

# Liouville type theorems for the Navier-Stokes equations and applications

その他のタイトル	ナビエ・ストークス方程式に対するリウヴィル型定理とその応用
学位授与年月日	2014-03-24
URL	<a href="http://doi.org/10.15083/00007081">http://doi.org/10.15083/00007081</a>

## 論文審査の結果の要旨

氏 名 許 本 源

流体力学の基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式は、非圧縮性粘性流体の運動を記述する方程式として広く用いられている。しかし、その数学的理解は充分とはいえない。

許本源氏の博士論文では、主に次の2つのテーマを扱った。第1のテーマは、歪み流を伴う定常ナビエ・ストークス方程式の非自明解の非存在性の問題である。第2のテーマは、2次元半平面における粘着境界条件下でのリウヴィル型の定理の構築とその応用である。このほか境界条件のある場合の解の微分の最大値ノルムの評価についての考察もしている。

第1のテーマは、どのような歪み流を考えるかによって状況がかなり異なってくる。一般に  $z$  軸の両端から流入し、原点付近で  $xy$  平面の外へ流出する線形の流れの場合には、それを背景流とした定常流は存在しにくい。これに対して  $xy$  平面の無限直方から流入し、 $z$  軸の両端へ流出する流を背景流とした定常流は、例えばバーガーズ渦といったものが知られていて、乱流理論の基礎となっている。また、爆発型自己相似解の構成問題であるルレイの問題も、線形の流れを背景流としている解の存在問題とみなせる。数学的にいえば、非線形楕円型方程式の空間全域での有界の解は定数解だけかといったタイプの問題であり、ラプラス方程式の場合はリウヴィルの定理といわれ、有界な解は定数解のみである。

許本源氏は、この問題に正面から取り組み、背景の線形の流れが1つの軸から流入し、他の2軸の方向へ流出するような場合に、リウヴィル型の定理を解に有界性以外の弱い減衰性を課すことにより構築することに成功した。この結果は既に流体数学では権威のある国際学術雑誌である **Journal of Mathematical Fluid Mechanics** に出版されている。

第2のテーマは、境界条件のある場合のリウヴィル型の定理である。全平面の場合、渦度場についての強最大値原理より有界な速度場でナビエ・ストークス方程式を過去の無限時刻から満たす2次元平面全体で満たす、いわゆるマイルド解は定数しかないことが知られている。これに対して、半平面に粘着型の境界条件を課した場合の結果は全くなかった。これは渦度場の境界条件の扱いが難しいからである。許本源氏は前川泰則氏（東北大学）によって見つけられた境界条件の公式を空間方向の減衰条件を仮定しない場合に拡張し、時間負の方向に自己相似的な減衰があり、また渦度場が正の場合に、いわゆるマイルド解は定数解しかないことを証明した。これはナビエ・ストークス方程式の境界条件付きのリウヴィル型定理を示した初めての結果である。

この結果はナビエ・ストークスの解の爆発問題に対して著しい応用がある。よく知られているように、3次元ナビエ・ストークス流に対しては、有限時間で解が爆発するかどうかは、クレイ社のミレニアム問題として有名である。これに対して、爆発が起こらないためのさまざまな十分条件が知られている。例えば 1960 年代に **Serrin** や **Ladyzhenskaya** といったナビエ・ストークス方程式の数学解析の草分け的な研究者により見いだされた条件は有名である。多くの条件は特定の量が小さければといった条件である。その中で渦度場の方向が空間変数に対して一様に連続であれば、たとえ渦度場が大きくても爆発が起きないといったタイプの判定法が知られていて、幾何学的正則性判定法と呼ばれている。これは全空間の流れの場合、フィールズ賞受賞者である **Fefferman** と **Constantin** により 1990 年代に与えられたものである。その後さまざまな改良を経て、エネルギーが有界でないような解に対しても自己相似的な爆発を仮定すれば、幾何学的正則判定法がリウヴィルの定理を応用することにより示されている。この幾何学的判定法を半空間粘着境界条件の場合に示そうとすると、さらなる付帯条件が必要であったが、許本源氏の構築したリウヴィルの定理を用いると、全空間の場合と同じ幾何学的判定法が半空間粘着条件の場合にも示せる。実際、許本源氏はその博士論文で、その応用について詳述している。

この結果を確立するために、半平面ナビエ・ストークス方程式に対して、その解と微分の最大ノルムを評価する必要性が生じ、その評価も本論文で行っている。

第 2 のテーマについて国際的な評価は非常に高く、偏微分方程式分野で権威ある国際学術雑誌である **Communications in Partial Differential Equations** に修正ののち出版される見込みとなっている。以上で述べたように、許本源氏の博士論文は流体数学の論文として極めて価値の高いものである。

このように論文提出者の許本源氏は、博士（数理学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。