(\bar{u}_j\bar{u}_1)/\partial x_j$は以下のように書き換えられる：

$$\frac{\partial\bar{u}_j\bar{u}_1}{\partial x_j}=\bar{U}_1\frac{\partial\bar{u}'_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}\bar{u}'_2+\frac{\partial\bar{u}'_j\bar{u}'_1}{\partial x_j}. \qquad (16)$$

Eqs.（15）と（16）より以下を得る：

$$\frac{\partial\tau_{1j}}{\partial x_j}=\beta\frac{\Delta^2}{2\gamma}\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial(\overline{u'_ju'_1}-\bar{u}'_j\bar{u}'_1)}{\partial x_j}. \qquad (17)$$

これと $\partial^2\bar{U}_1/\partial x_j\partial x_j=0$ を Eq.（6）に代入すると

$$\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial t}+\frac{\partial\bar{u}_j\bar{u}_1}{\partial x_j}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial x_j\partial x_j}-\beta\frac{\Delta^2}{2\gamma}\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial(\overline{u'_ju'_1}-\bar{u}'_j\bar{u}'_1)}{\partial x_j}, \qquad (18)$$

を得る．これは，

$$\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial t}=\frac{\partial\bar{u}'_1}{\partial t}.$$

であることから，$\bar{u}_1$ と $\bar{u}'_1$ 両方についての方程式だと考えることができる．幾度か証明されてきているように，[12,16] 最後から二番目の項（従属変数 $\bar{u}'_1$ のクロス微分）は差分法などで数値的に扱われる場合に不安定になる．以下では Eq.（18）の数値安定条件について議論する．

Eq.（18）の最後の三項がLESの数値安定性に支配的な影響力を持つであろう．まずは最後から二番目と三番目の項

$$\nu\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial x_j\partial x_j}-\beta\frac{\Delta^2}{2\gamma}\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial x_1\partial x_2}. \qquad (19)$$

について議論する．座標変換

$$(\xi,\eta)=\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}},\frac{-x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right), \qquad (20)$$

（x_3 軸を中心とした45°回転）を適用すると Eq.（19）は以下のように書き換えられる：

$$\nu\left(\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial x_3^2}\right)-\beta\frac{\Delta^2}{2\gamma}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial\xi^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial\eta^2}\right) \qquad (21)$$

これより，Eq.（21）が正の粘性であることを保障するには以下の条件が必要であることが分かる:

$$\nu-\frac{\Delta^2}{4\gamma}|\beta|\geq 0. \qquad (22)$$

せん断の傾き β は扱う問題によって異なる値をとるであろう．条件（22）が現実的な状況下でどのように働くかを知るため，簡単な例題について考えてみる．良く知られているように，平板乱流の粘性底層内では主流速度成分の統計平均値は以下の方程式に従う[18]：

$$U_1(x_2)=u_\tau\left(\frac{|u_\tau|}{\nu}x_2\right) \qquad (23)$$

ここで u_τ は壁摩擦速度である．Eq.（23）を用いて書き換えると Eq.（22）は以下のように簡略化される：

$$\frac{|u_\tau|}{\nu}\Delta=\Delta^+\leq 2\sqrt{\gamma}, \qquad (24)$$

ここで上付きの＋は wall units で表された量を示す．$\gamma=6$ とすると，この結果は Kobayashi & Shimomura による tensor-diffusivity 項の安定条件[11]と完全に一致する．

ここで，Eq.（24）は数値解の安定性を保障するための最低条件にすぎないことを注記する．Eq.（18）の最終項も数値不安定の原因になりうるのである．（たとえば，もしある時間，ある位置で $u'_1\propto x_2$ が成り立っているとすると，

$$\overline{\left(u'_1\frac{\partial u'_1}{\partial u_1}\right)}-\bar{u}'_1\frac{\partial\bar{u}'_1}{\partial x_1}\propto\frac{\partial^2\bar{u}'_1}{\partial x_1\partial x_2} \qquad (24)$$

となる．[12]）しかしながら，この不完全な条件ですら格子幅（h）の選択に強い制限を与えるのである．$\Delta^+=2h^+$ の場合（この設定は実際に良く用いられる），格子幅は $h^+\leq\sqrt{6}\approx 2.4$ を満たす必要がある．また，$\Delta^+=4h^+$ の場合（これはSGS応力の寄与が二次精度差分法の持つ打ち切り誤差やエリアジング誤差と比べて十分な大きさを持つのに必要だとされている設定[19]）には $h^+\leq\sqrt{6}/2\approx 1.2$ が必要となる．（既に述べたように，クロス微分項は壁法線方向のフィルタリングのみから導出されるため，ここで示した制限はその方向の格子幅のみに適用されることを注記する．）この結果は，数値安定性を保証するためには少なくとも数個の格子点が粘性底層内に必要であることを示している．これは大規模高レイノルズ数乱流の実際的な応用計算において非常に厳しい制限になるであろう．しかし，もしこの条件が満たされなければ，たとえ完全に正確なSGSモデルであっても数値的に不安定になり，その結果，数値解は発散へ向かうであろう．

Eq.（18）中のクロス微分項はある一定の方向に常に負の拡散性を示すものであるため，その数値不安定性は時間に依存しないが，同方程式の最終項の数値安定性は時間に依存する．Sec. I で述べたように，Winckelmans らは tensor diffusivity モデルの安定性が問題に依存することを指摘した．強い非等方性が現れる壁乱流の場合には，たとえ渦粘性項を付加しても安定な解を得ることが難しかったが，等方乱流の場合には純粋な tensor-diffusivity モデルでも安定な解を得ることが出来たのである．[8] 彼らはその結果を以下のように直感的に説明した：等方流の場合，tensor-diffusivity 項が負の拡散性を示す方向は時間や空間に依存して逐次変化するため，時間平均的にみればその項は散逸的に振舞うだろう．しかし，非等方流の場合には壁近傍で

長く停留する負の拡散現象が発生し，その結果として数値不安定性とそれに引き続く解の発散が起こったのであろう．我々が上で示した理論的結果は彼らの推測を支持している．

Ⅳ．まとめと結論

統計平均速度に関する簡単な仮定に基づきフィルター操作からくるLESの数値不安定について理論的に検討し，平板乱流の条件下ではGaussianフィルタリングによってある一定の方向に常に負の拡散性を示す項が派生されることを示した．この結論は我々の以前の結果を拡張し，支持するものである．
ここで示した理論解析は，平均場がswirlを持つ場合[14]や高次の多項式で記述される場合[20]にも拡張できる．また，ここで議論した数値不安定性とせん断から誘発される物理的な不安定性[21]との関連性を調べることは何らかの有意義な結果をもたらすだろう．

さらに，我々は幾つかの付加的な発見をした．Sec. Ⅲでは，壁乱流について安定かつ正確な計算を行うには壁法線方向の格子幅にかなり強い制限を与えなければならないことを示した．LESを用いた平板乱流の学術的計算では，壁法線方向にはDNSで用いるのと同じ位の格子数を割り当て，フィルターを適用しないというやり方がしばしば採られる．[5,22,23] 今回の理論的結果はこの習慣に対する一つの裏づけを与える．

今回の研究（および以前の論文）では陰的に，速度場に含まれる全てのスペクトル成分が解像されていることが仮定されている．（Gaussianフィルターは，高周波成分を減衰はさせるものの，切り落としはしない．）したがって，ここで得られた結果はつまり，たとえそのような理想的な条件下でもSGS応力の性質を完璧に再現できる**完全な**SGSモデル（より適切には，特徴長さが格子幅とは無関係に決定された**完全な**subfilter-scaleモデル）ですら数値的に扱われる場合には不安定になり得ることを示している．完全なモデルはクロス微分の持つ不安定な性質をも完全に再現するのだから．この問題は，高精度で安定なSGSモデルを追い求めるLESの研究者に一つの深刻なジレンマを投げかける．モデルの精度を高めるには，この数値不安定に真っ向から立ち向かわなければならない．しかし，安定性の確保のために手荒で人工的な方法を用いてしまってはLESの精度は保証されないであろう．この困難さを克服するための一つの考えうる手段は，以前の論文でも述べたように，[12] 数値不安定項のための安定かつ高精度な数値解法を作ることである．（これは極めて難しい仕事になるだろうが．）Leonard[9] およびMoeleker & Leonard[24] はtensor-diffusivityモデルと不均一粒子法を基にしたLagrangianスキームを提案して逆拡散問題に挑み，既知の速度場上での2次元のスカラー移流拡散について優れた結果を得た．しかし，その手法をNavier-Stokes乱流に拡張するにはまだ多くの残された課題が在る．[24] この数値不安定性を解決するには，より一層の慎重で活発な議論が必要である．

Acknowledgments

この研究は文部科学省ITリサーチ・プログラム「Frontier Simulation Software for Industrial Science」の一環として行われた．

APPENDIX: 高次平均場についてのCLOSURE

フィルター不安定性に関する一般理論の構築へ向けた一歩として，以下の方程式のclosureを考えてみる：

$$\overline{\left(U_1\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)}$$

ここでU_1はx_2についての任意の関数であり，Gaussianフィルターはx_2方向に掛けられるとする．Taylor展開を用いると，任意の関数$U_1(x_2)$は無限次の多項式

$$U_1(x_2)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_2^n,$$

によって記述される．ここでa_nは実定数である．したがって，すべき事は

$$\overline{\left(x_2^n\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)} \tag{A 1}$$

（nは任意の正の正数）のclosureについて考えることである．この目的は以下のように達成される: Eq.（8）を繰り返し用いると，Eq.（A 1）は$\bar{u}'_1$についての閉じた形式に書き換えることができる：

$$\overline{\left(x_2\left(x_2^{n-1}\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)\right)}=L\overline{\left(x_2^{n-1}\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)}$$
$$=LL\overline{\left(x_2^{n-2}\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)}$$
$$\cdots$$
$$=L^n\frac{\partial \bar{u}'_1}{\partial x_1},$$

ここで

$$L\equiv x_2+\frac{\Delta^2}{2\gamma}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

得られた定式は高次の微係数を含んでおり，そのため安定性解析はやや込み入ったものになるであろう．[20]

（2003年11月10日受理）

参考文献

1) J. L. Lumley and A. M. Yaglom, Flow Turbul. Combust. **66**, 241 (2001); Y. G. Sinai, Physica A **263**, 565 (1999).
2) C. Meneveau and J. Katz, Annu. Rev. Fluid Mech. **32**, 1 (2000).

3) A. Leonard, Adv. Geophys. **18**, 237 (1974).
4) J. Bardina, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds, AIAA Pap. No. 80–1357 (1980).
5) M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot, Phys. Fluids A **3**, 1760 (1991).
6) R. Akhavan, A. Ansari, S. Kang, and N. Mangiavacchi, J. Fluid Mech. **408**, 83 (2000).
7) B. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten, J. Fluid Mech. **339**, 357 (1997).
8) G. S. Winckelmans, A. A. Wray, O. V. Vasilyev, and H. Jeanmart, Phys. Fluids **13**, 1385 (2001).
9) A. Leonard, AIAA Pap. No. 97–0204 (1997).
10) S. Liu, C. Meneveau, and J. Katz, J. Fluid Mech. **275**, 83 (1994).
11) H. Kobayashi and Y. Shimomura, Phys. Fluids **15**, L29 (2003).
12) M. Ida and N. Taniguchi, Phys. Rev. E 68 (2003) 036705.
13) P. Sagaut, *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, 2nd edition (Springer—Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 2002).
14) M. Ida and N. Taniguchi (submitted).
15) A. J. Klimas, J. Comput. Phys. **68**, 202 (1987).
16) H. Figua, F. Bouchut, M. R. Feix, and E. Fijalkow, J. Comput. Phys. **159**, 440 (2000).
17) Horiuti, in *Recent Advances in DNS and LES*, edited by D. Knight and L. Sakell (Kluwer Academic, Dordrecht, 1999), p. 179; Y. Shimomura, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 2483 (1999).
18) H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence* (The MIT Press, Cambridge, MA, 1972).
19) S. Ghosal, J. Comput. Phys. **125**, 187 (1996); F. K. Chow and P. Moin, J. Comput. Phys. **184**, 366 (2003).
20) M. Ida and N. Taniguchi (in preparation).
21) S. Grossmann, Rev. Mod. Phys. **72**, 603 (2000); T. Elperin, N. Kleeorin, and I. Rogachevskii, Phys. Rev. E **68**, 016311 (2003).
22) K. Horiuti, Phys. Fluids A **1**, 426 (1989); J. Phys. Soc. Jpn. **66**, 91 (1997).
23) C. Härtel and L. Kleiser, J. Fluid Mech. **356**, 327 (1998); F. Sarghini, Piomelli, and E. Balaras, Phys. Fluids **11**, 1596 (1999); S. Völker, R. D. Moser, and P. Venugopal, Phys. Fluids **14**, 3675 (2002).
24) P. Moeleker and A. Leonard, J. Comput. Phys. **167**, 1 (2001).