論文の内容の要旨

論文題目

Asymptotic analysis of Bergman kernels for linear series and its application to Kähler geometry
線形系に対するベルグマン核の漸近解析とケーラー幾何への応用について

氏名

久本智之　**Tomoyuki Hisamoto**

コンパクトな複素多様体 X 上の函数論と言った場合, 正則直線束 L の大域切断の空間 $H^0(X,L)$ は最も基本的な対象である. テンソル冪を取れば $R:=\bigoplus_{k=0}^{\infty}H^0(X,L^{\otimes k})$ は環になり, L が豊富なら実際この環から X が復元できる. L の計量 h を与えれば各 k ごとに Hilbert 空間 $H^0(X,L^{\otimes k})$ の再生核, すなわち Bergman 核が定義され, 解析的にはこれら Bergman 核の k に対する漸近的な振る舞いを調べることが, 切断環 R を調べることに相当する. さて, 函数論では単なる正則函数だけではなく, 例えば与えられた部分多様体においてどのような値を持つ正則函数が存在するかといった問題に興味があるし, また幾何学的な応用のためにも, このような条件付きの正則函数を求めることが重要である. 今の場合これは R の次数付き部分環

$$W=\bigoplus_{k=0}^{\infty}W_k\subseteq\bigoplus_{k=0}^{\infty}H^0(X,L^{\otimes k})$$

を考えることに相当している. 従って, 一般の次数付き部分環に対し Bergman 核を定義し, それらの漸近的な振る舞いを調べることが必要である. 本論文の Part 1(論文 [8] に相当) では次数付き部分環に対する Bergman 核の漸近解析を考察し, その結果として, 次数付き部分環の体積と呼ばれる不変量

$$\mathrm{vol}(W):=\limsup_{k\to\infty}\frac{\dim W_k}{k^n/n!}$$

を平衡化計量

$$h_W(z):=\liminf_{w\to z}\inf\left\{\ |s(w)|^{-\frac{2}{k}}\ \middle|\ k\geqslant 1,\ s\in W_k \text{ such that } \|s\|_h\leqslant 1.\right\}.$$

の曲率カレント Θ_{h_W} によって解析的に表示する公式を得る．定義より平衡化計量は Bergman 核函数の極限であることに注意する．h_W が有界な範囲ではウェッジ積 $\Theta_{h_W}^n$ を取ることができ，h_W が非有界な範囲では測度ゼロになるよう一意的に拡張できる．

Theorem 1. W を次数付き部分代数とし，十分割り切れる自然数 k に対し付随する写像 $X \dashrightarrow \mathbb{P}W_k^*$ が像の上への双有理写像になっていると仮定する．このとき，

Wのとり方のよい例?

$$\mathrm{vol}(W) = \int_X \Theta_{h_W}^n$$

が成り立つ．

これは [4], [2] が $W = R$ の場合に示した結果の一般化になっている．次数付き部分環の場合は，[11], [12], [6] らが代数的な側面から研究を行った．Bergman 核を用いた解析的な側面からの研究は我々が初めて行ったが，そこでは彼らの代数的な結果を本質的に用いる．

本論文の主要な部分は Part 2(論文 [10] に相当) である．ここでは，このような次数付き部分環に対する Bergman 核の漸近解析を，実際に定スカラー曲率 Kähler 計量の存在問題に応用する．

以下 (X, L) を偏極多様体とする．同変的な $\mathbb{C}^*$ 作用を持つ偏曲多様体の平坦族 $(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \to \mathbb{C}$ が $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1) = (X, L)$ を満たすとき，(X, L) のテスト配位と呼ぶ．このデータをしばしば $\mathcal{T}$ で表す．このとき，各自然数 k に対して $\mathbb{C}^*$ 作用に関する固有分解を $H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^{\otimes k}) = \bigoplus V_\lambda$ とおけば，漸近展開

$$\frac{\sum_\lambda \lambda \dim V_\lambda}{k \dim H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^{\otimes k})} = F_0 + F_1 k^{-1} + O(k^{-2})$$

Conj. (Yau-Tian-Donaldson)
$\forall \mathcal{T}$, $F_1 \leq 0$ "=" iff $\mathcal{X} \cong X \times \mathbb{C}$

が成り立つ．係数 F_1 は Donaldson–二木不変量と呼ばれ，非自明なテスト配位に対し常に $F_1 < 0$ となるとき (X, L) は K-安定であると言う．K 安定性は幾何学的不変式論における安定性の一種である．ベクトル束に対する小林–Hitchin 対応の類似として，(X, L) の K-安定性は定スカラー曲率 Kähler 計量 (スカラー曲率 S_ω が平均値 $\hat{S}$ と各点で一致するような X の Kähler 計量 ω で，L の第一 Chern 類に属するもの) の存在と同値であると考えられている．実際，Donaldson([5]) は次の不等式を証明した．

$$\left(\int_X (S_\omega - \hat{S})^2 \frac{\omega^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{F_1}{\|\mathcal{T}\|}.$$

左辺はいわゆる Calabi の汎関数である．$\|\mathcal{T}\| \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ は Donaldson によって導入された不変量で，漸近展開

$$\sum_\lambda (\lambda - \hat{\lambda})^2 \dim V_\lambda = \|\mathcal{T}\|^2 k^{n+2} + O(k^{n+1})$$

によって定義される．上の不等式から特に，定スカラー曲率 Kähler 計量が存在すれば $F_1 \leqslant 0$，すなわち (X, L) が K 半安定であることが従う．

ここまで，固有値 λ の平均 (モーメント) が一貫して重要な役割を果たしていた．本論文ではさらに固有値 λ の分布 (スペクトル測度)

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \delta_\lambda \dim V_\lambda$$

を調べる．δ_λ は λ を中心とするデルタ函数である．ポイントとなるのは，テスト配位が与えられたとき，各 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し次のように次数付き線形系

$$W_\lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} W_{\lambda,k} \subseteq \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(X, L^{\otimes k})$$

が対応するという事実である.

$$W_{\lambda,k} := \left\{ s \in H^0(X, L^{\otimes k}) \;\middle|\; t^{-\lceil \lambda k \rceil}\bar{s} \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \right\}.$$

ここで $\bar{s}$ は $\mathcal{L}$ の有理型切断で, $\mathbb{C}^*$ 作用について不変になるように $s \in H^0(X, L^{\otimes k})$ を $\mathcal{X}$ まで拡張したものである. ちょうど $R = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(X, L^{\otimes k})$ が (X, L) を復元したように $W_{\lambda,k}$ は $\mathcal{T}$ を復元し, λ は退化の様子を記述する変数である. 実際, 体積 $\mathrm{vol}(W_\lambda)$ の λ に関する Lebesgue–Stieltjes 測度 $d\,\mathrm{vol}(W_\lambda)$ は

$$\frac{n!}{k^n}\sum_{\lambda} \delta_\lambda \dim V_\lambda \to -d\,\mathrm{vol}(W_\lambda)$$

を満たす. ここまでは代数的な公式に過ぎない. そこで右辺に Theorem 1 を適用するのである. λ に関する Legendre 変換によって平衡化計量は Kähler 計量の空間の測地線と結びつけられ, Duistermatt–Heckman 型の測度が現れる. 次が Part 2 の主結果である.

Theorem 2. *Kähler* 計量の空間の *(*弱い意味での*)* 測地線で, 始点を指定したとき $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ から自然に定まるものを ω_t と書く *([13], [14]* 参照*)*. 各 $t \in [0, \infty)$ に対し ω_t は L の第一 *Chern* 類に属する *(*退化した*)Kähler* 計量である. 測地線の接ベクトル $\dot{\omega}_t$ は X 上の実数値関数を与える. このとき, $\mathbb{R}$ 上の測度としての収束

$$\frac{n!}{k^n}\sum_{\lambda} \delta_\lambda \dim V_\lambda \to (\dot{\omega}_t)_* \omega_t^n \qquad (k \to \infty)$$

が成り立つ.

特に右辺は t 及び始点 ω_0 に依らない. $t \to \infty$ とすることは X を中心ファイバー $\mathcal{X}_0$ に退化させることに対応し, $\mathbb{C}^*$ の $\mathcal{X}_0$ への作用が定める Duistermatt–Heckman 測度に相当するものが得られる. この定理ははじめ [15] によって予想された. 固定点 $0 \in \mathbb{C}$ 上の作用から特性形式が決まるという意味で一種の同変指数定理であり, 実際中心ファイバー $\mathcal{X}_0$ が滑らかで X と同型な場合は [1] の同変 Chern–Weil 理論から主張は従う. しかし一般には $\mathcal{X}_0$ は非常に特異的であり, $\mathcal{X}_0$ の上で直接 Duistermatt–Heckman 測度を定義することさえ難しい.

両辺の二次モーメントを取れば直ちに, ノルム $\|\mathcal{T}\|$ の解析的な特徴付けを得る.

Theorem 3. $\|\mathcal{T}\|$ はテスト配位に付随する測地線の接ベクトルの L^2 ノルム

$$\left(\int_X (\dot{\omega}_t - F_0)^2 \frac{\omega_t^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

と一致する.

上の結果を用いると, Donaldson の不等式に変分法的な解釈を与えることができる. さらに一般の L^p-ノルムに対応する不変量 $\|\mathcal{T}\|_p$ も定義できるようになり, この $\|\mathcal{T}\|_p$ に対しても Donaldson 型の不等式が成り立つことが期待できる. 実際 Fano 多様体の場合は [3] の結果と組み合わせることで次が示せた.

Theorem 4. X を *Fano* 多様体, ω を第一 *Chern* 類に属する *Kähler* 計量とする. 関数 h を, $\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}h$ を満たすものとして取り, $\int_X (e^h - 1)\frac{\omega^n}{n!} = 0$ が成り立つよう正規化しておく. このとき, $1/p + 1/q = 1$ を満たす任意の指数 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ に対し不等式

$$\left(\int_X \left| e^h - 1 \right|^q \frac{\omega^n}{n!} \right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \frac{F_1}{\|\mathcal{T}\|_p}$$

が成り立つ.

次数付き線形系の Bergman 核の解析を定スカラー曲率 Kähler 計量の問題に応用するアプローチはそれ自身新しいものであり, 今後さらに研究される余地があると思われる. また, 他の様々な幾何学的問題にも応用が期待できる. 実際, 我々は Part 3(論文 [7] に相当) で, X がより大きな多様体 Y に閉部分多様体として埋め込まれている場合に, Y まで拡張できる切断が成す次数付き部分環を定義し, 対応する Bergman 核の漸近解析を詳しく調べた. この場合は切断の拡張問題と結びつき興味深い. Part 4(論文 [9] に相当) ではここから発展して, 計量の拡張問題への応用を考察する.

参考文献

[1] M. F. Atiyah and R. Bott: *The moment map and equivariant cohomology.* Topology 23 (1984), no. **1**, 1–28.

[2] R. J. Berman: *Bergman kernels and equilibrium measures for line bundles over projective manifolds.* Amer. J. Math. **131** (2009), no. 5, 1485–1524.

[3] R. J. Berman: *K-polystability of Q-Fano varieties admitting Kahler–Einstein metrics.* arXiv:1205.6214.

[4] S. Boucksom: *On the volume of a line bundle.* Internat. J. Math. **13** (2002), no. 10, 1043–1063.

[5] S. K. Donaldson: *Lower bounds on the Calabi functional.* J. Differential Geom. **70** (2005), no. 3, 453–472.

[6] S. Y. Jow: *Okounkov bodies and restricted volumes along very general curves.* Adv. Math. **223** (2010), no. 4, 1356–1371.

[7] T. Hisamoto: *Restricted Bergman kernel asymptotics.* Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 7, 3585–3607.

[8] T. Hisamoto: *On the volume of graded linear series and Monge–Ampère mass.* to appear in Math. Z., Available on doi: 10.1007/s00209-012-1133-6.

[9] T. Hisamoto: *Remarks on L^2-jet extension and extension of singular Hermitian metric with semipositive curvature.* arXiv:1205.1953. submitted to Nagoya Math J..

[10] T. Hisamoto: *On the limit of spectral measures associated to a test configuration of a polarized Kähler manifold.* arXiv:1211.2324. submitted to Duke Math. J..

[11] K. Kaveh and A. G. Khovanskii: *Newton convex bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory.* arXiv:0904.3350. To appear in Ann. of Math.

[12] R. Lazarsfeld and M. Mustaţă: *Convex Bodies Associated to linear series.* Ann. Sci. Éc. Norm. Supèr. (4) **42** (2009), no. 5, 783–835.

[13] D. H. Phong and J. Sturm: *Test configurations for K-stability and geodesic rays.* J. Symplectic Geom. **5** (2007), no. 2, 221–247.

[14] J. Ross and D. Witt Nyström: *Analytic test configurations and geodesic rays.* arXiv:1101.1612.

[15] D. Witt Nyström: *Test configurations and Okounkov bodies.* Compositio Math., Available on CJO2012 doi:10.1112/S0010437X12000358.