

論文の内容の要旨

論文題目： Besov and Triebel-Lizorkin spaces associated to non-negative self-adjoint operators

(非負自己共役作用素に関する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間)

氏 名：胡 国荣

本論文の目的は、Gauss 型上界評価を満たす熱核を持つ非負自己共役作用素に関する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間の理論を構築することである。よく知られているように、 \mathbb{R}^n 上の Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間は Lebesgue, (fractional) Sobolev, Hardy, BMO, Hölder-Zygmund 空間などの多くの古典的な関数空間を含み、偏微分方程式などに活用されていて非常に重要なものである。近年、Kerkyacharian-Petrushev はかなり一般的な設定で Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間を構成し、それらのフレーム特徴付けなどの性質を示した ([1])。彼らの導入した空間をより正確に記述するために、いくつかの記号を準備する。 (X, ρ, μ) を doubling 条件, 逆 doubling 条件及び non-collapsing 条件を満たす局所コンパクト距離測度空間とする。 $L^2(X, d\mu)$ 上の非負自己共役作用素 \mathcal{L} を考える。論文 [1] では、 \mathcal{L} の熱核が Gauss 型上界評価かつ Hölder 連続性を満たすという仮定の下で、 \mathcal{L} に関する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間が以下のように定義される。

定義 1. ([1]) $\Phi_0, \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ が次の条件を満たすとする。

$$\begin{cases} \text{supp } \Phi_0 \in [0, 2^2], & |\Phi_0(\lambda)| \geq c > 0 \quad \text{for } \lambda \in [0, 2^{3/2}], \\ \text{supp } \Phi \in [2^{-2}, 2^2], & |\Phi(\lambda)| \geq c > 0 \quad \text{for } \lambda \in [2^{-3/2}, 2^{3/2}]. \end{cases}$$

すべての $j = 1, 2, \dots$ に対して、 $\Phi_j(\lambda) = \Phi(2^{-2j}\lambda)$ とおく。

(i) $s \in \mathbb{R}$, $p \in (0, \infty]$, $q \in (0, \infty]$ に対して、 \mathcal{L} に関する Besov 空間 $B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ を次の準ノルムが有限となる超関数 $f \in \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X)$ の全体と定義する。

$$(1) \quad \|f\|_{B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)} := \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|2^{js}\Phi_j(\mathcal{L})f\|_{L^p(X,d\mu)}^q \right)^{1/q}.$$

(ii) $s \in \mathbb{R}$, $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$ に対して, \mathcal{L} に関する Triebel-Lizorkin 空間 $F_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ を次の準ノルムが有限となる超関数 $f \in \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X)$ の全体と定義する.

$$(2) \quad \|f\|_{F_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)} := \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{js} \Phi_j(\mathcal{L})f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(X, d\mu)}.$$

上記の定義が Φ_0, Φ によらないことを示すために, Kerkyacharian-Petrushev は次の Peetre 最大不等式の一般化を用いた.

補題 1. ([1, Lemma 6.4]) $t > 0$, $r > 0$ とする. $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ かつ $\text{supp } \Phi \subset [0, t^2]$ とする. このとき, 定数 $c > 0$ が存在して, すべての $f \in \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X)$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$\sup_{y \in X} \frac{|\Phi(\mathcal{L})f(y)|}{(1 + t\rho(x, y))^{d/r}} \leq c[M(|g|^r)(x)]^{1/r}, \quad x \in X.$$

ただし, d は X の “次元”, M は Hardy-Littlewood 最大作用素である.

本論文において我々は, \mathcal{L} の熱核の Hölder 連続性に関する仮定を外して, \mathcal{L} に関する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間の理論を構築する. 熱核が Gauss 型上界評価を満たして Hölder 連続性を満たさない非負作用素がたくさん存在するので, 我々の設定は [1] の設定を広く拡張している. 熱核に Hölder 連続性が仮定されていないとき, [1] での論法に基本的な道具である Peetre 最大不等式の一般化 (Lemma 1) は成立しない. そのため我々は代わりの論法を使わなければいけない. 以下, \mathcal{L} の熱核の Hölder 連続性に関する仮定はしない. 論文の主結果を述べる.

まず, Chapter 3 では, \mathcal{L} に関連する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間を以下のように導入する.

定義 2. (Definition 3.2 in Chapter 3) $s \in \mathbb{R}$, $q \in (0, \infty]$ とする. $\Phi_0, \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ が, ある正数 ε 及び非負整数 $M > s/2$ に対し, 次の条件を満たすとする.

$$(3) \quad \begin{cases} |\Phi_0(\lambda)| \geq c > 0 & \text{for } \lambda \in [0, 2^{3/2}\varepsilon], \\ |\Phi(\lambda)| \geq c > 0 & \text{for } \lambda \in [2^{-3/2}\varepsilon, 2^{3/2}\varepsilon], \\ \lambda \mapsto \lambda^{-M}\Phi(\lambda) & \text{belongs to } \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0}). \end{cases}$$

すべての $j = 1, 2, \dots$ に対して, $\Phi_j(\lambda) = \Phi(2^{-2j}\lambda)$ とおく.

(i) $p \in (0, \infty]$ に対して, \mathcal{L} に関する Besov 空間 $B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ を準ノルム (1) が有限となる超関数 $f \in \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X)$ の全体と定義する.

(ii) $p \in (0, \infty)$ に対して, \mathcal{L} に関する Triebel-Lizorkin 空間 $F_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ を準ノルム (2) が有限となる超関数 $f \in \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X)$ の全体と定義する.

次の定理は $B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ と $F_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ の定義が (Φ_0, Φ) に頼らないことを示す.

定理 1. (Definitions 3.3 and 3.4 in Chapter 3) $s \in \mathbb{R}$, $q \in (0, \infty]$ とする. (Φ_0, Φ) と $(\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Phi})$ が, ある $M > s/2$ に対して (3) を満たすとする. すべての $j = 1, 2, \dots$ に対して, $\Phi_j(\lambda) = \Phi(2^{-2j}\lambda)$, $\tilde{\Phi}_j(\lambda) = \tilde{\Phi}(2^{-2j}\lambda)$ とおく.

(i) $p \in (0, \infty]$ ならば, 次の準ノルムの同値性が成り立つ.

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \|2^{js} \tilde{\Phi}_j(\mathcal{L})f\|_{L^p(X, d\mu)}^q \right)^{1/q} \sim \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|2^{js} \Phi_j(\mathcal{L})f\|_{L^p(X, d\mu)}^q \right)^{1/q}, \quad f \in \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X).$$

(ii) $p \in (0, \infty)$ ならば, 次の準ノルムの同値性が成り立つ.

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{js} \tilde{\Phi}_j(\mathcal{L})f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(X, d\mu)} \sim \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{js} \Phi_j(\mathcal{L})f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(X, d\mu)}, \quad f \in \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X).$$

Chapter 3 では, $B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$, $F_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ の完備性及び基本的な埋め込み

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(X) \hookrightarrow B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X) \hookrightarrow \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X), \quad \mathcal{S}_{\mathcal{L}}(X) \hookrightarrow F_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X) \hookrightarrow \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X)$$

も示した. 更に, 以下の連続的な Littlewood-Paley 型の特徴付けを得た.

定理 2. (Theorem 3.14 in Chapter 3) $s \in \mathbb{R}$, $q \in (0, \infty]$ とする. $\Phi_0, \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ が, ある非負整数 $M > s/2$ に対して (3) を満たすとする.

(i) $p \in (0, \infty]$ ならば,

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)} \sim \|\Phi_0(\mathcal{L})f\|_{L^p(X, d\mu)} + \left(\int_0^1 t^{-sq} \|\Phi(t^2 \mathcal{L})f\|_{L^p(X, d\mu)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad f \in \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X).$$

(ii) $p \in (0, \infty)$ ならば,

$$\|f\|_{F_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)} \sim \|\Phi_0(\mathcal{L})f\|_{L^p(X, d\mu)} + \left\| \left(\int_0^1 t^{-sq} |\Phi(t^2 \mathcal{L})f|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L^p(X, d\mu)}, \quad f \in \mathcal{S}'_{\mathcal{L}}(X).$$

Chapter 4 では, $B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ と $F_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ の性質をより深く調べ, アトム分解による特徴付け, 補間定理, lifting property, 埋め込み定理などを得た. 以下, アトム分解による特徴付けについて述べる. \mathcal{L} に関するアトムは次のように導入される.

定義 3. (Definition 4.2 in Chapter 4) $K, S \in \mathbb{N}_0$ とする. $Q \in \mathcal{D}_k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) とする. ただし, \mathcal{D}_k は X 上の半径が粗く 2^{-k} の “dyadic cube” の全体の集合 (Lemma 4.1 in Chapter 4 を参照) である.

(A) $k \in \mathbb{N}$ の場合, 関数 $a_Q \in L^2(X, d\mu)$ が $m \in \{K, S\}$ に対し次の条件 (a), (b), (c) を満たすとき, a_Q を Q についての (K, S) -アトムと呼ぶ.

(a) $a_Q \in D(\mathcal{L}^m)$.

(b) $\text{supp}(\mathcal{L}^m a_Q) \subset B(z_Q, C2^{-k})$. ただし, z_Q は Q の “中心” である (cf. Lem. 4.1 in Chap. 4).

(c) $\text{ess sup}_{x \in X} |\mathcal{L}^m a_Q(x)| \leq 2^{2km} [\mu(Q)]^{-1/2}$.

(B) $k = 0$ の場合, 関数 $a_Q \in L^2(X, d\mu)$ が $m \in \{K, 0\}$ に対し条件 (a), (b), (c) を満たすとき, a_Q を Q についての (K, S) -アトムと呼ぶ.

$B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ のアトム分解は以下のようなになる ($F_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ のアトム分解についても同様である).

定理 3. (Theorem 4.4 in Chapter 4) $s \in \mathbb{R}$, $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty)$ とする. K を任意の非負整数, S を $s/2$ より大きい非負整数とする. このとき, 定数 $C > 0$ が存在して, 任意の (K, S) -アトムの列 $\{a_Q\}_{Q \in \cup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}_k}$ 及び任意の複素数列 $w = \{w_Q\}_{Q \in \cup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}_k}$ に対し,

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} w_Q a_Q \right\|_{B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)} \leq C \|w\|_{b_{p,q}^s}$$

が成り立つ. ただし, $b_{p,q}^s$ は [2] で導入される数列空間である.

逆に, 定数 $C' > 0$ が存在して, 任意的に与えられた $f \in B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ と任意の $K, S \in \mathbb{N}_0$ に対して, (K, S) -アトム列 $\{a_Q\}_{Q \in \cup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}_k}$ 及び

$$\|w\|_{b_{p,q}^s} \leq C' \|f\|_{B_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)}$$

となる複素数列 $w = \{w_Q\}_{Q \in \cup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}_k}$ が存在し,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} w_Q a_Q$$

が成り立つ. ここで, 級数の収束は $S'_{\mathcal{L}}(X)$ の意味での収束である.

Chapter 5 では, homogeneous 版の空間 $\dot{B}_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ と $\dot{F}_{p,q}^{s,\mathcal{L}}(X)$ を導入し, それらの性質を調べる. 特に, $\dot{F}_{p,2}^{0,\mathcal{L}}(X)$ と $H_{\mathcal{L}}^p(X)$ が同値な空間であることを証明した.

Chapter 6 では, 我々の構築した抽象的な理論が具体的な stratified Lie groups の場合に応用される. G を stratified Lie group とし, G 上の任意の sub-Laplacian Δ を考える. Δ は非負自己共役作用素であるから, Chapters 3–5 の理論によって, $B_{p,q}^{s,\Delta}(G)$, $F_{p,q}^{s,\Delta}(G)$, $\dot{B}_{p,q}^{s,\Delta}(G)$, $\dot{F}_{p,q}^{s,\Delta}(G)$ が定義される. これらに対して, 次のことを証明した. (a) $B_{p,q}^{s,\Delta}(G)$, $F_{p,q}^{s,\Delta}(G)$, $\dot{B}_{p,q}^{s,\Delta}(G)$, $\dot{F}_{p,q}^{s,\Delta}(G)$ は Δ の選択に頼らない (Theorem 6.7 in Chapter 6). (b) G 上の畳み込み特異積分作用素の $\dot{B}_{p,q}^{s,\Delta}(G)$ -有界性及び $\dot{F}_{p,q}^{s,\Delta}(G)$ -有界性 (Theorem 6.11 in Chapter 6).

Chapter 7 では, X がリーマン多様体, \mathcal{L} が X 上の Laplace-Beltrami 作用素の場合に, 空間 $F_{p,2}^{0,\mathcal{L}}(X)$ と非接最大関数によって定義される Hardy 空間 $H_{\max,\mathcal{L}}^p(X)$ との同値性を示した.

参考文献

- [1] G. Kerkycharian and P. Petrushev, Heat kernel based decomposition of spaces of distributions in the framework of Dirichlet spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), 121–189.
- [2] M. Frazier and B. Jawerth, A discrete transform and decompositions of distribution spaces, *J. Funct. Anal.* **93** (1990), 34–170.