論文内容の要旨

博士論文題目

Visible actions of reductive algebraic groups on complex algebraic varieties
（簡約代数群の複素代数多様体への可視的作用について）

氏名　田中雄一郎

本論文では複素代数多様体への簡約代数群の可視的作用を扱うが、その主な結果としては以下の３つがある。１、一般化カルタン分解 $G = LBH$（ただし、B は G の Chevalley–Weyl 対合の固定点からなる G の部分集合）を許容するコンパクトリー群 G とそのレビ部分群 H, L からなる３つ組 (G, L, H) の分類。２、一般旗多様体へのレビ部分群による強可視的作用の分類。３、直交群の全ての無重複テンソル積表現に対する可視的作用を用いた幾何学的実現、特に、無重複テンソル積表現の「種」の分類。これらについての詳細は６つの参考論文にあるが、本文においては可視的作用の存在に対する別証明を与える。参考論文では各論を用いて可視的作用の構成を行った。他方、別証明においては統一的な説明が与えられている。また、別証明において用いた考え方はより一般の複素球代数多様体へのコンパクトリー群の可視的作用の構成にも有効であり、その応用例も本文中で示されている。さらに、対称対に対する松木分解（松木、J. Algebra **197** (1997)）を簡約球部分群の場合へと拡張することにより、非コンパクト簡約代数群の可視的作用の構成も行った。

複素多様体への可視的な作用の理論は小林俊行氏によって導入され、その目的をリー群の無重複表現の統一的扱いとしている。以下に強可視的作用の定義を述べる。

定義 1 (小林、Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41 (2005)) リー群 G が複素多様体 X に正則に作用しているとする。ある X の実部分多様体 S であって次の条件を満たすものが存在するとき、G の作用は強可視的であるという。
・$X' := G \cdot S$ は X の空でない開集合である。
・X' の反正則微分同相写像 σ が存在して、σ は $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$ を満たし、各 G-軌道を保つ。
上の状況で、G の作用は S-可視的であるともいう。この用語は S が単に部分集合である場合にも用いる。

また、局所コンパクト群 G とそのユニタリ表現 V に対し、G-絡作用素の環 $\mathrm{End}_G(V)$ が可換であるとき、V は G の無重複表現であると言われる。V が有限次元である場合、V が無重複であることと V の既約分解に現れる任意の既約ユニタリ表現の重複度が 1 であることとは同値である。表現が無重複であるというのは強い要請だが、現在までに数多くの無重複表現の例が知られており、その多様さに相俟って無重複性の証明法もまた個性的である。これに対し、次に紹介する無重複性の伝播定理は、表現が有限次元でも無限次元でも、連続スペクトルを含んでいても適用可能である。

定理 1 (小林、Progr. Math. 306 (2013)) G をリー群、X を連結な複素多様体、$\mathcal{W} \to X$ を G 同変な X 上の正則エルミートベクトル束とする。また、V を G のユニタリ表現とする。このとき以下に挙げる条件が満たされるならば、V は無重複である。

(1) V は正則切断の空間 $\mathcal{O}(X, \mathcal{W})$ に G-同変に埋め込まれる。
(2) (底空間) 底空間への作用 $G \curvearrowright X$ は S-可視的である。
(3) (ファイバー) ファイバーにおける固定化部分群の表現は無重複である
　＋いくつかの compatibility に関する条件。

この定理によって、リー群の可視的作用は我々に無重複表現をもたらす。では、リー群の可視的作用にはどのようなものがあるのか、どれくらいあるのか、ということが問題になる。

この可視的作用の分類問題については、以下に紹介するような先行研究がある。

定理 2 (小林、Transform. Groups 12 (2007)) G をエルミート型単純リー群、K をその極大コンパクト部分群、H を G の対称部分群とする（即ち、ある G の対合 τ が存在して、$G_0^\tau \subset H \subset G^\tau$ を満たす)。このとき、H の G/K への作用は強可視的である。

連結複素簡約代数群 $G_{\mathbb{C}}$ とその有限次元表現 V とに対し、V 上の多項式の空間 $\mathbb{C}[V]$ が $G_{\mathbb{C}}$ の表現として無重複であるとき、組 $(G_{\mathbb{C}}, V)$ を線型無重複空間と呼ぶ。ここで、$\mathbb{C}[V]$ は $G_{\mathbb{C}}$ のユニタリ表現ではないが、Weyl のユニタリトリックを用いることで我々の無重複性の定義が適用できることに注意する。

定理 3 (笹木、Int. Math. Res. Not. IMRN (2009) no.18, (2011) no.4) $(G_{\mathbb{C}}, V)$ を線型無重複空間とし、U を $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形とする。このとき、U の V への作用は強可視的である。

連結複素簡約代数群 $G_{\mathbb{C}}$ とそれが作用する連結複素代数多様体 X とに対し、$G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群 B が X 上に開軌道を持つならば、X は球多様体と呼ばれる。

定理 4 (笹木、Geom.Dedicata(2010), J.Math.Sci.Univ.Tokyo(2010), Adv.Pure.Appl.Math.(2011)) $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ を、以下に挙げるアファイン球等質空間の内の 1 つとする。このとき、$G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 U は $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に強可視的に作用する。

$$\mathrm{SL}(m+n,\mathbb{C})/(\mathrm{SL}(m,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}))\ (m\neq n),\quad \mathrm{Spin}(4n+2,\mathbb{C})/\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C}),$$
$$\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})/\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}),\quad \mathrm{E}_6(\mathbb{C})/\mathrm{Spin}(10,\mathbb{C}),\quad \mathrm{SO}(8,\mathbb{C})/\mathrm{G}_2(\mathbb{C}).$$

最後に、本論文の主結果の雛形である、A 型一般旗多様体に対する結果を紹介する。

定理 5 (小林、J. Math. Soc. Japan 59 (2007)) $G=U(n)$, L, H を G のレビ部分群とする。

$$L \text{ の } G/H \text{ への作用、} H \text{ の } G/L \text{ への作用、} G \text{ の } (G\times G)/(L\times H) \text{ への対角作用}$$

が全て強可視的となるような 3 つ組 (G,L,H) の分類は以下のようになる（L と H の入れ替えは無視する）。

G	L	H
$U(n)$	$U(n)$ または $U(1)\times U(n-1)$	任意のレビ部分群
	$U(p)\times U(q)$	$U(n_1)\times U(n_2)\times U(n_3)$

ただし、$\min\{p,q\}\leq 2$ または $\min\{n_1,n_2,n_3\}\leq 1$ $(p+q=n_1+n_2+n_3=n)$.

この定理において、作用の強可視性は次のコンパクトリー群に対する一般化カルタン分解を与えることによって証明されている。

定義 2 G を連結コンパクトリー群、T を極大トーラス、H,L を T を含むレビ部分群とする。また、σ を G の T に関する Chevalley–Weyl 対合とする（即ち、σ は $\sigma^2=\mathrm{id}_G$ かつ $\sigma(t)=t^{-1}$, $t\in T$ を満たす）。積写像

$$L\times B\times H\to G$$

が部分集合 $B\subset G^{\sigma}$ に対して全射となるとき、$G=LBH$ を一般化カルタン分解と呼ぶ。

実際、$G=LBH$ が成り立つとすると、3 つの群作用 $L\curvearrowright G/H$, $H\curvearrowright G/L$, $\mathrm{diag}(G)\curvearrowright(G\times G)/(H\times L)$ が全て強可視的となることが分かる。この一般化カルタン分解の（A 型以外に対する）分類が、本論文の 1 つ目の主結果である。

主結果 1 G を連結単純コンパクトリー群、T を極大トーラス、L_1,L_2 を T を含むレビ部分群とし、σ を G の T に関する Chevalley–Weyl 対合とする。このとき、一般化カルタン分解を許容する 3 つ組 (G,L_1,L_2) の分類は最後のページにある表のようになる。

先に述べたように、一般化カルタン分解から一般旗多様体への強可視的作用が手に入る。逆に、一般旗多様体への強可視的作用は全て一般化カルタン分解から得られる、というのが次に述べる 2 つ目の主結果である。これによって、一般旗多様体へのレビ部分群の強可視的作用の分類が得られたことになる。

主結果 2 G を連結コンパクトリー群とする。このとき、レビ部分群の組 L_1,L_2 に関する以下の 10 個の条件は同値である。

(i) (G,L_1,L_2) は一般化カルタン分解を許容する。

(ii) 自然な作用 $L_1\curvearrowright\mathcal{P}_2$ は強可視的である。

(iii) 自然な作用 $L_2\curvearrowright\mathcal{P}_1$ は強可視的である。

(iv) 対角作用 $G\curvearrowright\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2$ は強可視的である。

(v) $\mathcal{P}_2$ 系列に属す G の任意の既約表現に対し、その L_1 への制限は無重複である。

(vi) $\mathcal{P}_1$ 系列に属す G の任意の既約表現に対し、その L_2 への制限は無重複である。

(vii) $\mathcal{P}_j$ $(j=1,2)$ 系列に属す G の任意の既約表現 π_j に対し、それらのテンソル積表現 $\pi_1\otimes\pi_2$ は無重複である。

(viii) $\mathcal{P}_2$ は $(L_1)_{\mathbb{C}}$ の球多様体である。

(ix) $\mathcal{P}_1$ は $(L_2)_{\mathbb{C}}$ の球多様体である。

(x) $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ は $G_{\mathbb{C}}$ の球多様体である。

ただし $\mathcal{P}_j = G/L_j$ であり、また L_j のユニタリ指標から誘導して得られる G の既約表現のことを $\mathcal{P}_j$ 系列に属す表現、と呼ぶこととする $(j = 1, 2)$。

これによって特に、任意のユニタリ指標の組 (χ_1, χ_2) に対して正則誘導表現のテンソル積 $\mathrm{Ind}_{L_1}^G \chi_1 \otimes \mathrm{Ind}_{L_2}^G \chi_2$ が無重複となるなら、G の $(G \times G)/(L_1 \times L_2)$ への対角作用は強可視的であることが分かる。ところが、対角作用が強可視的でないような組 (G, L_1, L_2) に対しては、あるユニタリ指標の組 (χ_1, χ_2) に対しては対応するテンソル積表現が無重複となるが、別のある組 (χ_1', χ_2') に対してはテンソル積表現が無重複とならない、ということが起こり得る。このような場合についても、可視的な作用の理論の枠組みで理解したい。そのためにもう一度無重複性の伝播定理（定理 1）に戻る。この定理によれば、大域切断の空間 $\mathcal{O}(X, \mathcal{W})$ という大きな表現の無重複性が、可視的作用を通じ、ファイバーという「小さな」表現の無重複性に帰着される。この小さな無重複表現のことを、「無重複表現の種」と呼ぶ（この用語は小林氏によって導入された）。このような見方に立つと、次の問いが浮かぶ。

問：V をリー群 G の無重複表現とする。V を与えるような無重複表現の種と可視的作用との組を求めよ。

この問いの特別な場合として、次の問題を考える。

問題 1 コンパクトリー群 G の全ての無重複テンソル積表現 $V_1 \otimes V_2$ に対し、それを実現する無重複表現の種と可視的作用との組を求めよ。

この問題の $G = U(n)$ の場合は、以下のような形で既に解かれている。

定理 6 (小林、Acta Appl. Math. 81 (2004)) $U(n)$ の無重複テンソル積表現は全て、A 型一般旗多様体への強可視的作用と以下の「無重複表現の種」とを組み合わせることで実現できる。

- 1 次元表現。
- 対称テンソル積表現 $S^i\mathbb{C}^n$ または外積表現 $\Lambda^i\mathbb{C}^n$ の極大トーラス T への制限。
- 最高ウェイト $2\varpi_i$ に対応する $U(n)$ の既約表現の、レビ部分群 $U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)$ への制限。ただし、ϖ_i $(1 \leq i \leq n-1)$ は $U(n)$ の基本ウェイトである（$n = n_1 + n_2 + n_3$）。

この結果の直交群の場合に相当するものが、３つ目の主結果である。

主結果 3 $SO(N)$ 及び $Spin(N)$ の無重複テンソル積表現は全て、一般直交旗多様体への強可視的作用と以下の「無重複表現の種」とを組み合わせることで実現できる。

- 1 次元表現。
- 自然表現 $\mathbb{C}^N$ またはスピン表現 Spin_N の極大トーラス T への制限。
- 外積表現 $\Lambda^i\mathbb{C}^N$ の極大レビ部分群 $U(j) \times SO(N-2j)$ への制限（D 型については i, j に条件が付く）。
- スピン表現 Spin_N の $\{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\} \times Spin(N-2)$ への制限（ただし、N は奇数とする）。

以上、一般旗多様体へのレビ部分群による可視的作用を扱ってきたが、これより一般の $G_{\mathbb{C}}$-球多様体 X への $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 U の可視的作用についての結果を紹介する。ν を $G_{\mathbb{C}}$ の Chevalley–Weyl 対合で U を保つものとし、U に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の Cartan 対合を θ とおく。また、$\iota = \nu \circ \theta$ と定める。

定理 7 $G_{\mathbb{C}}$-球多様体 X 上に ι と整合的な実構造 μ が存在し、μ-固定点部分集合 X^μ が空でないならば、U の X への作用は強可視的である。

ここでは、複素多様体 X 上の反正則対合を実構造と呼んでいる。また実構造 $\mu : X \to X$ が ι と整合的とは、$\mu(gx) = \iota(g)\mu(x)$ $(g \in G_{\mathbb{C}}, x \in X)$ が成り立つことをいう。整合的な実構造の存在については Akhiezer 氏の Stein 多様体に対する研究（Ann. Inst. Fourier 59, (2009)）や Akhiezer、Cupit-Foutou 両氏の wonderful variety に対する研究（J. reine angew. Math. 693, (2014)）等があり、定理 7 と合わせることで以下を得る。

系 8 X を滑らかなアファイン $G_{\mathbb{C}}$-球多様体とする。このとき U の X への作用は強可視的である。

系 9 X を $G_{\mathbb{C}}$ の wonderful variety とする。このとき U の X への作用は強可視的である。

また、ι が $G_{\mathbb{C}}$ の split な実形を定めることに注意すると、定理 7 から次も分かる。

系 10 $G'_{\mathbb{C}}$ を連結複素簡約代数群、$G_{\mathbb{C}}$ をそのレビ部分群とし、$X = G'_{\mathbb{C}}/P'$ を一般旗多様体とする。このとき X が $G_{\mathbb{C}}$-球多様体ならば、U の X への作用は強可視的である。

非コンパクト群の可視的作用を構成するためには松木分解（松木、J. Algebra 197, (1997)）を簡約球部分群の設定に一般化する必要があると考える。松木氏の理論ほど精密な結果は未だ得られていないが、次が（現状における）その一般化である。

定理 11 G を連結実簡約代数群、L, H をその簡約球部分群とする（即ち、$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ が共に複素等質アファイン球多様体となる）。このとき、有限個の可換なリー部分代数 $\mathfrak{j}_i$ と有限個の G の元 x_i, y_i とが存在して（$i \in I, \#I < \infty$）、$\bigcup_{i \in I} Hx_i \exp(\mathfrak{j}_i) y_i L$ が G の稠密開部分集合を含む。

この分解を可視的作用の構成に応用する。G を連結複素簡約代数群 $G_{\mathbb{C}}$ の inner type の実形とする。

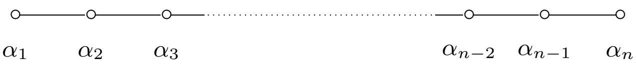
定義 3 (小林、Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41 (2005)) リー群 G が複素多様体 X に正則に作用しているとする。ある X の全実部分多様体 S が存在して、$G \cdot S$ が X の空でない開集合となるとき、G の作用は準可視的であるという。

定理 12 X を $G_{\mathbb{C}}$-球多様体とする。G の X への作用は準可視的である。

一般化カルタン分解の分類

連結単純コンパクトリー群 G の基本ルート系 Π の真部分集合 Π' に対し、ルート系が Π' で生成される G のレビ部分群を $\mathrm{L}_{\Pi'}$ で表す。以下に、$G = L_1 G^\sigma L_2$ を満たす主結果 1 の 3 つ組 $(G, L_1, L_2) = (G, \mathrm{L}_{\Pi_1}, \mathrm{L}_{\Pi_2})$ の分類表を挙げる（ただし、L_1, L_2 の入れ替えは除く）。

$\mathbf{A}_n$ 型の分類（小林（2007））



以下、$1 \leq i, j, k \leq n$ とする。

エルミート型 : I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$.

非エルミート型 :

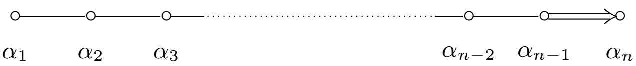
I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i, \alpha_j\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_k\}$, $\min_{p=i,j}\{p, n+1-p\} = 1$, or $i = j \pm 1$.

II. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i, \alpha_j\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_k\}$, $\min\{k, n+1-k\} = 2$.

III. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, Π_2 : anything, $i = 1$ or n.

※ III で，$(\Pi_2)^c$ が 1 つの元からなる場合はエルミート型になる。

$\mathbf{B}_n$ 型の分類

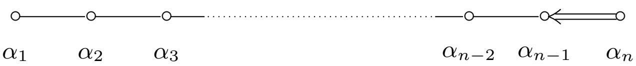


エルミート型 : I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_1\}$.

非エルミート型 : I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_n\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_n\}$.

II. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_i\}$, $2 \leq i \leq n$.

$\mathbf{C}_n$ 型の分類



エルミート型 : I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_n\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_n\}$.

非エルミート型 : I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_i\}$, $1 \leq i \leq n$.

$\mathbf{D}_n$ 型の分類

エルミート型 :

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$, $i, j \in \{1, n-1, n\}$.

非エルミート型 :

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$, $j \neq 1, n-1, n$

II. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$, $i \in \{n-1, n\}$, $j \in \{2, 3\}$.

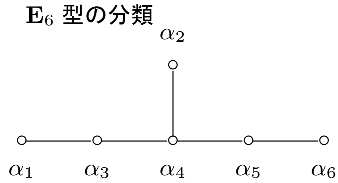
III. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j, \alpha_k\}$, $i \in \{n-1, n\}$, $j, k \in \{1, n-1, n\}$.

IV. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j, \alpha_k\}$, $i \in \{n-1, n\}$, $j, k \in \{1, 2\}$.

V. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j, \alpha_k\}$, $j \in \{n-1, n\}$ *or* $k \in \{n-1, n\}$.

VI. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_2, \alpha_j\}$, $n = 4$, $(i, j) = (3, 4)$ or $(4, 3)$.

$\mathbf{E}_6$ 型の分類



エルミート型 :

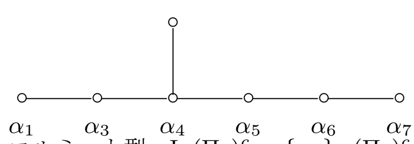
I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$, $i, j \in \{1, 6\}$.

非エルミート型 :

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_1, \alpha_6\}$, $i = 1$ or 6.

II. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$, $i = 1$ or 6, $j \neq 1, 4, 6$.

$\mathbf{E}_7$ 型の分類



エルミート型 : I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_7\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_7\}$.

非エルミート型 : I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_7\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_i\}$, $i = 1$ or 2.

$\mathbf{E}_8$,$\mathbf{F}_4$,$\mathbf{G}_2$ 型の分類

主結果 1 にあるような 3 つ組 (G, L_1, L_2) は存在しない。