

第5章 重合メッシュ法による弾塑性解析

5.1 はじめに

材料非線形問題は、材料の力学特性すなわち応力とひずみの関係に由来する非線形問題である[1]。このような問題の解析にはほとんど例外なく増分解法をとり、極めて微小な増分を前提とする反復なしの陽的な方法と適当な大きさの増分に対し反復補正を加える陰的な解法がある。重合メッシュ法による弾塑性解析では、中住ら[13]によって前者の陽的な解法を用いた解析は行われている。しかし、後者の反復補正を加える陰的な解法を用いた解析は行われていない。そこで、本研究では重合メッシュ法による弾塑性解析に Newton-Raphson 法による陰的な解法を導入した。

本来、弾塑性解析における応力とひずみを結ぶ構成式は、対象となる固体の挙動の観察結果、つまり実験データを元に合理的な仮説を立てて定式化される非常に複雑なものとなる。しかし、本研究ではこれまで述べたように重合メッシュ法による弾塑性解析に陰的な解法を導入することを目的としているため、構成式の研究には踏み込まず、完全弾塑性体を用いた。

本章の後半では、重合メッシュ法による弾塑性解析を ABAQUS のような汎用コードに組み込んで使うための連立一次方程式の解法の工夫について説明する。重合メッシュ法では剛性マトリクスの中にグローバルとローカルの両方の情報を含むため、汎用コードへの実装が難しい。そこで、重合メッシュ法の連成効果を損なうことなくグローバルとローカルを分離して連立一次方程式を解く方法について考察した。

5.2 重合メッシュ法による弾塑性解析の定式化

Fig. 5-1 のようなローカルモデル領域内に塑性領域が発生する場合について述べる。

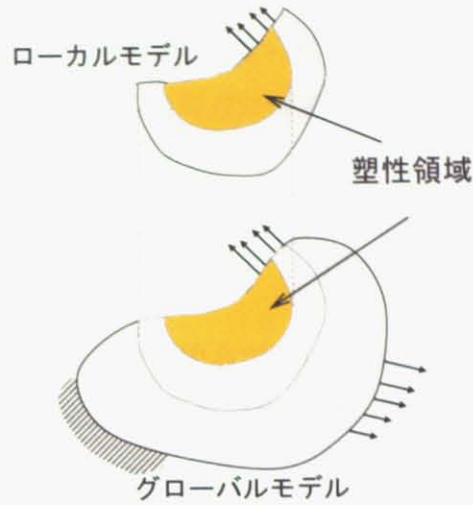


Fig. 5-1 重合メッシュ法による弾塑性解析の概念図

弾塑性解析では、次式で表される弾塑性応力ひずみマトリクスを用いる[1].

$$\mathbf{D}^{EP} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ Sym & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{S_1^2}{S} & \frac{S_1 S_2}{S} & \frac{S_1 S_6}{S} \\ & \frac{S_2^2}{S} & \frac{S_2 S_6}{S} \\ Sym & & \frac{S_6^2}{S} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma_x' + \nu \sigma_y')$$

$$S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \sigma_x' + \sigma_y')$$

$$S_6 = \frac{E}{1+\nu} \tau_{xy}$$

$$\sigma_x' = \sigma_x - \sigma_m \quad (5.2)$$

$$\sigma_y' = \sigma_y - \sigma_m$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 - \sigma_x' \sigma_y' + 3\tau_{xy}^2}$$

$$S = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H + S_1 \sigma_x' + S_2 \sigma_y' + 2S_6 \tau_{xy}$$

このとき、つりあい方程式は次式で表される.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{GLT} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{d}^G \\ d\mathbf{d}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\mathbf{f}^G \\ d\mathbf{f}^L \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{K}^G = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D}^{EP} \mathbf{B}^G d\Omega$$

$$\mathbf{K}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D}^{EP} \mathbf{B}^L d\Omega$$

$$\mathbf{K}^{GL} = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D}^{EP} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (5.4)$$

グローバルとローカルの構成式が異なる場合の研究は、中住ら[31]によってされている。今回は簡単のためグローバル、ローカルの両方に弾塑性応力ひずみマトリクスを用いた。

5.3 Newton-Raphson 法による反復計算の導入

弾塑性解析において、一つの増分の間接点で降伏が始まる場合、剛性マトリクスの組み立てに用いた弾性関係から応力を求めるのでは精度が悪く、何らかの手段で応力を補正することになる。このような場合、一つの増分に対して反復が必要になる。本節では、重合メッシュ法による弾塑性解析に Newton-Raphson 法による反復計算を導入した場合の計算手順と注意事項について述べる。

反復計算では、最初に構成式を計算するため、積分点毎に von-Mises 応力を計算する。ここでは、前章の接触解析と同様、グローバルとローカルを足し合わせた変位を計算に用いる。重合メッシュ法では足し合わせた変位を真の変位と定義しているためである。そして剛性マトリクス \mathbf{K} 、外力 $d\mathbf{F}$ を作成し、残差を次式より計算する。

$$d\mathbf{R}^i = d\mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}^{i-1}) = d\mathbf{F} - \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}^{i-1})d\mathbf{U}^{i-1} \quad (5.5)$$

i は Newton-Raphson 法による反復計算のステップ数を表している。また、 $d\mathbf{U}^i$ は接触解析と同様に次式で定義される。

$$d\mathbf{U}^i = \begin{Bmatrix} (dd^G)^i \\ (dd^L)^i \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

続いて、次式により連立方程式の計算をする。

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}^{i-1})dd\mathbf{U}^i = d\mathbf{R}^i \quad (5.7)$$

ここで、 $d\mathbf{U}$ は1回の荷重ステップで計算される変位の増加量、 $dd\mathbf{U}$ はその荷重ステップ中で反復計算される Newton-Raphson 法の1回の計算によって得られる変位の増加量を表している。つまり、Newton-Raphson 法による反復計算における変位は次式で更新される。なお、接触解析と同様、このときはグローバルとローカルの変位の足し合わせを行わない。

$$d\mathbf{U}^i = d\mathbf{U}^{i-1} + dd\mathbf{U}^i \quad (5.8)$$

次に、(5.8)式で得られた変位を用いて応力 $\boldsymbol{\sigma}^i$ を求める。ここで求めた応力は、次ステップの構成式の計算で用いるため、グローバルとローカルを足し合わせた変位を用いて計算する。

そして，Newton-Raphson 法の収束の判定を次式により行う．

$$\text{norm}(d\mathbf{R}') = 0 \quad (5.9)$$

反復計算を行い，収束した後にグローバルとローカルの変位の足し合わせをする．以上の手順を Fig. 5-2 にまとめた．

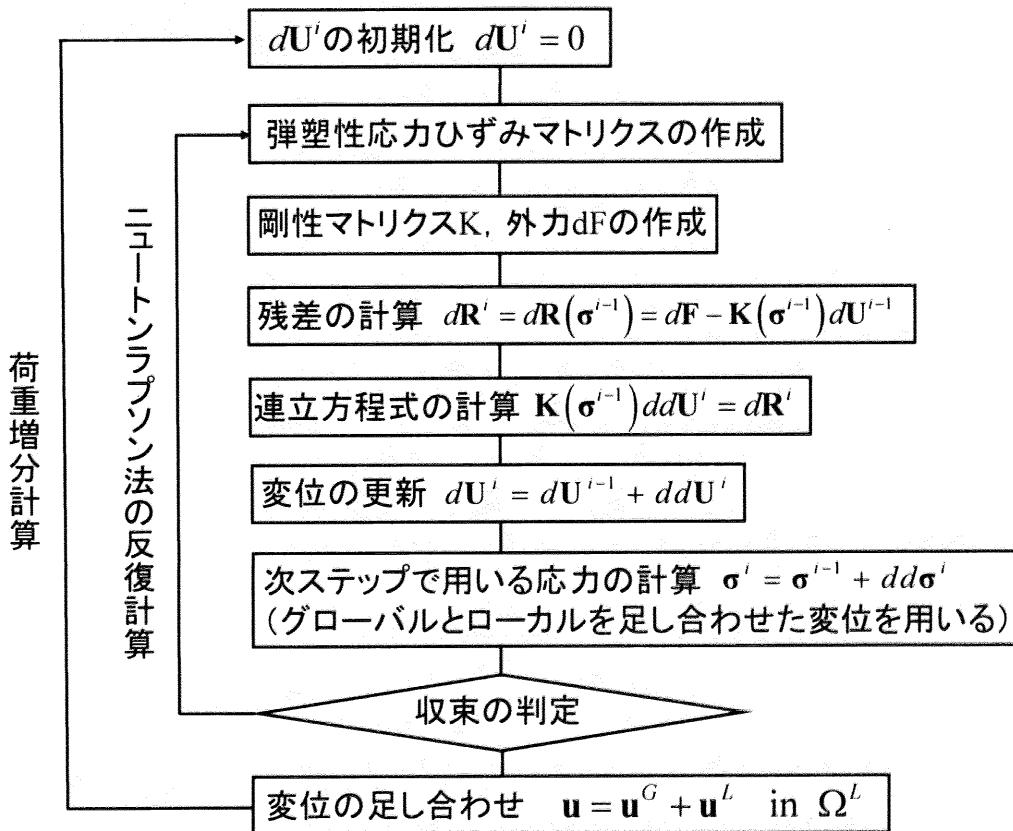


Fig. 5-2 弾塑性解析の手順

5.4 数値解析例 円孔問題

円孔問題とよばれる 2 次元板の中心に円形の穴が空いた例題について変位と平面応力の解析を行った．モデルの概略図を Fig. 5-3 に示す．

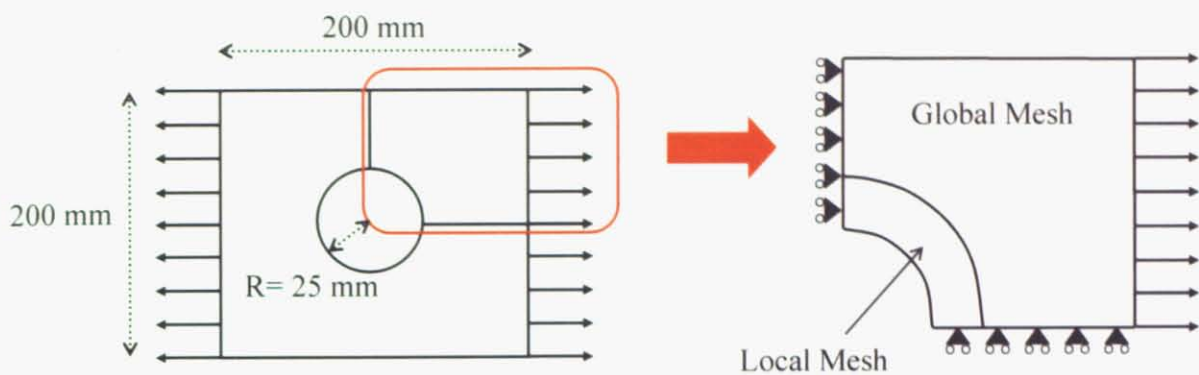


Fig. 5-3 円孔問題の概略図

対称性より全体の 1/4 領域のみを解析する。材料はスチールのヤング率 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$, ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いた。ひずみ硬化係数 $H=1$, つまり完全弾塑性を仮定した。降伏応力を 300 MPa , 外力を 140 MPa とした。また, 増分解析における荷重ステップ数は 10 とした。重合メッシュ法による解析に用いたメッシュを Fig. 5-4 に示す。グローバルメッシュは縦横に 8 要素の 80 要素に分割した。一方, ローカルメッシュは半径方向に 10 要素, 円周方向に 20 要素の 200 要素に分割した。

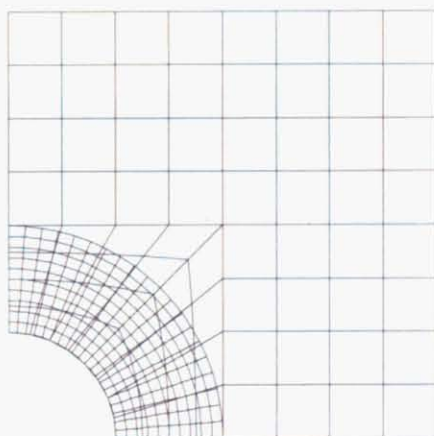


Fig. 5-4 円孔問題の重合メッシュ

参照解の導出に用いるメッシュを Fig. 5-5 に示す。縦横に 20 要素の 500 要素に分割した。これは, ローカルメッシュと同じ粗さで全体をメッシュ分割したものに相当する。

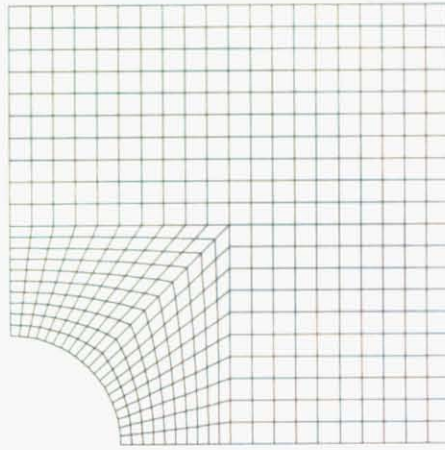


Fig. 5-5 円孔問題の参照メッシュ

重合メッシュ法および参照メッシュの FEM について、変位と von-Mises 応力の解析結果を Fig. 5-6, Fig. 5-7 および Fig. 5-8 に示す。ローカルメッシュと参照メッシュの対応する部分を比較すると同様の結果が得られていることがわかる。

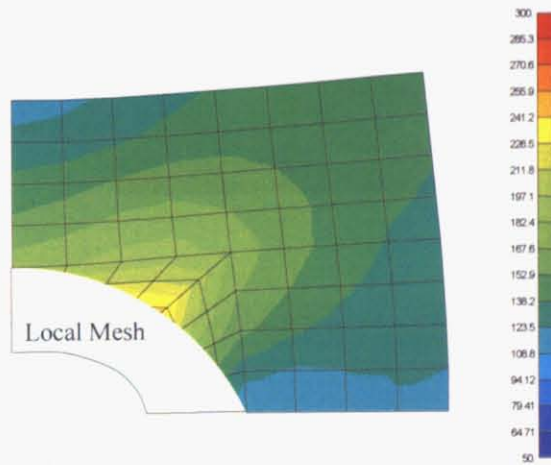


Fig. 5-6 円孔問題の変位と von-Mises 応力（重合メッシュ法によるグローバル解）

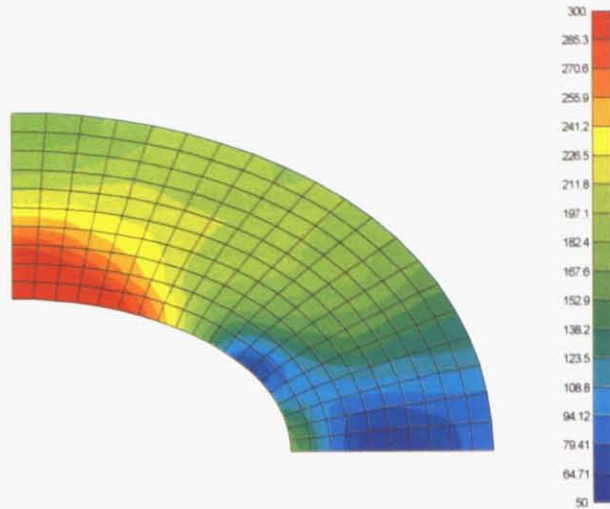


Fig. 5-7 円孔問題の変位と von-Mises 応力（重合メッシュ法によるローカル解）

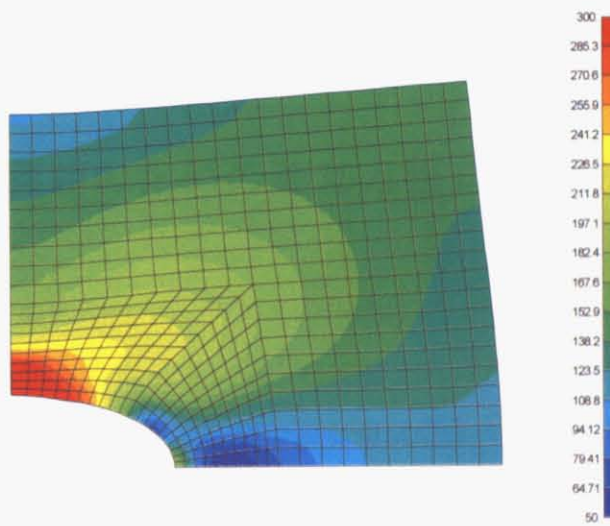


Fig. 5-8 円孔問題の変位と von-Mises 応力（FEM による参照解）

5.5 反復計算の収束に関する考察

Newton-Raphson 法による反復計算における残差の変化を参照 FEM と比較した。その結果を Fig. 5-9 に示す。これは 10 分割した荷重ステップのうち 5 番目のステップの結果である。MSM が重合メッシュ法による解析、FEM が参照 FEM の結果をそれぞれ表している。メッシュは前節と同じものを用いている。グラフより重合メッシュ法と参照 FEM は同様に収束する

ことがわかる。

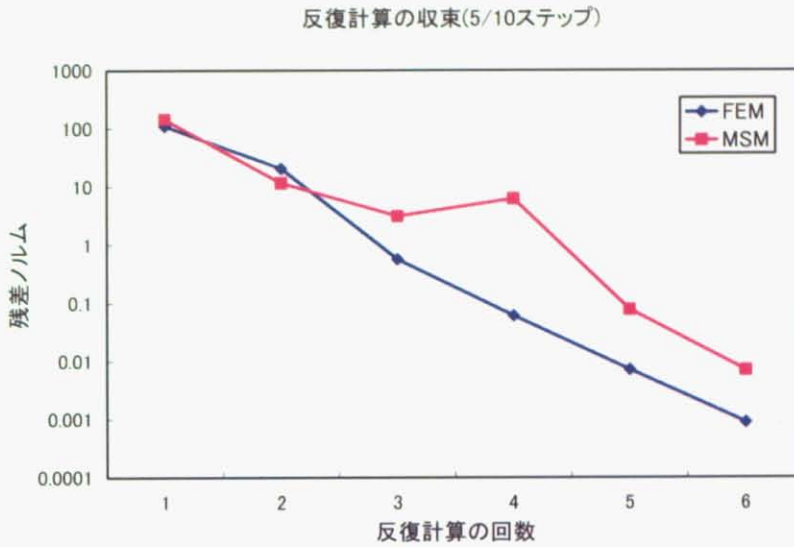


Fig. 5-9 円孔問題における Newton-Raphson 法による反復計算の収束

5.6 汎用コード実装のための連立方程式の解法

重合メッシュ法では、全体剛性マトリクスの作成にグローバル、ローカルの両データを必要とするため、ABAQUSのような汎用コードに実装するのが難しい。そこで、グローバルとローカルの解析を交互に行い、相互の影響である連成効果を外力として与える方法が考案されている[10]。この考え方を発展させ、実際に汎用コードに実装するためのグローバル、ローカル解析の反復法に関する研究が過去に行われている[35]。しかし、Newton-Raphson 法による反復計算を必要とする非線形解析に関して、本手法が有効であるかどうかの検証はされていない。本節では、重合メッシュ法による弾塑性解析に対して、グローバル、ローカル解析の反復法の実装と有効性の検証を行う。

5.6.1 線形のグローバル、ローカルの反復法

グローバル、ローカルの反復解析の長所として、汎用コードへの実装に加えて、連立方程式の計算時間を短縮する効果がある[35]。重合メッシュ法の全体剛性マトリクスには連成項が

存在するため、スカイライン法を用いた場合、記憶させる部分に非常に多くの零成分が入ることになる (Fig. 5-10 参照)。そのため、無駄な記憶領域と計算が非常に多く必要となり、結果的に計算時間が長くなってしまう。上記の理由からグローバル、ローカルの反復解析を用いることで連立方程式の計算時間を短縮する効果がある。

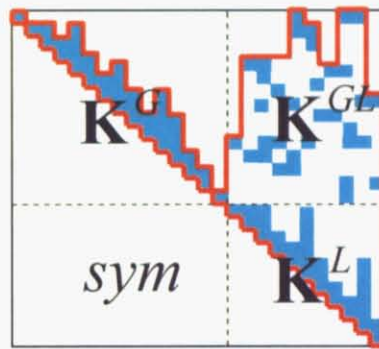


Fig. 5-10 全体剛性マトリクスの模式図

通常の線形解析におけるグローバル、ローカルの反復法の手順を述べる[35]。まず初期値を次式で定義する。

$$\mathbf{u}_G^1 = \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{f}_G \quad (5.10)$$

$$\mathbf{u}_L^1 = 0 \quad (5.11)$$

2回目以降は、次式を収束するまで繰り返す。

$$\mathbf{u}_G^{n+1} = \mathbf{K}_G^{-1} (\mathbf{f}_G - \mathbf{K}_{GL} \mathbf{u}_L^n) \quad (5.12)$$

$$\mathbf{u}_L^{n+1} = \mathbf{K}_L^{-1} (\mathbf{f}_L - \mathbf{K}_{LG} \mathbf{u}_G^{n+1}) \quad (5.13)$$

ここで、 \mathbf{K}_G 、 \mathbf{K}_L はグローバル、ローカルそれぞれ一方の情報のみで構成される。そのため、汎用コードへの実装が行いやすい。(5.12)式に注目すると、この方程式は、グローバルモデルに次式の荷重を与えた場合を表している。

$$\mathbf{u}_L^n \mathbf{f}_G - \mathbf{K}_{GL} \mathbf{u}_L^n \quad (5.14)$$

\mathbf{K}_{GL} を予め求めておき、 \mathbf{u}_L^n を代入することにより、外力として与えることができる。そのため、既存のソルバを用いて(5.12)式を解くことができる。(5.13)式についても同様である。また、 \mathbf{K}_G 、 \mathbf{K}_L は本来スカイライン法にとって素性の良い疎行列である。そのため、Fig. 5-10

のような性質の非常に悪い全体剛性マトリクスを直接用いた場合に比べて、数回これらを反復計算した方が計算時間は短い。

5.6.2 弾塑性解析のグローバル、ローカルの反復法

これまでに述べた線形解析の手法を踏まえて、Newton-Raphson 法による反復計算を取り入れた弾塑性解析のグローバル、ローカルの反復計算の方法について述べる。まず初期値を線形の場合と同様に(5.10), (5.11)式で定義する。このときのグローバル解析で Newton-Raphson 法による反復計算を行う。2回目以降は線形の場合と同様に(5.12), (5.13)式を計算する。このとき、各式の計算中で Newton-Raphson 法による反復計算を行う。また、 \mathbf{K}_{GL} は本来、弾塑性解析においては Newton-Raphson 法による反復計算の各ステップで変化すべきであるが、グローバル解析中にローカルモデルの応力が更新できないため、弾性体の構成式を用いた。グローバル、ローカル解析を2回行う場合の手順を Fig. 5-11 に示す。

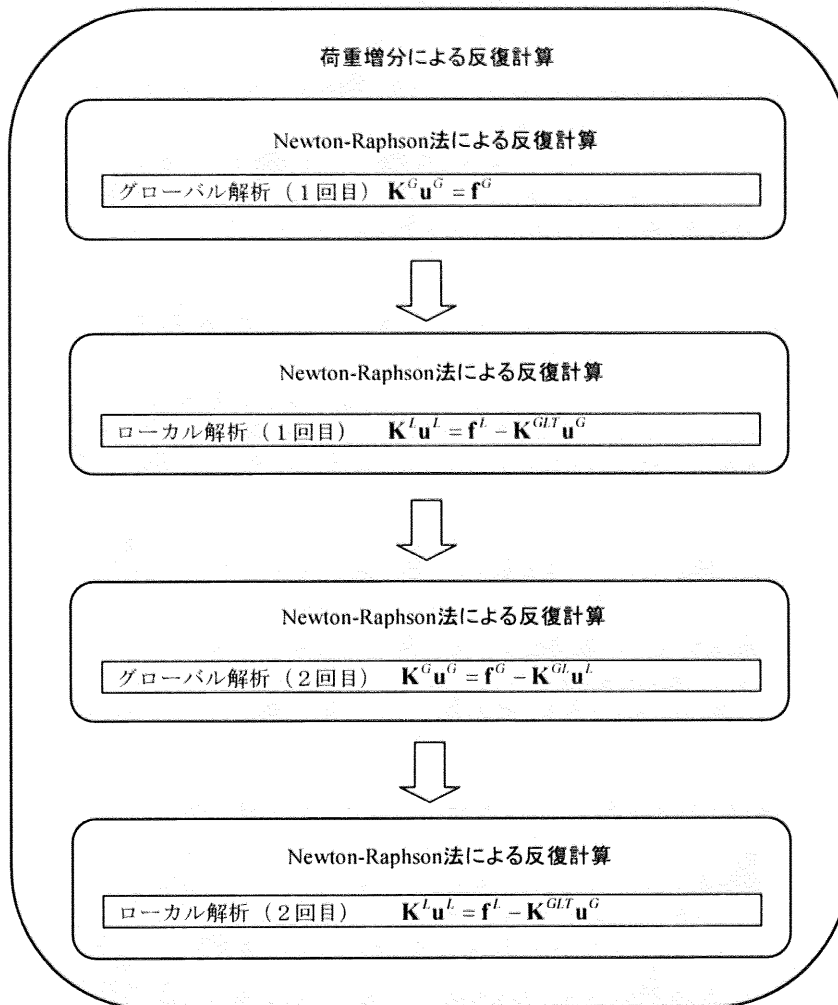


Fig. 5-11 弾塑性解析におけるグローバル，ローカル反復解析

5.6.3 数値解析例 円孔問題

5.4 節と同様の円孔問題を例に本手法の検証を行った。寸法および材料の性質に関する諸条件，外力の方向は 5.4 節と同じである。グローバル，ローカルの反復は Fig. 5-11 の場合と同様に 2 回行った。外力を 90MPa から 120MPa まで変化させた場合の，グローバル，ローカルの反復法を用いた場合と通常のコネクトメッシュ法と参照 FEM の変位を比較した。比較に用いた値は Fig. 5-12 および Fig. 5-13 における A 点，B 点の水平方向の変位である。また，これら 2 つの図における A 点，B 点の位置は全く同じである。

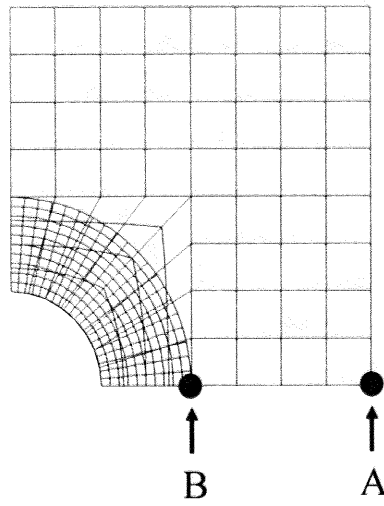


Fig. 5-12 グローバルメッシュ，ローカルメッシュにおける A 点，B 点の位置

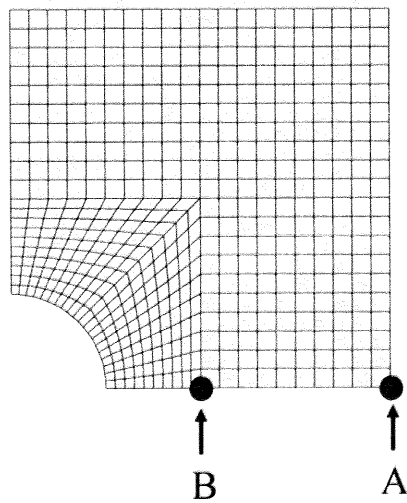


Fig. 5-13 参照 FEM における A 点，B 点の位置

Table 5-1 A 点の水平方向の変位

外力 F (MPa)	GL反復 (mm)	通常MSM (mm)	参照FEM(mm)
90	0.05855	0.05866	0.05888
100	0.06513	0.06518	0.06552
110	0.07224	0.07170	0.07231
120	×	0.07820	0.07929

Table 5-2 B 点の水平方向の変位

外力 F (MPa)	GL反復 (mm)	通常MSM (mm)	参照FEM(mm)
90	0.04171	0.04186	0.04195
100	0.04643	0.04650	0.04671
110	0.05177	0.05115	0.05116
120	x	0.05579	0.05683

グローバル、ローカルの反復法を用いた場合（GL 反復）と通常の重合メッシュ法を用いた場合（通常 MSM）を比較すると、99%値が合っていることがわかる。つまり、正常に解析が行われれば、通常の重合メッシュ法と遜色ない解が得られるといえる。また、参照 FEM と比較しても正常に解析されているといえる。しかし、外力が 110MPa を超えると、グローバル、ローカルの反復法を用いた場合に Newton-Raphson 法の反復計算における残差がある一定値で変化しなくなってしまう。そのため、実際の解析は塑性領域が非常に小さい場合にしか行うことができない。この理由は、 \mathbf{K}_{GL} に弾性体の構成式を用いているためであると考えられる。本来、弾塑性解析において \mathbf{K}_{GL} は Newton-Raphson 法による反復計算の各ステップで変化するべきであるが、グローバル解析中にローカルモデルの応力が更新できないため、やむを得ず弾性体の構成式を用いている。この点を改善することができれば、塑性領域が大きい場合にも適用できると思われる。

第6章 重合メッシュ法による大変形解析

6.1 はじめに

通常の有限要素法では、ひずみ・変位関係式は線形を仮定している。しかし、剛体回転を伴う大変形問題においては、ひずみ・変位関係式の非線形性を考慮する必要がある[1]。このような問題は、一般に幾何学的非線形問題と呼ばれる。

線形の有限要素法では、ひずみ・変位関係式は線形を仮定しているため、物体を剛体回転させるとひずみが発生する。しかし、実際には剛体回転によってひずみは発生しない。この矛盾を解消するためには、ひずみの2次の項を考慮しなければならない。そのため、非線形解析が必要となる。このような幾何学的非線形を考慮した場合の重合メッシュ法については、これまで研究が行われていない。

本章では、重合メッシュ法による大変形解析について述べる。前半では、Total-Lagrange法を用いた場合のつりあい方程式および接線剛性の導出について述べる。後半では、数値解析例および反復計算を収束させるための工夫について述べる。そして、最後に大変形接触問題の解析例を示す。

6.2 重合メッシュ法による大変形問題の定式化

6.2.1 Total-Lagrange法と Updated-Lagrange法

本節では、幾何学的非線形問題の定式化手法である Total-Lagrange法と Updated-Lagrange法について述べる[40]。Total-Lagrange法では、未知状態の仮想仕事式を Lagrange 表記する際に初期配置 (X 座標) を参照する。一方、Updated-Lagrange法では、増分を開始する状態である現在配置 (x 座標) を参照する。これらの関係を Fig. 6-1 に示す。

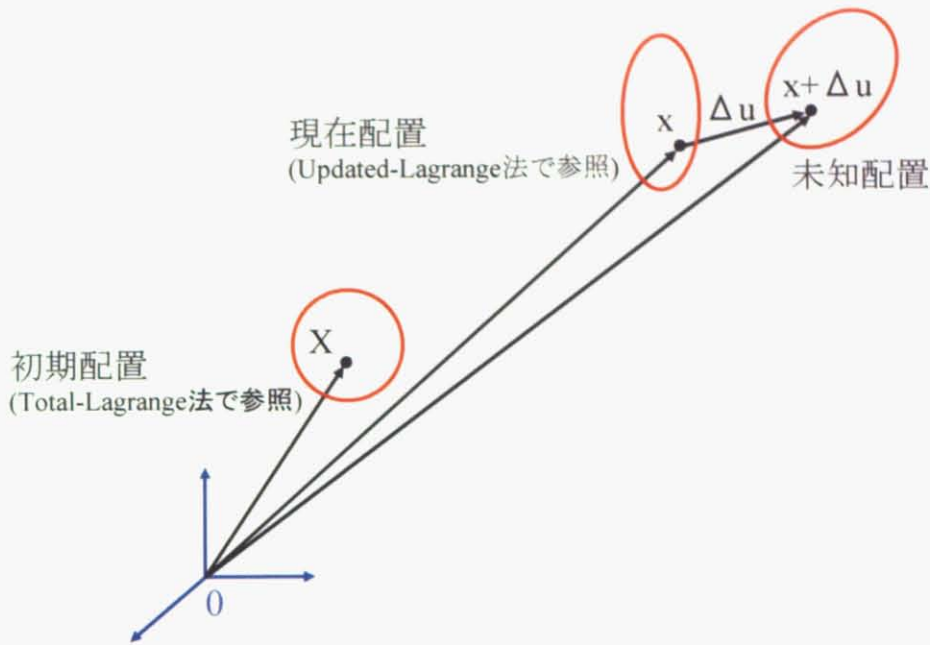


Fig. 6-1 物体の移動と参照配置

Total-Lagrange 法と Updated-Lagrange 法の違いは参照配置のみである。したがって、同じモデルを解析すれば同一の解が得られる。そのため、初期配置から構成式が求められる場合に Total-Lagrange 法を用い、現在配置から構成式が求められる場合に Updated-Lagrange 法を用いればよい。

重合メッシュ法では、Updated-Lagrange 法を用いた場合、各ステップ毎にグローバル、ローカルの位置関係を判定しなければならない。そこで、本研究では Updated-Lagrange 法は用いず、Total-Lagrange 法による定式化を行った。

6.2.2 Total-Lagrange 法を用いた重合メッシュ法の定式化

本節では、Total-Lagrange 法を用いた場合の重合メッシュ法の定式化について述べる。この場合の弱形式は次式で表される[40].

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (6.1)$$

\mathbf{S} は第 2Piola-Kirchhoff 応力、 \mathbf{E} は Green-Lagrange ひずみを表す。また、接線剛性 \mathbf{K}_T は次式で表される[40].

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{S}} : \delta \mathbf{E} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} d\Omega \quad (6.2)$$

$\dot{\mathbf{S}}$ は第 2Piola-Kirchhoff 応力の時間微分で応力速度、 $\dot{\mathbf{E}}$ は Green-Lagrange ひずみの時間微分で

ひずみ速度を表している。

ここからは、簡単のため、等方性材料で四角形要素の 2 次元面内変形に限定したマトリクス表示について述べる。変位 \mathbf{u} 、Green-Lagrange ひずみ \mathbf{E} 、第 2Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} 、構成式 \mathbf{D} の各成分を次式で定義する。

$$\{\mathbf{u}\} = \{u_1 \quad u_2\}^T \quad (6.3)$$

$$\{\mathbf{E}\} = \{E_{11} \quad E_{22} \quad E_{12}\}^T \quad (6.4)$$

$$\{\mathbf{S}\} = \{S_{11} \quad S_{22} \quad S_{12}\}^T \quad (6.5)$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

構成式 \mathbf{D} はひずみ速度 $\dot{\mathbf{E}}$ と応力速度 $\dot{\mathbf{S}}$ の関係として定義し、次式で表される。なお、異方性材料については関係が異なる。詳しくは[40]に記述されている。

$$\dot{S}_{ij} = D_{ijkl} \dot{E}_{kl} \quad (6.7)$$

(6.7)式をマトリクス表示すると次式で表される。

$$\{\dot{\mathbf{S}}\} = [\mathbf{D}]\{\dot{\mathbf{E}}\} \quad (6.8)$$

このとき、(6.2)式の右辺第 1 項は次式で表される。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{S}} : \delta \mathbf{E} d\Omega &= \int_{\Omega} \delta E_{ij} D_{ijkl} \dot{E}_{kl} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{\delta \mathbf{E}\}^T [\mathbf{D}]\{\dot{\mathbf{E}}\} d\Omega \\ &= \sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta \mathbf{E}\}^T [\mathbf{D}]\{\dot{\mathbf{E}}\} d\Omega \end{aligned} \quad (6.9)$$

(6.9)式における $\dot{\mathbf{E}}$ の成分は次式で表される[40]。

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_j} \right) \quad (6.10)$$

(6.10)式は、次式のようにマトリクス表示することができる。

$$\{\dot{\mathbf{E}}\} = [\mathbf{Z}_1] \left\{ \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{X}} \right\} \quad (6.11)$$

ここで, $[Z_1]$, $\{\dot{E}\}$, $\left\{\frac{\partial \dot{u}}{\partial X}\right\}$ は次式で定義される.

$$[Z_1] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$\{\dot{E}\} = \{\dot{E}_{11} \quad \dot{E}_{22} \quad \dot{E}_{12}\}^T \quad (6.13)$$

$$\left\{\frac{\partial \dot{u}}{\partial X}\right\} = \left\{\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial X_1} \quad \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial X_2} \quad \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial X_1} \quad \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial X_2}\right\}^T \quad (6.14)$$

重合メッシュ法では, 第2章で述べたように領域 Ω 内, 領域 Ω^l 内ではそれぞれ独立の変位場 \mathbf{u}^G , \mathbf{u}^l が定義されており, 領域 Ω^l 内では, 実際の変位は両モデルの変位の和で定義される. つまり, \mathbf{u} は次式で表される.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^l \quad (6.15)$$

同様に, $\dot{\mathbf{u}}$ は次式で表される.

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^G + \dot{\mathbf{u}}^l \quad (6.16)$$

このとき, (6.12)式に(6.15)式を代入すると $[Z_1]$ は次式で表される.

$$[Z_1] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial(u_1^G + u_1^l)}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial(u_2^G + u_2^l)}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(u_1^G + u_1^l)}{\partial X_2} & 0 & 1 + \frac{\partial(u_2^G + u_2^l)}{\partial X_2} \\ \frac{\partial(u_1^G + u_1^l)}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial(u_1^G + u_1^l)}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial(u_2^G + u_2^l)}{\partial X_2} & \frac{\partial(u_2^G + u_2^l)}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$= [Z_1^G] + [Z_1^l] - [I_E]$$

ただし, $[Z_1^G]$, $[Z_1^l]$, $[I_E]$ は次式で定義する.

$$[Z_1^G] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1^G}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_2^G}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1^G}{\partial X_2} & 0 & 1 + \frac{\partial u_2^G}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1^G}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_1^G}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2^G}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2^G}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

$$[Z_1^L] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1^L}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_2^L}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1^L}{\partial X_2} & 0 & 1 + \frac{\partial u_2^L}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1^L}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_1^L}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2^L}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2^L}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$[I_E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

このとき、(6.14)式に(6.16)式を代入すると、 $\left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial X} \right\}$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial X} \right\} &= \left\{ \frac{\partial \dot{u}^G}{\partial X} \right\} + \left\{ \frac{\partial \dot{u}^L}{\partial X} \right\} \\ &= [Z_2^G] \left\{ \dot{d}^G \right\} + [Z_2^L] \left\{ \dot{d}^L \right\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

ただし、 $[Z_2^G]$, $[Z_2^L]$, $\left\{ \dot{d}^G \right\}$, $\left\{ \dot{d}^L \right\}$ は次式で定義する。

$$[Z_2^G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{G(1)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{G(2)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{G(3)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{G(4)}}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial N^{G(1)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{G(2)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{G(3)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{G(4)}}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^{G(1)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{G(2)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{G(3)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{G(4)}}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial N^{G(1)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{G(2)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{G(3)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{G(4)}}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$[Z_2^L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{L(1)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{L(2)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{L(3)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{L(4)}}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial N^{L(1)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{L(2)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{L(3)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{L(4)}}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^{L(1)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{L(2)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{L(3)}}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N^{L(4)}}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial N^{L(1)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{L(2)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{L(3)}}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N^{L(4)}}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$\left\{ \dot{d}^G \right\} = \left\{ \dot{d}_1^{G(1)} \quad \dot{d}_2^{G(1)} \quad \dot{d}_1^{G(2)} \quad \dot{d}_2^{G(2)} \quad \dot{d}_1^{G(3)} \quad \dot{d}_2^{G(3)} \quad \dot{d}_1^{G(4)} \quad \dot{d}_2^{G(4)} \right\}^T \quad (6.24)$$

$$\left\{ \dot{d}^L \right\} = \left\{ \dot{d}_1^{L(1)} \quad \dot{d}_2^{L(1)} \quad \dot{d}_1^{L(2)} \quad \dot{d}_2^{L(2)} \quad \dot{d}_1^{L(3)} \quad \dot{d}_2^{L(3)} \quad \dot{d}_1^{L(4)} \quad \dot{d}_2^{L(4)} \right\}^T \quad (6.25)$$

(6.11), (6.17), (6.21)式より, 次式が求められる.

$$\begin{aligned} \left\{ \dot{E} \right\} &= [Z_1] \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial X} \right\} \\ &= \left([Z_1^G] + [Z_1^L] - [I_E] \right) \left([Z_2^G] \left\{ \dot{d}^G \right\} + [Z_2^L] \left\{ \dot{d}^L \right\} \right) \\ &= \left([Z_1^G][Z_2^G] + [Z_1^L][Z_2^G] - [I_E][Z_2^G] \right) \left\{ \dot{d}^G \right\} + \left([Z_1^L][Z_2^L] + [Z_1^G][Z_2^L] - [I_E][Z_2^L] \right) \left\{ \dot{d}^L \right\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

(6.26)式は, 重合メッシュ法で定義される(6.15)式を用いて, $\left\{ \dot{E} \right\}$ を $\left\{ \dot{d}^G \right\}$ と $\left\{ \dot{d}^L \right\}$ を用いて表す

ことができることを示している.

ここで, 便宜的に以下の置き換えをする. この置き換えは独自のものである. また, 便宜上, 線形の場合と同じ記号を用いたが, その意味合いは全く異なる.

$$[B^G] = [Z_1^G][Z_2^G] + [Z_1^L][Z_2^G] - [I_E][Z_2^G] \quad (6.27)$$

$$[B^L] = [Z_1^L][Z_2^L] + [Z_1^G][Z_2^L] - [I_E][Z_2^L] \quad (6.28)$$

このとき, (6.26)式は次式で表される.

$$\left\{ \dot{E} \right\} = [Z_1] \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial X} \right\} = [B^G] \left\{ \dot{d}^G \right\} + [B^L] \left\{ \dot{d}^L \right\} \quad (6.29)$$

これまでの議論と同様に次式が導かれることも明らかである.

$$\{ \delta E \} = [Z_1] \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} = [B^G] \{ \delta d^G \} + [B^L] \{ \delta d^L \} \quad (6.30)$$

ここで, $\{\delta E\}$, $\left\{\frac{\partial \delta u}{\partial X}\right\}$ は次式で定義される.

$$\{\delta E\} = \{\delta E_{11} \quad \delta E_{22} \quad \delta E_{12}\}^T \quad (6.31)$$

$$\left\{\frac{\partial \delta u}{\partial X}\right\} = \left\{\frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \quad \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \quad \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \quad \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2}\right\}^T \quad (6.32)$$

(6.2)式の右边第1項に, (6.9), (6.29), (6.30)式を代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{S}} : \delta \mathbf{E} d\Omega &= \int_{\Omega} \delta E_{ij} D_{ijkl} \dot{E}_{kl} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{\delta E\}^T [D] \left\{\dot{E}\right\} d\Omega \\ &= \sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta E\}^T [D] \left\{\dot{E}\right\} d\Omega \\ &= \sum_e \int_{\Omega_e^G} \left([B^G] \{\delta d^G\}\right)^T [D^G] [B^G] \left\{\dot{d}^G\right\} d\Omega \\ &\quad + \sum_e \int_{\Omega_e^L} \left([B^G] \{\delta d^G\} + [B^L] \{\delta d^L\}\right)^T [D^L] \left([B^G] \left\{\dot{d}^G\right\} + [B^L] \left\{\dot{d}^L\right\}\right) d\Omega \\ &= \sum_e \{\delta d^G\}^T \int_{\Omega_e} [B^G]^T [D^G] [B^G] \left\{\dot{d}^G\right\} d\Omega + \sum_e \{\delta d^G\}^T \int_{\Omega_e^L} [B^G]^T [D^L] [B^L] \left\{\dot{d}^L\right\} d\Omega \\ &\quad + \sum_e \{\delta d^L\}^T \int_{\Omega_e^L} [B^L]^T [D^L] [B^G] \left\{\dot{d}^G\right\} d\Omega + \sum_e \{\delta d^L\}^T \int_{\Omega_e^L} [B^L]^T [D^L] [B^L] \left\{\dot{d}^L\right\} d\Omega \end{aligned} \quad (6.33)$$

これで, (6.2)式の右边第1項, つまり初期変位に関わる項について重合メッシュ法による離散化が完成した.

ここからは, (6.2)式の右边第2項, つまり初期応力に関わる項について述べる. そのために, まず変形勾配テンソル F について述べる.

変形勾配テンソル F は次式のようにマトリクス表示できる.

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

(6.34)式に(6.15)式を代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}
[F] &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial(u_1^G + u_1^L)}{\partial X_1} & \frac{\partial(u_1^G + u_1^L)}{\partial X_2} \\ \frac{\partial(u_2^G + u_2^L)}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial(u_2^G + u_2^L)}{\partial X_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1^G}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1^G}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2^G}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2^G}{\partial X_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1^L}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1^L}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2^L}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2^L}{\partial X_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [F^G] + [F^L] - [I]
\end{aligned} \tag{6.35}$$

したがって、 $[\dot{F}]$ は次式で表される。

$$\begin{aligned}
[\dot{F}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(\dot{u}_1^G + \dot{u}_1^L)}{\partial X_1} & \frac{\partial(\dot{u}_1^G + \dot{u}_1^L)}{\partial X_2} \\ \frac{\partial(\dot{u}_2^G + \dot{u}_2^L)}{\partial X_1} & \frac{\partial(\dot{u}_2^G + \dot{u}_2^L)}{\partial X_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}_1^G}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{u}_1^G}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \dot{u}_2^G}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{u}_2^G}{\partial X_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}_1^L}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{u}_1^L}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \dot{u}_2^L}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{u}_2^L}{\partial X_2} \end{bmatrix} \\
&= [\dot{F}^G] + [\dot{F}^L]
\end{aligned} \tag{6.36}$$

$[\delta F]$ についても同様に次式で表される。

$$[\delta F] = [\delta F^G] + [\delta F^L] \tag{6.37}$$

(6.2)の右辺第2項は変形勾配テンソル F を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} d\Omega &= \int_{\Omega} S_{ij} \delta \dot{E}_{ij} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S_{ij} \left\{ \frac{1}{2} \left(\delta F_{ki} F_{kj} + F_{ki} \delta F_{kj} \right) \right\} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S_{ij} (\delta F_{ki} F_{kj}) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \{ \delta F \}^T [\Sigma] \{ \dot{F} \} d\Omega
\end{aligned} \tag{6.38}$$

ただし、 $\{ \delta F \}$ 、 $\{ \dot{F} \}$ 、 $[\Sigma]$ は次式で定義される。

$$\{\delta F\} = \{\delta F_{11} \quad \delta F_{12} \quad \delta F_{21} \quad \delta F_{22}\}^T \quad (6.39)$$

$$\{\dot{F}\} = \{\delta \dot{F}_{11} \quad \delta \dot{F}_{12} \quad \delta \dot{F}_{21} \quad \delta \dot{F}_{22}\}^T \quad (6.40)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

このとき $\{\dot{F}\}$ と $\{\dot{d}\}$ には、次式で表される関係がある。

$$\{\dot{F}\} = [Z_2] \{\dot{d}\} \quad (6.42)$$

$\{\delta F\}$ と $\{\delta d\}$ も同様に、次式で表される関係がある。

$$\{\delta F\} = [Z_2] \{\delta d\} \quad (6.43)$$

(6.38)式に(6.36), (6.37)式を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} d\Omega &= \int_{\Omega} \{\delta F\}^T [\Sigma] \{\dot{F}\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{\delta F^G + \delta F^L\}^T [\Sigma] \{F^G + F^L\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left([Z_2^G] \{\delta d^G\} + [Z_2^L] \{\delta d^L\} \right)^T [\Sigma] \left([Z_2^G] \{\dot{d}^G\} + [Z_2^L] \{\dot{d}^L\} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega^G} \left([Z_2^G] \{\delta d^G\} \right)^T [\Sigma] [Z_2^G] \{\dot{d}^G\} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega^L} \left([Z_2^G] \{\delta d^G\} + [Z_2^L] \{\delta d^L\} \right)^T [\Sigma] \left([Z_2^G] \{\dot{d}^G\} + [Z_2^L] \{\dot{d}^L\} \right) d\Omega \\ &= \{\delta d^G\}^T \int_{\Omega} [Z_2^G]^T [\Sigma] [Z_2^G] \{\dot{d}^G\} d\Omega + \{\delta d^G\}^T \int_{\Omega^L} [Z_2^G]^T [\Sigma] [Z_2^L] \{\dot{d}^L\} d\Omega \\ &\quad + \{\delta d^L\}^T \int_{\Omega^L} [Z_2^L]^T [\Sigma] [Z_2^G] \{\dot{d}^G\} d\Omega + \{\delta d^L\}^T \int_{\Omega^L} [Z_2^L]^T [\Sigma] [Z_2^L] \{\dot{d}^L\} d\Omega \end{aligned} \quad (6.44)$$

これで、(6.2)式の右辺第2項、つまり初期応力に関わる項について重合メッシュ法による離散化が完成した。

(6.2)式に(6.33), (6.44)式を代入すると、接線剛性マトリクスは次式で表される。

$$K_T = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \left([B^G]^T [D^G] [B^G] + [Z_2^G]^T [\Sigma] [Z_2^G] \right) d\Omega & \int_{\Omega^L} \left([B^G]^T [D^L] [B^L] + [Z_2^G]^T [\Sigma] [Z_2^L] \right) d\Omega \\ \int_{\Omega^L} \left([B^L]^T [D^L] [B^G] + [Z_2^L]^T [\Sigma] [Z_2^G] \right) d\Omega & \int_{\Omega^L} \left([B^L]^T [D^L] [B^L] + [Z_2^L]^T [\Sigma] [Z_2^L] \right) d\Omega \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

本節では、四角形要素の2次元面内変形問題に限定して Total-Lagrange 法による重合メッシュ法の定式化を行ったが、3次元問題についても全く同様に接線剛性マトリクスを求めることができる。

6.3 重合メッシュ法による大変形解析の手順

本節では、重合メッシュ法による大変形解析における Newton-Raphson 法による反復計算の手順について述べる。反復計算では、最初に接線剛性マトリクス \mathbf{K}_T を作成する。ここでは、これまでと同様にグローバルとローカルを足し合わせた変位を用いて得られた応力を用いる。そして、残差を次式より計算する。

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{R}(\mathbf{S}^{i-1}) = \mathbf{F} - \mathbf{Q}(\mathbf{S}^{i-1}) \quad (6.46)$$

i は Newton-Raphson 法による反復計算のステップ数を表している。また、 \mathbf{U}^i は次式で定義される。

$$\mathbf{U}^i = \begin{Bmatrix} (\mathbf{d}^G)^i \\ (\mathbf{d}^L)^i \end{Bmatrix} \quad (6.47)$$

また、 \mathbf{Q} は次式で表される。

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^G \\ \mathbf{Q}^L \end{Bmatrix} \quad (6.48)$$

$$\mathbf{Q}^G = \int_{\Omega} ([Z_1^G][Z_2^G])^T \{S^G\} d\Omega \quad (6.49)$$

$$\mathbf{Q}^L = \int_{\Omega} ([Z_1^L][Z_2^L])^T \{S^L\} d\Omega \quad (6.50)$$

続いて、次式により連立方程式の計算をする。

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i-1})d\mathbf{U}^i = \mathbf{R}^i \quad (6.51)$$

次に、次式により変位を更新する。このときグローバルとローカルの変位の足し合わせをしないことに注意する。

$$\mathbf{U}^i = \mathbf{U}^{i-1} + d\mathbf{U}^i \quad (6.52)$$

そして、変位から第2Piola-Kirchhoff 応力を求める。この方法については次節で述べる。

最後に、収束の判定を次式により行う。

$$\text{norm}(\mathbf{R}^i) = 0 \quad (6.53)$$

収束した後、グローバルとローカルの変位の足し合わせをする。以上の手順を Fig. 6-2 にまとめると。

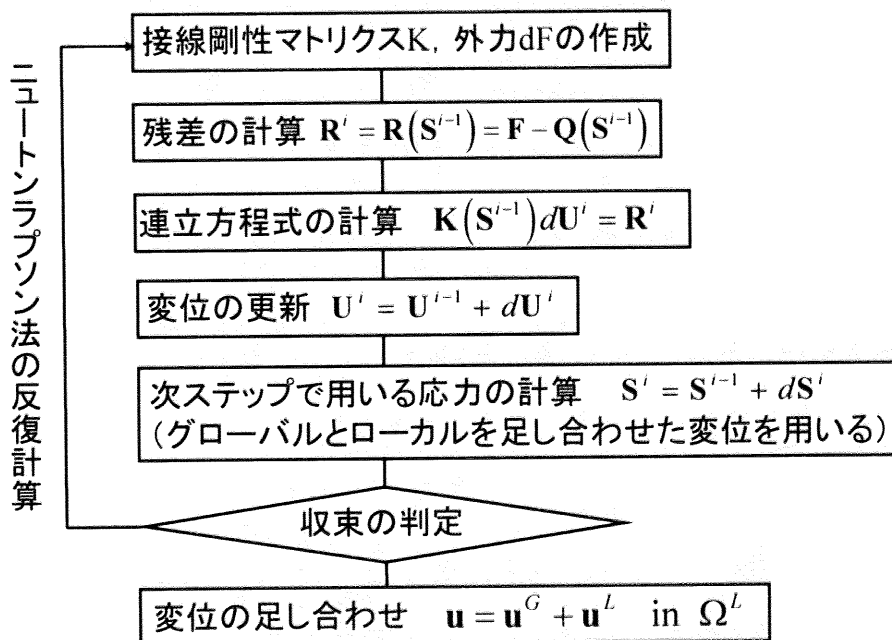


Fig. 6-2 大変形解析における Newton-Raphson 法の反復計算の手順

6.4 大変形の構成式

本節では、重合メッシュ法による大変形解析に用いた構成式である neo-Hookean 体と超弾性体の概要について述べる。

超弾性体は、次式に示すように変形やひずみの成分で微分することにより共役な応力成分が得られる弾性ポテンシャル関数 W が存在する物質として定義される[38].

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (6.54)$$

また、Green-Lagrange ひずみ E と右 Cauchy-Green 変形テンソル C の関係は次式で表される。

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad (6.55)$$

(6.55)式を(6.54)式に代入すると次式となる.

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (6.56)$$

超弾性体の等方性を仮定すると, W は客観性をもつスカラーになるため, C の主値の関数として表される.

$$I_1 \equiv \text{tr} C \quad (6.57)$$

$$I_2 \equiv \frac{1}{2} \{ (\text{tr} C)^2 - \text{tr}(C^2) \} \quad (6.58)$$

$$I_3 \equiv \det C = J^2 \quad (6.59)$$

$$J \equiv \det F \quad (6.60)$$

$$W(C) = W(I_1, I_2, J) \quad (6.61)$$

$$S_{ij} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) \quad (6.62)$$

以上の式より, 各不変量の微分は次式で表される.

$$\frac{\partial I_1}{\partial C} = \delta_{ij} \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} = I \delta_{ij} - C_{ij} \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial J}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} J C_{ij}^{-1} \quad (6.65)$$

(6.63), (6.64), (6.65)式を(6.62)式に代入すると, 弾性ポテンシャル関数 W と応力 S の関係は次式で表される.

$$S_{ij} = 2 \left[\delta_{ij} \quad I_1 \delta_{ij} - C_{ij} \quad \frac{1}{2} J C_{ij}^{-1} \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial I_1} \\ \frac{\partial W}{\partial I_2} \\ \frac{\partial W}{\partial J} \end{Bmatrix} \quad (6.66)$$

(6.66)式より \dot{S}_{ij} は次式で表される.

$$\begin{aligned}\dot{S}_{ij} &= \left(2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \right) \dot{C}_{ij} \\ &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \dot{C}_{kl}\end{aligned}\quad (6.67)$$

D を次式で定義する.

$$D_{ijkl} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \quad (6.68)$$

このとき, (6.67)式は次式となる.

$$\begin{aligned}\dot{S}_{ij} &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \dot{C}_{kl} \\ &= \frac{1}{2} D_{ijkl} \dot{C}_{kl} \\ &= D_{ijkl} \dot{E}_{kl}\end{aligned}\quad (6.69)$$

ただし, (6.55)式より求められる次式の関係を用いた.

$$\dot{C}_{kl} = 2 \dot{E}_{kl} \quad (6.70)$$

本研究では, 超弾性体の構成式である圧縮性 neo-Hookean 体を用いた. neo-Hookean 体の弾性ポテンシャル関数 W は, ラメ定数を用いて次式で表される[38].

$$W(I, J) = \frac{1}{2} \mu (I - 3 - 2 \ln J) + \frac{1}{2} \lambda (J - 1)^2 \quad (6.71)$$

(6.71)式を(6.66)式に代入すると, 次式が得られる.

$$S_{ij} = \mu (\delta_{ij} - C_{ij}^{-1}) + \lambda J (J - 1) C_{ij}^{-1} \quad (6.72)$$

(6.72)式より, 変形勾配 F を用いて応力 S を求めることができる. なお, 右 Cauchy-Green 変形テンソル C と変形勾配 F の関係は次式で定義される.

$$C = F^T F \quad (6.73)$$

(6.69)式および(6.72)式より構成式 D は次式で表される.

$$D_{ijkl} = \lambda J (2J - 1) C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + 2 [\mu - \lambda J (J - 1)] C_{ijkl}^{-1} \quad (6.74)$$

$J=1$ のとき, 線形弾性体の構成式と一致する.

6.5 Newton-Raphson 法による反復計算の収束の問題

6.5.1 収束する例

これまで述べた方法で解析を行うと、ごく簡単なモデル以外では反復計算が収束しない。まず、収束するモデルについて示す。

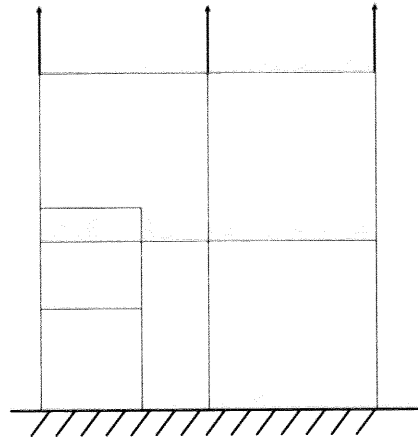


Fig. 6-3 検証用モデル

Fig. 6-3 のようなモデルについて解析した。構成式には 6.4 節で説明した圧縮性 Neo-Hookean 体を用いた。材料定数は $\mu = 300$, $\lambda = 100$ とした。グローバルメッシュの変位と von-Mises 応力を Fig. 6-4 に示す。ローカルメッシュの変位と von-Mises 応力を Fig. 6-5 に示す。

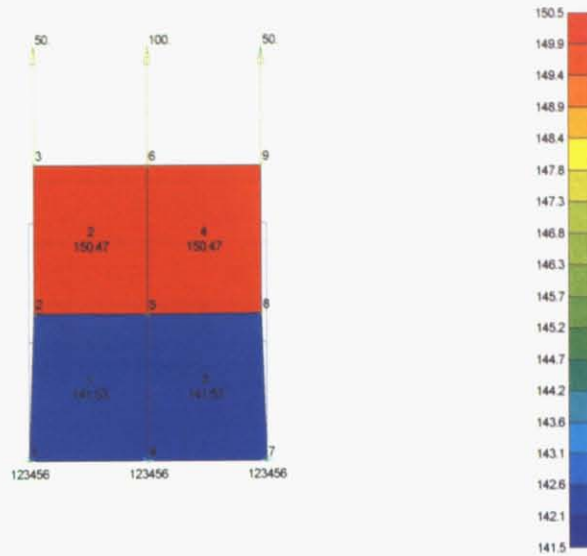


Fig. 6-4 検証用モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)

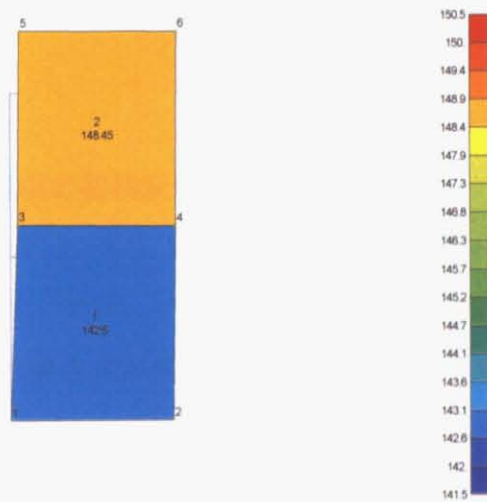


Fig. 6-5 検証用モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)

Newton-Raphson 法による反復計算における残差の変化を参照 FEM と比較した. その結果を Fig. 6-6 に示す. 自由度が少ないモデルであるにも関わらず, 重合メッシュ法では反復計算の回数が多くなることがわかる.

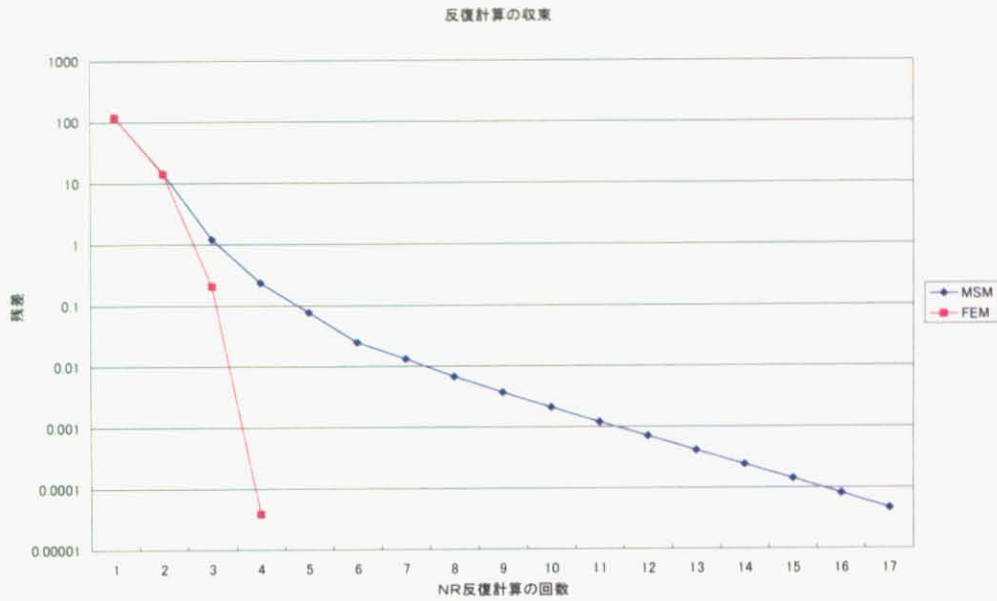


Fig. 6-6 検証用モデルにおける Newton-Raphson 法による反復計算の収束

6.5.2 収束しない理由と改善方法

6.5.2.1 グローバル、ローカル連成項の初期変位を 0 にする方法

重合メッシュ法による大変形解析において、簡単なモデル以外で Newton-Raphson 法による反復計算が収束しない理由としては、グローバルとローカルの構成式が異なるためであると思われる。グローバルとローカルの構成式が異なる場合の考察については、中住らによる論文[31]に詳しく記述されている。この論文によると、次式で定義される \mathbf{D}' の成分が問題となる。

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D}^G - \mathbf{D}^L \quad (6.75)$$

(6.75)式の \mathbf{D}' が非正値形式のマトリクスとなると、ローカル領域に生じるひずみエネルギーが正となることが保障されなくなる。この場合、解析結果が力学的におかしな解となる可能性がある。[31]には実際に解がおかしくなる場合の解析例が示されている。そのため、グローバル、ローカルの連成項について初期変位項を零とした。収束条件が同じであれば、この処置によって解が変化することはないが、接線剛性が不正確になるため非線形性が大きくなると収束しなくなる可能性がある。

6.5.2.2 グローバルメッシュの FEM 解析結果を初期値にする方法

6.5.2.1 節の方法では接線剛性が不正確になるため、荷重が大きくなると Newton-Raphson 法による反復計算が収束しない可能性がある。そこで、予めグローバルメッシュの FEM 解析を行い、それにより得られた変位と応力を初期値として重合メッシュ法に与える方法で解析を行う。本手法では、グローバルメッシュによる FEM 解析を行うため余分な手間が発生するが、真の解に近い解を重合メッシュ法による解析の初期値として与えるため、Newton-Raphson 法の収束を良くすることができる。

6.5.3 数値解析例（グローバル、ローカル連成項の初期変位を 0 にする方法）

6.5.3.1 L 字型板

Fig. 6-7 のような L 字型板について、グローバル、ローカル連成項の初期変位を 0 にする方法を用いて、変位と平面応力の解析を行った。構成式には 6.4 節で説明した圧縮性 neo-Hookean 体を用いた。材料定数は $\mu=300$ 、 $\lambda=100$ とした。

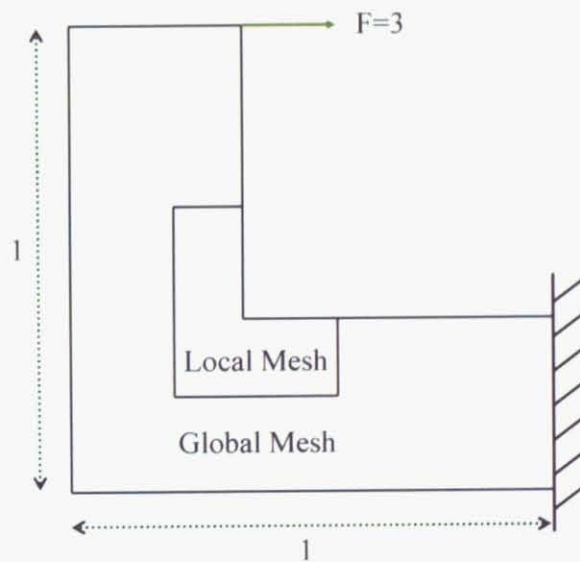


Fig. 6-7 L 字型板の概略図

重合メッシュ法による解析に用いたメッシュを Fig. 6-8 に示す。グローバルメッシュは 48 要素、ローカルメッシュは 100 要素に分割した。

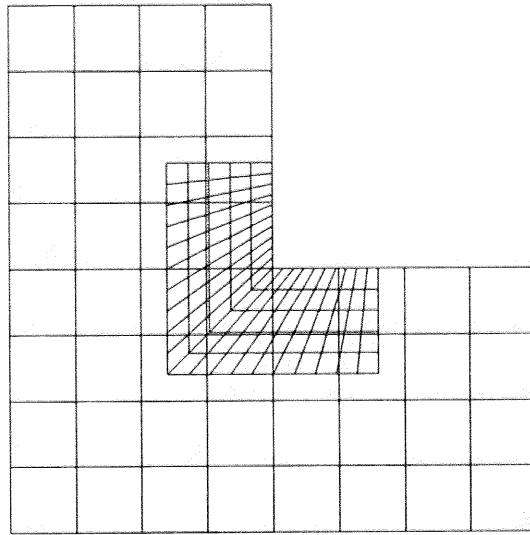


Fig. 6-8 L字型板の重合メッシュ

参照解の導出に用いるメッシュを Fig. 6-9 に示す. 675 要素に分割した.

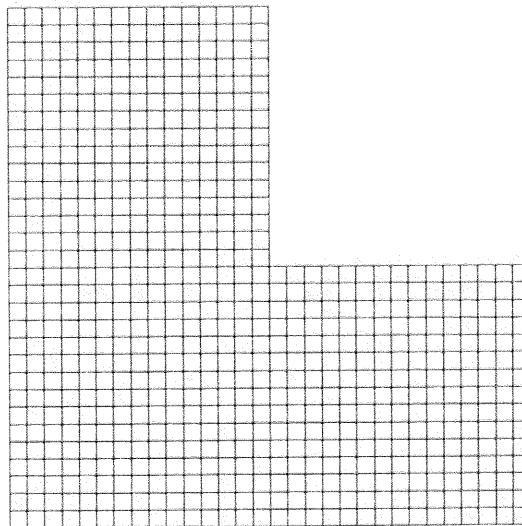


Fig. 6-9 L字型板の参照メッシュ

外力 $F=3$ の場合の重合メッシュ法および参照メッシュの FEM について, 変位と von-Mises

応力の解析結果を Fig. 6-10, Fig. 6-11 および Fig. 6-12 に示す.

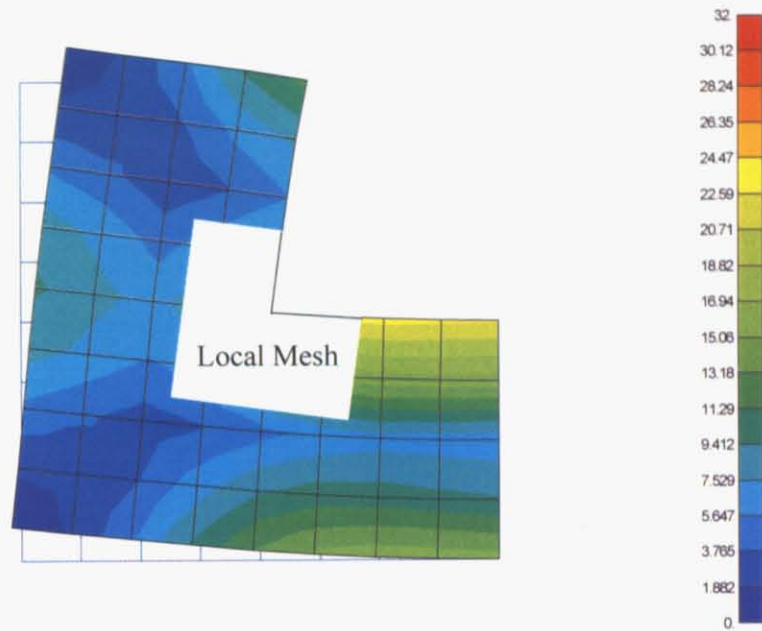


Fig. 6-10 L字型板の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)

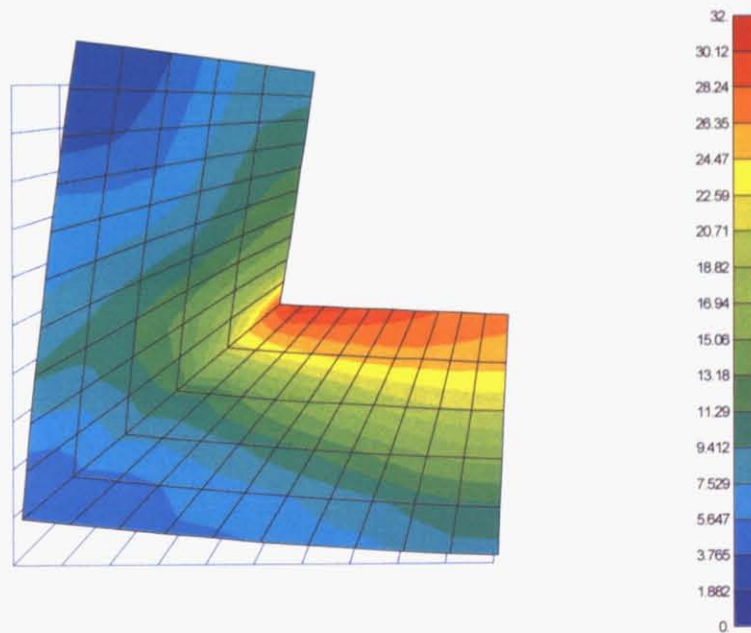


Fig. 6-11 L字型板の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)

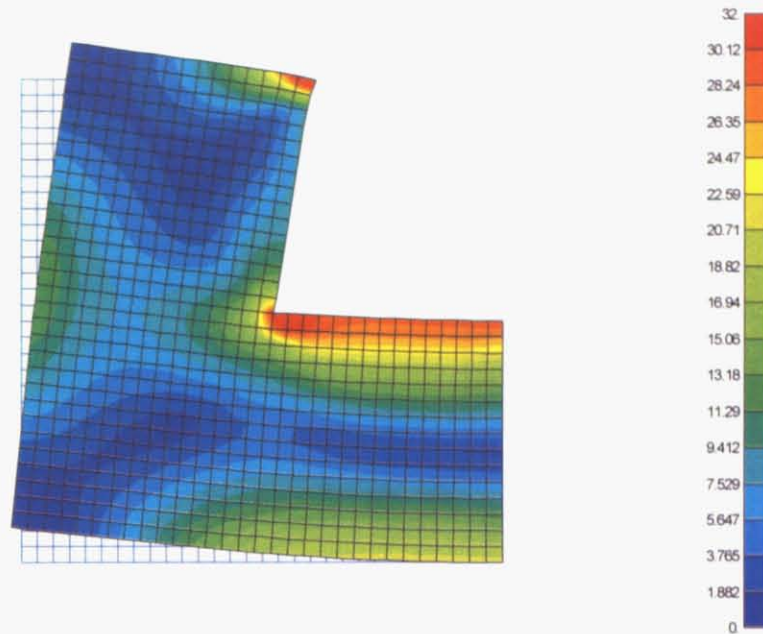


Fig. 6-12 円孔問題の変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)

荷重点の水平方向の変位は、重合メッシュ法では 0.203，参照 FEM では 0.223 となった。両者は 9%の差があるが、ローカルメッシュ領域がそれほど大きくないことを考慮すれば妥当である。また、本解析では、ローカルの連成項について初期変位項を零とする手法を用いているため $F=4.3$ 以上では収束しない。つまり、非線形性が強くない範囲で利用できるものである。

6.5.3.2 円孔問題

第 5 章で用いたものと同様な、円孔問題とよばれる 2 次元板の中心に円形の穴が空いた例題について、同様の方法で変位と平面応力の解析を行った。モデルの概略図を Fig. 6-13 に示す。構成式には 6.4 節で説明した圧縮性 neo-Hookean 体を用いた。材料定数は $\mu=300$ ， $\lambda=100$ とした。

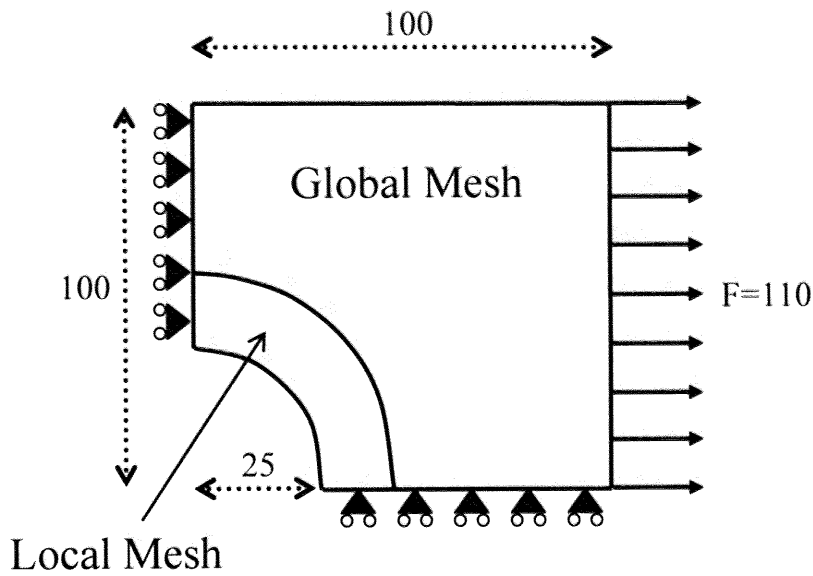


Fig. 6-13 円孔問題の概略図

重合メッシュ法による解析に用いたメッシュを Fig. 6-14 に示す. グローバルメッシュは 48 要素, ローカルメッシュは 100 要素に分割した. グローバルメッシュは縦横に 8 要素の 80 要素に分割した. 一方, ローカルメッシュは半径方向に 10 要素, 円周方向に 20 要素の 200 要素に分割した.

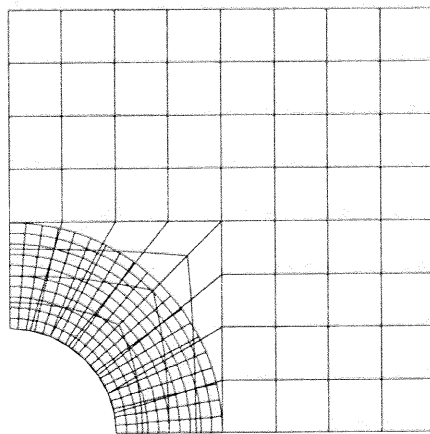


Fig. 6-14 円孔問題の重合メッシュ

参照解の導出に用いるメッシュを Fig. 6-15 に示す。縦横に 20 要素の 500 要素に分割した。これは、ローカルメッシュと同じ粗さで全体をメッシュ分割したものに相当する。

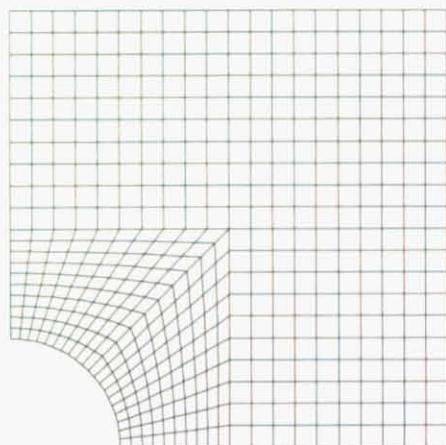


Fig. 6-15 円孔問題の参照メッシュ

重合メッシュ法および参照メッシュの FEM について、変位と von-Mises 応力の解析結果を Fig. 6-16, Fig. 6-17 および Fig. 6-18 に示す。

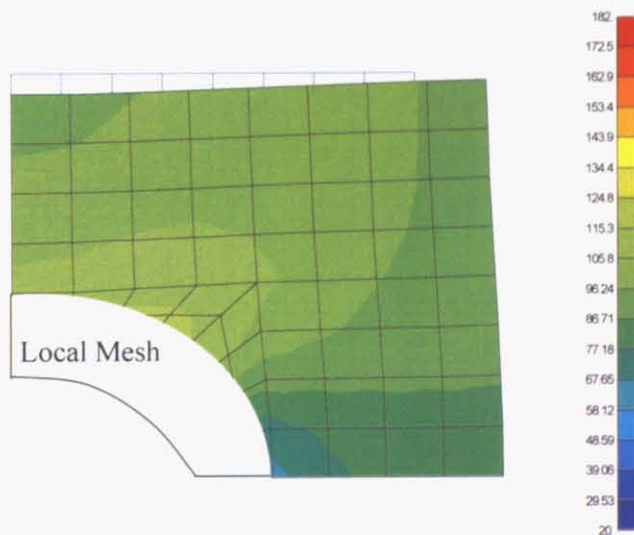


Fig. 6-16 円孔問題の変位と von-Mises 応力（重合メッシュ法によるグローバル解）

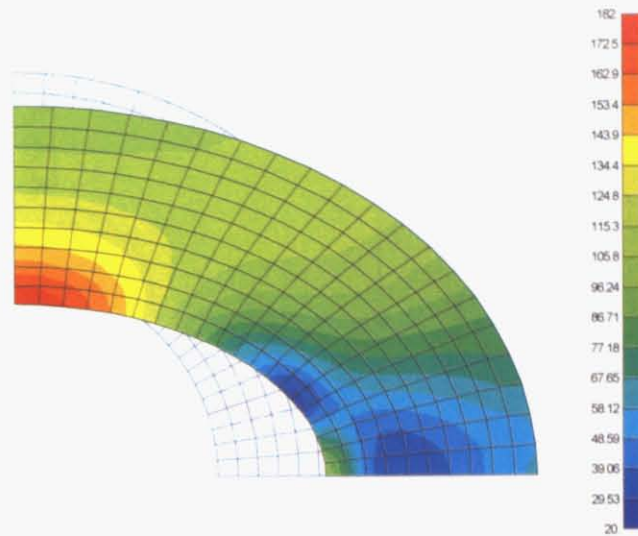


Fig. 6-17 円孔問題の変位と von-Mises 応力（重合メッシュ法によるローカル解）

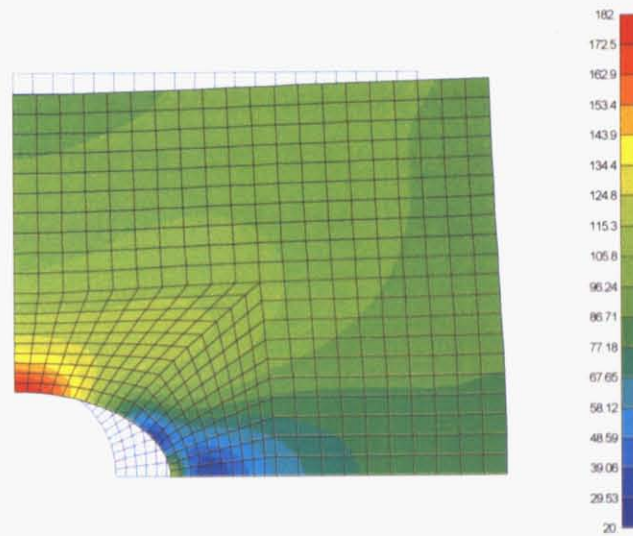


Fig. 6-18 円孔問題の変位と von-Mises 応力（FEM による参照解）

Fig. 6-19 に示す A 点の水平方向の変位は，重合メッシュ法では 21.7，参照 FEM では 21.9 となった．両者は 1% の差であることから正しく解析できているといえる．最大 von-Mises 応力は，重合メッシュ法では 182，参照 FEM では 183 となり，精度の良い解が得られた．また，本解析においても，ローカルの連成項について初期変位項を零とする手法を用いているため $F=113$ 以上では収束しない．つまり，非線形性が強くない範囲で利用できるものである．

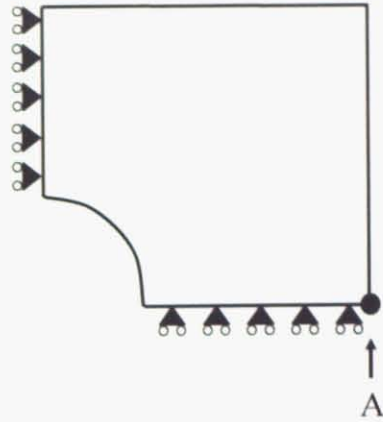


Fig. 6-19 A点の位置

6.5.4 数値解析例（グローバルメッシュの FEM 解析結果を初期値にする方法）

6.5.4.1 円孔問題

6.5.3.2 節の円孔モデルにおいて、グローバルメッシュの FEM 解析結果を初期値にする方法を用いて、変位と von-Mises 応力の解析を行った。重合メッシュ法と参照 FEM の解析結果を Fig. 6-20, Fig. 6-21 および Fig. 6-22 に示す。外力は $F=500$ とした。

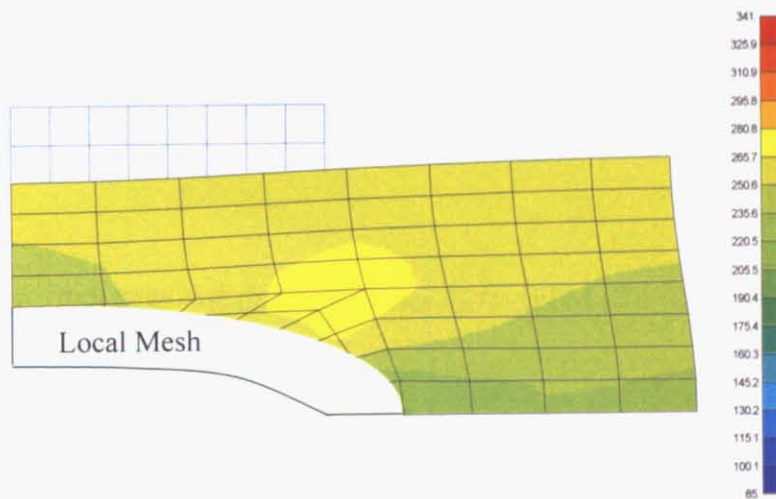


Fig. 6-20 円孔問題の変位と von-Mises 応力（グローバルメッシュの解析結果を用いた重合メッシュ法によるグローバル解）

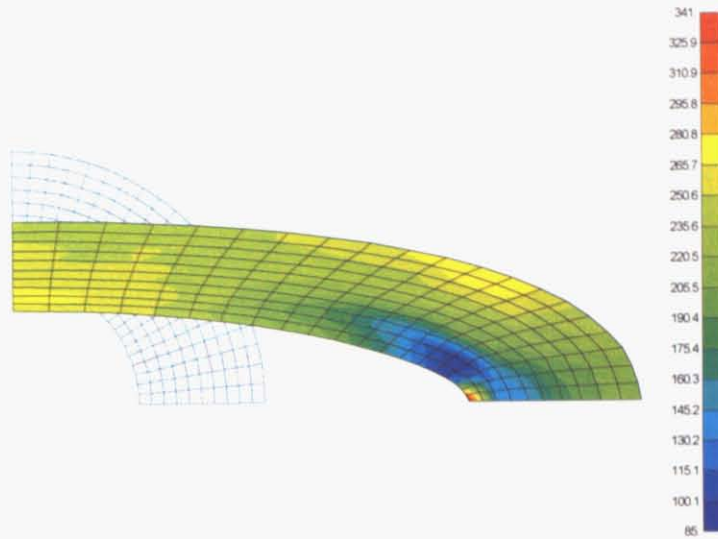


Fig. 6-21 円孔問題の変位と von-Mises 応力 (グローバルメッシュの解析結果を用いた重合メッシュ法によるローカル解)

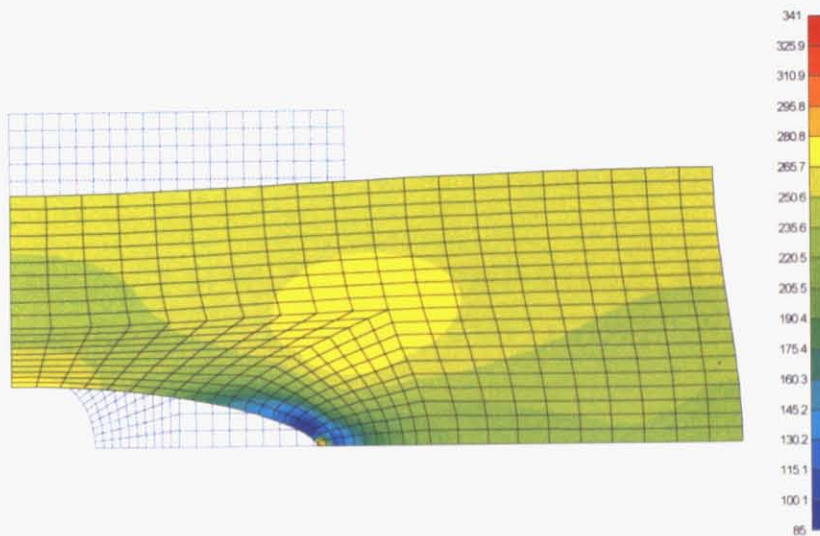


Fig. 6-22 円孔問題の変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)

Fig. 6-19 における A 点の水平方向の変位は、重合メッシュ法では 118.3, 参照 FEM では 118.6 となった。両者は 0.3% の差であることから正しく解析できているといえる。最大 von-Mises 応力は、重合メッシュ法では 341, 参照 FEM では 359 となった。

さらに、反復計算の収束について考察した。Fig. 6-23 に荷重点変位と外力の関係を示す。

荷重点変位と外力の関係

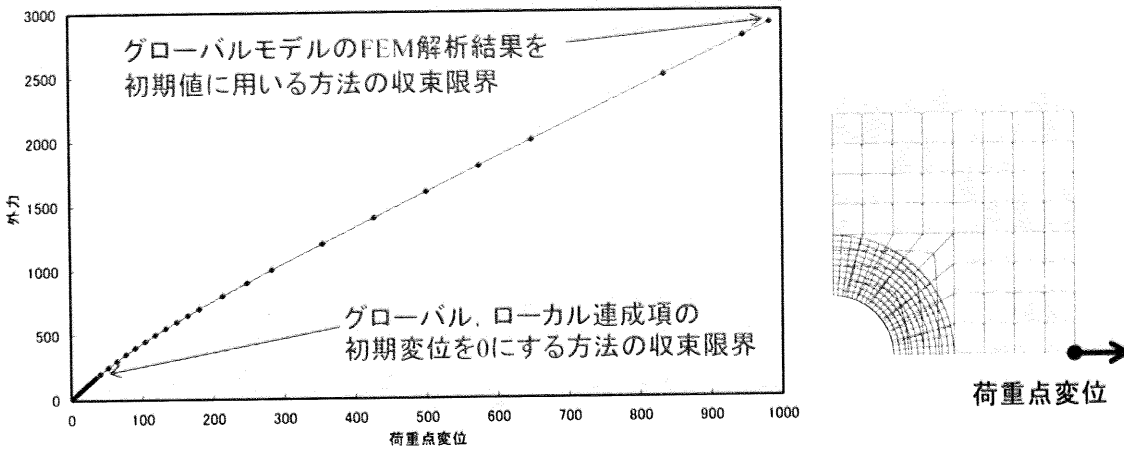


Fig. 6-23 荷重点変位と外力の関係（円孔問題）

このとき、グローバル、ローカル連成項の初期変位を 0 にする方法の収束限界は $F=110$ 、ローカルモデルの FEM 解析結果を初期値に用いる方法の収束限界は $F=2900$ である。つまり、グローバルモデルの FEM 解析結果を初期値に用いる方法では、外力が大きい場合でも反復計算を収束させることができる。

6.5.4.2 扇モデル

Fig. 6-24 に示す扇モデルについて、同様の方法で解析を行った。構成式には 6.4 節で説明した圧縮性 neo-Hookean 体を用いた。材料定数は $\mu=300$ 、 $\lambda=100$ とした。

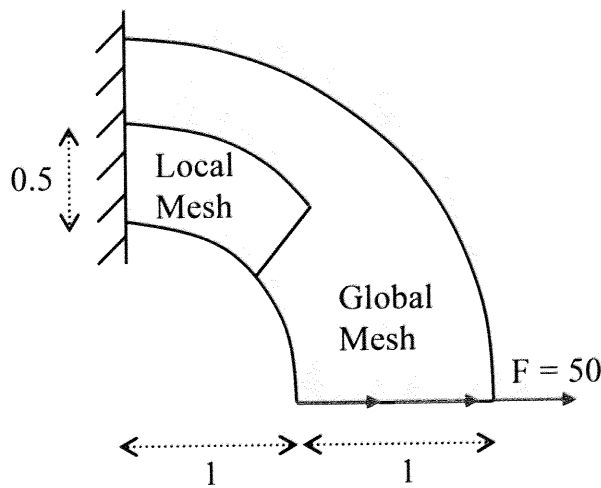


Fig. 6-24 扇モデル

重合メッシュ法による解析に用いたメッシュを Fig. 6-25 に示す。グローバルメッシュは 32 要素，ローカルメッシュは 50 要素に分割した。

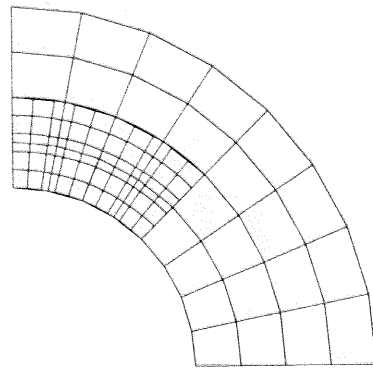


Fig. 6-25 扇モデルの重合メッシュ

参照解の導出に用いるメッシュをに示す。200 要素に分割した。これは，ローカルメッシュと同じ粗さで全体をメッシュ分割したものに相当する。

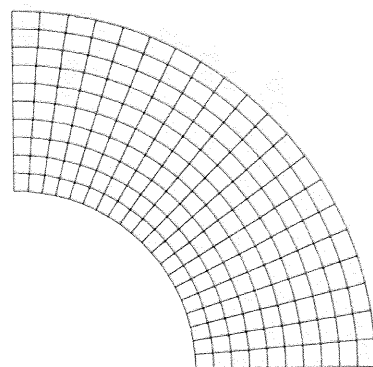


Fig. 6-26 扇モデルの参照メッシュ

重合メッシュ法および参照メッシュの FEM について、変位と von-Mises 応力の解析結果を Fig. 6-27, Fig. 6-28 および Fig. 6-29 に示す.

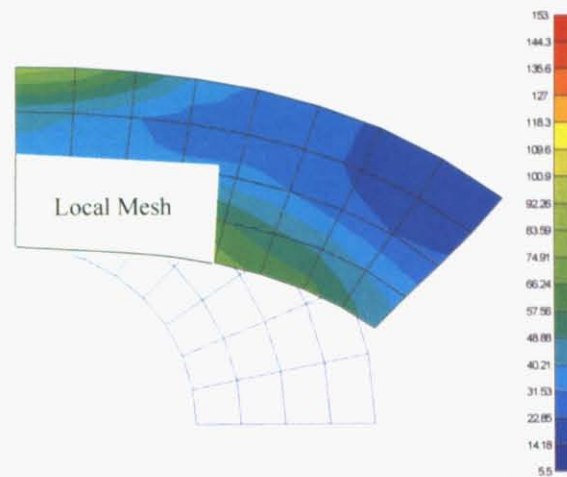


Fig. 6-27 扇モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)

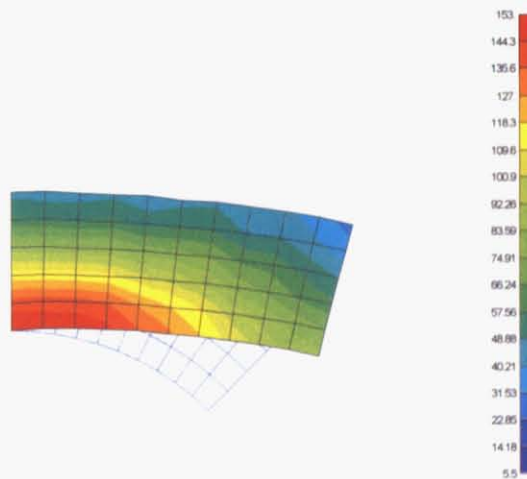


Fig. 6-28 扇モデルの変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)

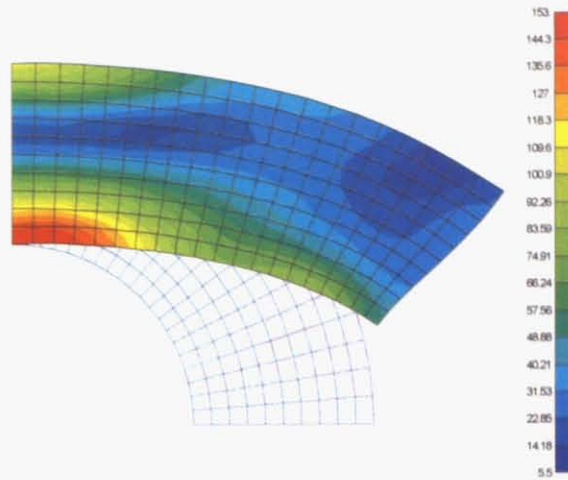


Fig. 6-29 扇モデルの変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)

Fig. 6-30 における B 点の水平方向の変位は、重合メッシュ法では 1.00, 参照 FEM では 1.01 となった。両者は 1% の差であることから正しく解析できているといえる。最大 von-Mises 応力は、重合メッシュ法では 153, 参照 FEM では 158 となった。

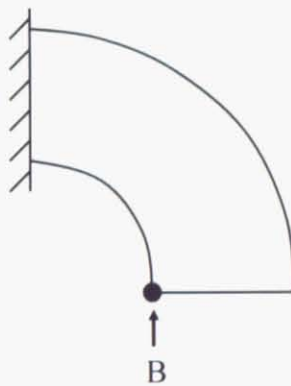


Fig. 6-30 B 点の位置

さらに、反復計算の収束について考察した。Fig. 6-31 に荷重点変位と外力の関係を示す。

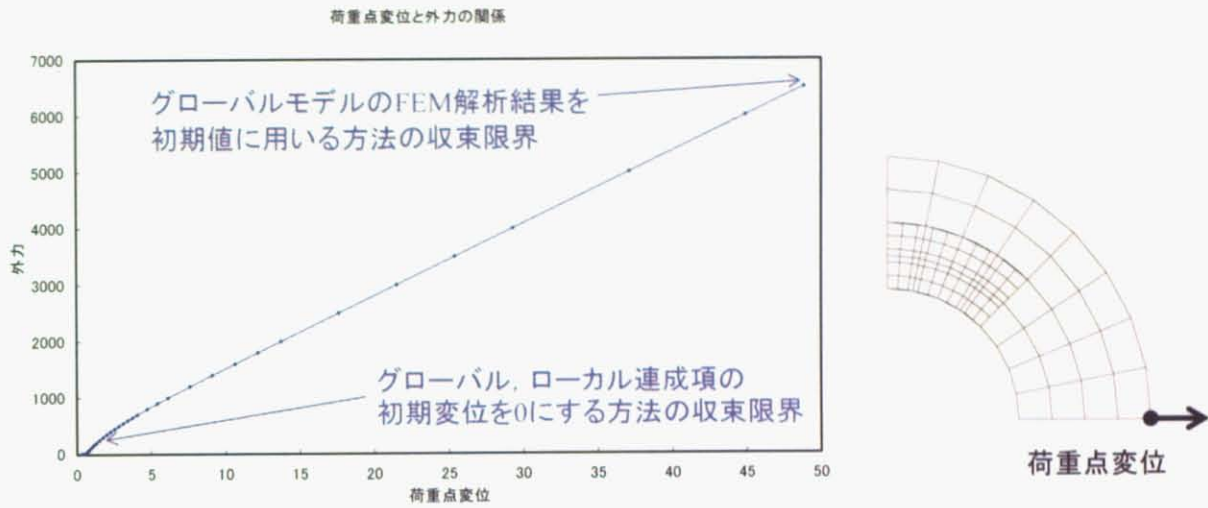


Fig. 6-31 荷重点変位と外力の関係（扇モデル）

このとき、グローバル、ローカル連成項の初期変位を 0 にする方法の収束限界は $F=200$ 、グローバルモデルの FEM 解析結果を初期値に用いる方法の収束限界は $F=6500$ である。つまり、扇モデルにおいても、円孔問題と同様にグローバルモデルの FEM 解析結果を初期値に用いる方法では、外力が大きい場合でも反復計算を収束させることができる。

6.6 大変形接触解析

6.6.1 数値解析例 はり問題

Fig. 6-32 のようなはりの大変形接触問題について解析を行った。6.5.4 節と同様に反復計算を収束させるためグローバルの FEM 解析により得られた変位と応力を重合メッシュ法による解析の初期値に用いる方法を用いた。また、構成式には圧縮性 neo-Hookean 体を用いた。材料定数は $\mu = 300$, $\lambda = 100$ とした。

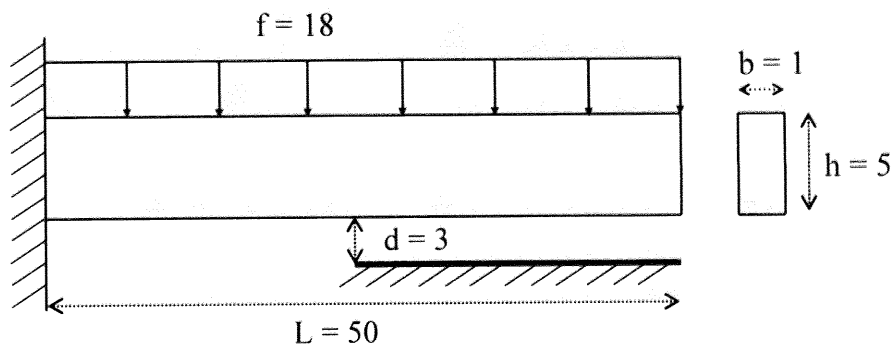


Fig. 6-32 はりの大変形接触問題

重合メッシュ法による解析に用いたメッシュを Fig. 6-33 に示す。グローバルメッシュは 45 要素、ローカルメッシュは 72 要素に分割した。

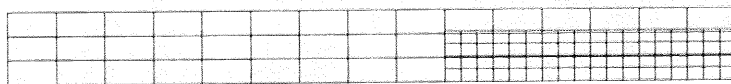


Fig. 6-33 はりの大変形接触問題の重合メッシュ

参照解の導出に用いるメッシュをに示す。270 要素に分割した。これは、ローカルメッシュと同じ粗さで全体をメッシュ分割したものに相当する。



Fig. 6-34 はりの大変形接触問題の参照メッシュ

重合メッシュ法および参照メッシュのFEMについて、変位と von-Mises 応力の解析結果を Fig. 6-35, Fig. 6-36 および Fig. 6-37 に示す。

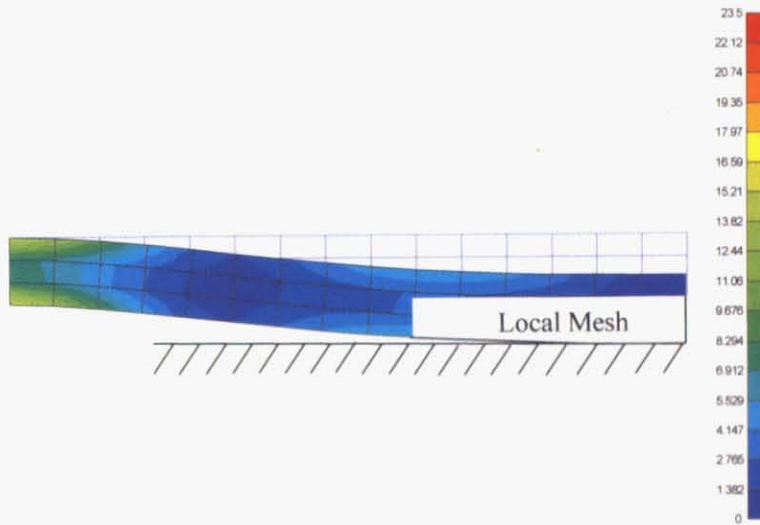


Fig. 6-35 はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力（重合メッシュ法によるグローバル解）

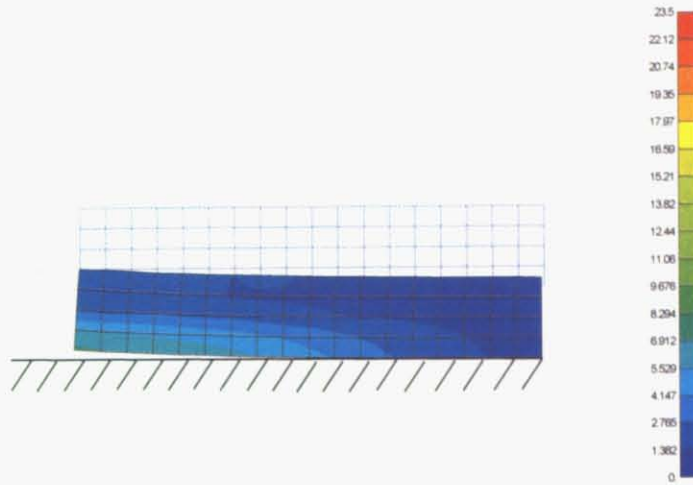


Fig. 6-36 はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力(重合メッシュ法によるローカル解)

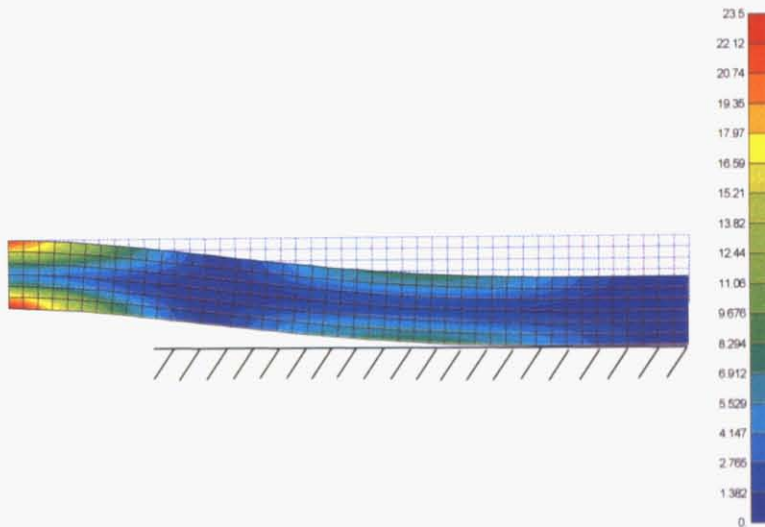


Fig. 6-37 はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (FEM による参照解)

接触長さは重合メッシュ法のローカルメッシュが 8.8, 参照 FEM が 8.8, グローバルと同じ粗さの FEM モデルが 6.6 となった. 大変形接触問題においても, 重合メッシュ法を用いることで接触長さの精度が向上することがわかる.

6.6.2 微小変形接触解析との比較

6.6.1 節で扱ったはり問題を第 4 章で扱った微小変形理論を用いた接触解析と比較した. 微小変形理論を用いたはり問題の変位と von-Mises 応力を Fig. 6-38 および Fig. 6-40 に示す. また, 大変形理論を用いた場合の変位と von-Mises 応力を, 応力表示を揃えて Fig. 6-39 および

Fig. 6-41 に再掲する.

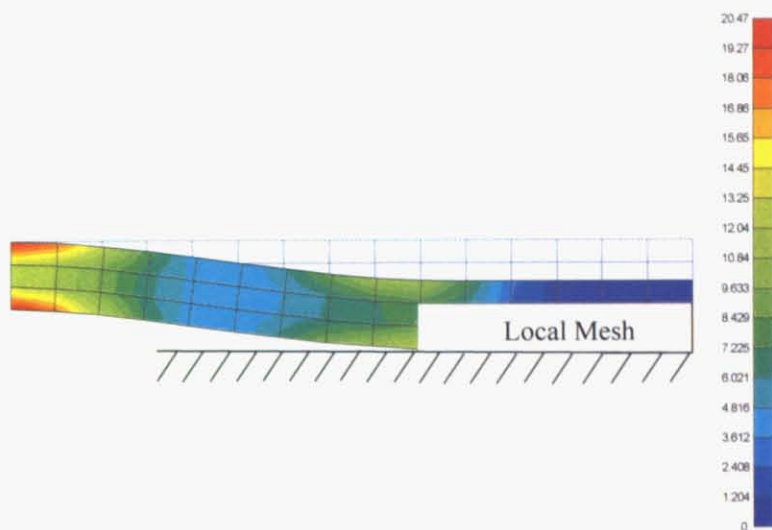


Fig. 6-38 はりの微小変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解)

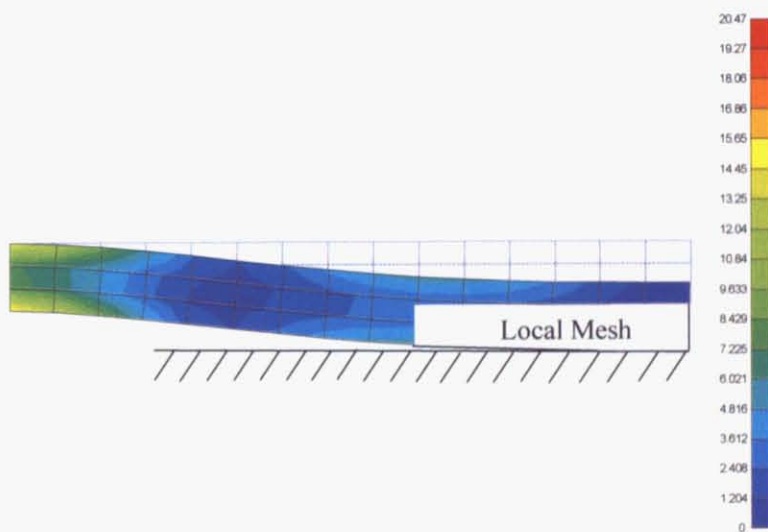


Fig. 6-39 はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるグローバル解) (再掲)

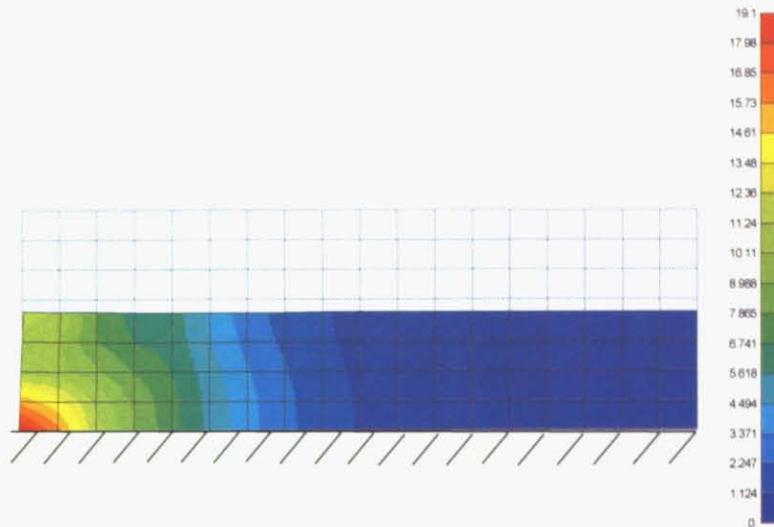


Fig. 6-40 はりの微小変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)

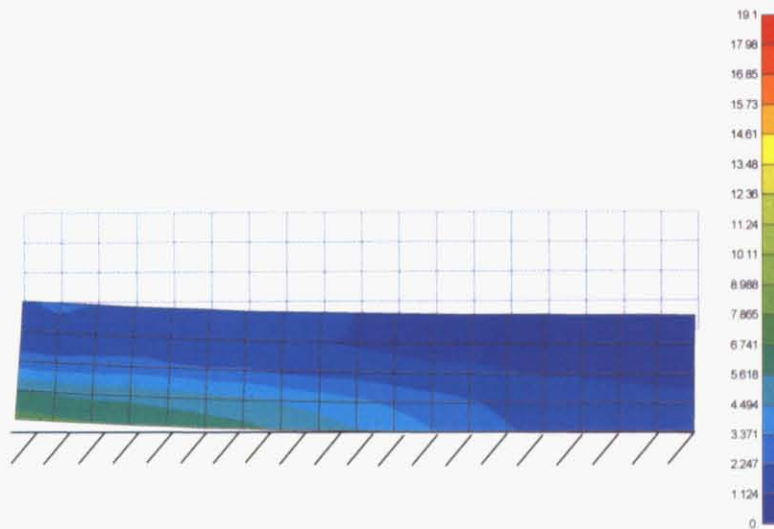


Fig. 6-41 はりの大変形接触問題の変位と von-Mises 応力 (重合メッシュ法によるローカル解)
(再掲)

ローカルメッシュの接触長さは、微小変形が 18.8, 大変形が 7.77 となった。また、最大 von-Mises 応力は、微小変形が 20.4, 大変形が 15.1 となり、ともに微小変形の方が大きくなり、大変形と微小変形の違いが現れていることがわかる。

第7章 結論

本論文では、マルチスケール構造解析の一手法である重合メッシュ法の各種非線形解析について研究を行った。各章で得られた知見を以下にまとめる。

第1章では、研究背景となる計算機を用いた設計の問題点および重合メッシュ法と関連する各種マルチスケール解析についての解説を行った。この中で、重合メッシュ法は有望な解析手法であるにもかかわらず、これまで非線形解析への適用が行われていないことを指摘した。

第2章では、線形重合メッシュ法の定式化と理論展開を行った。この中で、グローバルモデルとローカルモデルの連成効果を担うマトリクスの計算に関して、数値積分の積分点数を通常より多くとることが望ましいことを指摘した。

第3章では、重合メッシュ法による初期ひずみおよびばね接合モデルの導入を行った。これらの手法は、ボルト解析において必要なものである。さらに、実際のCADデータを基に作成したボルトモデルの解析を行い、その有効性を示した。

第4章では、重合メッシュ法による接触解析を行った。接触解析では、弱形式に変位の拘束項を付与する必要がある。そのためNewton-Raphson法による反復計算が必要となる。この場合の定式化と計算の手順について解説した。そして、Hertz問題の理論解と重合メッシュ法の解を比較することにより、その有効性を示した。

第5章では、重合メッシュ法による弾塑性解析を行った。Newton-Raphson法による反復計算を取り入れた弾塑性解析についての定式化と計算の手順について解説した。そして、円孔問題を例に参照FEMの解と比較することにより、その有効性を示した。また、汎用コード実装のためのグローバル、ローカル反復法の適用を行った。このとき、連成効果マトリクスにおいてグローバル解析中にローカルモデルの応力が更新できないため、弾性体の構成式を用いた。そのため、非線形性が強い場合はNewton-Raphson法の反復計算が収束しないことを指摘した。この点は改善の余地があると思われる。

第6章では、重合メッシュ法による大変形解析を行った。Total-Lagrange法を用いた大変形問題の定式化と計算の手順について解説した。また、Newton-Raphson法の反復計算を収束させるために連成項の初期変位項を0にする工夫を行った。このため、非線形性が大きい解析では利用できない。この点を改善するためにグローバルメッシュのFEM解析により得られる変位と応力を初期値として与える方法を提案した。そして、円孔問題と扇モデルを例に参照FEMの解と比較することにより、その有効性を示した。さらに、はりの大変形接触問題の解析を行い、大変形接触においても重合メッシュ法により接触長さの精度が向上することを示

した。また、第3章で行った微小変形の接触問題と比較、応力と接触長さの違いを確認した。

以上より、重合メッシュ法による各種非線形解析の定式化を明らかにし、基礎的なモデルによる検証を行うことで様々な知見を得ることができた。

参考文献

- [1] 日本機械学会, 計算力学ハンドブック (I 有限要素法構造編), 丸善(1998).
- [2] M.Sekiguchi, A study of element distortion for membranes and plate, 東京大学博士論文(2003).
- [3] J.Fish and S.Markolefas, Adaptive global-local refinement strategy based on the interior error estimates of the h-Method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 37, 827-838 (1994).
- [4] C. D. Mote, JR, Global-Local Finite Element, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 3 565-574 (1971).
- [5] I.Hirai, B.P.Wang and W.D.Pilkey, An efficient zooming method for finite element analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 20, 1671-1683 (1984).
- [6] K.M.Mao and C.T.Sun, A refined global-local finite element analysis method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 32, 29-43 (1991).
- [7] K.M.Mao and C.T.Sun, Error estimators using global-local methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 35, 589-599 (1992).
- [8] J.D.Whitcomb, Iterative global/local finite element analysis, *Computers & Structures* 40, No.4, 1027-1031, (1991).
- [9] 寺田賢二郎, 松井和己, 弾塑性体に対するマルチスケール構造解析の数値解, 日本計算工学会論文集 Vol.1, pp.75-82, (1999).
- [10] 鈴木克幸, 大坪英臣, 関勝載, 白石卓士郎「重合メッシュ法による船体構造のマルチスケール解析」日本計算工学講演会論文集 Vol.1, 155-160 (1999).
- [11] 鈴木克幸, 大坪英臣, 白石卓士郎, 関勝載「重合メッシュ法によるズーム解析の高精度化」日本造船学会論文集 Vol.185, 197-201 (1999).
- [12] 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地, 大坪英臣, 重合メッシュ法による穴あき板の解析に関する一考察, 日本計算工学会論文集, 3, 145-150 (2001).
- [13] 中住昭吾, 鈴木克幸, 大坪英臣, 藤井大地, 「重合メッシュ法を用いた弾性・弾塑性混合解析」, 日本機械学会論文集 A編, 第 68 巻 第 668 号, 平成 14 年 4 月, pp.603-610
- [14] 中住昭吾, 鈴木克幸, 大坪英臣, 藤井大地, 「重合メッシュ法によるシェル・ソリッド混合解析」, 日本造船学会論文集 第 189 号, 平成 13 年 6 月, pp.219-224
- [15] 中住昭吾, 鈴木克幸, 大坪英臣, 藤井大地, 「重合メッシュ法によるシェル・ソリッド混合解析 (第二報)」, 日本造船学会論文集 第 190 巻, 平成 13 年 12 月, pp.655-662

- [16] 中住昭吾, 鈴木克幸, 大坪英臣, 藤井大地, 「重合メッシュ法を用いた板曲げ問題の解析に関する一考察」, 日本土木学会応用力学論文集 第4巻, 平成13年8月, pp.79-84
- [17] J. Fish, The s-version of the finite element, *Computers & Structures* Vol.43, No.3, 539-547 (1992).
- [18] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P.Krysl, Meshless methods: An overview and recent developments, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 139, 3-47 (1996).
- [19] T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu, 'Element-free Galerkin methods', *Int. J. Numer. Meth. Engng.* ,37, 229-256 (1994).
- [20] S. Koshizuka, H. Tamako and Y. Oka, A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, *Comput. Fluid Dyn. J.* 4, 29-46 (1995).
- [21] S. Koshizuka, A. Nobe and Y. Oka, Numerical Analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 26, 751-769 (1998).
- [22] W.K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee and T. Belytschko, Reproducing kernel particle methods for structural dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 38, 1655-1679 (1995).
- [23] 鈴木克幸, 大坪英臣, 寺田賢二郎, ミン勝載, 金伝栄, 中西克嘉, ボクセル被覆による3次元ソリッドのメッシュレス解析, 土木学会応用力学論文集, Vol.1 215-222 (1998).
- [24] T. Strouboulis, I. Babuska and K. Copps, The design and analysis of the Generalized finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 181, 43-69 (2000).
- [25] C.A. Duarte, I. Babuska and J.T. Oden, Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems, *Computers and Structures* 77, 215-232 (2000).
- [26] T. Strouboulis, K. Copps and I. Babuska, The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 47,1401-1417 (2000).
- [27] T. Strouboulis, K. Copps and I. Babuska, The generalized finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 190, 4081-4193 (2001).
- [28] G.Yagawa and T.Yamada, Free mesh method: A new meshless finite element method, *Computational Mechanics* 18, 383-386 (1996).
- [29] G. Yagawa and T. Furukawa, Recent developments of free mesh method, . *Int. J. Numer. Meth. Engng* 47, 1419-1443 (2000).
- [30] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int.J.*

Numer. Meth. Engng 45(5), 601-620 (1999).

- [31] 中住昭吾, 重合メッシュ法を用いた構造解析手法に関する研究, 東京大学博士論文, (2003).
- [32] 岡田裕, ニノ宮崇, 逆瀬川洋介, 福井泰好, 熊沢典良, 重合メッシュ法を用いた複合材料のメゾ解析 (トライアル), 日本計算工学会計算工学講演会論文集, Vol.8 pp.243-246 (2003).
- [33] E.Rank and R.Krause, A multiscale finite-element method, Computers & Structures 64, No.1-4 139-144 (1997).
- [34] D.H. Robbins Jr and J.N. Reddy, An efficient computational model for the stress analysis of smart plate structures, Smart Mater. Struct. 5 353-360 (1996)
- [35] 鈴木克幸, 大坪英臣, 中住昭吾, 榛村太亮, 重合メッシュ法におけるグローバル・ローカル反復解析, 日本造船学会論文集 第 192 巻, 平成 14 年 12 月, pp.691-696
- [36] 鷺津久一郎 他, 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館(1981).
- [37] O.C.ZIENKIEWICS & R.L.TAYLOR, The FINITE ELEMENT METHOD Volume 1 THE BASIS (2000).
- [38] O.C.ZIENKIEWICS & R.L.TAYLOR, The FINITE ELEMENT METHOD Volume 2 SOLID MECHANICS (2000).
- [39] N.Kikuchi and J.T.Oden CONTACT PROBLEMS IN ELASTICITY : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, Philadelphia (1988).
- [40] 久田俊明 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善 (平成 7 年).

謝辞

本論文の執筆にあたり，東京大学新領域創成科学研究科の鈴木克幸助教授には，研究全般に関する助言および指導を賜りました。大変深く感謝いたします。

また，私が修士1年のとき特別研究員として本研究室に在籍されていた産業技術研究所の中住昭吾研究員には，専門知識からソフトウェアの使い方，研究の具体的な進め方に至るまで様々な助言を頂きました。深く感謝いたします。

本研究室の卒業生の嶋村寿文さんには，先輩として研究に関する心構えや基礎知識を指導して頂きました。感謝いたします。

本研究室の修士1年の市川幸太君には，第3章のボルトモデルの作成を手伝って頂きました。感謝いたします。

本研究室の吉田二郎技官および大嶋さやかさんには主に事務手続きでお世話になりました。感謝いたします。

博士課程の張さん，石さん，Levent さん，同輩の中川君，牧野君，高さん，修士課程2年の Vinicius さん，修士課程1年の有木君，伊藤君，学部生の磯部君，橘田君，呉君にはお世話になりました。感謝いたします。

このように，多くの方々の協力を頂いて本論文を完成させることができました。深くお礼申し上げます。