

# 座屈固有値問題の縮約による形状最適化と高軸力領域での実験検証

## Shape Optimizations by Contracting of the Buckling Eigenvalue Problem and Experimental Verification in Region of High Axial Stress

学籍番号 47-186764  
氏名 高岡 俊一郎  
指導教員 佐藤 淳 准教授

### 1. 序

#### 1.1. 背景

小断面材で構成される構造では、圧縮材は終局耐力に対する座屈の影響が大きくなるため、終局強度設計において個材の座屈荷重の正確な評価が必要になる。現行の座屈解析手法の一つである線形座屈固有値解析は、構造全体系の座屈荷重の導出は可能だが個材の座屈荷重の特定は困難である。

そこで堤<sup>[1]</sup>によって提案された架構全体の座屈固有値問題を縮約することで個材ごとの座屈荷重を検出する手法に注目する。本論文は個材の座屈耐力を正確に評価する縮約手法について、その妥当性の実験検証及び最適化手法の提案を行う。

#### 1.2. 現行の座屈設計法・その問題点

有限要素法による線形座屈解析では、座屈荷重倍率 $\lambda$ を求めるために全体弾性剛性マトリクス $[K_E]$ と全体幾何剛性マトリクス $[K_G]$ を用い以下の固有値問題(1.1)を解く。

$$[K_E]\{U\} = \lambda[K_G]\{U\} \quad (1.1)$$

ここで $\{U\}$ は座屈モードを表す。最小固有値を $\lambda_{min}$ とし、個材の軸力 $N$ を用いて個材の座屈荷重 $N_{cr}$ は以下の式(1.2)で表される。

$$N_{cr} = \lambda_{min}N \quad (1.2)$$

終局強度設計では個材の応力状態から降伏曲面(図 1.1)を設定するが、座屈が先行す

る材では圧縮耐力が降伏荷重 $N_y$  から座屈荷重 $N_{cr}$ まで下降する。現行の手法では全部材の座屈荷重倍率 $\lambda_{min}$ を一律に設定するため、例えば図 1.2 のモデルの軸力の小さい左柱の座屈耐力は過小評価の可能性がある。

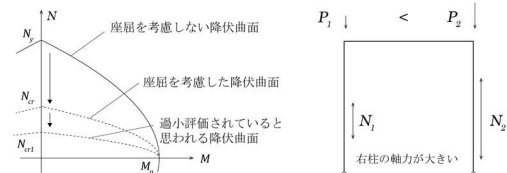


図 1.1 降伏曲面

図 1.2 モデル

### 2. 固有値問題の縮約

#### 2.1. 縮約とは

構造全体系の固有値問題にて、個材の有する節点以外の行と列を消去法により減らしていく操作を縮約と呼ぶ。これは当該個材以外の架構をばねに置換する操作(図 2.1)である。この縮約を施したマトリクスを用い、個材の固有値問題を再構成(2.1)し、個材固有値 $\lambda'$ を得る。

$$[K_E']\{U'\} = \lambda'[K_G']\{U'\} \quad (2.1)$$

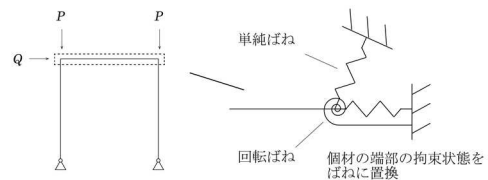


図 2.1 縮約のイメージ

#### 2.2. 縮約操作

堤<sup>[1]</sup>によって提案された縮約方法を示す。この縮約操作はガウスの消去法と同様であ

る。  $n$  行  $n$  列の行列の  $k$  行目と  $k$  列目を消去する操作は式(2.2)のように  $[K_E], [K_G]$  の左に  $[C]_n$ 、右に  $[D]_n$  をかけることで表せる。

$$\begin{aligned} [K_E]_{n-1} &= [C]_n [K_E] [D]_n \\ [K_G]_{n-1} &= [C]_n [K_G] [D]_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$[C]_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \frac{-K_E[1,k]}{K_G[k,k]} & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \frac{-K_G[k-1,k]}{K_G[k,k]} & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & \frac{-K_E[k+1,k]}{K_G[k,k]} & \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \frac{-K_E[n,k]}{K_E[k,k]} & \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$[D]_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \frac{-K_G[1,k]}{K_G[k,k]} & \dots & \frac{-K_G[k-1,k]}{K_G[k,k]} & \frac{-K_G[k+1,k]}{K_G[k,k]} & \dots & \frac{-K_G[n,k]}{K_G[k,k]} \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$K[k, k]$  は行列  $K$  の  $k$  行  $k$  列要素を表す。縮約後の  $n-1$  行  $n-1$  列の行列  $[K_E]_{n-1}, [K_G]_{n-1}$  の  $i$  行  $j$  列の要素は式(2.5)で表される。

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} - a_{ik} a_{kj} / a_{kk} \\ b'_{ij} &= b_{ij} - b_{ik} b_{kj} / b_{kk} \end{aligned} \quad (2.5)$$

この操作を繰り返し行い、  $[K_E], [K_G]$  から個材に寄与する節点に関する行列のみを残した  $[K'_E], [K'_G]$  とし、式(2.1)を用い  $\lambda'$  を求めることで、個材の座屈荷重を算出する。

$$N_{cr}' = \lambda' N \quad (2.6)$$

### 3. 個材の座屈耐力の評価について

#### 3.1. 既往研究

降伏曲面の導出に必要な座屈荷重に関して、朝原<sup>2)</sup>が実験検証を行っている。水平力による柱頭の拘束度の影響を減らすため柱に対し梁を十分剛にした試験体に、一定の鉛直荷重  $P$  を与えたまま水平荷重  $Q$  を漸増させる。そして終局状態の  $Q$  と水平変位  $\Delta$  を検出し、解析上の降伏曲面と実験結果を比較するものである。

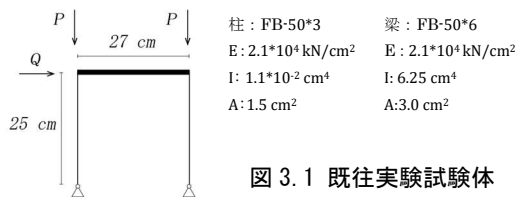


図 3.1 既往実験試験体

この実験では縮約時の座屈荷重  $N_{cr}'$  からなる降伏曲面と実験値はよい相関が見られたが、検証範囲が曲げ優勢域 ( $N < N_{cr}'/2$ ) のみである。そこで高軸力領域における座屈を検出し、降伏曲面の妥当性の検証を行う。

#### 3.2. 実験検証

図 3.2 のような  $P_1 < P_2$  となる偏荷重をかけるフレームを設計した。

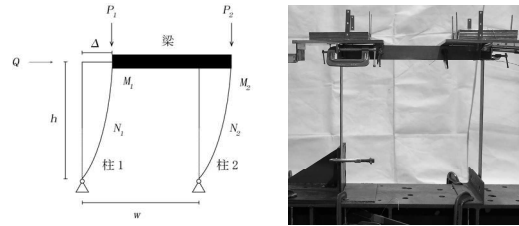


図 3.2 実験モデル 図 3.3 加力前試験体

この状態から水平荷重  $Q$  を漸増させると、まず柱 2 の柱頭が塑性化し、加力を続けると柱 1 の柱頭が塑性化する。各柱の軸力、モーメントは次の図 3.4 のように挙動すると推測される。そして終局状態での水平変位  $\Delta$  及び水平荷重  $Q$  を測定することで、各柱の軸力  $N_1, N_2$  及び転倒モーメント  $M_{total}(= M_1 + M_2)$  が以下の式 (3.1) から (3.3) により算出できる。

$$N_1 = \{P_1(w - \Delta) - P_2\Delta - Q \times h\} / w \quad (3.1)$$

$$N_2 = \{P_2(w + \Delta) + P_1\Delta + Q \times h\} / w \quad (3.2)$$

$$M_{total} = Q \times h + (P_1 + P_2) \times \Delta \quad (3.3)$$

そして試験体ごとに鉛直荷重のみのモデル及び終局時の軸力状態を再現するモデル(図 3.5)を設定し座屈荷重を算出、縮約による降伏曲面も含め実験の  $N_1, N_2$  から解析による  $M_{total}$  を算出し、比較を行う。名称に関して x には試験体名 (a, b, c) が入る。

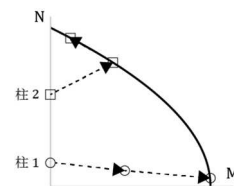


図 3.4 応力状態

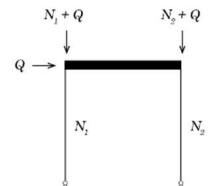


図 3.5 frame\_xb

水平方向のみに加力を行うための実験は以下のセットアップで行った。

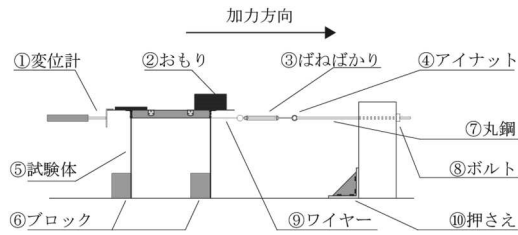


図 3.6 実験セットアップ図

### 3.3. 実験結果と考察

3 種類の荷重条件で実験を行い、いずれも荷重変形曲線から終局状態が確認できた。

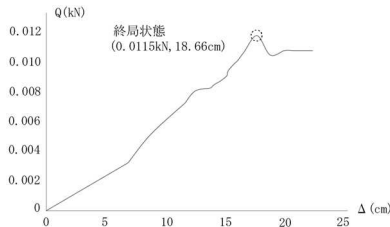


図 3.7 荷重変形曲線

各試験体の荷重条件、結果は以下の通り。

表 3.1 各試験体 荷重条件・実験結果 (kN, cm, kNcm)

|   | $P_1$ | $P_2$ | $Q$    | $\Delta$ | $N_1$  | $N_2$ | $M_{total}$ |
|---|-------|-------|--------|----------|--------|-------|-------------|
| a | 0.172 | 0.200 | 0.0115 | 18.66    | 0.022  | 0.351 | 7.535       |
| b | 0.145 | 0.228 | 0.0129 | 18.17    | -0.004 | 0.377 | 7.361       |
| c | 0.145 | 0.200 | 0.0187 | 16.25    | 0.014  | 0.331 | 6.545       |

試験体 c について表 3.1 の終局時の軸力の値から解析用モデル(図 3.5 など)を設定し、解析手法別の座屈荷重を求め降伏曲面を表したのが以下の図 3.8 である。そして曲線と  $N_1, N_2$  の交点から柱頭のモーメント  $M_1, M_2$  とその和  $M_{total}$  を算出した(表 3.2)。

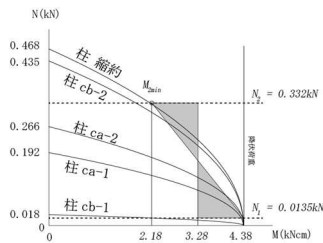


図 3.8 試験体 c 降伏曲面

表 3.2 試験体 c モーメント比較 (kNcm)

|             | frame_ca | frame_cb | 縮約   | 実験        |
|-------------|----------|----------|------|-----------|
| $M_1$       | 4.36     | 1.83     | 4.38 | 3.28-4.38 |
| $M_2$       | 0        | 1.83     | 2.18 | 2.18-3.28 |
| $M_{total}$ | 4.36     | 3.76     | 6.56 | 6.56      |

実験から想定される  $M_2$  の最小値である  $M_{2min}$  (図中の○)と比較すると、解析手法による柱 2 の座屈荷重はいずれも安全側(原点側)である。その中で縮約による降伏曲面から算出される  $M_2$  が最も実現に近い。残りの荷重条件の解析モデルも全て実現よりは安全側であり、その中では縮約による降伏曲面が最も実現に近い。既存の評価方法に比べよい一致が確認できたと言える。

今後の実験では  $M_{2min}$  に比べ  $M_2$  が安全側に検出される原因を検証し、実現のより正確な把握を行うことが求められる。

## 4. 個材の情報から行う形状最適化

### 4.1. 既往研究

架構の総体積を一定とし部材の太さをこの手法による個材の固有値を用いて最適化する手法について、氏岡<sup>[3]</sup>は(1)部材の体積の分配、(2)個材内の体積の分配の段階に分けることを提案した。この(2)に関して、浜田<sup>[4]</sup>は逆変分法を用いて材端の支持条件別の純圧縮状態の一本柱の座屈に対する最適形状を示している(図 4.1)。

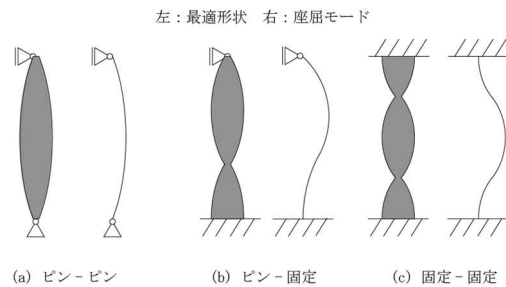


図 4.1 支持条件別一本柱最適形状

本論文は(2)の手法について考察を行う。

### 4.2. 材端の回転剛性の具象化

複雑な架構であっても、全体座屈解析による座屈モードを部材別にみると図 4.1 のいずれかに類似している。図 4.1 の条件の差異は材端の回転拘束度のみであるため、架構中の個材について材端の回転剛性が算

出されれば最適形状を決定できる可能性がある。ここで、図 4.2 の梁について縮約した弾性剛性 $[K_E']$ がもつ剛性に関する情報は、具体的に以下の要素に分解できる。

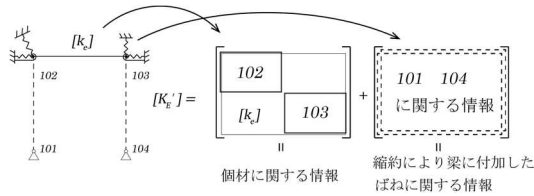


図 4.2  $[K_E']$ の持つ情報

この当該個材以外の架構による材端の回転剛性導出のため、 $[K_E']$ の付加部材に関する情報を単純ばね(軸剛性のみ)、回転ばね(回転剛性のみ)で具象化すると、以下の 15 の変数を持つモデルで表せると分かった。

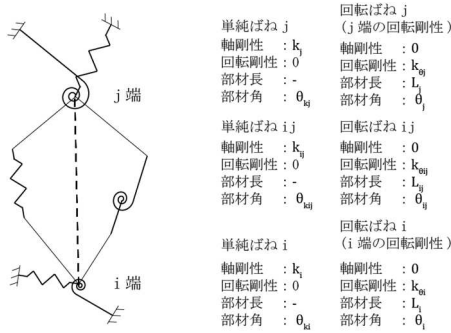


図 4.3  $[K_E']$ の具象化による材端の回転剛性

具象化で求まる回転ばね i, j のばね定数をそれぞれ材端を拘束する回転剛性とする。

#### 4.3. 回転剛性・荷重条件の考察

両端の回転剛性が等価であれば、部材の最適形状は図 4.4 に存在すると考えられるので、図 4.5 のモデルの梁部材を図 4.4 の 6 種類の要素 elem に置換し $\lambda$ を算出した。

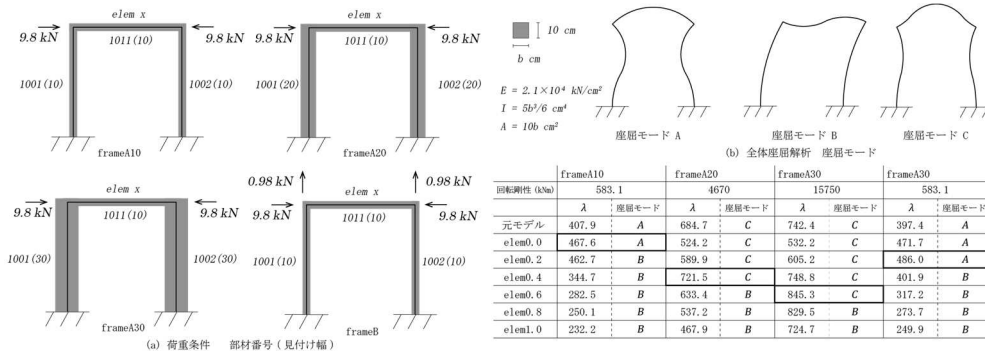


図 4.5 frame 解析結果一覧

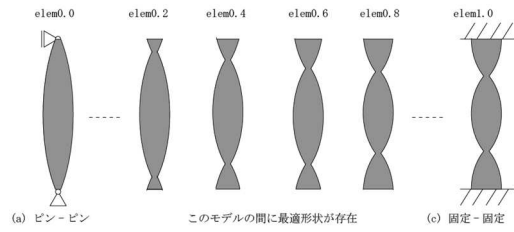


図 4.4 回転剛性別一本柱最適形状予測

その比較を行う。柱の見付のみを変えた frameA10 から frameA30 の $\lambda$ の最大上昇モデル(表の太枠)の比較から、材端の拘束が強くなることで梁の最適形状が図 4.4 の(c)側に近づくことが確認できた。また frameA10 と鉛直荷重を加えた frameB の比較から、回転剛性は同一でも周辺部材の軸力の有無が回転方向の拘束に影響を与える様子が確認できる。

#### 5. 結論

座屈固有値問題の縮約手法について、算出される座屈荷重の妥当性の検証を行った。今後も実験検証による実現象の正確な把握が行われることが望ましい。また縮約されたマトリクスの具象化を用いた最適化への提案を行った。将来的に荷重条件の影響を数値化できれば複雑な架構の部材ごとの形状を決定できる可能性がある。

#### 参考文献

- 堤千春他, 弾性剛性と幾何剛性を用いた座屈固有値問題の縮約による個材座屈荷重の検出法 その 2: 解析結果の分析と最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 2018
- 朝原真知子他, 座屈固有値問題の縮約による個材座屈荷重の検出方法とその実験検証 日本建築学会大会学術講演梗概集, 2019
- 氏岡啓威, 座屈固有値問題の縮約を利用した座屈最適化における部材境界条件の影響 東京大学工学部建築学科 2019 年度卒業論文
- 浜田実・瀬口靖幸・多田幸生, 逆変分原理による構造物の形状決定問題: 第 2 報, 座屈問題と振動問題, 日本機械学会論文集 A 編, 46 巻 402 号, 1980