

232
東京大学大学院新領域創成科学研究科
人間環境学専攻

修士論文

重合メッシュ法を用いた
非線形構造解析手法に関する研究

2007年2月20日提出

指導教員 鈴木 克幸 助教授 

学生証番号 56771

岩田 隆道

目次

第1章 序論	1
1.1 研究背景.....	2
1.1.1 計算機を用いた設計について.....	2
1.1.2 現在の設計モデリングが抱えるメッシュ生成の問題.....	2
1.1.3 問題解決に向けた計算力学アプローチ.....	3
1.1.3.1 アダプティブ解析.....	3
1.1.3.2 複数のメッシュを用いた解析.....	4
1.1.3.3 メッシュを使用しない解析手法.....	7
1.2 本研究の目的と概要.....	8
1.3 本論文の構成.....	9
第2章 線形重合メッシュ法の理論	10
2.1 線形重合メッシュ法の方程式.....	11
2.2 連成効果マトリクス of 計算方法.....	14
2.2.1 積分領域の分割・結合と数値積分.....	14
2.2.2 数値解析例.....	16
2.2.3 積分点座標値の座標変換.....	17
2.3 連立一次方程式の解法.....	18
2.4 モデリングに関する注意.....	19
第3章 重合メッシュ法によるばね接合モデルおよび初期ひずみの導入	20
3.1 はじめに.....	21
3.2 ボルト解析の問題点.....	21
3.3 重合メッシュ法によるばね接合モデルの定式化.....	22
3.4 重合メッシュ法による初期ひずみの定式化.....	24
3.5 数値解析例 ボルトモデル.....	26

第 4 章 重合メッシュ法による接触解析	35
4.1 はじめに	36
4.2 重合メッシュ法による接触問題の定式化.....	36
4.3 重合メッシュ法による接触解析の手順.....	39
4.4 数値解析例 Hertz 問題.....	41
4.5 反復計算の収束に関する考察.....	44
第 5 章 重合メッシュ法による弾塑性解析	46
5.1 はじめに	47
5.2 重合メッシュ法による弾塑性解析の定式化.....	47
5.3 Newton-Raphson 法による反復計算の導入.....	49
5.4 数値解析例 円孔問題.....	50
5.5 反復計算の収束に関する考察.....	53
5.6 汎用コード実装のための連立方程式の解法.....	54
5.6.1 線形のグローバル, ローカルの反復法.....	54
5.6.2 弾塑性解析のグローバル, ローカルの反復法.....	56
5.6.3 数値解析例 円孔問題.....	57
第 6 章 重合メッシュ法による大変形解析	60
6.1 はじめに	61
6.2 重合メッシュ法による大変形問題の定式化.....	61
6.2.1 Total-Lagrange 法と Updated-Lagrange 法	61
6.2.2 Total-Lagrange 法を用いた重合メッシュ法の定式化	62
6.3 重合メッシュ法による大変形解析の手順.....	70
6.4 大変形の構成式	71
6.5 Newton-Raphson 法による反復計算の収束の問題.....	74
6.5.1 収束する例.....	74
6.5.2 収束しない理由と改善方法.....	76
6.5.2.1 グローバル, ローカル連成項の初期変位を 0 にする方法	76
6.5.2.2 グローバルメッシュの FEM 解析結果を初期値にする方法.....	77

6.5.3 数値解析例 (グローバル, ローカル連成項の初期変位を 0 にする方法)	77
6.5.3.1 L 字型板	77
6.5.3.2 円孔問題	80
6.5.4 数値解析例 (グローバルメッシュの FEM 解析結果を初期値にする方法)	84
6.5.4.1 円孔問題	84
6.5.4.2 扇モデル	86
6.6 大変形接触解析	91
6.6.1 数値解析例 はり問題	91
6.6.2 微小変形接触解析との比較	93
第 7 章 結論	96
参考文献	99
謝辞	102

目次

Fig. 1-1	メッシュ生成アルゴリズムの例.....	3
Fig. 1-2	アダプティブ法.....	4
Fig. 1-3	ズームング法の概念.....	5
Fig. 1-4	重合メッシュ法.....	6
Fig. 1-5	ボルト解析の例.....	8
Fig. 2-1	グローバルメッシュにローカルメッシュを重ねる概念図.....	11
Fig. 2-2	4個のグローバル要素に重なるローカル要素.....	15
Fig. 2-3	円孔を有する正方形板の解析.....	16
Fig. 2-4	円孔を有する正方形板の von Mises 応力.....	17
Fig. 2-5	サブ要素の作成.....	17
Fig. 2-6	積分点の座標変換 (2次元要素の場合).....	18
Fig. 2-7	一次独立性が失われる場合のモデリング.....	19
Fig. 3-1	ねじ山モデル.....	21
Fig. 3-2	圧力側フランクにおけるばね定数.....	22
Fig. 3-3	2次元ばね接合モデルの概念図.....	23
Fig. 3-4	初期ひずみの概念図.....	24
Fig. 3-5	ボルトモデルの概略図.....	27
Fig. 3-6	ボルトモデルの概略図 (二次元断面).....	27
Fig. 3-7	ボルトモデルの二次元断面.....	28
Fig. 3-8	ボルトモデルの二次元モデル.....	29
Fig. 3-9	二次元モデルのグローバルメッシュ.....	30
Fig. 3-10	二次元モデルのローカルメッシュ.....	30
Fig. 3-11	二次元モデルのグローバルとローカルの位置関係.....	31
Fig. 3-12	外力を与えない場合の二次元モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解).....	32
Fig. 3-13	外力を与えない場合の二次元モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によ	

るローカル解)	32
Fig. 3-14 外力を与えた場合の二次元モデルの変位と von-Mises 応力	33
Fig. 3-15 外力を与えた場合の二次元モデルの変位と von-Mises 応力	33
Fig. 4-1 重合メッシュ法による接触解析の概念図	37
Fig. 4-2 接触解析における Newton-Raphson 法の反復計算の手順	40
Fig. 4-3 Hertz 問題の概略図	41
Fig. 4-4 Hertz 問題の重合メッシュ	41
Fig. 4-5 Hertz 問題の参照メッシュ	42
Fig. 4-6 Hertz 問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)	42
Fig. 4-7 Hertz 問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)	43
Fig. 4-8 Hertz 問題の変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)	43
Fig. 4-9 Hertz 問題における外力と接触長さの関係	44
Fig. 4-10 Hertz 問題における Newton-Raphson 法による反復計算の収束	45
Fig. 5-1 重合メッシュ法による弾塑性解析の概念図	48
Fig. 5-2 弾塑性解析の手順	50
Fig. 5-3 円孔問題の概略図	51
Fig. 5-4 円孔問題の重合メッシュ	51
Fig. 5-5 円孔問題の参照メッシュ	52
Fig. 5-6 円孔問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)	52
Fig. 5-7 円孔問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)	53
Fig. 5-8 円孔問題の変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)	53
Fig. 5-9 円孔問題における Newton-Raphson 法による反復計算の収束	54
Fig. 5-10 全体剛性マトリクスの模式図	55
Fig. 5-11 弾塑性解析におけるグローバル, ローカル反復解析	57
Fig. 5-12 グローバルメッシュ, ローカルメッシュにおける A 点, B 点の位置	58
Fig. 5-13 参照 FEM における A 点, B 点の位置	58
Fig. 6-1 物体の移動と参照配置	62
Fig. 6-2 大変形解析における Newton-Raphson 法の反復計算の手順	71
Fig. 6-3 検証用モデル	74
Fig. 6-4 検証用モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)	75

Fig. 6-5	検証用モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)	75
Fig. 6-6	検証用モデルにおける Newton-Raphson 法による反復計算の収束	76
Fig. 6-7	L字型板の概略図	77
Fig. 6-8	L字型板の重合メッシュ	78
Fig. 6-9	L字型板の参照メッシュ	78
Fig. 6-10	L字型板の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)	79
Fig. 6-11	L字型板の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)	79
Fig. 6-12	円孔問題の変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)	80
Fig. 6-13	円孔問題の概略図	81
Fig. 6-14	円孔問題の重合メッシュ	81
Fig. 6-15	円孔問題の参照メッシュ	82
Fig. 6-16	円孔問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)	82
Fig. 6-17	円孔問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)	83
Fig. 6-18	円孔問題の変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)	83
Fig. 6-19	A 点の位置	84
Fig. 6-20	円孔問題の変位と von-Mises 応力 (グローバルメッシュの解析結果を用いた重合メッシュ法によるグローバル解)	84
Fig. 6-21	円孔問題の変位と von-Mises 応力 (グローバルメッシュの解析結果を用いた重合メッシュ法によるローカル解)	85
Fig. 6-22	円孔問題の変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)	85
Fig. 6-23	荷重点変位と外力の関係 (円孔問題)	86
Fig. 6-24	扇モデル	86
Fig. 6-25	扇モデルの重合メッシュ	87
Fig. 6-26	扇モデルの参照メッシュ	87
Fig. 6-27	扇モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)	88
Fig. 6-28	扇モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)	88
Fig. 6-29	扇モデルの変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)	89
Fig. 6-30	B 点の位置	89
Fig. 6-31	荷重点変位と外力の関係 (扇モデル)	90
Fig. 6-32	はりの大変形接触問題	91

Fig. 6-33	はりの大変形接触問題の重合メッシュ	91
Fig. 6-34	はりの大変形接触問題の参照メッシュ	92
Fig. 6-35	はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)	92
Fig. 6-36	はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)	93
Fig. 6-37	はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)	93
Fig. 6-38	はりの微小変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)	94
Fig. 6-39	はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解) (再掲)	94
Fig. 6-40	はりの微小変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)	95
Fig. 6-41	はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解) (再掲)	95

第1章 序論

1.1 研究背景

1.1.1 計算機を用いた設計について

現在の工学設計現場においては、計算機を用いた構造解析が日常化しており、さらに設計からシミュレーションまでのプロセスを全て計算機上で行う Computer Aided engineering (CAE) が広く定着している。そしてその CAE を支援するツールとして、MSC/NASTRAN, ANSYS, MARC, ABAQUS, LS-DYNA 等の汎用コードが数多く開発され、設計現場で使用されている。このような数値解析の信頼性を数理面から支援するのが有限要素法 (Finite Element Method) である。有限要素法は、元来偏微分方程式の境界値問題を数値的に解く手段として開発され、その後、構造・流体・伝熱・電磁気などの物理的現象を数値シミュレーションするための計算手法として広く研究が行われてきた。

1.1.2 現在の設計モデリングが抱えるメッシュ生成の問題

広く普及した CAE であるが、未だ解決されていない課題もある。それはメッシュ生成技術の問題である。近年の計算機能力の著しい向上の結果、解析に要する時間は大幅に短縮されたが、それに対して有限要素モデルの作成に要する時間はさほど短縮されていない。というのも、自動メッシュ生成の技術は、2次元においてはほぼ達成されたものの、3次元においては未だ、完全な自動メッシュ生成は不可能であるからである。写像によってメッシュを作成する構造メッシュ生成では、2次元ではデラウニー法、四分木・八分木法、そしてフロント法等 (Fig. 1-1) の手法が確立されているものの、3次元においては特に六面体要素の自動メッシュ生成アルゴリズムは確立されていない[1]。

また、応力集中部を精度良く解析するには、その部分のメッシュを詳細に切る必要があること、加えて解析精度を向上させるためには品質の良い (すなわち形状がゆがんでいない) メッシュを作ることが必要であるが、このような要求を満たすメッシュを作成するには専門的な知識を有する人間が必要である。なおメッシュの品質に関して、要素のゆがみと精度の問題に取り組んだ研究が行われている[2]。

このように、自動メッシュアルゴリズムとメッシュの品質という問題が未だ解決されていないため、実際の設計現場では、CAD データを基にメッシュ生成アプリケーションソフトが作成したメッシュを人間が手作業で修正しているのが現状である。したがってメッシュ生成に費やされる人的コストは非常に大きいものとなり、設計コストを大きく押し上げている。

また、計算機能力の大幅な向上に伴い、ソルバー部分の計算時間が大幅に短縮されているにも関わらず、設計プロセス全体に要する時間は以前と比べてもそれほど減少していない。

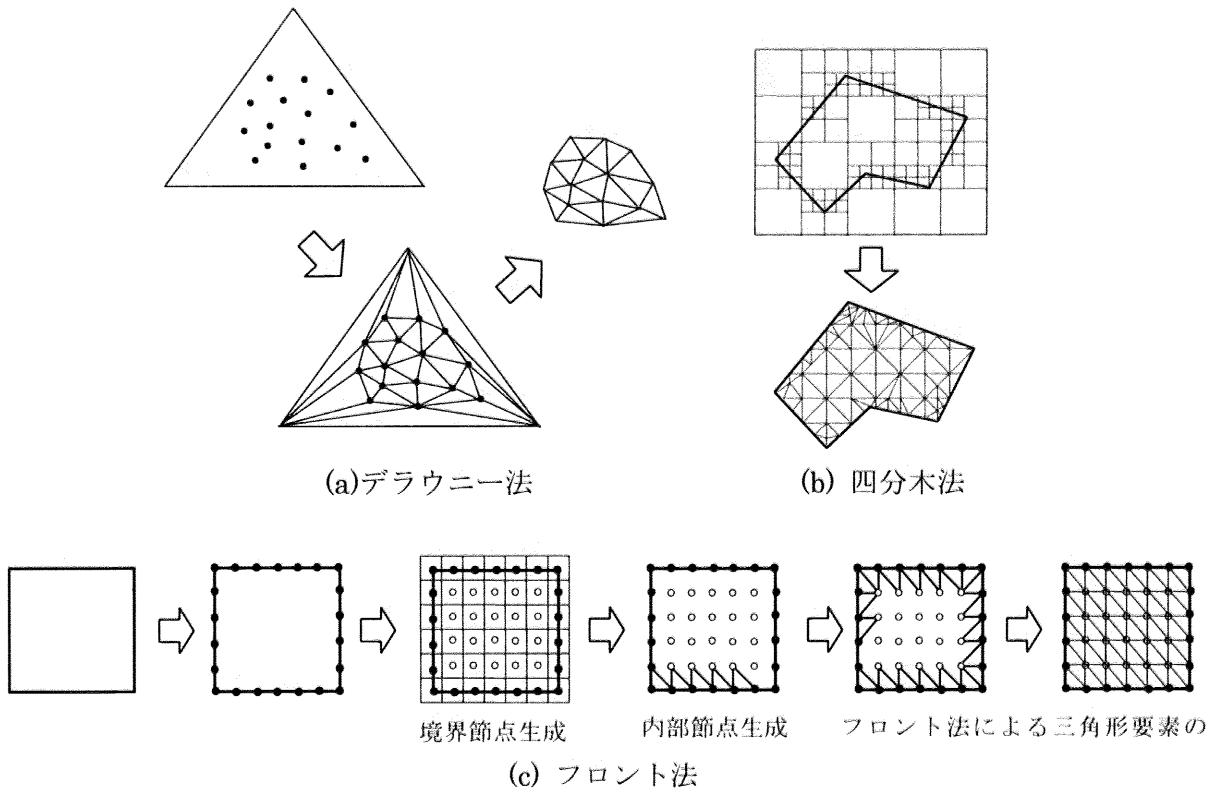


Fig. 1-1 メッシュ生成アルゴリズムの例

1.1.3 問題解決に向けた計算力学アプローチ

メッシュ生成と解析精度の向上という2つの課題は、相互に影響しあいながら、計算工学技術の向上を促してきた。過去に多くの研究者達がこれらの問題の解決に取り組んだが、そのアプローチは大きく分けて3つに分類できる。すなわち、アダプティブ法、複数のメッシュを用いる方法（マルチスケール解析、マルチグリッド法など）、そしてメッシュレス法である。以下にそれらの種類ごとに研究の経緯を簡単に述べる。

1.1.3.1 アダプティブ解析

まず、アダプティブ法について述べる。有限要素解析の精度を向上させる試みとして一連のアダプティブ解析が知られている。それまでは言わば経験と勘で行っていたメッシュ作成方法を見直し、より合理的に、そして自動的に行えるようにすることを目指したものである。

具体的には、出力された結果から離散化誤差を何らかの方法で事後評価し、その誤差に基づいて誤差の大きいところをより詳細にメッシュを切るということである。修正されたモデルで再び解析を行い誤差の評価をし、それが所望の値以下に収束するまで繰り返す。このようなアダプティブ法は全体の計算コストを最適化し、誤差すなわち計算の信頼性の指標を与えるという魅力を持っている。アダプティブ解析には幾つかの種類がある。メッシュを詳細にしていく方法（h法）[3]、多項式の次数を上げる方法（p法）、節点位置を変化させる方法（r法）、そしてそれらを組み合わせた方法（hp法及びhr法）である（Fig. 1-2）。反復的にこれらの処理を行わなければならないため、これらの方法は、主に比較的小規模の問題の解析に適用されてきた。

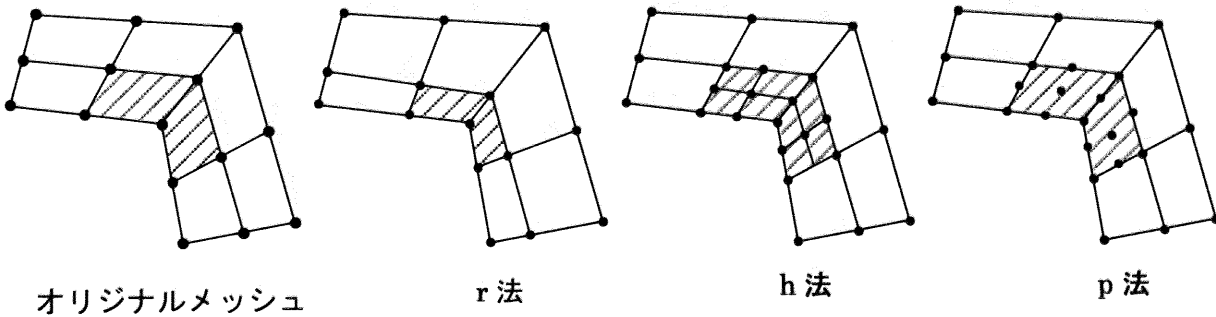


Fig. 1-2 アダプティブ法

1.1.3.2 複数のメッシュを用いた解析

次に複数のメッシュを用いる方法について述べる。たとえば形状が複雑で一度の有限要素分割で品質の良いメッシュを作ることが困難な構造物であっても、それらを幾つかの単純な形状のモデルに分解すれば、それぞれの部分のメッシュ生成を独立に行うことは比較的容易である。このようにしてそれぞれのパーツを独立に要素分割した後、それらが結合した状態の全体構造物の力学的応答を、何らかの方法を用いて解析しようというのがこの方法である。

ところで、多くの工学的応用の場面では興味のある現象は問題領域よりもずっと小さい。たとえば応力勾配の高い部分は、解析する領域全体に対して数オーダー小さい大きさしかない。そこで、有限要素解析に複数のメッシュを用いる手法においては、全体モデルを比較的粗いメッシュで解析し（グローバル解析）おおよその挙動を知りつつ、応力状態を詳しく調べたい領域は詳細に切ったメッシュで解析する（ローカル解析）というパターンになることが多い。このようなアプローチは、グローバル・ローカル解析、あるいはマルチスケール解

析とよばれ、Mote[4]によって研究が開始されて以来、計算力学の主要なテーマとして現在までに多くの研究がなされてきた。またこのグローバル・ローカル解析は、前述したアダプティブ解析との関係が深い。

上述したように現実的に非常に重要となるマルチスケール解析であるが、実際の実務解析においてよく行われているのが、一般に「ズーム解析」[5]と呼ばれている方法である (Fig. 1-3)。これは、グローバル解析の結果をローカル解析に「境界条件」として与える方法である。境界条件の与え方として、変位を与える方法と荷重を与える方法があるが、前者は一般に実際よりも堅い解を与え、後者はやわらかい解を与える傾向がある。そのため精度面での信頼性が以前から指摘されてきた。また、変位を与える場合にはグローバル解析の結果をそのままローカル領域への境界条件にすることができるが、荷重を与える場合には予めズーム領域を決めておき、その境界上での反力を計算すること、あるいはローカル領域に幾何学的境界条件が存在しない場合、剛体運動が生じないように拘束条件を付加する等の必要性がある。その時、その境界条件の与え方等による精度が大きな問題となる。また、両モデルの境界・節点を境界上で一致させなければならないという制約があることも大きな課題として残されている。さらに、通常グローバル解析の結果をローカル解析の結果に一度与えるだけで終わるため、ローカルな解析の結果がグローバル解析に反映される事はない。本来両者は相互に影響し合うものであるから、この点についても解析精度面で不安がある。グローバル解析、ローカル解析に加えて、より高精度化されたグローバル解析を行う方法も提案された[6][7]。また、ローカル解析の結果を再びグローバル解析に与え、収束するまで両解析を繰り返す方法[8]も提案されているが、これらの方法は単純な形状のモデルでの研究にとどまっている。また、両メッシュの節点・境界を一致させるという課題も解決されていない。

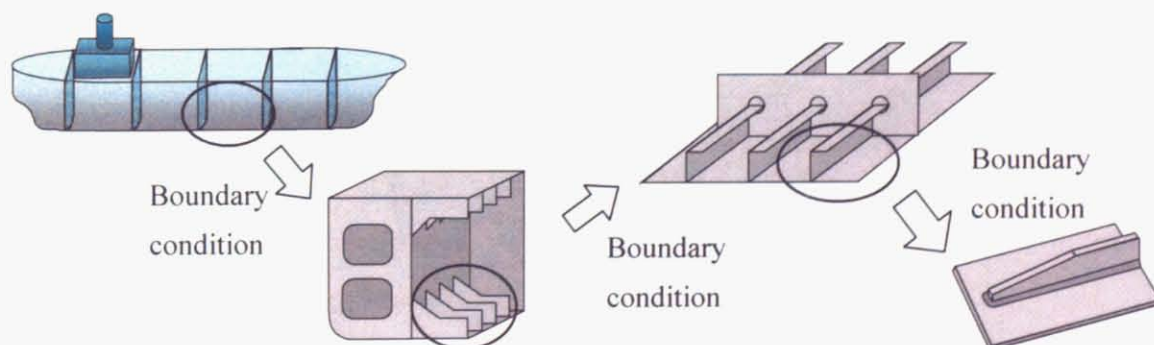


Fig. 1-3 ズーム解析の概念

なお、複数のメッシュを用いる解析には、上に挙げたグローバル・ローカル解析とは別に、「材料レベルにおいて不均質性に基づくマイクロな挙動」と「均質化されたマクロな挙動」とを結びつけるマイクロ・マクロ解析があり、その代表例として均質化法[9]が挙げられる。この均質化法は、複合材料をはじめとした非均質な材料に対して、微視領域におけるマイクロな挙動を、構造全体に対するマクロな挙動に反映させる手法であり、モデル内に周期的な構造が現れることを前提としている。しかしながら本論文では構造部材レベルでのマルチスケール解析を扱い、このようなマイクロなレベルでの不均質性は取り扱わないものとする。

上記のズーム解析は、解析手法自体が幾つかの問題を抱えている上、その使用に関しても両モデルの境界や節点を一致させる必要があるなど、改善の余地があった。そこで、ズーム解析に代わる方法として、重合メッシュ法 (Mesh Superposition Method) を用いたマルチスケール解析[10][11][12][13][14][15][16]が挙げられる。Fishにより初めて提案された[17]この手法は、グローバルモデルとローカルモデルを独立にメッシュ生成し、それらを重ね合わせて同時に解析するという計算手法である。変位を両モデルのその和として定義していることが特徴的である。また、両モデルのメッシュの整合性を考慮する必要がない (Fig. 1-4 参照) ので、モデリングが非常に容易になる。この利点は非常に大きい。さらにズーム法のような境界条件のあいまいさがなく、また、グローバルモデルとローカルモデルの相互の影響が定式化の中に反映されているため、精度の面においても優れた手法である。この重合メッシュ法は本来、アダプティブな高精度解析を目指して提案されたものであるが、グローバルメッシュでは表現できない特性をローカルメッシュに付加することにより、モデリングのフレキシビリティに注目したメッシュ独立生成手法としての側面も生じてきた。本論文では、この重合メッシュ法について論じる。

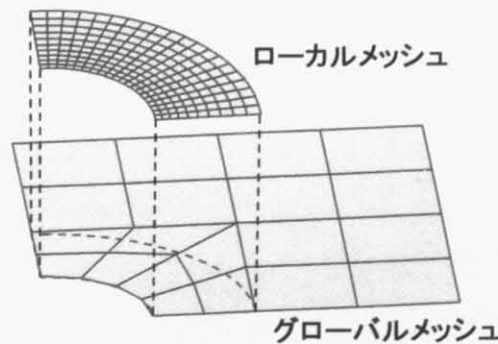


Fig. 1-4 重合メッシュ法

1.1.3.3 メッシュを使用しない解析手法

以上で述べた方法は、いずれも解析にメッシュを必要とする方法である。これに対してメッシュを必要としない解析を目指す流れが90年代になって生じた[18]。すなわち、節点単位で変位場や形状関数を仮定することにより、「要素」あるいは「格子」を用いずに偏微分方程式を数値的に解く手法である。これらは、メッシュレス法・メッシュフリー法・グリッドレス法等と呼ばれている。BelytschkoらによってElement Free Galerkin Method[19]が提案されたのを契機に、様々なメッシュフリー解析手法が提案され現在に至るまで研究が継続されている。

このメッシュフリー法には大きく分けて2つの立場がある。1つは、文字通り要素を必要とせず、領域内に分布する点のデータのみから解析を行うという狭義のメッシュレス法である。FEMとは数学的な定式化の段階から根本的に異なっており、別体系の計算手法である。もう一つは、解析ソルバー部分では要素に相当するものを使用するものの、プリプロセッシングとメインプロセッシングを連続して（シームレスに）処理するため、ユーザーには要素の存在を意識させない広義のメッシュフリー法である。前者の例としてはElement Free Galerkin Method (EFGM), Moving Particle Semi-implicit Method(MPS)[20][21], Smooth Particle Hydrodynamics (SPH), 後者の例としては, Reproducing Kernel Particle Method[22], Finite Cover Method[23], Generalized Finite Element Method[24][25][26][27], Free Mesh Method[28][29], Extended Finite Element Method[30]が挙げられる。これらの手法は、基本境界条件の課し方が煩雑になるという側面もあることから、従来の有限要素法との対比で考えるならば、いずれもまだ研究段階に留まっており、実用化には至っていないのが現状である。

1.2 本研究の目的と概要

従来、構造解析においては計算機能力の問題から線形解析が主流であったが、1.1.2 項で述べたように、近年は計算機の発達を背景に非線形解析が多く行われるようになった。非線形解析は材料非線形と幾何学的非線形に大別される。前者は弾塑性解析のような構成式の非線形、後者は大変形のような変位-ひずみ関係の非線形を考慮した解析である。また、後者には接触問題のような境界非線形問題も含まれる。1.1.1 項で紹介した汎用コードにはこのような非線形性を考慮したズーム解析が実装されている。例えば ABAQUS では、サブモデル法と呼ばれるものがこれに該当する。

一方、重合メッシュ法による非線形解析は、ほとんど研究されていないのが現状である。プログラムが極めて複雑になるのが理由と思われる。しかし、1.1.3.2 項で述べたように重合メッシュ法はズーム解析に代わるものとして提案されたことから、非線形解析に拡張することは有意義である。特に、重合メッシュ法はメッシュフリー性や高精度といった長所を備えている。本研究では、重合メッシュ法による非線形解析を目的として接触解析、弾塑性解析、大変形解析を行った。これにより重合メッシュ法の適用範囲を更に広げることができる。また、重合メッシュ法の実用的な応用としてボルト解析を行った。ボルト解析の例を Fig. 1-5 に示す。ボルト解析では、ねじ山部分をばね接合モデルに置き換えることにより解析効率を向上させる方法を重合メッシュ法に取り入れた。これにより、実際の解析現場での有用性を高めることができる。

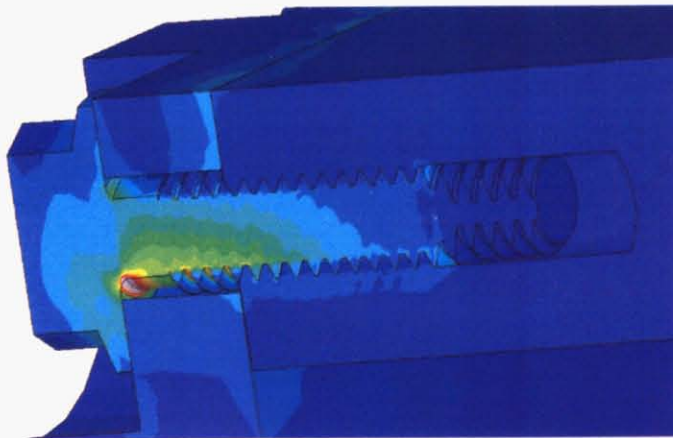


Fig. 1-5 ボルト解析の例

1.3 本論文の構成

以下、本論文の構成について述べる。

第2章では、重合メッシュ法の定式化を説明する。そして重合メッシュ法の特徴であるグローバルモデル・ローカルモデル間の連成効果を現すマトリクスを計算する際の、積分領域の分割に関する問題や、グローバルメッシュとローカルメッシュが類似形状の節点配置の場合に生じるマトリクスの特異性、そしてバンド幅が増幅することによるソルバーの問題について述べる。

第3章では、重合メッシュ法によるばね接合モデルおよび初期ひずみの導入について説明する。ボルト解析を行う際に必要なばね接合モデル、初期ひずみを重合メッシュ法に適用した場合の定式化と実装について述べる。さらに、数値解析例として実際のボルトを基に作成した2次元モデルの解析について述べる。

第4章では、重合メッシュ法による接触解析を説明する。接触解析では、弱形式に変位の拘束項を付与する必要がある。そのためNewton-Raphson法による反復計算が必要となる。この場合の定式化と計算の手順について説明する。そして、数値解析例と理論解との比較について述べる。

第5章では、重合メッシュ法による弾塑性解析を説明する。Newton-Raphson法による反復計算を取り入れた弾塑性解析について、円孔問題を例に述べる。また、汎用コード実装のためのソルバーの工夫についても説明する。

第6章では、重合メッシュ法による大変形解析を説明する。Total-Lagrange法を用いた大変形問題の定式化および解析例について述べる。そして、グローバルモデルのFEM解析の結果を初期値として用いる方法について述べる。さらに、大変形接触問題について述べる。

第7章では、結論を述べて本論文をまとめる。

第2章 線形重合メッシュ法の理論

2.1 線形重合メッシュ法の方程式

以下では、線形重合メッシュ法の基礎方程式を導出する。本章では重合メッシュ法における各物理量に対する仮定から、離散化された釣り合い方程式を導くまでの過程を示す。

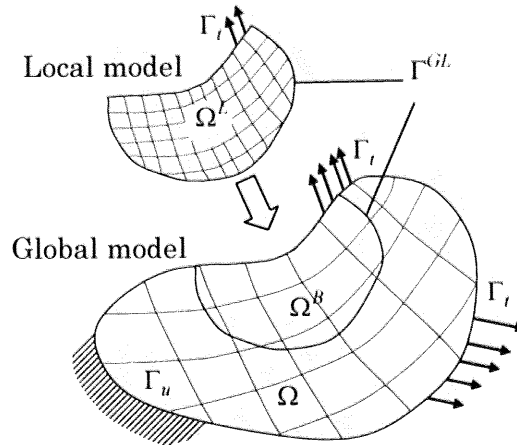


Fig. 2-1 グローバルメッシュにローカルメッシュを重ねる概念図

3次元の全体領域 Ω を考える。この領域 Ω 内において変位場 \mathbf{u}^G が定義されているものとする。また、領域 Ω の部分領域として Ω^l を定義する (Fig. 2-1 参照)。すなわち

$$\Omega^l \subset \Omega \quad (2.1)$$

である。

全体領域 Ω の境界を Γ とする。この Γ は幾何学的境界条件の課される境界 Γ_u と力学的境界条件の課される境界 Γ_l の和集合となっている。

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_l \quad (2.3)$$

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_l \quad (2.4)$$

また、領域 Ω と領域 Ω^l の境界を Γ^{Gl} とする。

以下では、各変数の右上添字のG, Lはそれぞれ領域 Ω , 領域 Ω^l に関する量であることを意味するものとする。領域 Ω 内, 領域 Ω^l 内ではそれぞれ独立の変位場 \mathbf{u}^G , \mathbf{u}^L が定義されており, 領域 Ω^l 内では, 実際の変位は両モデルの変位の和で定義されるものとする。すなわち,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L \quad \text{in } \Omega^l \quad (2.5)$$

である。また、境界 Γ^{GL} 上で変位の C^0 連続性を保証するため、次式のような条件を課す。

$$\mathbf{u}^L = 0 \quad \text{on } \Gamma^{GL} \quad (2.6)$$

(2.6)式を偏微分すると、ひずみも両モデルのひずみの和で表される。すなわち、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L \quad \text{in } \Omega^L \quad (2.7)$$

領域 Ω , Ω^L をそれぞれ有限要素に分割すると、変位場・ひずみ場は適当な形状関数を用いて離散化され、

$$\mathbf{u}^G = \mathbf{N}^G \mathbf{d}^G \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}^L = \mathbf{N}^L \mathbf{d}^L \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^G = \mathbf{B}^G \mathbf{d}^G \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L = \mathbf{B}^L \mathbf{d}^L \quad (2.11)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{N}^G, \mathbf{N}^L$ は C^0 連続な形状関数、 $\mathbf{d}^G, \mathbf{d}^L$ は節点変位、 $\mathbf{B}^G, \mathbf{B}^L$ は変位・ひずみマトリクスである。なお、ここでの離散化に際してはそれぞれが完全に独立に行われるものとする。すなわち、一般に両メッシュの節点・境界が一致する必要はない。

以上の仮定を仮想仕事の原理に代入して離散化された釣り合い方程式を導く。線形弾性体を仮定すると、仮想仕事の原理式は次式で表される。

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.12)$$

ただし、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^G + \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^L$ は次式を満たすような変位場、仮想変位場である。

$$\mathbf{u}^G \in \mathbf{U}^G, \quad \mathbf{U}^G = \left\{ \mathbf{u}^G \mid \mathbf{u}^G \in C^0, \mathbf{u}^G = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma^u \right\} \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^G \in \mathbf{U}_0^G, \quad \mathbf{U}_0^G = \left\{ \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^G \mid \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^G \in C^0, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^G = 0 \quad \text{on } \Gamma^u \right\} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{u}^L \in \mathbf{U}^L, \quad \mathbf{U}^L = \left\{ \mathbf{u}^L \mid \mathbf{u}^L \in C^0, \mathbf{u}^L = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^G \quad \text{on } \Gamma^u, \mathbf{u}^L = 0 \quad \text{on } \Gamma^{GL} \right\} \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^L \in \mathbf{U}_0^L, \quad \mathbf{U}_0^L = \left\{ \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^L \mid \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^L \in C^0, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^L = 0 \quad \text{on } \Gamma^u \cup \Gamma^{GL} \right\} \quad (2.16)$$

である。また $\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{t}}$ はそれぞれ規定された体積力、表面力である。ところで、仮想変位・仮想ひずみは規定された幾何学的境界条件を乱さないような任意の量であるが、これらもグローバル・ローカル両モデルの重ね合わせで定義されるため、グローバルモデルの変位 \mathbf{u}^G に対応するところの仮想量 $\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^G$ 及び $\boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}^G$ と、ローカルモデルの変位 \mathbf{u}^L に対応するところの仮想量

$\delta \mathbf{u}^L$ 及び $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^L$ の2種類があつて、これらが混在することに注意を要する。

(2.5)式, (2.7)式および(2.8)式~(2.11)式を(2.12)式に代入して展開すると,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^G \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^G d\Omega + \int_{\Omega^L} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^G \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^L d\Omega + \int_{\Omega^L} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^L \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^G d\Omega + \int_{\Omega^L} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^L \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^L d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{GT} \bar{\mathbf{b}} d\Gamma + \int_{\Omega^L} \delta \mathbf{u}^{LT} \bar{\mathbf{b}} d\Gamma + \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^{GT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^{LT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。これに(2.8)式~(2.11)式を代入し、仮想変位 $\delta \mathbf{u}^G$, $\delta \mathbf{u}^L$ の任意性からそれらの係数を整理すると、以下の離散化した釣り合い方程式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{GLT} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^G \\ \mathbf{d}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

ここで

$$\mathbf{K}^G = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \quad (2.19)$$

$$\mathbf{K}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (2.20)$$

$$\mathbf{K}^{GL} = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (2.21)$$

$$\mathbf{f}^G = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.22)$$

$$\mathbf{f}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.23)$$

である。ただし、 \mathbf{D} は物体の応力-ひずみ関係マトリクスである。

$\mathbf{K}^G, \mathbf{K}^L$, また $\mathbf{f}^G, \mathbf{f}^L$ はそれぞれ、グローバルメッシュ, ローカルメッシュ上で定義される通常の剛性マトリクス, 荷重ベクトルであることに注意されたい。すなわち、これらの両の計算に際してはそのモデル(メッシュ)だけの情報で作成され、互いの情報は必要ない。この特徴によりモデリングのフレキシビリティが大きく向上するわけである。

それに対して、 \mathbf{K}^{GL} は両メッシュの連成効果を表すマトリクスであり、このマトリクスの計算には当然、両メッシュの有限要素情報が必要となる。(2.18)式を変形すると、

$$\begin{cases} \mathbf{K}^G \mathbf{d}^G = \mathbf{f}^G - \mathbf{K}^{GL} \mathbf{d}^L \\ \mathbf{K}^L \mathbf{d}^L = \mathbf{f}^L - \mathbf{K}^{LG} \mathbf{d}^G \end{cases} \quad (2.24)$$

となる。これはグローバルモデルとローカルモデルの間に相互作用が働き、それが互いのモデルに対する荷重ベクトルとして機能していることを示している。そしてこのマトリクスこそが重合メッシュ法の特徴を表す部分なのである。このマトリクスを計算機を用いて計算する際には特殊な処理が必要となるが、それについて次節で説明する。

2.2 連成効果マトリクスの計算方法

(2.21)式は、グローバルメッシュの変位とローカルメッシュの変位の連成効果を表すマトリクスであるが、この式の計算に際しては留意すべき点がある。以下にそれについて述べる。

2.2.1 積分領域の分割・結合と数値積分

連成効果を表すマトリクス \mathbf{K}^{GL} を計算する際に数値積分の積分点数に注意する必要があるため、この点について説明する。あるローカル要素(要素番号 l)の領域を Ω_l^l (ただし、 $1 < l < M$ で、 M はローカル要素の個数) とすると、

$$\Omega^l = \sum_l^M \Omega_l^l \quad (2.25)$$

である。連成効果マトリクス \mathbf{K}^{GL} の積分計算は、ローカル要素単位で行われるため、次式で表される。

$$\mathbf{K}^{GL} = \sum_l^m \mathbf{K}_l^{GL} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K}_l^{GL} = \int_{\Omega_l^l} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (2.27)$$

ここで、(2.27)式の被積分関数に注目する。両メッシュは通常任意の位置関係で重なり合うため、一個のローカル要素に対応する(すなわちそのローカル要素と重なる)グローバル要素は一般に複数個存在する。すなわち、

$$\Omega_l^l = \sum_{J=1}^N \Omega_{lJ}^l \quad (2.28)$$

である。ここで Ω_{lJ}^l はローカル要素 l とグローバル要素 J が重なる領域である。Fig. 2-2 は $N=4$ の場合を示している。

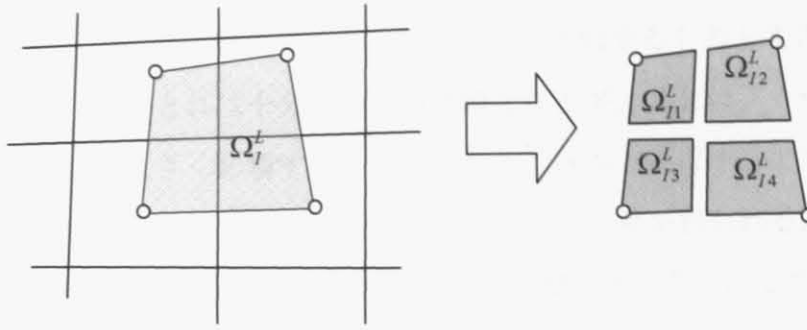


Fig. 2-2 4個のグローバル要素に重なるローカル要素

ひずみ・応力は要素間で不連続であるから(2.27)式の被積分関数は積分区間内で一般に不連続関数となる。しかし通常のガウス積分公式等の数値積分公式は、領域内で被積分関数が連続であることを前提としているため、この積分計算にガウス積分公式を用いることは不適當であるといえる。

したがって(2.27)式を厳密に計算するならば、積分領域をグローバル要素境界に沿って分割しなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_I^{GL} &= \sum_J^N \mathbf{K}_J^{GL} \\ &= \iint_{\Omega_I^L} \mathbf{B}_J^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}_I^L d\Omega \end{aligned} \quad (2.29)$$

である。ここで、 J はローカル要素 I を、重なるグローバル要素に沿って分割した領域、 N はその分割個数、 \mathbf{B}_J^G はグローバル要素 J の、また、 \mathbf{B}_I^L はローカル要素 I のそれぞれひずみ・変位マトリクスである。

だが、積分領域を分割するためには、ローカル要素とグローバル要素の重なりパターンを詳細に調べて、グローバルメッシュとローカルメッシュの交差点の座標を求めることが必要となる。これは形状処理のプロセスを必要とし、プログラミングのアルゴリズムが複雑になる。

この作業は特に3次元問題の場合、非常に複雑なものとなる。

そこでFishらは、積分領域をローカル要素内で分割しなくても、ローカル要素全体に対して通常のガウス積分を適用する方法を提案している。これは \mathbf{K}^{GL} を計算する近似的な方法であるが、厳密に計算した場合と、エネルギーノルムで比較した場合には、あまり精度は変わらないと報告している。

本論文でも同様のアプローチを用いた。計算アルゴリズム簡略化のため、積分領域を分割することはせず、そのかわり積分点数を増やすことで対処することとした。すなわち、ローカル要素の領域全体を一つの積分領域と捉え、被積分関数の不連続性については、数値積分の

積分点数を増やすことにより近似多項式の次数を上げて近似するものとする。

この際、積分点数をいくつとれば十分なのかが問題となるが、これはグローバル要素とローカル要素の重なり具合が大きく影響するので、一般的に何点とれば十分である決めることはできない。積分点数が少ない場合には、明らかに不自然な結果が得られる。本論文では、中住らにより経験的に得られた結果[31]を採用し、4点で積分することにした。

2.2.2 数値解析例

中住ら[31]は、 \mathbf{K}^{GL} マトリクスの積分点数が解析精度に与える影響を調べるために、円孔を有する正方形板に一樣引張り荷重を与えたモデルを解析している。以下はその解析例について述べる。対称性より1/4領域のみ解析している。中住らが用いたメッシュを Fig. 2-3 に示す。グローバルメッシュの太枠で囲んだ領域内部にローカルメッシュが重ね合わされている。そして解析によって得られた von-Mises 応力の分布を Fig. 2-4 に示す。積分点数が 2×2 の場合は、応力分布が明らかに不自然に乱れている部分があるが、これはちょうどグローバルメッシュの要素境界に相当する箇所である。それに対して積分点数が 4×4 の場合は応力の乱れが消滅し、正常に解析が行われたことがわかる。

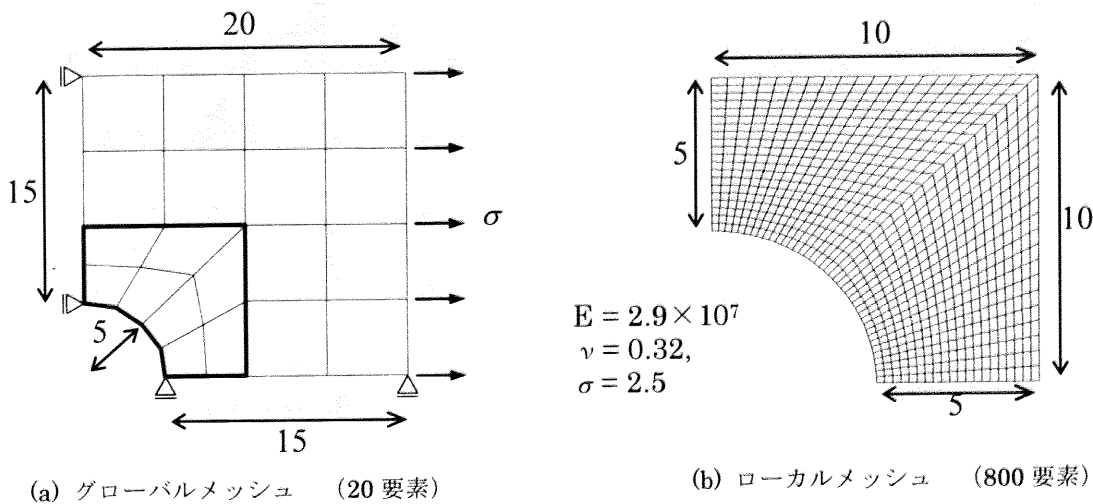


Fig. 2-3 円孔を有する正方形板の解析

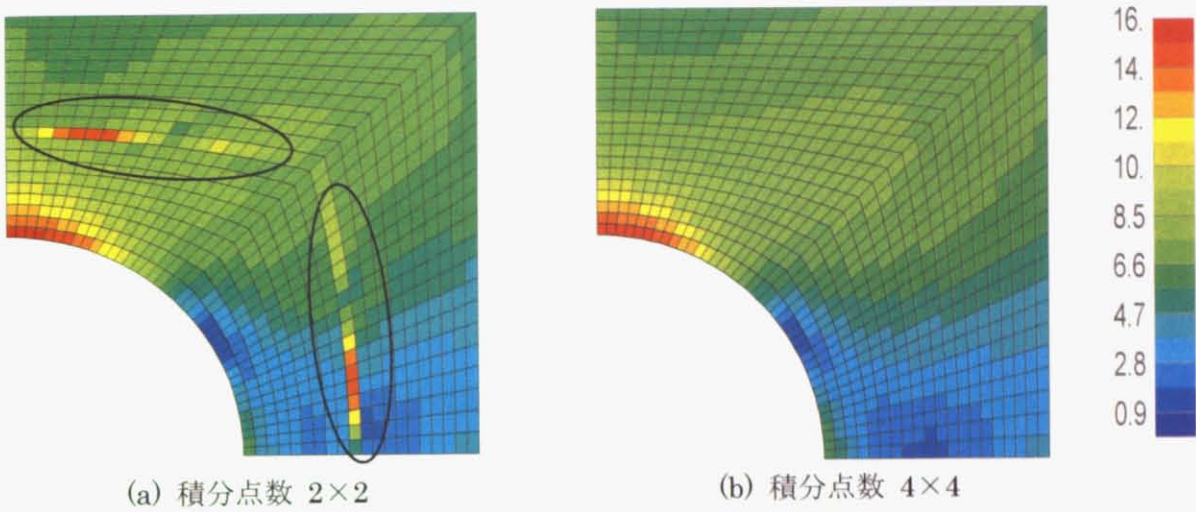


Fig. 2-4 円孔を有する正方形板の von Mises 応力

なお、この処理に関しては改善の余地があるものと思われる。たとえば、岡田ら[32]は、積分領域を再分割してサブ要素を作成し、そのサブ要素内でガウス積分を実行している (Fig. 2-5 参照)。

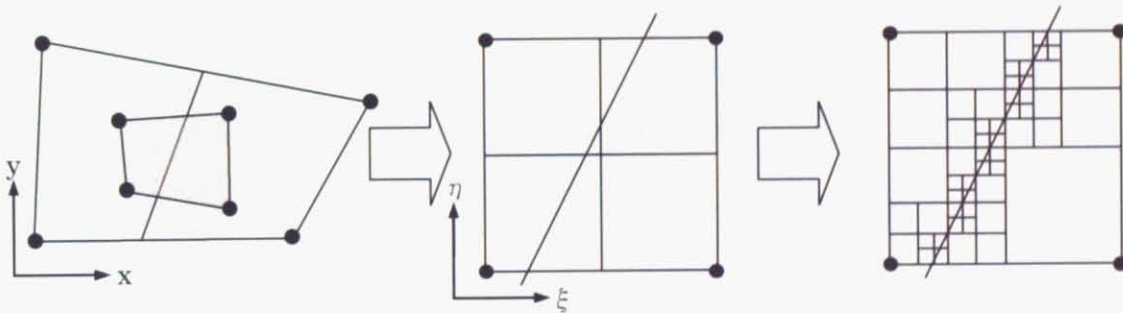


Fig. 2-5 サブ要素の作成

2.2.3 積分点座標値の座標変換

(2.21)式は、2次元のアイソパラメトリック要素を用いた場合、次式のように計算される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_I^{GL} &= \iint_{\Omega_I^G} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}^{GT}] \mathbf{D} [\mathbf{B}^L] |\mathbf{J}| d\xi^L d\eta^L \\
 &= \sum_J \sum_I [\mathbf{B}^{GT}]_{\substack{\xi=\xi_I^G \\ \eta=\eta_I^G}} \mathbf{D} [\mathbf{B}^L]_{\substack{\xi=\xi_I^L \\ \eta=\eta_I^L}} |\mathbf{J}| w_I w_J
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

ここで(2.30)式においてひずみ-変位関係マトリクス計算に与える座標値が、

$$\begin{Bmatrix} \xi^G \\ \eta^G \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} \xi^L \\ \eta^L \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

であることに注意しなくてはならない (Fig. 2-6 参照). なぜならば, 要素内の任意の点のひずみ量を算出するために用いる自然座標値はその要素の節点座標情報 (節点座標値及び要素・節点コネクティビティ) に依存するからである. すなわち, 数値積分を行う際の積分点の座標は, 要素が違えば自然座標値が一般に異なる値となるのである.

したがって, 一つのローカル要素が複数のグローバル要素と重なる状況はもちろん, 一つのローカル要素が一つのグローバル要素と重なる場合であっても, 積分点の座標変換が必要になる. 実際の計算では, Newton-Raphson 法等の反復計算を用いて数値的に求めることになる. また, 実装面では, ローカル要素と重なるグローバル要素を探索する処理が必要となる. そして積分点ごとに対応するグローバル要素が異なるので, 要素剛性マトリクスを全体剛性マトリクスに足し込む際にはその点に注意が必要である.

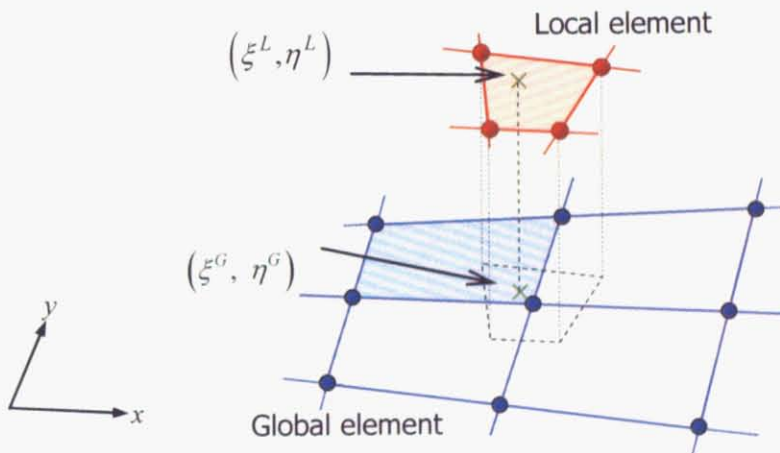


Fig. 2-6 積分点の座標変換 (2次元要素の場合)

2.3 連立一次方程式の解法

(2.18)式を見ると, 全体剛性マトリクスのバンド幅が非常に大きいことが分かる.

$$\begin{cases} \mathbf{K}^G \mathbf{d}^G = \mathbf{f}^G - \mathbf{K}^{GL} \mathbf{d}^L \\ \mathbf{K}^L \mathbf{d}^L = \mathbf{f}^L - \mathbf{K}^{LG} \mathbf{d}^G \end{cases} \quad (2.32)$$

と変形し, 両者が収束するまで反復を繰り返す方法が一部の文献[33][34]で採用されている.

このようなやり方は Block Gauss-Seidel 法と呼ばれており、計算機の記憶容量の低減に貢献するが、文献[35]では収束しない例も報告されており、それに代わる方法として共役勾配法を組み合わせた方法が提案された。第 5 章では、重合メッシュ法による弾塑性解析を汎用コードに実装するために、これらの連立一次方程式の解法について述べる。

2.4 モデリングに関する注意

ローカルメッシュの切り方によって解析精度が大きく低下する場合がありますので、それに関して述べる。たとえば Fig. 2-7 に示したような形状のグローバルメッシュの灰色で示した領域にローカルメッシュを重ね合わせる状況を考える。このような場合、グローバルメッシュの矢印で示した節点の変位は一意に確定しない。なぜならば、その節点の変形モードをローカルメッシュのそれが完全に含んでしまっているからであり、その結果、グローバル節点の変位とローカル節点の変位の分割比率が定まらない（不定）となるためである。

このような現象はローカルメッシュをグローバルメッシュと同様のパターンで切ってしまうときに発生しやすく、そのまま解析を行っても、全体剛性マトリクスが特異になる、あるいは解の精度が大きく減少するなどの不都合が生じる。

このようなメッシュ生成を行なった場合の対策としては、全体剛性マトリクスの対角項に微小な数値を付加することが有効である。これによって節点変位の剛体モードが抑えられ、計算を安定させることができる。

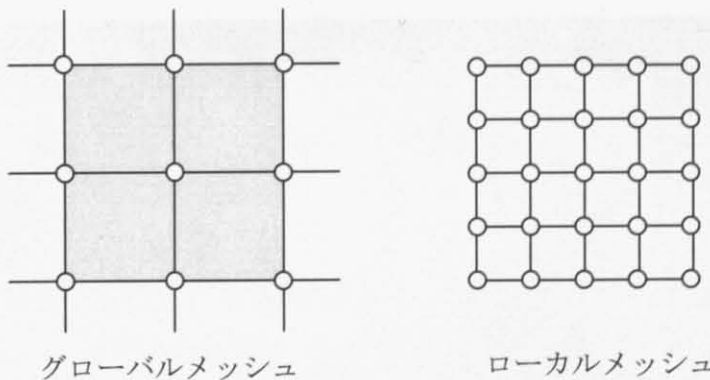


Fig. 2-7 一次独立性が失われる場合のモデリング

第3章 重合メッシュ法によるばね接合モデル および初期ひずみの導入

3.1 はじめに

本章では、ボルト解析に必要なばね接合モデルおよび初期ひずみを重合メッシュ法に取り入れる方法について考案した。

はじめに、ボルト解析の問題点について述べる。続いて、初期ひずみおよびばね接合モデルを重合メッシュ法に取り入れた場合の定式化について述べる。そして、2次元モデルによるボルト解析について述べる。

3.2 ボルト解析の問題点

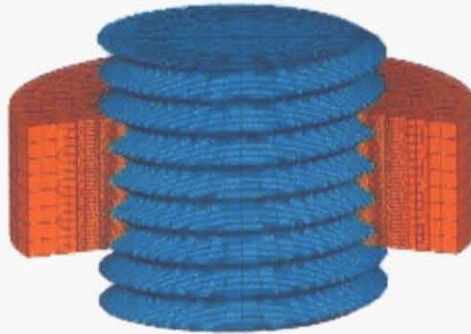


Fig. 3-1 ねじ山モデル

ボルトとプレートは本来接触している。Fig. 3-1のようにねじ山を再現した上で、接触問題としてモデル全体を解析すると、モデルの自由度が大きくなるため計算時間が非常に長くなり、最悪の場合は計算が収束しないことがある。神戸大学の福岡研究室では、ねじ部の形状は正確にモデリングするが、数値計算上の大きな障害となっているねじ山部分の接触をばねモデルに置き換えることにより、解析効率の大幅な向上を図る方法を研究している。本研究では、この手法を重合メッシュ法に取り入れる。

3.3 重合メッシュ法によるばね接合モデルの定式化

まず、神戸大学の福岡研究室で研究されているばね接合モデルについて説明する。ばね接合モデルとは、ねじ山の幾何形状を正確にモデル化し、おねじとめねじの接触をばねモデルに置き換えたものである。三次元モデルの場合、対応節点を3つのばねで結ぶ必要がある。ボルトの軸直角断面と圧力側フランクにおいて定義するばね定数を Fig. 3-2 に示す。

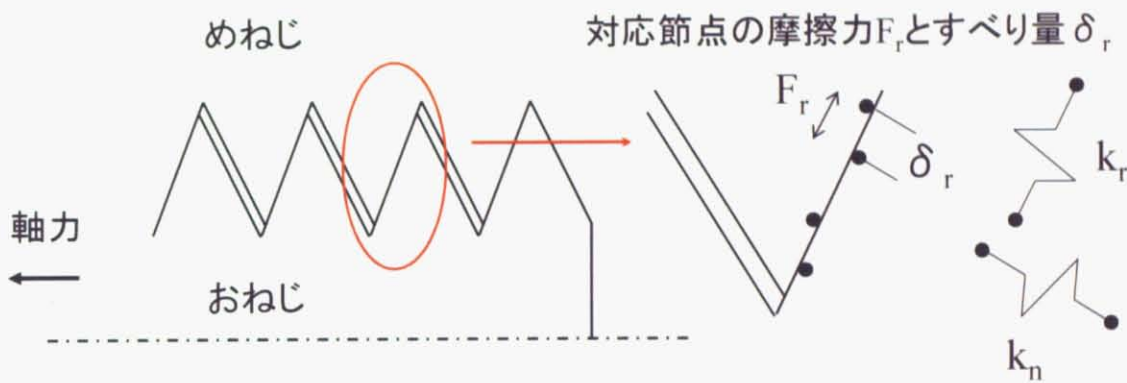


Fig. 3-2 圧力側フランクにおけるばね定数

ここで、 k_n はねじ山の圧力側フランク面に直角な方向のばね定数で、対応ねじ面の離隔がないと仮定すると、 $k_n \rightarrow \infty$ と置くことができる。 k_r は軸断面で圧力側フランク面に沿った半径方向のばね定数で、半径方向すべり量 δ_r を用いて評価する。Fig. 3-2 には示していないが、 k_θ は軸直角断面でフランク面の円周方向ばね定数である。円周方向のばね定数 k_θ も円周方向すべり量 δ_θ を用いて同様に評価できる。

ここからは、ばね接合モデルを重合メッシュ法に適用した場合の定式化について述べる。

まず、通常の FEM について述べる。いま、簡単のために Fig. 3-3 のような 2 次元モデルの x 軸方向に水平な面 A、面 B がばね接合する場合を考える。

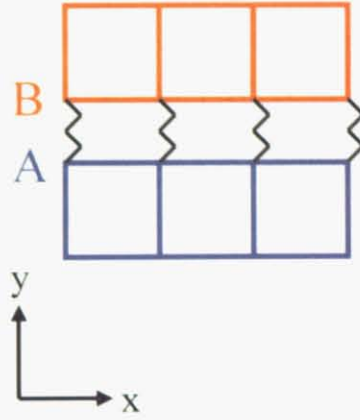


Fig. 3-3 2次元ばね接合モデルの概念図

このとき、仮想仕事の原理式の左辺には、次式で表されるばね接合部分に沿った線積分の項が追加される[36].

$$\int_{\Gamma_s} (\delta \mathbf{u}_{By} - \delta \mathbf{u}_{Ay})^T k (\mathbf{u}_{By} - \mathbf{u}_{Ay}) dx \quad (3.1)$$

ここで、 k は軸方向のばね定数である. (3.1)式を形状関数を用いて離散化すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_s} (\delta \mathbf{u}_{By} - \delta \mathbf{u}_{Ay})^T k (\mathbf{u}_{By} - \mathbf{u}_{Ay}) dx \\ &= \int_{\Gamma_s} (\mathbf{N} \delta \mathbf{d}_{By} - \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_{Ay})^T k (\mathbf{N} \mathbf{d}_{By} - \mathbf{N} \mathbf{d}_{Ay}) dx \\ &= \delta \mathbf{d}_{By}^T \left\{ \left(k \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \right) \mathbf{d}_{By} - \left(k \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \right) \mathbf{d}_{Ay} \right\} + \delta \mathbf{d}_{Ay}^T \left\{ \left(k \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \right) \mathbf{d}_{By} - \left(k \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \right) \mathbf{d}_{Ay} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

つまり、剛性マトリクスに以下の項を加えればよい.

$$\begin{bmatrix} k \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx & -k \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \\ -k \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx & k \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{By} \\ \mathbf{d}_{Ay} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

同様にせん断方向のばね定数も定義することができる.

ここからは、重合メッシュ法について述べる. 重合メッシュ法では、(3.1)式は次式で表される.

$$\int_{\Gamma_s} (\delta \mathbf{u}_{By}^G + \delta \mathbf{u}_{By}^L - \delta \mathbf{u}_{Ay}^G - \delta \mathbf{u}_{Ay}^L)^T k (\mathbf{u}_{By}^G + \mathbf{u}_{By}^L - \mathbf{u}_{Ay}^G - \mathbf{u}_{Ay}^L) dx \quad (3.4)$$

(3.2)式を求める場合と同様に、(3.4)式を形状関数を用いて離散化すると次式で表されるマトリクスが得られる.

$$\begin{bmatrix}
 k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^G dx & -k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^G dx & k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^L dx & -k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^L dx \\
 -k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^G dx & k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^G dx & -k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^L dx & k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^L dx \\
 k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^G dx & -k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^G dx & k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^L dx & -k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^L dx \\
 -k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^G dx & k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^G dx & -k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^L dx & k \int_{\Gamma_x} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^L dx
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \mathbf{d}_{By}^G \\
 \mathbf{d}_{Ay}^G \\
 \mathbf{d}_{By}^L \\
 \mathbf{d}_{Ay}^L
 \end{Bmatrix}
 \quad (3.5)$$

つまり、剛性マトリクスに(3.5)式を加えればよい。

3.4 重合メッシュ法による初期ひずみの定式化

Fig. 3-4 に示すように、ボルトはプレートに締め付けられているため初期状態のひずみが発生している。これを初期ひずみと呼ぶ。そのため、初期ひずみが存在する領域については、初期ひずみを ε_0 とすると、ひずみ ε と応力 σ の関係は構成式 \mathbf{D} を用いると次式で表される[37].

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (3.6)$$

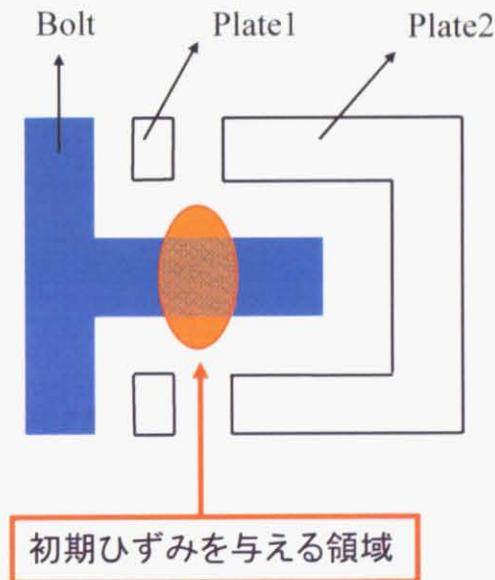


Fig. 3-4 初期ひずみの概念図

ここからは、前節で述べた初期ひずみを重合メッシュ法に適用した場合の定式化について述べる。

まず、通常の FEM について述べる。第 2 章で述べたように、線形弾性体の仮想仕事の原理式は次式で表される。

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3.7)$$

(3.6)式を(3.7)式に代入すると次式が得られる。

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \quad (3.8)$$

(3.8)式を形状関数を用いて離散化すると次式が得られる。

$$\delta \mathbf{d}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \delta \mathbf{d}^T \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \quad (3.9)$$

仮想変位 $\delta \mathbf{d}$ の任意性から次式の離散化したつりあい方程式が得られる。

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \quad (3.10)$$

ここで、 \mathbf{K} , \mathbf{f} は次式で表される。

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (3.11)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3.12)$$

ここからは、重合メッシュ法について述べる。第 2 章で述べたように、線形の重合メッシュ法ではローカル領域における変位とひずみは次式のようにグローバルとローカルの和で表される。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L \quad \text{in } \Omega^L \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L \quad \text{in } \Omega^L \quad (3.14)$$

(3.13), (3.14)式を(3.8)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta (\boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta (\mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L)^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta (\mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta (\boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

第 2 章と同様にグローバル、ローカルのそれぞれを離散化する。すると、(3.15)式の左辺は線形の重合メッシュ法と同様に次式で表される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta (\boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L) d\Omega \\ &= \delta \mathbf{d}^{GT} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \right) \mathbf{d}^G + \delta \mathbf{d}^{GT} \left(\int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \right) \mathbf{d}^L \\ & \quad + \delta \mathbf{d}^{LT} \left(\int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \right) \mathbf{d}^G + \delta \mathbf{d}^{LT} \left(\int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \right) \mathbf{d}^L \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.15)式の右辺第1項、第2項についても線形の重合メッシュ法と同様に次式で表される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta(\mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L)^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta(\mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ &= \delta \mathbf{d}^{GT} \int_{\Omega} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \delta \mathbf{d}^{GT} \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \delta \mathbf{d}^{LT} \int_{\Omega^L} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \delta \mathbf{d}^{LT} \int_{\Gamma_i^L} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.17)$$

初期ひずみによって発生する(3.15)式の右辺第3項も同様に離散化すると次式で表される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L)^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \\ &= \delta \mathbf{d}^{GT} \int_{\Omega} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \delta \mathbf{d}^{LT} \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (3.18)$$

仮想変位 $\delta \mathbf{u}^G$, $\delta \mathbf{u}^L$ の任意性から係数を整理すると、以下の離散化したつりあい方程式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{GLT} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^G \\ \mathbf{d}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \\ \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^G &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D}\mathbf{B}^G d\Omega \\ \mathbf{K}^L &= \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D}\mathbf{B}^L d\Omega \\ \mathbf{K}^{GL} &= \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D}\mathbf{B}^L d\Omega \\ \mathbf{f}^G &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ \mathbf{f}^L &= \int_{\Omega^L} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_i^L} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.20)$$

つまり、初期ひずみはグローバル、ローカルのそれぞれに外力として与えればよい。

3.5 数値解析例 ポルトモデル

数値解析例として、Fig. 3-5 のようなポルトモデルを解析した。本モデルは実際の CAD データを基に作成している。

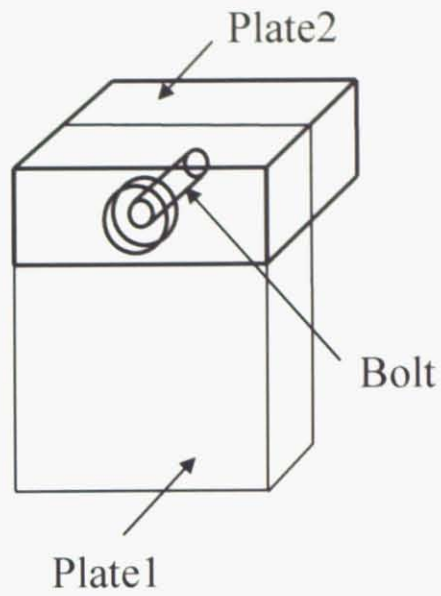


Fig. 3-5 ボルトモデルの概略図

まず、実際の CAD データをもとにボルトモデルの断面モデルを作成した。この模式図を Fig. 3-6、実際のモデルを Fig. 3-7 に示す。

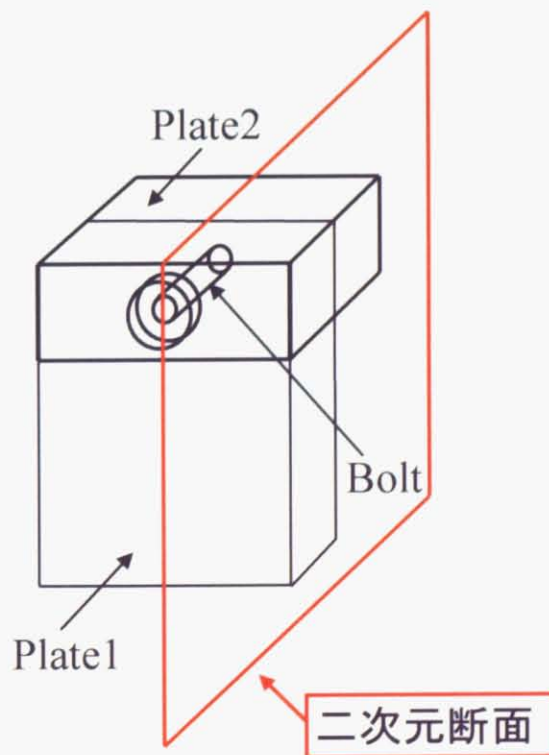


Fig. 3-6 ボルトモデルの概略図（二次元断面）

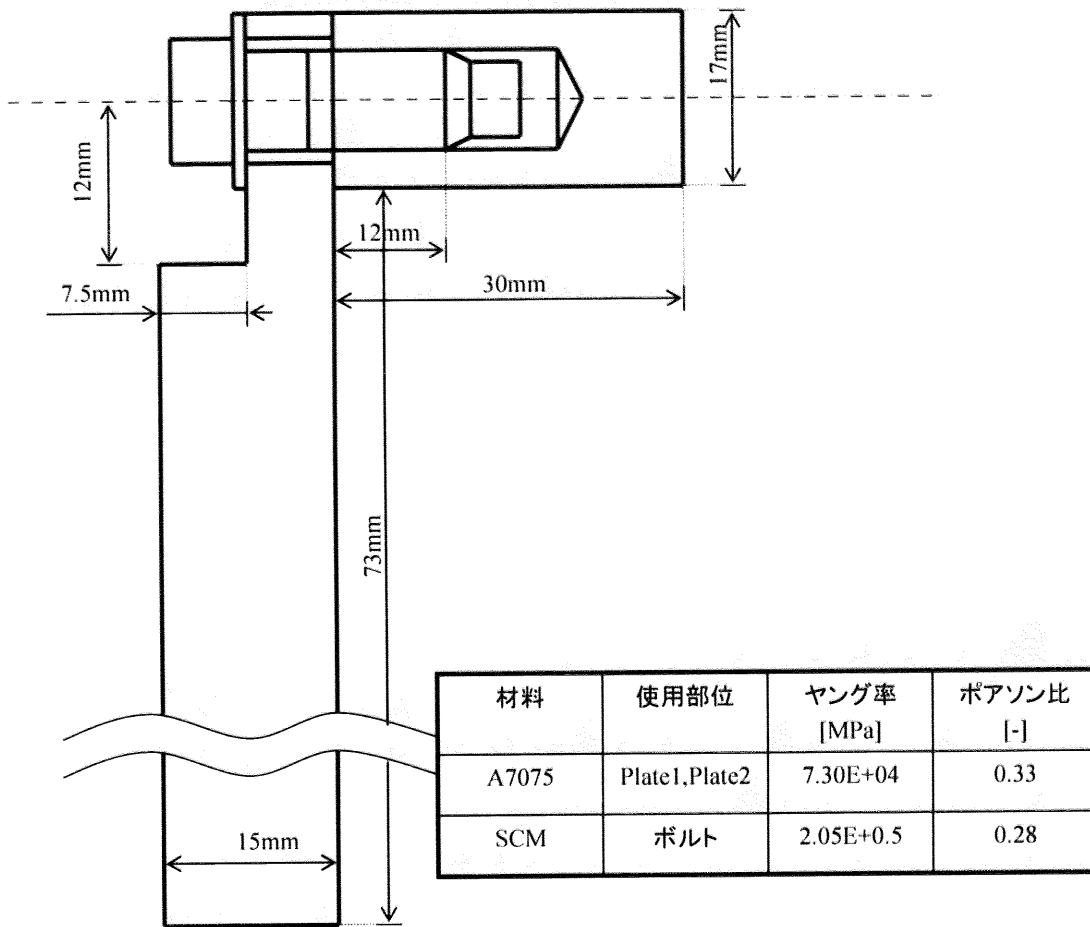


Fig. 3-7 ボルトモデルの二次元断面

Fig. 3-7 をもとに解析用の簡易モデルを作成した。これを Fig. 3-8 に示す。

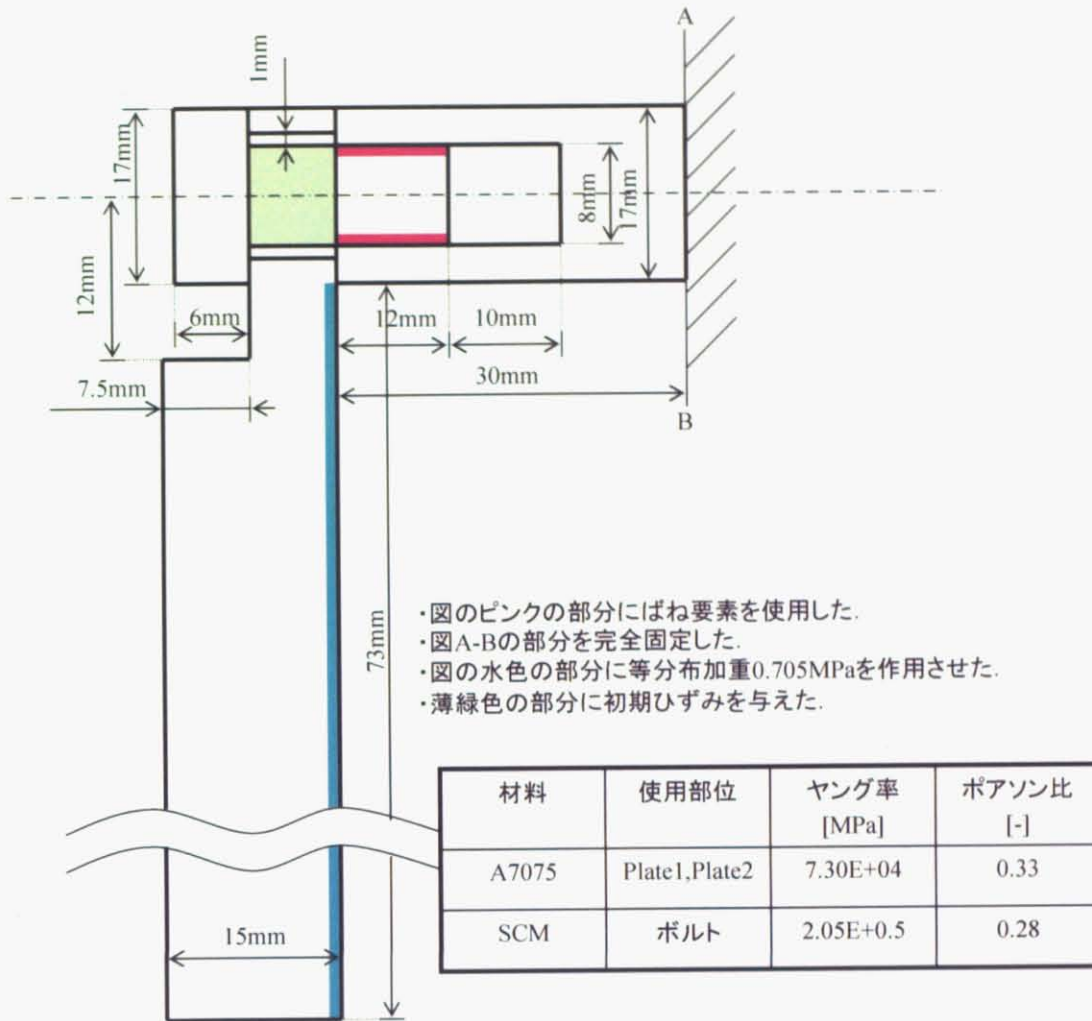


Fig. 3-8 ボルトモデルの二次元モデル

Fig. 3-8 のピンクの部分にはばね接合要素，薄緑色の部分に初期ひずみをそれぞれ定義する。また，A-B を完全拘束し，水色の部分に等分布荷重 0.705MPa を作用させる。材料はボルトがスチール，プレート 1 およびプレート 2 がアルミである。材料定数は Fig. 3-8 に示した通りである。

グローバルメッシュを Fig. 3-9，ローカルメッシュを Fig. 3-10，グローバルメッシュとローカルメッシュの位置関係を Fig. 3-11 にそれぞれ示す。グローバルメッシュは 442 節点，ローカルメッシュは 720 節点である。また，Fig. 3-11 の赤色の枠内がボルト，青色の領域がローカルメッシュをそれぞれ表している。

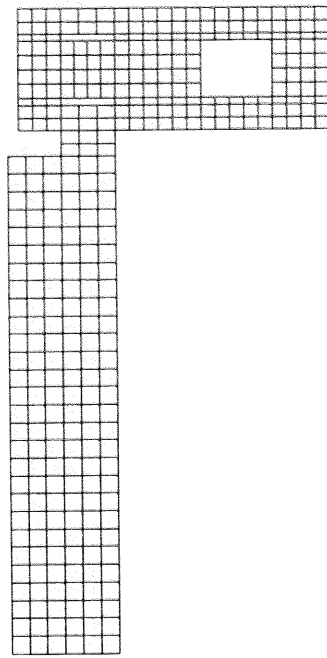


Fig. 3-9 二次元モデルのグローバルメッシュ

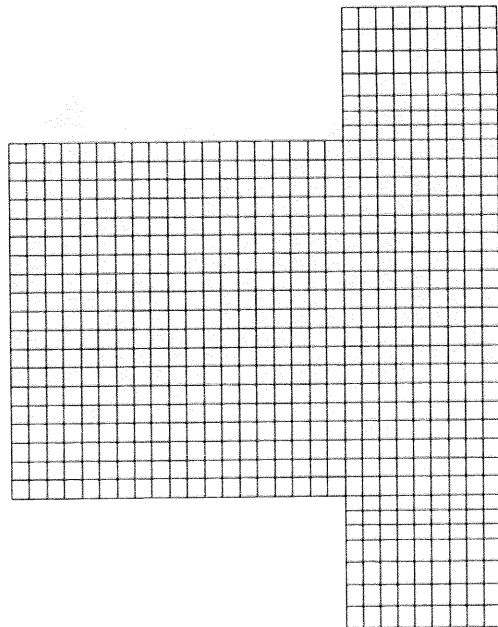


Fig. 3-10 二次元モデルのローカルメッシュ

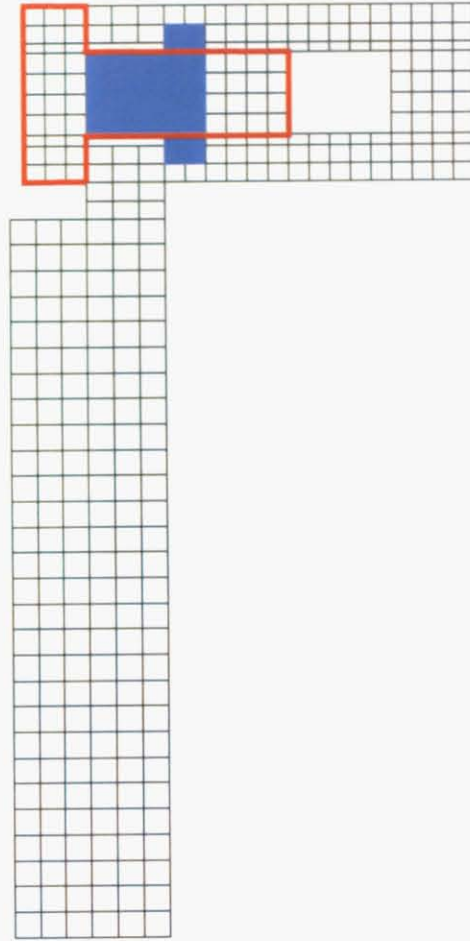


Fig. 3-11 二次元モデルのグローバルとローカルの位置関係

初期ひずみを与え、外力を与えない場合の変位と von-Mises 応力の結果を Fig. 3-12, Fig. 3-13 に示す。前者がグローバルメッシュの結果、後者がローカルメッシュの結果である。また、初期ひずみは Fig. 3-11 の水平方向に $\varepsilon_{0x} = 1.0 \times 10^{-3}$ (初期 von-Mises 応力 198)、ばね定数は軸方向、せん断方向ともに $k = 1.0 \times 10^6$ とした。

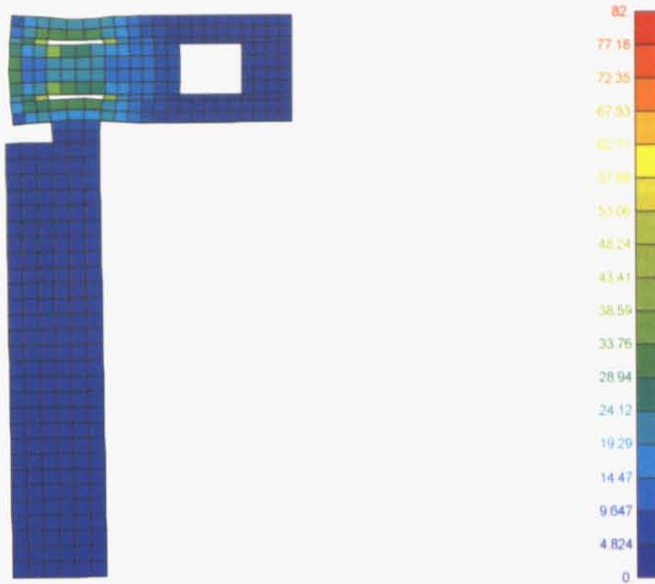


Fig. 3-12 外力を与えない場合の二次元モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)

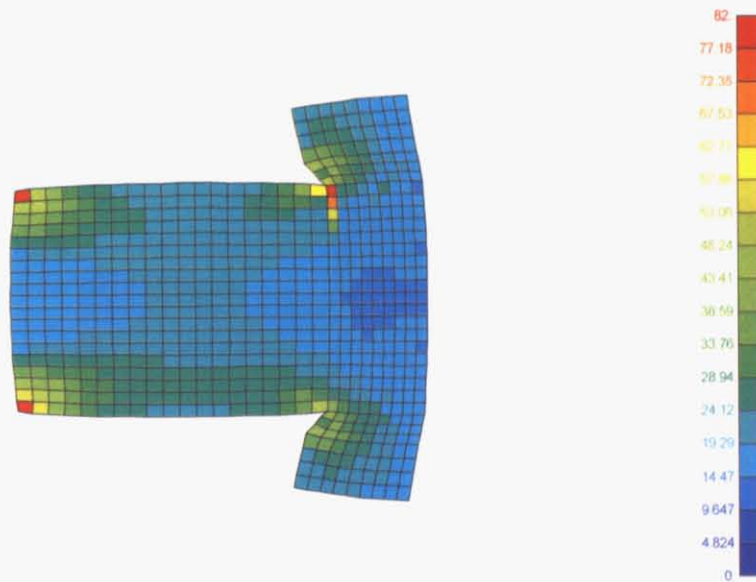


Fig. 3-13 外力を与えない場合の二次元モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)

次に、初期ひずみ、外力ともに与える場合の変位と von-Mises 応力の結果を Fig. 3-14, Fig. 3-15 に示す。前者がグローバルメッシュの結果、後者がローカルメッシュの結果である。初

期はずみおよびばね定数の値は外力を与えない場合と同じである。

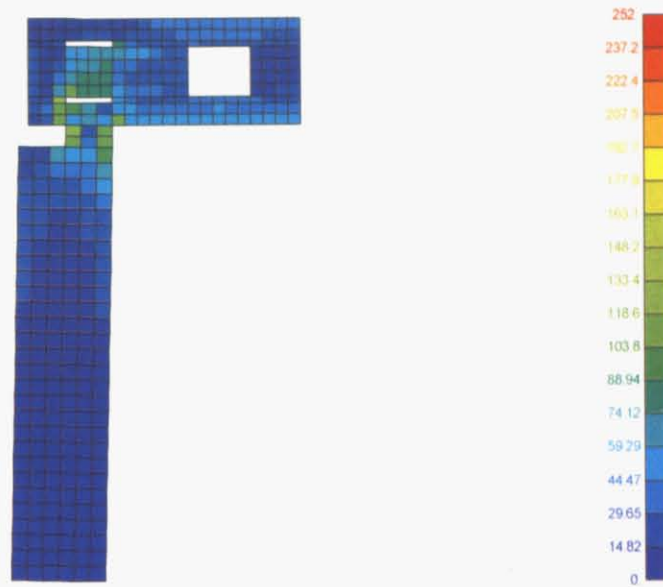


Fig. 3-14 外力を与えた場合の二次元モデルの変位と von-Mises 応力 /
(重合メッシュ法によるグローバル解)

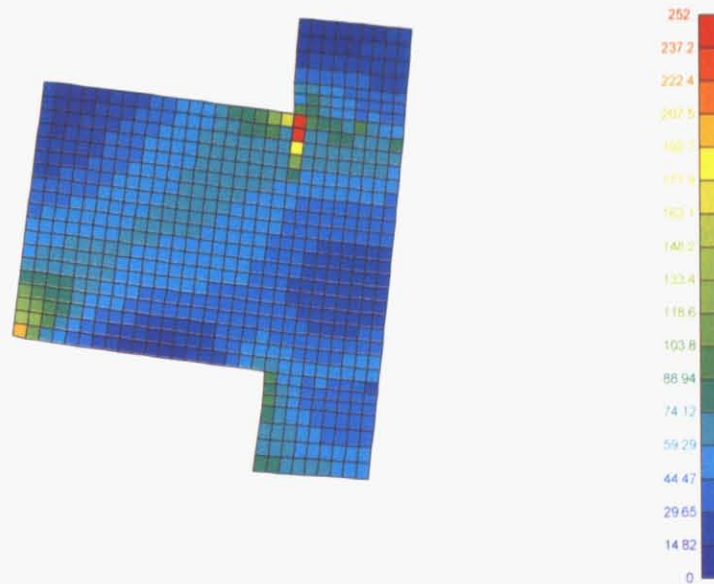


Fig. 3-15 外力を与えた場合の二次元モデルの変位と von-Mises 応力 /
(重合メッシュ法によるローカル解)

Fig. 3-12, Fig. 3-13 の結果から、初期ひずみの効果が正しく反映されていることがわかる。
また Fig. 3-15 より、ボルトのねじ山とプレートが噛み合っている部分と噛み合っていない部分の境界に応力が集中していることがわかる。

第4章 重合メッシュ法による接触解析

4.1 はじめに

構造物の解析において変形する物体と剛体、あるいは変形する物体間の接触を考慮しなくてはならない問題は実用上多くあり、近年有限要素法における接触解析の研究が多数行われている[1]。しかし、重合メッシュ法による接触解析は行われていない。本章では重合メッシュ法による接触問題の定式化と解析例の考察を目的とする。

本章の前半では、重合メッシュ法による接触解析の定式化と実装の手順について述べる。この定式化では、接触問題の重合メッシュ法による有限要素定式化について述べるのが目的であるため、展開の煩雑さを避けるために力学的場は微小変形の線形弾性体問題に限定する。しかし、ここで接触解析に対して導かれた結果は、第5章で述べる弾塑性問題や第6章で述べる大変形問題に対して応用することができる。大変形接触問題については第6章で扱う。また、今回の接触解析では摩擦を考慮していない。

本章の後半では、数値解析例として Hertz 問題を取り上げた。重合メッシュ法で求められた接触長さを理論解と比較した。さらに、Newton-Raphson 法による反復計算の収束状況について調べた。

4.2 重合メッシュ法による接触問題の定式化

本節では、重合メッシュ法による接触問題の方程式を導く。接触問題では、接触部分の変位を拘束するための方法として Lagrange 未定乗数法、ペナルティ法、Augmented-Lagrangian 法がある[38]。今回は、実装が容易なペナルティ法を用いた。

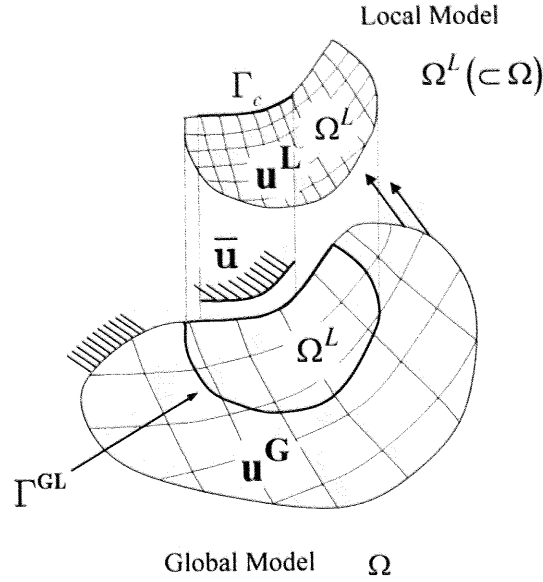


Fig. 4-1 重畳メッシュ法による接触解析の概念図

Fig. 4-1 のような弾性体が剛体と接触する場合について述べる. 接触領域を Γ_c , 壁と物体の距離を $\bar{\mathbf{u}}$ とする. まず, FEM の場合の接触問題について説明する. ペナルティ法を適用した場合, Lagrange 未定係数は次式となる[38].

$$\lambda = p(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \quad (4.1)$$

このとき, 弱形式は次式となる.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Gamma_c} p \delta \mathbf{u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4.2)$$

ペナルティ法による変位の拘束項である左辺第 2 項について, 形状関数 \mathbf{N} , 節点変位 \mathbf{d} , を用いて離散化する.

$$- \int_{\Gamma_c} p \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = - \int_{\Gamma_c} p (\mathbf{N} \delta \mathbf{d})^T (\mathbf{N} \mathbf{d} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = - \delta \mathbf{d}^T \left\{ \left(p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{d} - p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \right\} \quad (4.3)$$

これを(4.2)式に代入し, 他の項についても変位・ひずみマトリクス \mathbf{B} を用いて離散すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{d}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d} - \delta \mathbf{d}^T \left\{ \left(p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{d} - p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \right\} \\ & = \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \delta \mathbf{d}^T \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.4)$$

したがって,

$$\mathbf{K}_0 = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (4.5)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4.6)$$

(4.5)(4.6)式を(4.4)式に代入すると次式が得られる.

$$\left(\mathbf{K}_0 - p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{d} = \mathbf{f} + p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (4.7)$$

ここからは、重合メッシュ法について説明する. ここでは、Fig. 4-1 のような接触領域がローカル内に含まれる場合について述べる. 第 2 章でも述べたように、重合メッシュ法ではローカルメッシュ内 Ω^L での変位をグローバル、ローカルの両モデルの和として定義する[10].

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L \quad \text{in } \Omega^L \quad (4.8)$$

また、グローバル、ローカルの境界 Γ^{GL} 上で変位の連続性を保証するため、次の条件式を課す.

$$\mathbf{u}^L = 0 \quad \text{on } \Gamma^{GL} \quad (4.9)$$

(4.8)式の両辺を偏微分すると、次式のようにひずみも両モデルの和で表される.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L \quad \text{in } \Omega^L \quad (4.10)$$

(4.8)(4.10)式を(4.2)式に代入する.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^G + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^L)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L) d\Omega - \int_{\Gamma_c} p (\delta \mathbf{u}^G + \delta \mathbf{u}^L) (\mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^G + \delta \mathbf{u}^L)^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_c} (\delta \mathbf{u}^G + \delta \mathbf{u}^L)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.11)$$

グローバル、ローカルのそれぞれについて、 $\mathbf{u}^G = \mathbf{N}^G \mathbf{d}^G$ 、 $\mathbf{u}^L = \mathbf{N}^L \mathbf{d}^L$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^G = \mathbf{B}^G \mathbf{d}^G$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^L = \mathbf{B}^L \mathbf{d}^L$ の関係より離散化する. このとき、(4.11)式の左辺第 1 項は通常のコ重合メッシュ法と同様、次式で表される.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^G + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^L)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L) d\Omega = \\ & \delta \mathbf{d}^{GT} \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \right) \mathbf{d}^G + \delta \mathbf{d}^{GT} \left(\int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \right) \mathbf{d}^L \\ & + \delta \mathbf{d}^{LT} \left(\int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \right) \mathbf{d}^G + \delta \mathbf{d}^{LT} \left(\int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \right) \mathbf{d}^L \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.11)の右辺についても通常のコ重合メッシュ法と同様、次式で表される.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^G + \delta \mathbf{u}^L)^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_c} (\delta \mathbf{u}^G + \delta \mathbf{u}^L)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \\ & \delta \mathbf{d}^{GT} \int_{\Omega} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \delta \mathbf{d}^{GT} \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \delta \mathbf{d}^{LT} \int_{\Omega^L} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \delta \mathbf{d}^{LT} \int_{\Gamma_c^L} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.13)$$

(4.11)式の左辺第 2 項は、次式のように離散化される.

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_c} p (\delta \mathbf{u}^G + \delta \mathbf{u}^L) (\mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = \\
& - \delta \mathbf{d}^{GT} \left(p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^G d\Gamma \right) \mathbf{d}^G - \delta \mathbf{d}^{GT} \left(p \int_{\Gamma_c^L} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^L d\Gamma \right) \mathbf{d}^L \\
& - \delta \mathbf{d}^{LT} \left(p \int_{\Gamma_c^L} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^G d\Gamma \right) \mathbf{d}^G - \delta \mathbf{d}^{LT} \left(p \int_{\Gamma_c^L} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^L d\Gamma \right) \mathbf{d}^L \\
& + \delta \mathbf{d}^{GT} \left(p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \right) + \delta \mathbf{d}^{LT} \left(p \int_{\Gamma_c^L} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.12)(4.13)(4.14)式を(4.11)式に代入し、仮想変位 $\delta \mathbf{u}^G$, $\delta \mathbf{u}^L$ の任意性から係数を整理すると、以下の離散化したつりあい方程式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{GLT} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^G \\ \mathbf{d}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^G &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega - p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^G d\Gamma \\
\mathbf{K}^L &= \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega - p \int_{\Gamma_c^L} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{N}^L d\Gamma \\
\mathbf{K}^{GL} &= \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega - p \int_{\Gamma_c^L} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{N}^L d\Gamma \\
\mathbf{f}^G &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{t} d\Gamma - p \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^{GT} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \\
\mathbf{f}^L &= \int_{\Omega^L} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i^L} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{t} d\Gamma - p \int_{\Gamma_c^L} \mathbf{N}^{LT} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.16}$$

線形の重合メッシュ法と比較すると、各項にペナルティ法による変位の拘束項が付与されていることがわかる。これらの項は剛体と接触している要素にのみ現れることに注意する。つまり、Newton-Raphson 法による反復計算が必要となる。また、 \mathbf{K}^{GL} においては \mathbf{N}^G と \mathbf{N}^L が混在している。しかし、これは第 2 章で述べた \mathbf{K}^{GL} の積分における注意事項と全く同じ問題であり、同様の方法で問題を回避している。

4.3 重合メッシュ法による接触解析の手順

接触解析と線形の重合メッシュ法との一番大きな違いは、Newton-Raphson 法による反復計算を必要とする点である。本節では、Newton-Raphson 法による反復計算の手順と、重合メッシュ法における注意事項について述べる。

反復計算では、最初に剛性マトリクスを作成するために接触要素の判定を行う。ここでは、グローバルとローカルを足し合わせた変位を用いる。重合メッシュ法では足し合わせた変位を真の変位と定義しているためである。そして剛性マトリクス \mathbf{K} 、外力 \mathbf{F} を作成し、残差を次式より計算する。

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{R}(\mathbf{U}^{i-1}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{i-1}) - \mathbf{K}(\mathbf{U}^{i-1})\mathbf{U}^{i-1} \quad (4.17)$$

i は Newton-Raphson 法による反復計算のステップ数を表している。また、 \mathbf{U}^i は次式で定義される。

$$\mathbf{U}^i = \begin{Bmatrix} (\mathbf{d}^G)^i \\ (\mathbf{d}^L)^i \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

続いて、次式により連立方程式の計算をする。

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i-1})d\mathbf{U}^i = \mathbf{R}^i \quad (4.19)$$

次に、次式により変位を更新する。このときグローバルとローカルの変位の足し合わせをしないことに注意する。

$$\mathbf{U}^i = \mathbf{U}^{i-1} + d\mathbf{U}^i \quad (4.20)$$

そして、収束の判定を次式により行う。

$$\text{norm}(\mathbf{R}^i) = 0 \quad (4.21)$$

収束した後、(4.8)式によりグローバルとローカルの変位の足し合わせをする。以上の手順を Fig. 4-2 にまとめた。

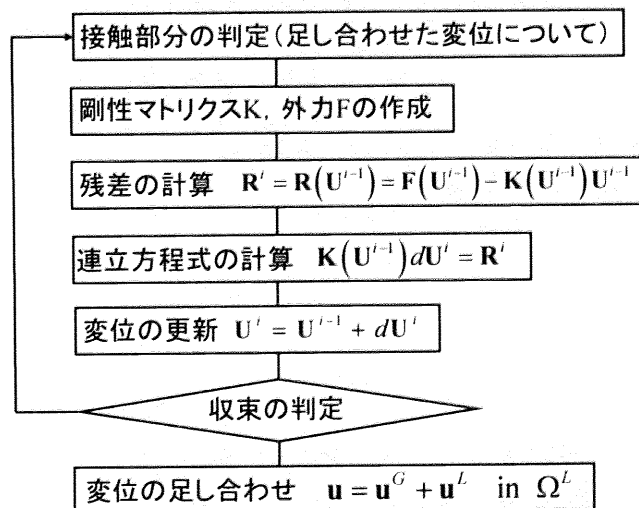


Fig. 4-2 接触解析における Newton-Raphson 法の反復計算の手順

4.4 数値解析例 Hertz 問題

Hertz 問題とよばれる 2 次元円板を集中加重により圧縮する例題について変位と平面応力の解析を行った。モデルの概略図を Fig. 4-3 に示す。

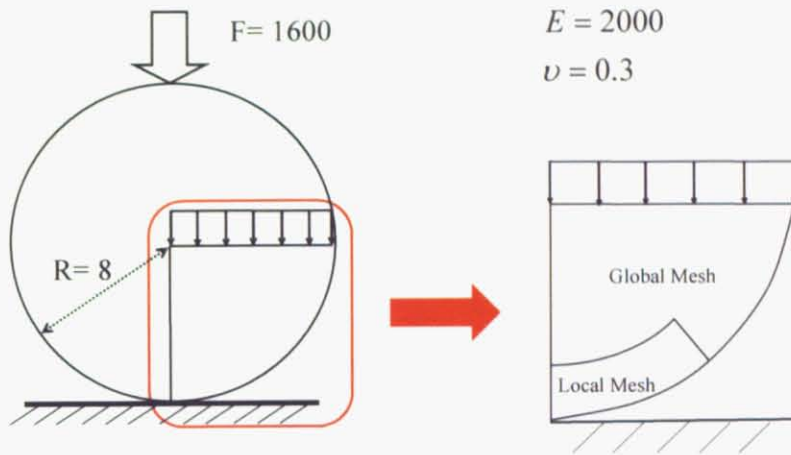


Fig. 4-3 Hertz 問題の概略図

対称性より、全体の 1/4 領域のみを解析する。重合メッシュ法による解析に用いたメッシュを Fig. 4-4 に示す。グローバルメッシュは半径方向に 6 要素、円周方向に 6 要素の 27 要素に分割した。一方、ローカルメッシュは半径方向に 8 要素、円周方向に 12 要素の 96 要素に分割した。

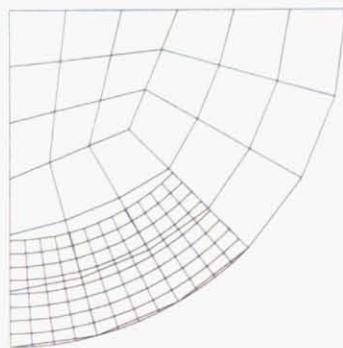


Fig. 4-4 Hertz 問題の重合メッシュ

参照解の導出に用いるメッシュを Fig. 4-5 に示す。半径方向に 24 要素、円周方向に 24 要素の 432 要素に分割した。これは、ローカルメッシュと同じ粗さで全体をメッシュ分割したものに相当する。

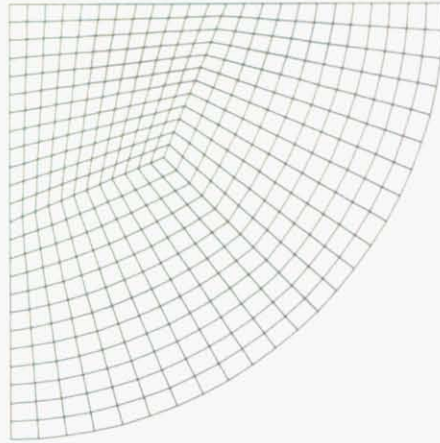


Fig. 4-5 Hertz 問題の参照メッシュ

重合メッシュ法および参照メッシュの FEM について、変位と von-Mises 応力の解析結果を Fig. 4-6, Fig. 4-7 および Fig. 4-8 に示す。ローカルメッシュと参照メッシュの対応する部分を比較すると同様の結果が得られていることがわかる。

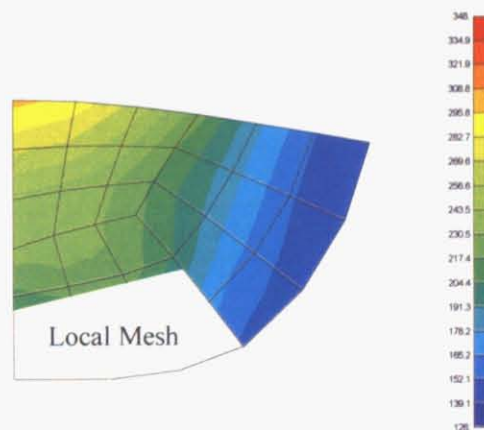


Fig. 4-6 Hertz 問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)

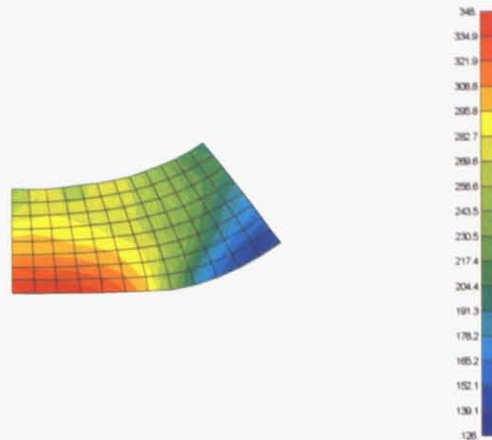


Fig. 4-7 Hertz 問題の変位と von-Mises 応力（重合メッシュ法によるローカル解）

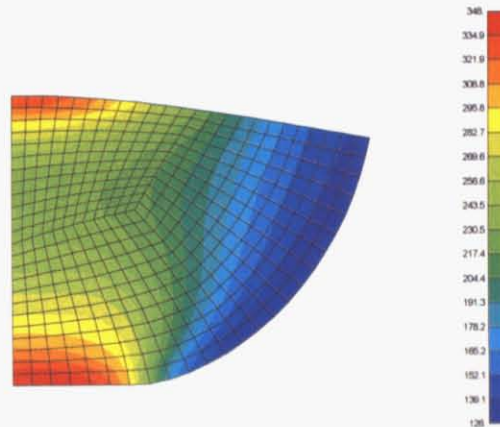


Fig. 4-8 Hertz 問題の変位と von-Mises 応力（FEM による参照解）

Hertz 問題の接触長さには理論解が存在する[39]. 集中荷重を F , 物体の半径を R とすると, 接触長さの $1/2$ を表す b は次式となる.

$$b = 2\sqrt{\frac{FR(1-\nu^2)}{E\pi}} \quad (4.22)$$

荷重と接触長さの関係を理論解と比較したグラフを Fig. 4-9 に示す. 図中の MSM が重合メッシュ法による解析である. また, FEM (細) が FEM による参照解でローカルメッシュと同じ粗さで全体をメッシュ分割したものに相当する. FEM (粗) はグローバルと同じ粗さで全体をメッシュ分割した FEM の結果である. MSM と FEM (細) の解はほぼ一致し, 理論解と比較しても精度の良い解が得られている.

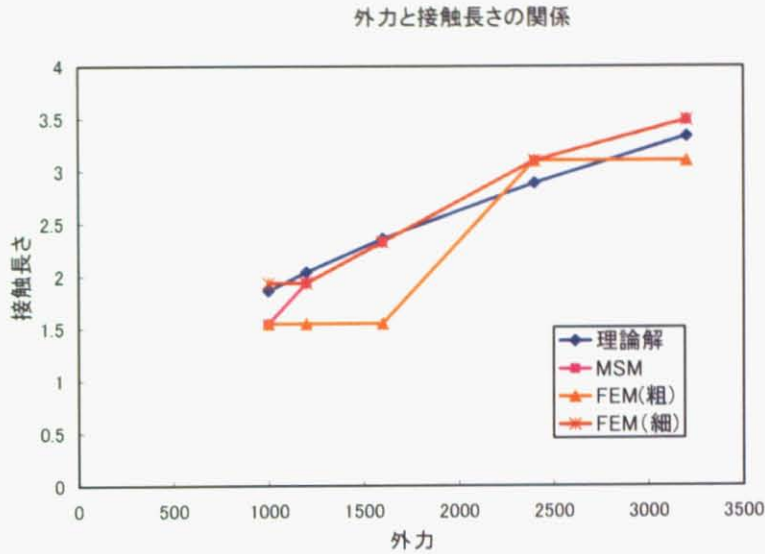


Fig. 4-9 Hertz 問題における外力と接触長さの関係

4.5 反復計算の収束に関する考察

Newton-Raphson 法による反復計算における残差の変化を参照 FEM と比較した. その結果を Fig. 4-10 に示す. 前節と同様, FEM (細) が FEM による参照解でローカルメッシュと同じ粗さで全体をメッシュ分割したものであり, FEM (粗) はグローバルと同じ粗さで全体をメッシュ分割した FEM の結果である. 重合メッシュ法では反復計算の回数が増えるが, 実用上問題となるほどではない. FEM では存在しない(4.16)式の \mathbf{K}^{GI} におけるペナルティ項の積分が影響していると思われる.

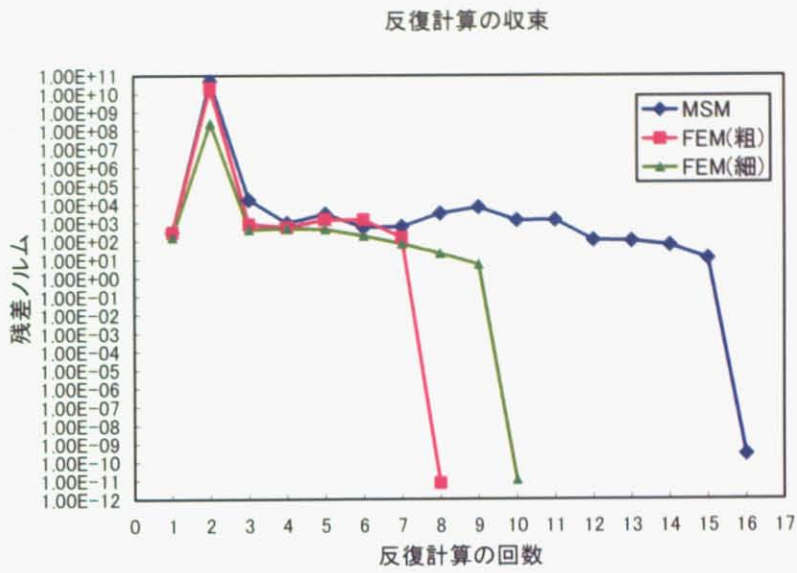


Fig. 4-10 Hertz 問題における Newton-Raphson 法による反復計算の収束