論文審査の結果の要旨

氏名　田中雄一郎

群の表現は、それを既約表現に分解して同じ既約表現が２度以上現れないとき、**無重複表現** (multiplicity-free representation) という。無重複表現は、表現全体の中では特別なものであり、そこでは各既約成分への射影が一意的になることから、自然な展開定理を保証する代数的な基礎構造を与える。

リー群の無重複な表現は、歴史的に多くの研究がなされており、組合せ論、Shur–Weyl–Howe などによる dual pair の理論、Hecke 環、球多様体の理論など、種々のアプローチが開発されてきた。最近では、単純リー群の２つの有限次元表現のテンソル的がいつ無重複になるかについての分類が Stembridge によって組合せ論的手法で遂行されている (2003)。

一方、複素多様体における可視的作用の概念は、有限次元および無限次元の無重複表現を統一的に生み出す新しい幾何的原理として、小林俊行によって導入された (2003)。ここで複素多様体 X におけるリー群 L の双正則変換が**強可視的** (strongly visible) であるとは、X の L 不変な開集合 U および U 上の反正則な自己同型写像 σ が存在し $U = L{\cdot}U^\sigma$ が成り立つときをいう。

田中雄一郎氏の博士論文は、複素多様体における可視的作用の分類理論および無重複表現に関するもので、その主結果は以下の３つにまとめられる。

１．旗多様体における可視的作用の分類理論
２．有限次元の無重複表現への応用
３．可視的作用の概念を援用した球多様体の構造論

以下では、この３つの項目について順に述べる。

１．旗多様体における可視的作用の分類理論

コンパクト・リー群 G の部分群 H は、それがある元の中心化群として表せるとき、Levi 部分群という。このとき G/H は一般化された旗多様体 (generalized flag variety) と呼ばれるコンパクト・ケーラー多様体の構造をもつ。一般化された旗多様体における強可視的作用の分類は未解決問題である。その中で以下の問題はテンソル積表現の無重複性において基本的である。

問題Ａ.　H_1, H_2 をコンパクト・リー群 G の Levi 部分群とするとき、直積多様体 $G/H_1 \times G/H_2$ への G の対角作用が強可視的となる３つ組 (G, H_1, H_2) を分類せよ。

問題Ａは次の問題とも同等である。

問題Ａ$'$.　H_1, H_2 をコンパクト・リー群 G の Levi 部分群とするとき、一般化された旗多様体 G/H_2 への H_1 の作用が強可視的となる３つ組 (G, H_1, H_2) を分類せよ。

A 型の単純リー群に対しては、先行結果として、強可視的作用の分類理論が知られていた (Kobayashi, 2007)。田中氏の博士論文は、すべての単純リー群に対して問題Ａを解決したものであり、さらにその証明の過程において、強可視的作用という仮定の

下で編上げの手法 (herringbone stitch method) を適用し、古典的なカルタン分解を一般化した分解定理を具体的に得た。なお、田中氏の分類した３つ組は、Levi 部分群 H_1 および H_2 が極大部分群である場合には、Littelmann による spherical double cone の分類と一致する。

２．無重複表現への応用

次の問題は Stembridge によって組合せ論的手法によって解決された (2003)

問題 B. 直交群の有限次元既約表現を２つ与えたときに、そのテンソル積表現がいつ無重複になるか？

しかし、問題 B の解答を与える分類パラメータはかなり複雑であり、そのパラメータをもつ２つの既約表現のテンソル積表現がなぜ無重複になるかについての明快な説明は、組合せ論的手法では与えられていなかった。

一方、複素多様体における可視的作用の下での無重複性のを伝播理論 (Kobayashi, 2013) を用いると、無重複表現は幾何学的な「可視的作用」と「無重複の種」と呼ばれる、より簡単な無重複表現から構成される。そこで、田中氏は, 無重複性の伝搬理論と、田中氏自身による強可視的作用の分類理論を用いることにより、次の明快な定理を得た。

定理 (田中雄一郎)　直交群の任意の無重複テンソル表現は、１次元表現、外積表現、スピン表現 (の適当な部分群への制限) を「無重複の種」として強可視的作用による伝搬定理を用いることによって、すべて複素幾何的に構成可能である。

この定理は、ユニタリ群に対する先行結果 (Kobayashi, 2007) を直交群に拡張したものである。

３．球多様体の構造論

複素簡約リー群 G が双正則に作用している連結複素多様体は、G の Borel 部分群の開軌道をもつとき球多様体と呼ばれる。球多様体は複素簡約対称空間を特別な場合として含み、代数幾何の手法を援用して近年盛んに研究されている幾何的対象である。

G の極大コンパクト群を G_U とする。田中氏は、球多様体における G_U の作用は必ず強可視的となることを証明し、この場合にカルタン分解の一般化となる分解定理を得た。この証明方法は、G の非コンパクトな (inner type の) 実形に対しても適用できるものであり、そこで得られた球多様体の構造定理は、今後の球多様体における大域解析の研究において、基本的な役割の一つとなるものと期待される。

以上のように，当該論文は可視的作用の分類理論および表現論に新しい知見を与えたものであり、論文提出者 田中雄一郎氏は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。