

第3章

シミュレータの構築

3.1 緒言

本章では前章で作成した実験機をモデルにして、自励振動を表現するシミュレータの構築を行う。シミュレーションを行う最大の目的は、これを自励振動のメカニズムを解析する補助ツールとすることである。大まかに自励振動を表現できればよいので、簡便に振動の発生を見通せる近似計算法を導出する。

次節以降、まずシミュレーションにて用いた近似について言及し、これの可否について検討をした後、アルゴリズムのメインとなる弾性流体潤滑(EHL)シミュレーションと呼ばれる手法について解説をしていく。具体的にはEHLシミュレーションでは、振動体形状から圧力を決定する方程式と圧力分布から振動体形状を決定する方程式を差分法により交互に解いて、非線形方程式の数値解を求めていく。差分法にはまず陽解法を用いて、解の安定性を検証する。また、より安定性の高い陰解法を組み込んだプログラムについても検証を行う。プログラム言語にはMATLABを用いる。

Fig.3-1には本章で構築するシミュレータのアルゴリズムフローチャートを示す。[I. 初期設定]においては、流路[長さ・高さ・幅]、空間の刻み幅、時間の刻み幅など、各解析パラメータや振動体の初期形状や初期圧力分布の設定を行う。[II. 差分法による自励振動計算]においては、差分法を用いて次節以降で述べるアルゴリズムに基づいた自励振動の計算を行う。1回の計算を終えると、プログラムはそのときの振動体形状、圧力分布等のグラフを表示すると同時に、各出力データの計算も行ってそれらをディスプレイに出力する。そして時刻のみ進めてまた次の振動体形状と圧力分布を計算していく。これを任意の回数繰り返して(数千から数万回)終了するようプログラムする。Table2-1には本研究で構築するシミュレーションにおける入力パラメータと出力パラメータをまとめる。

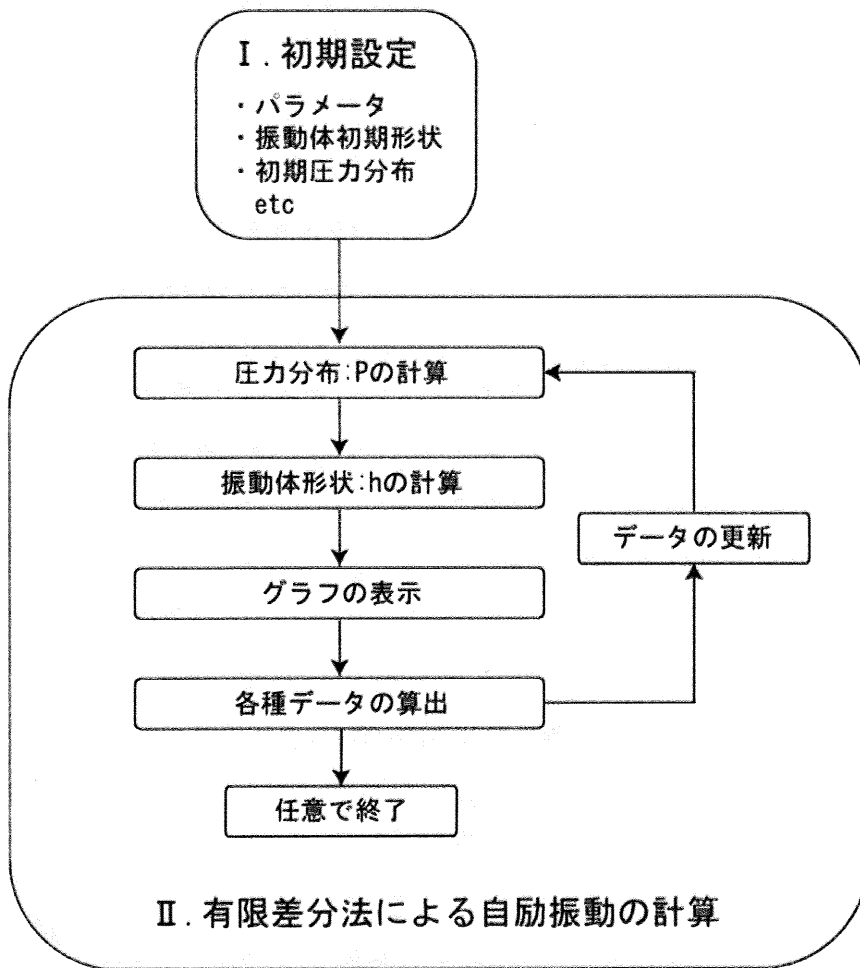


Fig.3-1 アルゴリズムフローチャート

Table2-1 入出力パラメータ

入力パラメータ	出力パラメータ
時間刻み	圧力分布 [kPa]
空間分割数	振動体形状 [m]
流路長 [m]	流速 (平均・最大) [m/s]
流路幅 (振動体幅) [m]	流量 (平均・最大) [m ³ /s]
流路高さ [m]	入力エネルギー [W]
振動体厚さ [m]	機械的エネルギー [W]
振動体ヤング率 [GPa]	摩擦損失エネルギー [W]
入力圧力 [kPa]	機械的効率 [%]
テンション [kg]	
空気密度 [kg/m ³]	
振動体線密度 [kg/m]	
粘性係数 [Pa・s]	
初期圧力分布 [kPa]	
初期振動体形状 [m]	

3.2 シミュレーションにおける近似

本シミュレーションでは計算の煩雑を避けるため、いくつかの近似を用いることとする。本節ではそれらの近似を要約すると共に、その是非について検討をする。

3.2.1 Navier-Stokes 方程式で無視する慣性力

Navier-Stokes 方程式を微小高さの隙間を持つ平面状領域に適用し、高さ方向の流体速度・密度変化を 0 と仮定することでレイノルズ方程式が得られる。一般に微小寸法の流れでは流体の慣性力を無視できるが、ここでは Navier-Stokes 方程式からレイノルズ方程式を導く際に無視する慣性力について考察をする。y 軸方向と z 軸方向の流れがないとすると、Navier-Stokes 方程式の慣性項は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-1)$$

と表される。慣性力が摩擦力に比べて無視できるかということは、式(3-1)に ρ をかけたものと圧力勾配を比較したときに、後者に比べて前者が無視できるかということになる。指針としては、本研究ではまず慣性力を無視した状態でシミュレータを構築する。その後、シミュレーションの結果から得られる慣性力と圧力勾配を比較して、慣性力が無視できることを確認するものとする。

3.2.2 振動体の無限幅近似

第6章で述べるが、自励振動の撮影結果から振動体が幅方向にほとんど変形していないことが観測される。そこで本シミュレータで用いるレイノルズ方程式では、幅方向には空気の流れはなく、また圧力も均一であると仮定する。しかし、実際には振動体は幅方向に長さを持っており、長手方向の流れが支配的であるとはいえ幅方向の流れも存在し、また圧力も均一ではない。但し今回のシミュレータ構築は自励振動を定性的に表現することが目的なのでこのような近似を施すこととする。

Fig.3-2 には振動体の長手方向の長さと比較した幅方向の長さにより、流体の流れに関する近似方法を分類したものである。振動体の長手方向の長さに比べて幅方向の長さが十分に長いとき、振動体上下を流れる流体は全て長手方向に流れ、幅方向に進行しないと見なすのが無限幅近似である。このとき幅方向の圧力は一定となる。それとは対照的に振動体の長手方向の長さに比べて幅方向の長さが十分に小さいとき、振動体上下を流れる流体は全て幅方向に流れ、長手方向に進行しないと見なすのが無限小幅近似である。いずれの近似手法も HDD 用スライダなどの分野で用いられている。

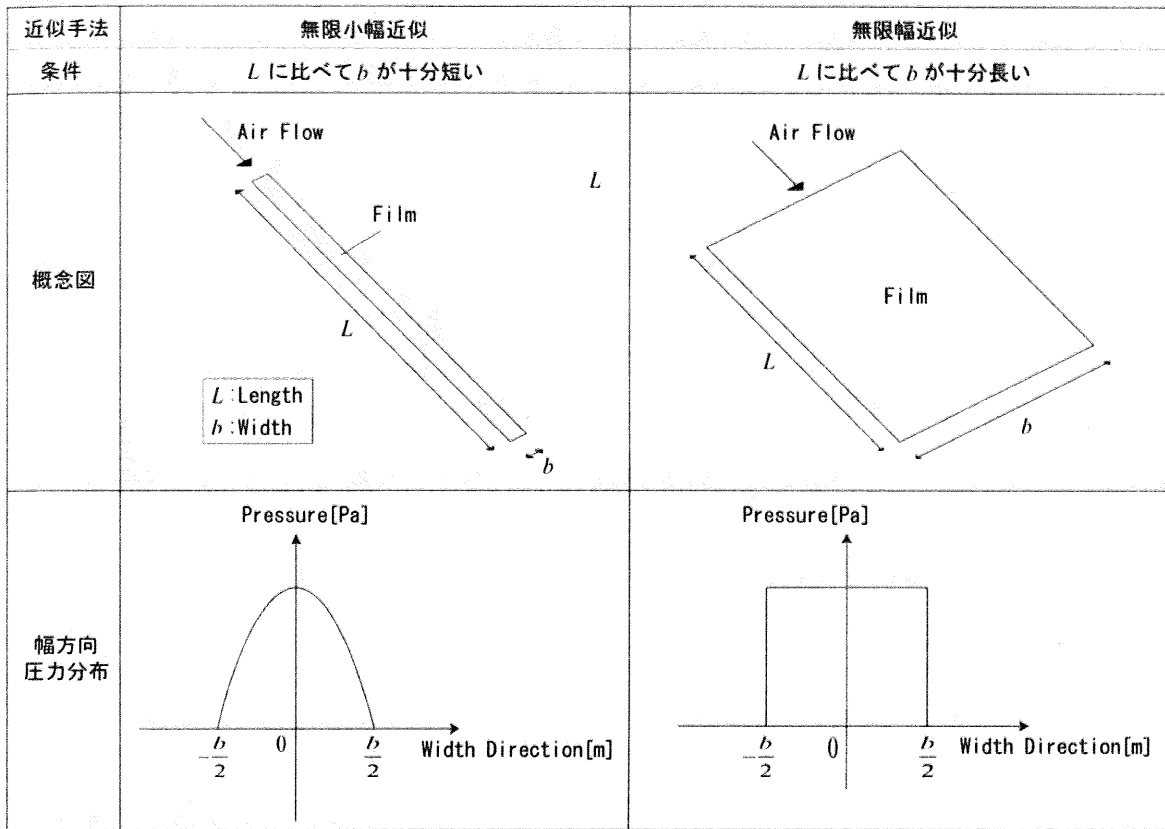


Fig.3-2 幅方向圧力分布近似手法

3.2.3 電氣的ダンパの与え方

流路内で流体からエネルギーを受け取って増幅された振動は、流路から出た後、櫛歯状に配置された電極の上で静電気力に逆らって仕事をするため、電氣的ダンパを受けてその振幅が減衰していく。本シミュレーションでは、この電氣的ダンパに相当する力として、流路外にて速さに比例する復元力を強制的に加えることにする。すなわち、復元力 F_r は次の式で表される。

$$F_r = -R \frac{\partial h}{\partial t} \tag{3-2}$$

ただし、 R は正の定数とする。シミュレーションでは、 R の大きさを調節して、右の固定端から反射波が帰ってこないようにしている。また、この復元力が振動体に対してする仕事は振動体の持っている機械的エネルギーに等しい。

3.3 レイノルズ方程式

本節では、振動体形状から圧力を決定するレイノルズ方程式について、その基礎式をまとめる。はじめに、流体潤滑に関わる基礎式は以下のとおりである。ただし、幅方向には無限幅近似を行い、振動体を一次元の梁に近似するものとする。

(i) 状態方程式

空気の圧力を P 、周囲の空気圧力を P_a 、空気の密度を ρ 、周囲の空気密度を ρ_a とすると、状態方程式は以下のように表すことができる。

$$\frac{P}{P_a} = \frac{\rho}{\rho_a} \quad (3-3)$$

すなわち気体は等温圧縮されると仮定する。

(ii) 物質移動に関する連続方程式

空気の x , y , z 方向の速度をそれぞれ u , v , w として、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (3-4)$$

ここで、気体の厚み方向については十分に薄く、 z 方向の流体速度および z 方向の密度変化を 0 と仮定し、さらに y (幅) 方向には均一であるとして書き直せば、すきまを h として、

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \int_0^h u dz \right] = 0 \quad (3-5)$$

となる。

(iii) 運動方程式

流体潤滑問題では z 方向 (厚み方向) の速度勾配に関する粘性力と圧力が支配的であり、Navier-Stokes 方程式から体積力および慣性力とその他の粘性項を無視することによって、運動方程式は以下のように簡略化して表すことができる。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3-6)$$

ただし、 μ は空気の粘性係数である。

(iv) 境界条件

次に、境界条件は以下の通りである。

$$\begin{cases} u|_{z=0} = 0 \\ u|_{z=h} = 0 \end{cases} \quad (3-7)$$

以上の基礎式と境界条件を基にレイノルズ方程式を得る。

まず式(3-6)を z 方向に2回積分し、境界条件を満たすように積分係数を決めると、

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (z-h)z \quad (3-8)$$

となり、式(3-8)を z 方向に積分すると、

$$\int u dz = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3-9)$$

式(3-5)に代入すれば,

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (3-10)$$

右辺を展開すると,

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{1}{12\mu} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} h^3 \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial h^3}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + \rho h^3 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) \quad (3-11)$$

式(3-3)を代入すれば, レイノルズ方程式(3-12)を得る.

$$\frac{\partial(P h)}{\partial t} = \frac{1}{12\mu} \left\{ h^3 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + 3h^2 P \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + h^3 P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right\} \quad (3-12)$$

また, 左辺の微分を行うことで次の式を得ることができる.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{P}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{12\mu} \left\{ h^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + 3hP \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + h^2 P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right\} \quad (3-13)$$

Fig.3-3は流路内部のイメージ図であるが, 振動体下側のすきまは h であるのに対し, 振動体上側のすきまは $(H-h)$ となっていることが分かる. よって, 式(3-13)は振動体下側の圧力勾配を記述したものであり, 振動体上側については式(3-13)において h を $(H-h)$ と置換することにより以下のように圧力勾配の式を得ることができる.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P}{H-h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{12\mu} \left\{ (H-h)^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - 3(H-h)P \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + (H-h)^2 P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right\} \quad (3-14)$$

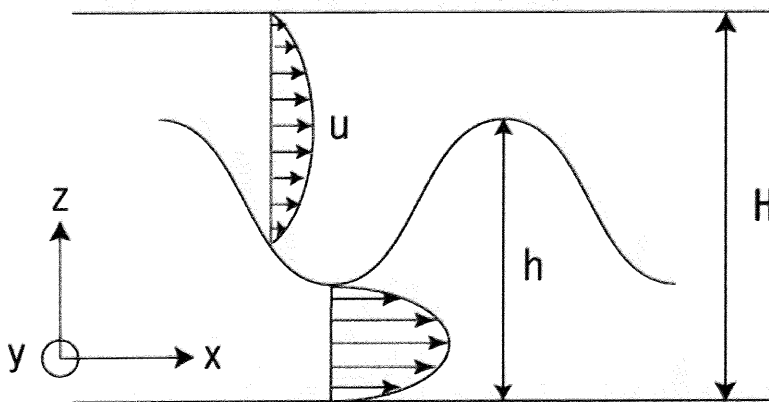


Fig.3-3 流路内部イメージ

3.4 振動体形状を決定する方程式

本節では圧力分布から振動体形状を決定する方程式を導く。一次元に近似された振動体は両端に負荷のかかった弦であるとみなすことができ、この場合は振動体に曲率に比例した復元力が働くことになる。Fig.3-4は振動体がつりあいの位置から変位した時のある微小領域を示した図であり、両端の張力を T 、微小重さを m 、線密度を ρ_{LD} とする（4.2節における ρ は空気の密度を表していた。今後は区別のため空気密度を ρ_{air} 、線密度を ρ_{LD} と表記することにする）。

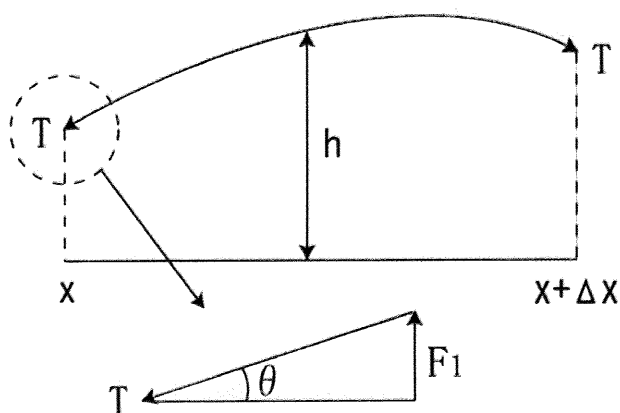


Fig.3-4 弦の一部(微小領域)

まず、微小領域の左端にかかる力 F_1 を上向きの力と定義すると、張力を垂直成分と水平成分に分解することで以下のように F_1 を得る。

$$F_1 = -T \sin \theta \tag{3-15}$$

ここで、 θ は微小とすると $\sin \theta$ は h の傾きに等しい。よって、

$$F_1 = -T \frac{\partial h}{\partial x} \tag{3-16}$$

となる。同様にして、右端にかかる力 F_2 は次の式で表すことができる。

$$F_2 = T \frac{\partial h(x + \Delta x)}{\partial x} \tag{3-17}$$

以上より、運動方程式は次のようになる。

$$m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = F_1 + F_2 = -T \frac{\partial h}{\partial x} + T \frac{\partial h(x + \Delta x)}{\partial x} \tag{3-18}$$

ここで右辺を次のように変形する。

$$m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T \frac{\left(\frac{\partial h(x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\Delta x} \Delta x \tag{3-19}$$

右辺分数部分は h の2階微分，すなわち振動体の曲率を示している．両辺を Δx で割ることにより最終的に以下の式を得る．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_{LD}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (3-20)$$

外力が加わって振動体に変形をすると，材料自体の弾性により復元力が発生して強制振動をするようになる．梁の強制振動に関する方程式^[31]は，

$$\rho_{LD} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -EI_z \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + F \quad (3-21)$$

である．ただし， E はヤング率， I_z は断面二次モーメントとする．また， F は分布した強制外力を示しており，本研究においては圧力を指しているの以下のようなになる．

$$F = (P_{under} - P_{above})b \quad (3-22)$$

式(3-21)に式(3-22)を代入して整理すると，

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\frac{EI_z}{\rho_{LD}} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{b}{\rho_{LD}} (P_{under} - P_{above}) \quad (3-23)$$

式(3-23)に式(3-20)で示した弦振動の方程式を重ね合わせることで最終的に弦の形状を決定付ける方程式を得る．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_{LD}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{EI_z}{\rho_{LD}} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{b}{\rho_{LD}} (P_{under} - P_{above}) \quad (3-24)$$

また，境界条件は以下のようにになっている．

$$\begin{cases} h|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}|_{x=L} = 0 \\ \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (3-25)$$

つまり， $x=0$ で変位・傾きが0， $x=L$ （振動体右端）で曲げモーメント・せん断力が0，ということである．

3.5 陽解法

前節までに、振動体形状から圧力分布を求めることのできる振動体上下の圧力勾配を記述した方程式、圧力分布から振動体形状を決定する方程式を得ることができた。しかし、これらの偏微分方程式は非線形であり解析解を求めることは難しい。そこで、本研究では上記の方程式を差分法してその近似解を求めるアプローチを取る。この手法は差分法 (finite difference method) ^[32] と呼ばれ、非線形偏微分方程式の代表的な数値計算法である。

この種の偏微分方程式を差分法で解く場合、最初に必要となるのは連続である領域に有限な格子を分布させ、領域内の関数分布を格子点上の値で置き換える、いわゆる離散化することである。空間1次元で時間的に変化する物理量 X を考え、その厳密解を $X(t, x)$ とすると、差分法により得られる値は、厳密解 $X(t, x)$ の離散点 (n, j) への写像 (projection) に対する近似解 $X(n\Delta t, j\Delta x)$ である。 Δt は時間の刻み幅、 Δx は空間の刻み幅であり、以下のように

$$X_j^n \tag{3-26}$$

と記述した場合、これは位置が $x = j\Delta x$ 、時間が $t = n\Delta t$ での値 $X(t, x)$ を表す。上付き添字 n は時間のステップ数、すなわち離散化された時間位置を表し、下付き添字 j は空間のステップ数、すなわち離散化された空間の位置を表す。近似解を得るには偏微分方程式の導関数を差分近似 (finite difference approximation) によって置き換えなければならないが、これにはテイラー展開を用いる。

発展問題において、あるレベルでの数値解が既知であるとき、次のレベルでの数値解を求めようとする差分式のなかに、未知の項がただ一つしか現れないものを陽的な方法、陽解法 (explicit time integration method) という。本研究のような時間発展問題でいえば、 $n+1$ ステップでの個々の空間格子点での未知数が、 $n+1$ ステップでのほかの格子点での解にかかわりなく、 n ステップでの既知の値のみで記述できるものを意味する。

3.5.1 レイノルズ方程式の差分法

4.3節で得られた、すきまから振動体上下の圧力勾配を導き出すレイノルズ方程式において、微小時間で考え、その範囲内では h は固定で時間によらないと仮定すると、式 (3-13)、式 (3-14) はそれぞれ以下のようになる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{12\mu} \left\{ h^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + 3hP \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + h^2 P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right\} \dots (\text{下側}) \tag{3-27}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{12\mu} \left\{ (H-h)^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - 3(H-h)P \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + (H-h)^2 P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right\} \dots (\text{上側}) \tag{3-28}$$

nステップ（現在）での既知の圧力分布・振動体形状からn+1ステップ（未来）での圧力分布を求めるため、以下のような差分化を行う。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P_j^{n+1} - P_j^n}{\Delta t} \quad (3-29)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_{j+1}^n - P_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (3-30)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (3-31)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P_{j+1}^n - 2P_j^n + P_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3-32)$$

上記4式において未知の値は P_j^{n+1} だけであって、ほかはすべて既知の値となっている。よって、式(3-30)、式(3-31)、式(3-32)の値をあらかじめ求めておき、式(3-29)を式(3-27)、式(3-28)に代入して以下のように変形することで、n+1ステップでの圧力分布を求めることができる。

$$P_j^{n+1} = P_j^n + \frac{\Delta t}{12\mu} \left\{ (h_j^n)^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + 3h_j^n P_j^n \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + (h_j^n)^2 P_j^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right\} \cdots (\text{下側}) \quad (3-33)$$

$$P_j^{n+1} = P_j^n + \frac{\Delta t}{12\mu} \left\{ (H - h_j^n)^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - 3(H - h_j^n) P_j^n \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + (H - h_j^n)^2 P_j^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right\} \cdots (\text{上側}) \quad (3-34)$$

3.5.2 振動体形状を決定する方程式の差分化

3.4節で得られた、圧力分布から振動体形状を決定する方程式（式(3-24)）に対しても同様の差分化を施す。すなわち、n+1ステップでのhを求めるために、

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{h_j^{n+1} - 2h_j^n + h_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3-35)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3-36)$$

$$\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = \frac{h_{j+2}^n - 4h_{j+1}^n + 6h_j^n - 4h_{j-1}^n + h_{j-2}^n}{(\Delta x)^4} \quad (3-37)$$

とする。前節で圧力分布を求めたときと同じで、上記3式における未知の値は h_j^{n+1} だけであり、それ以外の値はすでに求められている。よって、式(3-24)を以下のように変形することでn+1ステップでの振動体形状を求めることができる。

$$h_j^{n+1} = 2h_j^n - h_j^{n-1} + \frac{T}{\rho_{LD}}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{EI_z}{\rho_{LD}}(\Delta t)^2 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{b}{\rho_{LD}}(\Delta t)^2 (P_{under} - P_{above}) \quad (3-38)$$

ここで、右辺末尾の項には先ほど求めたn+1ステップでの圧力分布を代入する。式(3-33)から P_{under} が、式(3-34)から P_{above} が得られていた。

以上でnステップの振動体形状と圧力分布からn+1ステップでの振動体形状と圧力分布を求めることができた。シミュレーションでは、この段階でnステップでの値をそれぞれn-1ステップでの値に代入し、n+1ステップでの値をそれぞれnステップでの値に代入して、さらに次のn+1ステップでの解を求めていく、という動作をする。つまり、陽解法は圧力分布と振動体形状を交互に求めながら、1ステップにつき時間を Δt ずつ進めていく。

3.6 陽解法の安定解析

差分法で得られる解の数値的な安定性は発展型の問題に適用できる概念である。数値的に安定な手法というのは、計算を1ステップずつ進めていくときに、どのような原因による誤差（丸め誤差、打ち切り誤差など）も成長しない手法のことを指す。ここで、前節で提案した陽解法について考えてみる。差分化をする際に、テイラー展開により高次の項を無視しているため、当然のことながら無条件安定の計算手法であるとはいえない。これは、同じ差分化でも前進差分をするのか、後退差分をするのか、はたまた中心差分をするのかによっても異なってくる。そこで、これら計算手法の安定性を判別する手段が必要である。その手法は von Neumann の安定解析^[43]として知られている。これは、厳密には、等間隔格子上的線形の連立方程式に対する初期値問題（IVP : initial value problem）にのみ適用できるものである。一見、これは厳しき制限に聞こえるが、経験的にはこの解析は信頼できる結果を示し、より一般的な問題に対する指針となっている。式(3-35)で示した、差分化されたレイノルズ方程式の解が以下の形の厳密解を有すると仮定する。

$$P_j^n = g^n \exp(i(j\theta)) \quad (3-39)$$

i は虚数、 j は格子点位置を示す。定義により、 P_j^n は複素数であるから、実部、虚部ともに式(3-39)を満たさなければならない。 g は複素振幅率と呼ばれ、時間ステップごとの振幅の増加を表す。振動部分である $\exp(i(j\theta))$ は空間内での周波数を定めるパラメータの θ を含んでいる。実際の解はこれらフーリエ分解された解の重ね合わせとして定義

される。ここではその成分のひとつに着目していると思えばよい。 $\theta = 0$ では空間に対して一定の、 $\theta = \pi$ は j の添字1つおきに符号を変える解を表す。周波数 $(\pi + \varepsilon)$ は $(\pi - \varepsilon)$ として表されるから、必要な θ の範囲は $0 \leq \theta \leq \pi$ である。フーリエ分解は離散的であり、 π をどれだけ波数に分けるかは格子点の数によって決まる。

いま、式(3-39)を式(3-35)に代入することを考える。しかし、式(3-35)は非線形偏微分方程式であるため、近似による線形化を行わなければならない。差分化する前の式(3-27)において、 h を時間にも位置にも依存しない定数であるとする、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{h^2}{12\mu} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right\} \quad (3-40)$$

$P = P_0 + \Delta P$ とし (ΔP は微小)、簡単のために P_0 が定常解、つまり P_0 が定数とすると、

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial(P_0 + \Delta P)}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial \Delta P}{\partial x} \right)^2 \quad (3-41)$$

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = (P_0 + \Delta P) \frac{\partial^2(P_0 + \Delta P)}{\partial x^2} = P_0 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \Delta P \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} \quad (3-42)$$

ここには2つの非線形項が残っている。非線形項は von Neumann の解析を行うと周波数が倍になるので加振原因にはならないが、ここでは ΔP が微小という条件から非線形項が無視できないかを考えてみる。

$$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial x} \right)^2 \dots \textcircled{1}, \quad P_0 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} \dots \textcircled{2}, \quad \Delta P \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} \dots \textcircled{3} \quad (3-43)$$

とすると、 ΔP が P_0 と比べて微小であることから $\textcircled{2} \gg \textcircled{3}$ は明らか。①と②については考察が必要である。通常は①のような微小なものどうしの掛け算は無視するがここでは慎重に行う。

$$\frac{\Delta P}{P_0} \dots \text{(A)}, \quad \frac{\partial \Delta P / \partial x}{\Delta P} \dots \text{(B)}, \quad \frac{\partial^2 \Delta P / \partial x^2}{\Delta P} \dots \text{(C)} \quad (3-44)$$

とおくと、 $\textcircled{1} = P_0 \times \text{A} \times \text{B} \times P_0 \times \text{A} \times \text{B}$, $\textcircled{2} = P_0 \times P_0 \times \text{A} \times \text{C}$ となり、①が②に比べて無視できるかということは $\text{A} \times \text{B} \times \text{B}$ が C に比べて無視できるかという問題に帰着できる。正弦波であれば $\text{B} \times \text{B} = \text{C}$ だから無視できるとしていいのだろうが、一般的には無理である。ただ、von Neumann の解析では正弦波で考えるので、数学的に厳密かどうかを議論しなければ「 ΔP は微小」という仮定からも、①と③の2つの非線形項は無視することができる。

以上よりレイノルズ方程式は線形化され、以下の形となる。

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial t} = \frac{h^2}{12\mu} P_0 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} \quad (3-45)$$

ここで以下のような差分化を行う。

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial t} = \frac{\Delta P_j^{n+1} - \Delta P_j^n}{\Delta t} \quad (3-46)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} = \frac{\Delta P_{j+1}^n - 2\Delta P_j^n + \Delta P_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3-47)$$

するとレイノルズ方程式は、

$$\Delta P_j^{n+1} = \Delta P_j^n + \nu(\Delta P_{j+1}^n - 2\Delta P_j^n + \Delta P_{j-1}^n) \quad (3-48)$$

となる。ただし ν はクーラン数と呼ばれ、ここでは次のように定義する。

$$\nu = P_0 \frac{h^2}{12\mu} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (3-49)$$

ここで、 ΔP が以下の形の解を持つと仮定して、von Neumann の安定性解析を行う。

$$\Delta P_j^n = g^n \exp(i(j\theta)) \quad (3-50)$$

この式(3-50)を式(3-48)に代入して両辺を $g^n e^{i\theta}$ で割ることにより以下の式を得る。

$$g(\theta, \nu) = 1 + \nu(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) = 1 - 2\nu(1 - \cos\theta) \quad (3-51)$$

式(3-51)からある周波数の成分がクーラン数 ν で1ステップ後にどれだけ成長する(増幅する)かが分かる。これで安定性の評価には十分な情報であると思われるが、より詳しく解がどう成長するかを見るため、複素数 g をさらに振幅と位相に分ける、すなわち、今度は上記で分解したさまざまな波数成分のうちのひとつに着目して、その波数成分の持つ振幅と位相が、数値積分の過程でどのように変化するかを見る。

$$g = |g| e^{i\varphi} \quad (3-52)$$

$|g|$ は増幅率、 φ は位相差を表す。ある周波数成分 θ に対して $|g|$ が厳密解よりずれていれば振幅に誤差を生じ、 φ にずれを生じれば、その周波数成分の波は移動速度が正しくなくなる。式(3-51)と式(3-52)から、

$$\begin{aligned} \text{増幅率: } |g(\theta, \nu)| &= 1 - 2\nu(1 - \cos\theta) \\ \text{位相差: } \varphi(\theta, \nu) &= 0 \end{aligned} \quad (3-53)$$

これから、位相誤差は生じないことが分かる。また、 θ の関数 g をプロットしたグラフを Fig. 3-5 に示す。

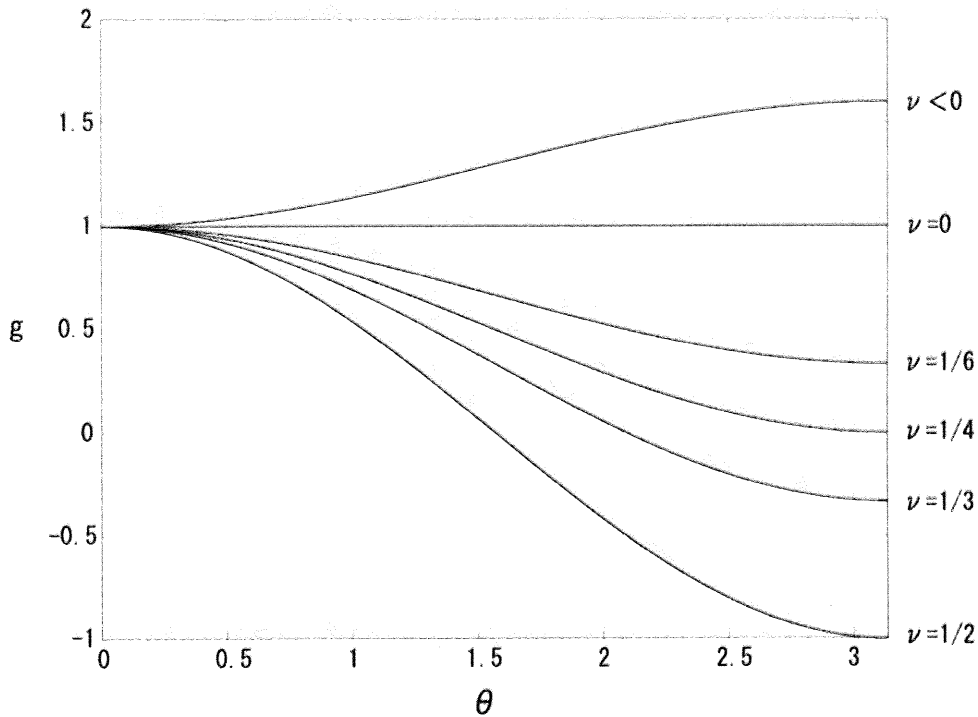


Fig.3-5 レイノルズ方程式に対する陽解法の増幅率

それぞれのフーリエ成分を見ると特に高周波数での減衰が著しい。 $\nu < 0$ のときはプログラムが不安定になることはこの図から明らかであるで、 $\nu > 0$ ならば、 $|g| < 1$ という条件の下で安定である。図からわかるように、これは次のことを意味する。

$$0 < \nu < \frac{1}{2} \tag{3-54}$$

式(3-49)からわかるように、 ν は $1/(\Delta x)^2$ に比例する。仮に分割数を 2 倍にすると、空間刻みが $1/4$ になるため、時間刻みも $1/4$ にしなければならぬ。すなわち、もし格子点数を増やすと、時間積分の時間刻み幅は急激に小さくしなければならぬことになる。これは、陽解法を用いて精細な解析を行おうとすると、計算に莫大な時間がかかってしまうことを意味する。

3.7 陰解法

前節で示した手法はすべて、時刻 $n+1$ の解は空間方向に j 点のみを含んでいた。それが、左辺の唯一の項であることから、陽解法と呼ばれた。一方、計算しようとする時刻 $n+1$ の未知数を 2 つ以上持つ手法は陰解法 (implicit time integration method) と呼ばれる。陰解法の重要な性質のひとつは、時刻 n の任意の座標位置の解の変化が時刻 $n+1$ のすべての点の解に影響を及ぼすことである。このとき、情報は無限に速く伝播している。

本研究では一般化された Crank-Nicolson 法のひとつである Beam-Warming 法という

陰解法を用いる。具体的にはレイノルズ方程式に以下のような差分化を施す。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \lambda \frac{P_{j+1}^{n+1} - P_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1-\lambda) \frac{P_{j+1}^n - P_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (3-55)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 = \lambda \left(\frac{P_{j+1}^{n+1} - P_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right)^2 + (1-\lambda) \left(\frac{P_{j+1}^n - P_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)^2 \quad (3-56)$$

ここでは $(P^{n+1})^2$ が出てきてしまい計算が煩雑になるので、

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 = \lambda \left(\frac{P_{j+1}^{n+1} - P_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right) \left(\frac{P_{j+1}^n - P_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) + (1-\lambda) \left(\frac{P_{j+1}^n - P_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)^2 \quad (3-57)$$

と差分化する。

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \lambda \frac{P_{j+1}^{n+1} - 2P_j^{n+1} + P_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\lambda) \frac{P_{j+1}^n - 2P_j^n + P_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3-58)$$

このように、Beam-Warming法では空間差分をnステップとn+1ステップとの加重平均で評価する。このとき、 $\lambda=0$ ならば、上記差分化は前節までにおける単純なオイラー陽解法となり、 $\lambda=1/2$ ならばCrank-Nicolson法になる。n+1ステップでの圧力分布の重みは λ につれて大きくなる。

3.7.1 陰解法の安定解析

ここでBeam-Warming法を用いた差分法に対して、von Neumannの安定解析を行う。解析対象は、前節で得られた次の式である。

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial t} = \frac{h^2}{12\mu} P_0 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} \quad (3-59)$$

式(3-59)に対する差分化は次のようになる。

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial t} = \frac{\Delta P_j^{n+1} - \Delta P_j^n}{\Delta t} \quad (3-60)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} = \lambda \frac{\Delta P_{j+1}^{n+1} - 2\Delta P_j^{n+1} + \Delta P_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\lambda) \frac{\Delta P_{j+1}^n - 2\Delta P_j^n + \Delta P_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3-61)$$

すると式(3-59)は、

$$\Delta P_j^{n+1} = \Delta P_j^n + \nu \left\{ \lambda (\Delta P_{j+1}^{n+1} - 2\Delta P_j^{n+1} + \Delta P_{j-1}^{n+1}) + (1-\lambda) (\Delta P_{j+1}^n - 2\Delta P_j^n + \Delta P_{j-1}^n) \right\} \quad (3-62)$$

となる。ただし、前節と同様に、

$$\nu = P_0 \frac{h^2}{12\mu} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (3-63)$$

とした。ここで、von Neumann の安定解析を行うために、 ΔP が以下の形の解を持つと仮定する。

$$\Delta P_j^n = g^n \exp(i(j\theta)) \quad (3-64)$$

式(3-64)を式(3-62)に代入して両辺を $g^n e^{i j \theta}$ で割ることにより以下の式を得る。

$$g(\theta, \lambda, \nu) = \frac{1 - 2\nu(1 - \lambda)(1 - \cos\theta)}{1 + 2\nu\lambda(1 - \cos\theta)} \quad (3-65)$$

式(3-65)は増幅率そのもので、 $\theta = 0$ のとき $g = 1$ である。また、Beam-Warming 法でもやはり位相誤差は生じないことが分かる。 λ を変えたときの θ の関数 g をプロットしたグラフを Fig.3-6 に示す。グラフから分かるように、もし $\nu > 0$ なら、 g は θ とともに減少し、 $\theta = \pi$ のとき最小値をとる。すなわち高周波成分は急速に減少する。安定限界は次式で表される。

$$\frac{1 - 4(1 - \lambda)\nu}{1 + 4\lambda\nu} > -1 \quad (3-66)$$

また、 ν に関する安定限界において次式が成り立つ。

$$\nu = \frac{1}{4\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)} \quad (3-67)$$

もし、 $\lambda \geq 1/2$ ならば、不安定となるような正の ν は存在せず、Beam-Warming 法は無条件安定となる。ただし、すべての ν について安定であるということは計算ができるということの意味するだけで、 ν の値が大きい場合の解が正しいといえるわけではない。もし、 Δt を大きくとれば、瞬間的な解（各時間ステップの解）は正確ではなくなる。したがって、本研究のような解の成長に興味がある場合には、解が発散せずともできるだけ Δt を小さくとる必要がある。

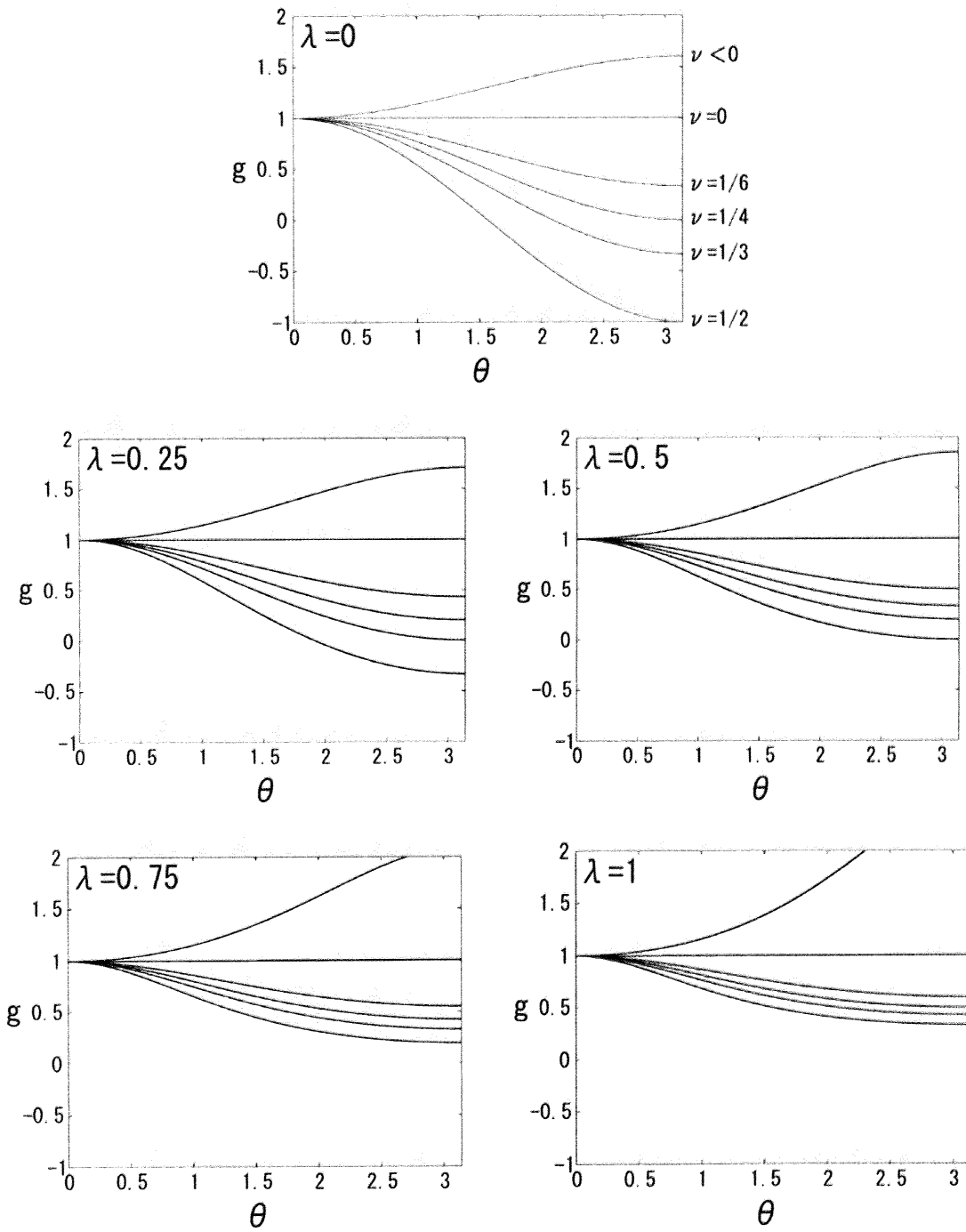


Fig.3-6 レイノルズ方程式に対する Beam-Warming 法の増幅率

3.7.2 Beam-Warming 法による差分化

ここからは、Beam-Warming法を用いて、どのようにしてnステップの圧力分布からn+1ステップの圧力分布を求めていくのかを概説する。Beam-Warming法による差分式、式(3-37)、式(3-39)、式(3-40)を式(3-13)に代入すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \left(\left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{\Delta t} & 0 \end{array} \right] - \lambda [\text{dope1} \quad \text{dope2} \quad \text{dope3}] \right) \begin{bmatrix} P_{j-1}^{n+1} \\ P_j^{n+1} \\ P_{j+1}^{n+1} \end{bmatrix} \\ & = \left(\left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{\Delta t} & 0 \end{array} \right] + (1-\lambda) [\text{dope1} \quad \text{dope2} \quad \text{dope3}] \right) \begin{bmatrix} P_{j-1}^n \\ P_j^n \\ P_{j+1}^n \end{bmatrix} + \frac{P_j^n}{h_j^n} \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (3-68)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \text{dope1} &= \frac{h_j^n}{24\mu\Delta x} \left(\frac{2}{\Delta x} h_j^n P_j^n - h_j^n \frac{\partial P}{\partial x} - 3 \frac{\partial h}{\partial x} P_j^n \right) \\ \text{dope2} &= -\frac{1}{6\mu(\Delta x)^2} (h_j^n)^2 P_j^n \\ \text{dope3} &= \frac{h_j^n}{24\mu\Delta x} \left(\frac{2}{\Delta x} h_j^n P_j^n + h_j^n \frac{\partial P}{\partial x} + 3 \frac{\partial h}{\partial x} P_j^n \right) \end{aligned} \quad (3-69)$$

とした。式中の空間微分はすべて時刻nにおけるものである。

$j=1 \sim k$ (k は空間分割数)であるので、式(3-70)左辺は $k \times k$ の正方行列と $k \times 1$ の行列の積となる。また、右辺第一項はnステップで評価される値、右辺第二項は弦の方程式から導かれる値で共に既知であり、 $k \times 1$ の行列をなす(各要素を RHS_j^n と表記する)。

$$\left[\begin{array}{c} \text{dope} \end{array} \right] \begin{bmatrix} P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \\ \vdots \\ P_j^{n+1} \\ \vdots \\ P_k^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1^n + \lambda \times \text{dope1} \times B.C. \\ RHS_2^n \\ \vdots \\ RHS_j^n \\ \vdots \\ RHS_k^n + \lambda \times \text{dope3} \times B.C. \end{bmatrix} \quad (3-70)$$

dope は $k \times k$ の正方行列(3重対角行列)。B.C.(境界条件)は流入端圧力と流出端圧力(大気圧)である。プログラム中では dope の逆行列を求め、それを右辺に乗ずることでn+1ステップでの圧力分布を求める。

振動体上側の圧力分布についても同様の手法により計算を行う。

3.7 シミュレーション結果

3.7.1 慣性力の評価について

先行研究^[33]では3.2.1節で示した指針に従って、シミュレータを構築する際に無視した慣性力について評価を行った。慣性力と粘性力を比較するための変数としては慣性力を粘性力で割ったもの、つまりはレイノルズ数を用いる

シミュレータを起動させ、自励振動が安定して発生している状態まで時間を進めたときの出力を Fig.3-5 に示す。図中上から振動体形状、圧力分布、流速分布、圧力勾配、慣性力を表しており、黒で示す線は上側の、灰色で示す線は下側の値を示している。ここで4番目の圧力勾配と5番目の慣性力を比較してみると、それらの最大値は同程度であることが分かっている。しかし、局所的にはレイノルズ数が1を超えることはあっても、系全体でのレイノルズ数は平均すれば0.1程度であり、慣性力は粘性力に比べて十分に小さい。本研究では精密なシミュレーションを行うことが目的ではないため、以上の結果を基に慣性力は無視できると判断した。

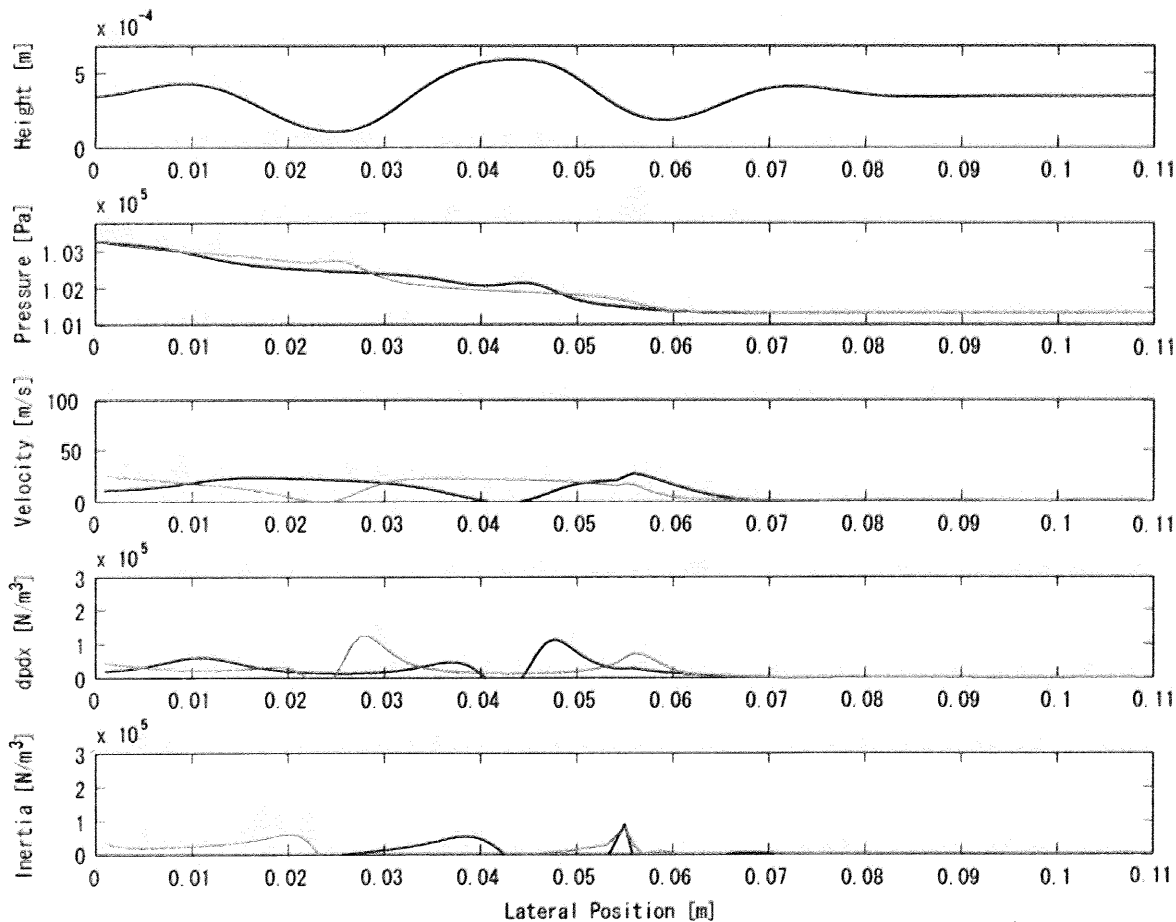


Fig.3-7 シミュレーション結果

3.7.2 自励振動のシミュレーション

構築したシミュレータに実験機と同じ条件のパラメータを入力した際のシミュレーション結果をFig.3-8に示す。第6章で述べる実験におけるデータと比較すると流量が大きい場合のデータが取れていない。これは入力圧力が大きくなって流速が約20m/sよりも増加していくとシミュレーションで正しい結果が得られなくなってしまうためである。従って、本章で構築したシミュレータでは入力圧力の影響が強くなりすぎると言える。この問題にはシミュレータ構築の際に用いた無限幅近似が関係している。実験機では流路幅が16mmであるのに対し、振動体幅は14.5mmであり、このすきまを介して振動体上下の圧力差を緩和する方向に空気が流れる。しかし、シミュレーションでは振動体上下のすきまは完全に独立しているため、上記のような現象は起こらず、実験と比べて圧力の影響が強くなってしまふ。すなわち、ある一定以上の入力圧力になると、実験結果から考えれば自励振動を起こすはずでも、シミュレーションでは振幅が大きくなりすぎてしまい、振動体が完全に流路の片側に張り付いてしまうという現象が起こってしまうのである。これを防ぐにはテンションを大きくして振動体の変位に対する復元力を大きくしたり、計算で求めた時間刻みあたりの高さ変化を強制的に抑制したりする方法があるが、どちらも根本的な解決にはならない。

ここでもう一度Fig.3-6を見てみると、結果を得られている範囲では第6章で述べる実験結果と同じように、周波数と波の速さは流量とともに増大しており、波長は流量が増加するほど若干短くなることがわかる。また、Fig.3-7は振動体の波形を示したものである。このときの周波数は700Hz程度で、図では1周期を4分割して表示してある（ディレイタイムは355 μ sに相当）。図の左半分では実験と同様に振幅が大きくなりながら波が進行している様子が見て取れ、自励振動が発生していることが確認できる。流路途中から振幅が減衰しているのは、3.2.3節で説明を加えた電氣的ダンパに相当する項が振動体の速度に対して復元力として働いているためである。振動体の右端に達するまでに振幅は十分に減衰しているため波が反射波として戻ってきておらず、本研究で扱う自励振動の特徴を良く表しているといえる。

しかしながら先に述べたような問題が存在しているため、本研究で構築したシミュレータは自励振動を定性的には表現できていると言えるが、定量的には表現することができていない。そこで流路内圧力分布が強く出過ぎないように幅方向圧力分布の近似方法を見直す必要がある。

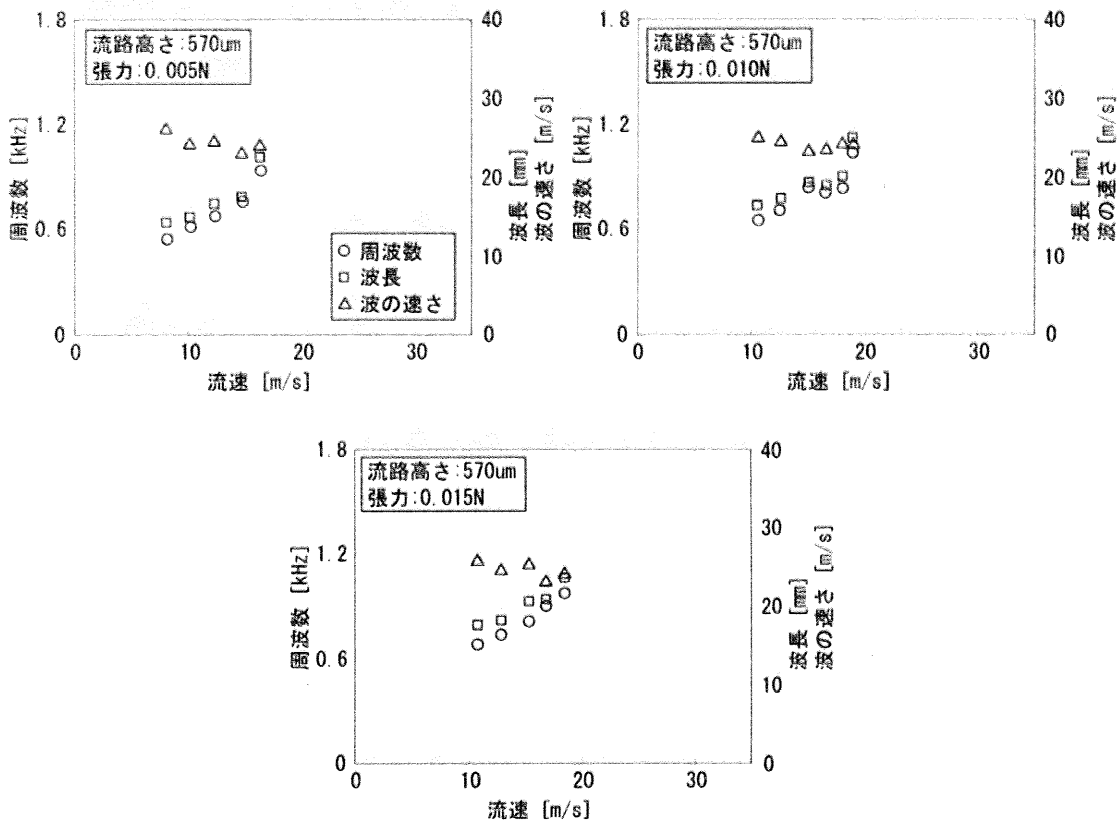


Fig.3-8 シミュレーション結果

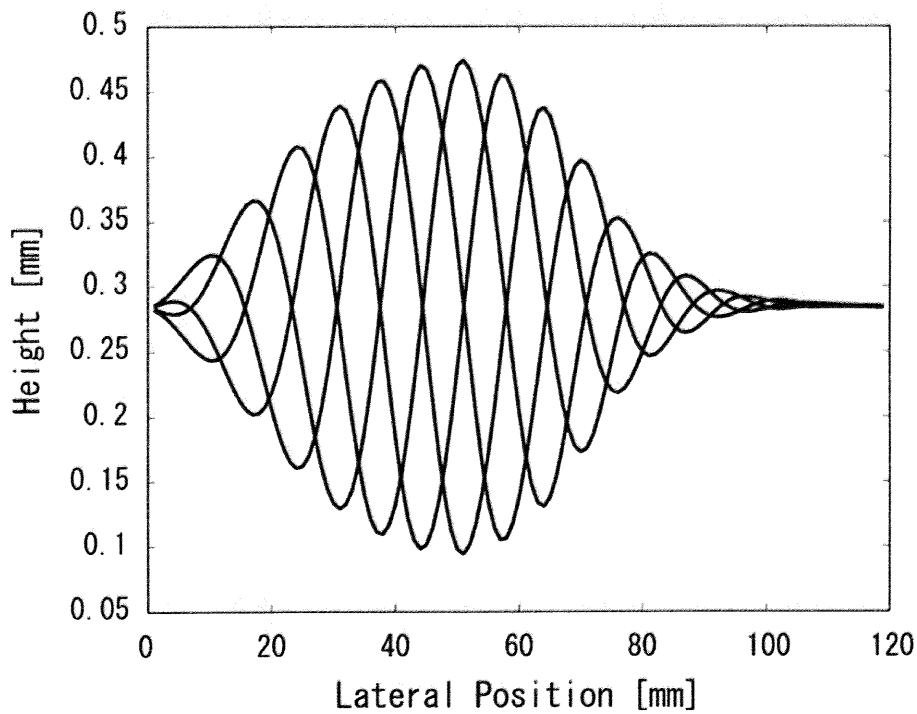


Fig.3-9 振動波形 (シミュレーション)

3.8 結言

本章では自励振動の発生に影響を与えるパラメータを発見するための解析手法として、差分法に基づいた解析プログラムを構築し、そのアルゴリズムについて概説した。

まず、シミュレーション内で用いた近似についてまとめ、振動体形状から圧力分布を計算する式として、Navier-Stokes 方程式からレイノルズ方程式を導き、圧力分布から振動体形状を計算する式として、弦振動と弾性方程式を重ね合わせた方程式を導いた。差分化には始め陽解法を用いたが、解の安定性を高めるため、差分化には陰解法 (Beam-Warming 法) を用いることとした。

シミュレーションを行った結果、実際の実験機に比べて入力圧力が強く出過ぎる結果となった。その原因は幅方向圧力に関して無限幅近似を行ったことであり、実際には流路両端に近い領域での圧力は流路中央での圧力に比べて小さい。次章では、流路内圧力分布を実際の実験機の状態に近づけるため、幅方向圧力分布の近似方法について簡易なモデルを用いた理論的考察を行う。

第4章

圧力分布理論

4.1 緒言

前章では自励振動の効率要因を支配するパラメータを発見するための補助的なツールとしてのシミュレータを構築した。しかし、流路内における幅方向圧力を無限幅近似することにより圧力が強く出過ぎてしまい、自励振動が正常に起こらないという現象が生じてしまった。

そこで本章では幅方向圧力分布の近似方法を見直す。3.2.2節で説明したように幅方向圧力分布の近似方法は3種類ある。流路幅方向の流れを無視する無限幅近似、流路長手方向の流れを無視する無限小幅近似、幅方向圧力分布を簡単な関数で近似する有限幅近似はこれらの中間の方法である。これらの近似手法を駆使し、実際の実験機のような振動体上下の圧力差が緩和されたシミュレータを構築するために圧力分布の近似手法を見直す。無限小幅近似は無限幅近似とは対を成す近似方法で流体が振動体に流入した途端に両脇にそれるとい物理現象を表しており、3種類の近似手法のなかでは振動体上下に存在する流体圧力が最も低くなる。次節では無限小幅近似を施した場合の振動体の応答について述べることにする。

その結果、無限幅近似でも無限小幅近似でも実際の実験機にそぐわない結果となった。その原因は、実際の実験機では流路長手方向の流れが支配的とはいえ流路幅方向の流れも存在しており、上記2通りの近似手法ではその性質を表せないからである。そこで流路長手方向・幅方向の流れを共に考慮する必要がある。しかし、両方向の流れを同時に解こうとすることは容易ではない。そこで幅方向の流れについては自分で仮定し、長手方向の流れだけを解くことでこの問題を解決する新たな近似手法を提案する。その近似手法における解析解を求める際に計算を簡単にするためにモデルを剛体板に単純化する。

解析解の比較に先立って問題となるのが、幅方向圧力分布形状の選定基準を明確にする必要性である。そのため、2次元レイノルズ方程式を差分近似で解くことにより流路幅方向の圧力分布形状を厳密に求めるシミュレータを構築する。但し振動体は剛体板で無変形・無変位と仮定し現象を単純化する。

簡易な2次元シミュレータから得られた幅方向圧力分布形状の傾向から、有限幅近似における幅方向圧力分布形状を決定し、剛体板モデルにおいて以上で述べた3通りの圧力分布の近似手法を施すことで、剛体板の応答についての解析解を比較する。それにより新たな近似手法が無限幅近似と無限小幅近似の中間的な性質を持つ近似方法であり、実際の実験機における自励振動を表現しうるとの見通しを立てる。

4.2 無限小幅近似による振動体の応答

本節では、2次元レイノルズ方程式に無限小幅近似を施すことで流路内圧力分布を決

定し、3.4節で求めた振動体形状を決定する方程式に代入することで得られる振動体の応答について考察する。

まずは2次元レイノルズ方程式を導く。式(3-6)において、気体の厚み方向については十分に薄く、z方向の流体速度およびz方向の密度変化を0と仮定し、さらにy(幅)方向には均一であるとした仮定を解除すると、すきまをhとして、

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \int_0^h u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \int_0^h v dz \right] = 0 \quad (4-1)$$

となる。またy方向のNavier-Stokes方程式について体積力および慣性力とその他の粘性項を無視することによって、運動方程式は以下のように簡略化して表すことができる。

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (4-2)$$

式(4-2)をz方向に2回積分し、境界条件(3-9)を満たすように積分係数を決めると、

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial y} (z-h)z \quad (4-3)$$

さらに式(4-3)をz方向に積分すると

$$\int_0^h v dz = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4-4)$$

となり、式(3-10)、(4-4)を式(4-1)へ代入すると、以下のようなx,y2方向に関するレイノルズ方程式が得られる。

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (4-5)$$

この等式は右辺が注目している領域におけるx方向の圧力勾配とy方向の圧力勾配の和を表し、左辺が圧力の時間変化を表す。今後、幅方向圧力の近似を施す場合はこの式をもととして考えることとする。

ではここで流路内圧力分布について無限小幅近似を施すために、式(4-)においてx方向の流れを無視すると、以下ようになる。この近似は流路幅が狭いときに成立し、HDD用スライダなどの分野で用いられる方法である。本研究で扱うテープは細長いため、この近似を用いる。

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (4-6)$$

一方で境界条件は以下の通りである。但し P_0 は大気圧を表す。

$$P\left(\pm \frac{b}{2}\right) = P_0 \quad (4-7)$$

この式を y について積分し、境界条件を満たすように積分定数を定めると以下のように流路内圧力分布が求まる。 y 方向に放物線形状を取るという特徴が見られる。

$$P_{under} = P(y, h) = \frac{6\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} y^2 + \left(P_0 - \frac{3b^2\mu}{2h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (4-8)$$

ここでFig.3-6の流路内部のイメージ図を参照し、振動体下側の隙間を h 、振動体上側の隙間を $(H-h)$ と書くことにする。式(4-8)の左辺が P_{under} としているのは、この式が振動体下側の圧力分布を記述したものであることを強調するためである。振動体上側については式(4-8)において h を $(H-h)$ と置換して整理することにより、

$$P_{above} = -\frac{6\mu}{(H-h)^3} \frac{\partial h}{\partial t} y^2 + \left(P_0 + \frac{3b^2\mu}{2(H-h)^3} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (4-9)$$

となる。

次に第3章で振動体を一次元の梁と仮定したことは異なり、ここからは振動体の奥行きを考慮し、 y 方向に分布した圧力が振動体の中心である $y=0$ に集中的に加重すると近似する(Fig.4-1)。この近似により、 y 方向の圧力分布の積分値が振動体の応答に影響する。ひいては、 y 方向の圧力分布関数形状が振動体の応答に影響することとなる。集中加重を P_c とおくと、

$$P_c = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} P_{under} dy - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} P_{above} dy \quad (4-10)$$

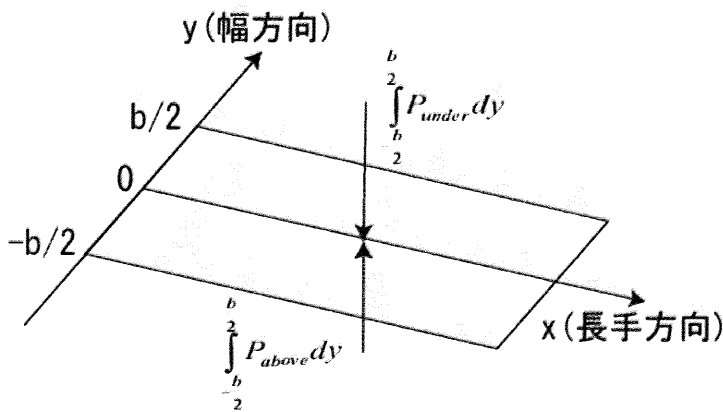


Fig.4-1 集中加重

式(4-10)より y 方向の集中加重は以下のようになる。

$$P_C = -\mu b^3 \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{1}{h^3} + \frac{1}{(H-h)^3} \right) \quad (4-12)$$

式(4-11)を $F = P_C$ とおいて式(3-26)へ代入して整理すると、

$$EI \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + TA \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\mu b^3 \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{1}{h^3} + \frac{1}{(H-h)^3} \right) \quad (4-12)$$

今は自励振動の起こり始めを考えているので振動体の変位は微小であると見なし

$$h = h_0 + w \quad (4-13)$$

である。但し h_0 は振動の中心 w は微小振幅を意味する。この式を式(4-12)に代入して線形化を施すと、以下のように整理される。

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu b^3 \left\{ \frac{1}{h_0^3} + \frac{1}{(H-h_0)^3} \right\} \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + TA \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4-13)$$

式(4-13)は w についての2階線形偏微分方程式である。ここで左辺第2項の係数が正であることに着目する。この物理的意味は、振動体の変位が正の方向に大きいほど振動体は空気から負方向に大きな抵抗力を受けることになることである。すなわち、空気は振動体に対してダンパとして働く。従って無限小幅近似を施した場合、振動体は流体からエネルギーを受け取れず自励振動を起こすことができない。

式(4-13)を w について解き、振動体の応答を求める。最初に

$$w(x, t) = X(x)T(t) \quad (4-14)$$

と変数分離し、(4-13)へ代入すると以下の通り。

$$\frac{1}{T(t)} \left\{ \rho A \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - C_2 \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right\} = -\frac{1}{X(x)} \left\{ EI \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + TA \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \right\} = -\omega^2 \quad (4-15)$$

但し、

$$C_2 = -\mu b^3 \left\{ \frac{1}{h_0^3} + \frac{1}{(H-h_0)^3} \right\} \quad (4-16)$$

とおいている。式(4-15)を整理すると、以下のように時刻 t 、長手方向座標 x による微小振幅変化を表す2通りの式が得られる。

$$\rho A \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - C_2 \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (4-17)$$

$$EI \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + TA \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \omega^2 X(x) = 0 \quad (4-18)$$

まずは(4-17)において $2\varepsilon = -\frac{C_2}{\rho A}$, $\omega_n^2 = \frac{\omega^2}{\rho A}$ とおき整理すると,

$$\ddot{T} + 2\varepsilon\dot{T} + \omega_n^2 T = 0 \quad (4-19)$$

(4-19)は単純な粘性減衰振動を表す式であるため、その解の導出はここでは省略し、最後に表記する。また(4-18)において

$$X(x) = e^{sx} \quad (4-20)$$

とにおいて代入し、両辺を e^{sx} で割ると s に関する4次方程式が得られる。

$$EIs^4 + TAs^2 - \omega^2 = 0 \quad (4-21)$$

$$\therefore s = \pm \sqrt{\frac{-TA + \sqrt{T^2 A^2 + 4EI\omega^2}}{2EI}} \quad (4-22)$$

(4-22)を小さい順に s_1, s_2 とおくと,

$$X(x) = X_1 e^{s_1 x} + X_2 e^{s_2 x} \quad (4-23)$$

以上より,

$$\zeta > 1 \text{ のとき, } w(x,t) = e^{-\alpha} (T_1 \cosh \omega_h t + T_2 \sinh \omega_h t) (X_1 e^{s_1 x} + X_2 e^{s_2 x}) \quad (4-24)$$

$$\zeta = 1 \text{ のとき, } w(x,t) = e^{-\alpha} (T_1 + T_2 t) (X_1 e^{s_1 x} + X_2 e^{s_2 x}) \quad (4-25)$$

$$\zeta < 1 \text{ のとき, } w(x,t) = e^{-\alpha} (T_1 \cos \omega_d t + T_2 \sin \omega_d t) (X_1 e^{s_1 x} + X_2 e^{s_2 x}) \quad (4-26)$$

但し、 ζ は減衰比を表す。 T_1, T_2, X_1, X_2 は積分定数を表す。また,

$$\omega_h = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (4-27)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4-28)$$

である。(4-24),(4-25),(4-26)において t を十分に大きくとれば積分定数にかかわらず $w(x,t)$ は0に限りなく近づくことが分かる。従って、無限小幅近似では振動体が加振しない。以上の考察から見出せる副次的な結論として、空気は振動体に対してダンパとして働くということも挙げられる。但しこの議論は本章の趣旨に外れるため、5.5節において詳しく述べることにする。

4.3 モデルの簡易化

4.4節でレイノルズ方程式に無限小幅近似を施すと振動体が自励振動しないことを示した。それはすなわち、無限小幅近似でも実験機における流路内圧力分布を再現することができないことを意味する。そこで無限幅近似と無限小幅近似の中間的な性質を持つ近似方法を提案する。中間的な性質を表現したいので、流路長手方向・幅方向の両方の

流れを考慮することが有効であると考えられる。しかし、2方向の流れについてレイノルズ方程式を解くことは容易ではない。そこで第6章にて述べる自励振動の可視化から得られる結果を利用する。本実験機における振動体の振動の特徴として、振動体は長手方向には複雑形状であり、幅方向には変形しないことが挙げられる。振動体が幅方向に変形しないということは、幅方向の圧力分布に関しては単純形状であることが予測される。4.4節においても、振動体が幅方向に変形しないという仮定のもと無限小幅近似を施し、幅方向の圧力分布は2次関数という単純形状であることが示されている。そこで幅方向の圧力分布に関しては適当な関数を仮定する。この関数を圧力分布関数と呼ぶことにする。すなわちy方向については適当な関数 $g(y)$ を定め、流路内圧力分布を、

$$P(x, y, t) = g(y)f(x, t) + P_0 \quad (4-29)$$

と仮定する。但し、大気圧を基準として考えている。 $g(y)$ の定め方については4.8節で議論する。

式(4-29)はレイノルズ方程式を満たさないといけませんが、その可能性は限りなく低い。何故なら、 $g(y)$ はあくまで自分で仮定した関数だからである。Y方向の圧力分布がある程度予測できるとはいえ、任意のyで成り立つ関数を作ることは非常に困難である。そこでレイノルズ方程式を幅方向に積分平均することでこの問題を解決する。その式は、

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right\} dy \quad (4-30)$$

となる。式(4-5)が任意のyで成立するように $g(y)$ を定めるのが困難でも、式(4-29)が式(4-30)をみたすように $g(y)$ を設定することなら可能である。そもそも本研究では自励振動を理論的に考察することが主な目的であり、そのために実験機に即したシミュレータを構築する。従って流路内圧力分布に関して定量的な正確性は必ずしも必要でなく、大まかに物理現象を反映できていれば十分であるということである。 $g(y)$ の形状が現実と多少異なっているとしても、 $g(y)$ のy方向の積分値が現実に即していれば、シミュレータ構築に際しては支障がないと判断する。 $g(y)$ のy方向の積分値が現実に即すためには $f(x, t)$ を正確に求めることが必要である。そのために式(4-29)を式(4-30)へ代入すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} b = \frac{1}{12\mu} \left(3h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + h^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g dy \right) + \frac{h^3}{12\mu} f \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy \quad (4-31)$$

次にこの式を線形化する。本章の目的は幅方向圧力の近似手法が振動体の応答に与える影響を考察することであり、自励振動の起こり始めを考えれば十分である。そこで4.4節と同様に微小振幅 w を用いて式(4-13)のようにおき、それを式(4-31)に代入すれば以

下のように簡易化される.

$$\frac{\partial w}{\partial t} b = \frac{1}{12\mu} \left(3h_0^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + h_0^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g dy \right) + \frac{h_0^3}{12\mu} f \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy \quad (4-32)$$

式(4-32)を解析的に解くにはさらなる線形化が必要である. 式(4-32)は振動体が流路長手方向に自由変形する場合を想定した数式である. しかし, 今必要なことは新しく提案する幅方向圧力分布の近似手法の有効性を検討することであり, 必ずしも振動体を変形させる必要はない. 有効性とは, 提案する近似手法が無限幅近似と無限小幅近似の中間的な性質を持つことである. それさえ示せば, 今後この近似手法において $g(y)$ を実験機に合わせて適切に設定することで実験機を模することが可能になる. よってここで振動体の流路長手方向の変形も無視することにする. すなわち振動体の剛性が無限大であり, 剛体の板であると見なす. このモデルを用いてできることは, 各近似手法において流体が剛体板に及ぼす圧力の強さを比較することである. そのため, 剛体板と流路下端に挟まれた空間についてのみ計算すれば十分であり, 剛体板の上部空間は大気圧に開放されているとする. 今後このモデルを剛体板モデルと呼ぶ(Fig.4-2). 但し剛体板下部の流体による圧力は剛体板の中央に集中加重すると考える. つまり剛体板下部, すなわち $g(y)$ の圧力分布の平均値が剛体板の応答に直接影響するということである.

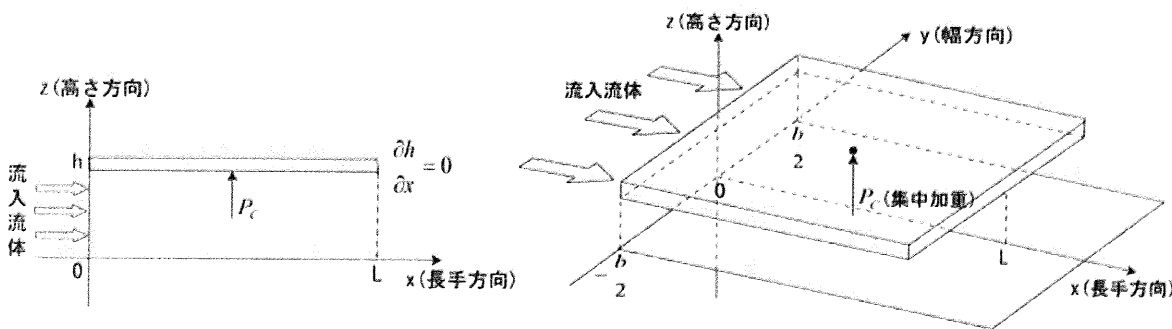


Fig.4-2 剛体板モデル

4.4 各近似手法による剛体板の応答

前節で定まった方針は, 振動体を剛体板とみなすことで各近似手法による圧力の影響の比較を行うことである. 新しく提案する圧力分布近似手法の有効性をシミュレータ構築に先立って理論的に検証しておくことが本章の目的である. 本節では4.5節で提案した剛体板モデルにおいて, 流入流体の圧力分布を入力とする剛体板の応答を解析的に求める.

4.4.1 無限幅近似

本節では無限幅近似を施したときの剛体板の応答を解析的に求める。レイノルズ方程式は、

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (4-33)$$

となる。剛体板モデルにおいても圧力の影響を比較するだけなら板の動き始めを考えればよい。そこで式(4-33)において w を板の微小変位と見なせば、

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (4-34)$$

のように簡易化される。一方で境界条件は、

$$P(0) = P_A = P_m - P_0 \quad (4-35)$$

$$P(L) = 0 \quad (4-36)$$

である。但し、 P_A は大気圧を基準とした流入圧力であり L は流路長である。式(4-34)を x について積分し、境界条件を満たすように積分定数を定めると、

$$P = \frac{12\mu}{h_0^3} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{L^2}{2} + \frac{P_A h_0^3}{12\mu} \right) x + \frac{P_A h_0^3}{12\mu} \right\} \quad (4-37)$$

となる。流路内圧力分布のイメージは Fig.4-3 の通りである。式(4-37)を x, y 両方向に積分し、剛体板の中心に集中加重していると考えると

$$P_C = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_0^L P dx \right) dy = -\frac{b\mu L^3}{h_0^3} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{P_A b}{2} \quad (4-38)$$

であり、剛体板の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{b\mu L^3}{mh_0^3} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{P_A b}{2m} \quad (4-39)$$

と求まる。この式を初期条件

$$w(0) = 0 \quad (4-40)$$

$$\dot{w}(0) = v \quad (4-41)$$

のもとに解くと、剛体板の応答は以下ようになる。

$$w(t) = \frac{mh_0^3}{\mu b L^3} \left(v - \frac{P_A h_0^3}{2\mu L^3} \right) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{mh_0^3}{\mu b L^3} t \right) \right\} + \frac{P_A h_0^3}{2\mu L^3} t \quad (4-42)$$

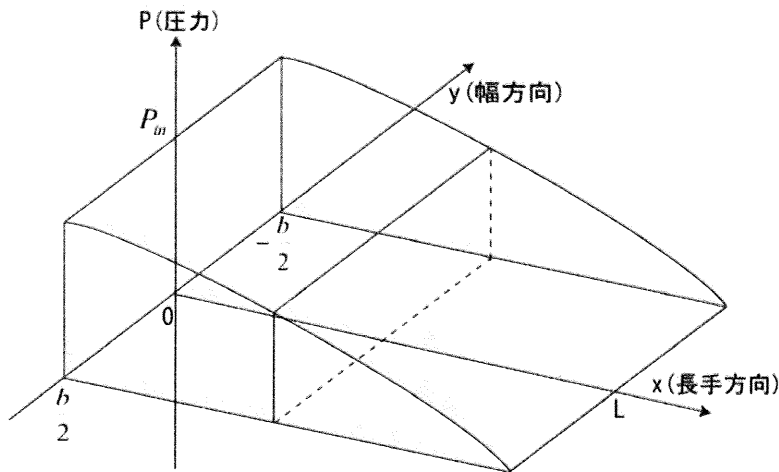


Fig.4-3 無限幅近似における流路内圧力分布

4.4.2 無限小幅近似

本節では、無限幅近似を施したときの剛体板の応答を解析的に求める。レイノルズ方程式は、

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (4-43)$$

となる。境界条件は流路両端が大気圧に開放されていることから、

$$P\left(\pm \frac{b}{2}\right) = 0 \quad (4-44)$$

であり、境界条件を満たすように積分定数を定めると、

$$P = \frac{6\mu}{h_0^3} \frac{\partial w}{\partial t} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \quad (4-45)$$

となる。流路内圧力分布のイメージはFig.4-4の通りである。式(4-45)をx,y両方向に積分し、剛体板の中心に集中加重していると考えると

$$P_C = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_0^L P dx \right) dy = -\frac{b^3 \mu L}{h_0^3} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4-46)$$

であり、剛体板の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{b^3 \mu L}{m h_0^3} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (4-47)$$

と求まる。この式を初期条件の式(4-40),(4-41)のもとに解くと、剛体板の応答は以下の

数式で表される.

$$w(t) = \frac{mh_0^3 v}{b^3 \mu L} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{b^3 \mu L}{mh_0^3} t\right) \right\} \quad (4-48)$$

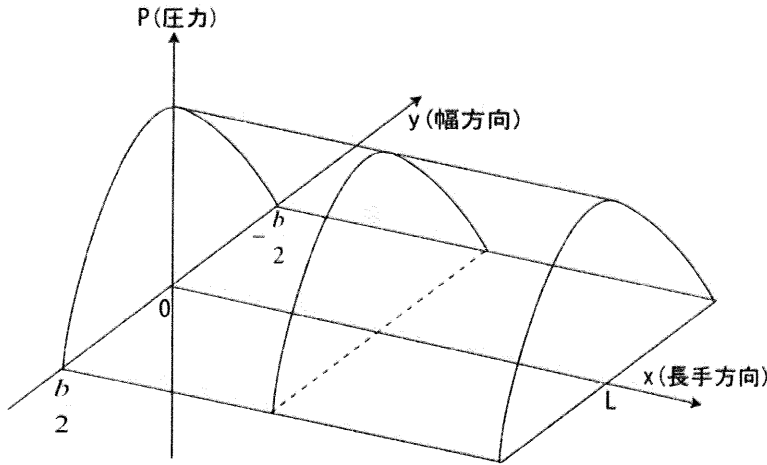


Fig.4-4 無限小幅近似における流路内圧力分布

4.4.3 有限幅近似

本節では4.5節で提案した幅方向圧力分布の近似手法を施したときの剛体板の応答を解析的に求める. なお, この近似手法を今後は有限幅近似と呼ぶことにする. 剛体板モデルの特徴として, 剛体板の高さがx方向に一定であることから

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4-49)$$

である. これを式(4-32)に代入して整理すると, $f(x,t)$ の x についての2階線形偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_1 f(x,t) = \beta_1 \frac{\partial w(t)}{\partial t} \quad (4-50)$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy}{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g dy} \quad (4-51)$$

$$\beta_1 = \left(1 / \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g dy \right) \frac{12 \mu b}{h_0^3} \quad (4-52)$$

ここで式(4-50)の右辺は x に無関係なので特解は

$$f = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4-53)$$

であり、基本解は右辺を0と置いた以下の数式を解くことで得られる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha_1 f = 0 \quad (4-54)$$

基本解と特解を重ね合わせることで一般解が得られる。

$$f(x, t) = X_1 \exp(-\alpha_1 x) + X_2 \exp(-\alpha_1 x) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4-55)$$

但し X_1 と X_2 は積分定数である。この式を式(4-29)へ代入し、 y 方向圧力分布と合成すると流路内圧力分布の一般解が以下のように求まる。

$$P(x, y, t) = \left\{ X_1 \exp(-\alpha_1 x) + X_2 \exp(-\alpha_1 x) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} g(y) \quad (4-56)$$

ここで境界条件は以下の通りである。

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} P(0, y, t) dy = \left(X_1 + X_2 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g dy \right) = P_A b \quad (4-57)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} P(L, y, t) dy = \left(X_1 \exp(-\alpha_1 L) + X_2 \exp(-\alpha_1 L) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g dy \right) = 0 \quad (4-58)$$

この境界条件を満たすように積分定数を定めると、以下の通りである。

$$X_1 = \alpha_2 + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4-59)$$

$$X_2 = \alpha_3 + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4-60)$$

$$\alpha_2 = \frac{P_A b}{\varepsilon_1 \{1 - \exp(2\sqrt{-\alpha_1} L)\}} \quad (4-61)$$

$$\beta_2 = -\frac{\beta_1 \{1 - \exp(\sqrt{-\alpha_1} L)\}}{\alpha_1 \{1 - \exp(2\sqrt{-\alpha_1} L)\}} \quad (4-62)$$

$$\alpha_3 = \frac{P_A b}{\varepsilon_1 \{1 - \exp(-2\sqrt{-\alpha_1} L)\}} \quad (4-63)$$

$$\beta_3 = -\frac{\beta_1 \{1 - \exp(-\sqrt{-\alpha_1}L)\}}{\alpha_1 \{1 - \exp(-2\sqrt{-\alpha_1}L)\}} \quad (4-64)$$

以上で求めた積分定数を式(4-56)へ代入すると以下のように流路内圧力分布が定まる.

$$P(x, y, t) = \left\{ \left(\alpha_2 + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial t} \right) \exp(\sqrt{-\alpha_1}x) + \left(\alpha_3 + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial t} \right) \exp(\sqrt{-\alpha_1}x) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} g(y) \quad (4-65)$$

また流路内圧力分布のイメージは Fig4-5 のようになる.

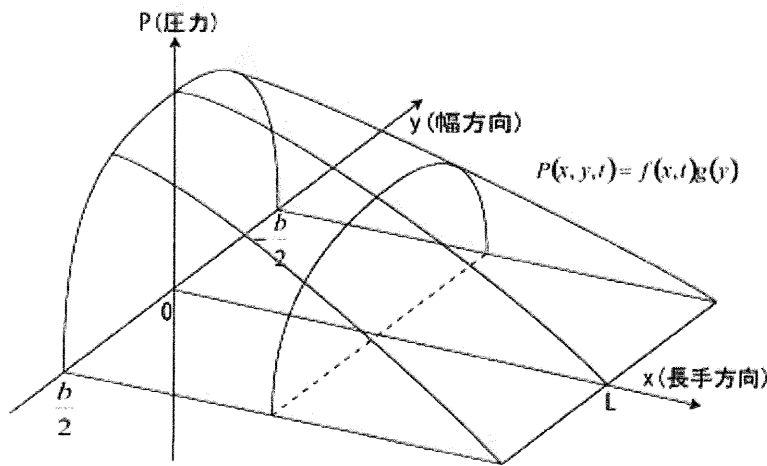


Fig.4-5 流路内圧力分布のイメージ

式(4-57)を x,y 両方向に積分し, 剛体板の中心に集中加重していると考えると,

$$P_C = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^L P(x, y, t) dx dy = \alpha_4 + \beta_4 \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4-66)$$

$$\alpha_4 = \varepsilon_1 \left\{ \frac{\alpha_2}{\sqrt{-\alpha_1}} \{ \exp(\sqrt{-\alpha_1}L) - 1 \} - \frac{\alpha_3}{\sqrt{-\alpha_1}} \{ \exp(-\sqrt{-\alpha_1}L) - 1 \} \right\} \quad (4-67)$$

$$\beta_4 = \varepsilon_1 \left\{ \frac{\beta_2}{\sqrt{-\alpha_1}} \{ \exp(\sqrt{-\alpha_1}L) - 1 \} - \frac{\beta_3}{\sqrt{-\alpha_1}} \{ \exp(-\sqrt{-\alpha_1}L) - 1 \} + \frac{\beta_1 L}{\alpha_1} \right\} \quad (4-68)$$

のように整理される. ここで剛体板の運動方程式は,

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \beta_4 \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha_4 \quad (4-69)$$

であり, 初期条件(4-40),(4-41)について解くと, 剛体板の応答は以下の数式となる.

$$w(t) = -\frac{m}{\beta_4} \left(-\frac{\alpha_4}{\beta_4} - v \right) \left\{ \exp\left(\frac{\beta_4}{m} t \right) - 1 \right\} - \frac{\alpha_4}{\beta_4} t \quad (4-70)$$

式(4-70)に含まれる定数 α_4 と β_4 は遡ればそれぞれ α_1 と β_1 によって支配されていることが重要である。つまり、幅方向圧力分布 $g(y)$ の決め方によって剛体板の応答に影響が出るという意味合いが式(4-70)には含まれている。

4.5 各近似手法の比較

前節では、無限幅近似・無限小幅近似・有限幅近似の3種類の幅方向圧力分布近似手法を施したときの剛体板の応答を解析的に求めた。本節では得られた解析解の比較を行い、新しく提案した有限幅近似で無限幅近似・無限小幅近似の中間的な性質を表現できることを示す。性質比較の指標としては剛体板の応答を用いる。有限幅近似における剛体板の応答変位が無限幅近似・無限小幅近似における剛体板の応答変位の中間値を取ることを示すことで、実際の振動体モデルにおいても有限幅近似によって無限幅近似・無限小幅近似の場合の中間的な強さの振動を起こすことができるとの見通しが立つ。

4.5.1 幅方向圧力分布形状の決定

本節では、解析解の比較を行う前に問題となる、有限幅近似における幅方向圧力分布 $g(y)$ の決定方法について述べる。そのために流路内圧力分布を2次元で解くシミュレータを構築する。ここで流路内圧力分布と振動体の変形を同時に2次元で解くと計算量が膨大になり解が発散することが予想される。従って、今回は振動体の変形・変位を完全に無視することにする。振動体の微小振動が流路内圧力分布に与える微小な影響はあるだろうが、幅方向圧力分布の大まかな傾向を損ねるほど影響するとは考えにくい。そこで今回も4.3節で述べた剛体板モデルを採用し、さらに剛体板が静止したままであると見なす。要するに剛体板と流路下部に挟まれた領域の圧力分布を求めるという単純な問題であり、今後の説明のためにこのモデルを剛体板静止モデルと呼ぶことにする。この2次元シミュレータを用いて流路内圧力分布を直接計算し、得られた結果から幅方向圧力分布の傾向を掴む。但しここでは流体が非圧縮性を持つと仮定した場合の流路内圧力分布を求める。2次元レイノルズ方程式は以下の通り。

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (4-71)$$

剛体板静止モデルにおいては流路高さが一定であることと、流路内における流体の密度が時間に関わらず一定であることを考慮すると、

を示している。

この結果から言えることは、幅方向圧力分布が上に凸の n 次関数形状を描いていることである。また長手方向には圧力は指数関数状に減少していく。流体は流入時点で幅方向に長方形の関数形状を持ち、一格子分進行すると n 次関数形状に移行する。長手方向に進行するにつれて n の値が徐々に下がり、流出端付近では放物線形状に近づいている。すなわち x 座標が大きくなるにつれて幅方向圧力分布関数の曲率が下がっていく。そこで幅方向の圧力分布関数について各格子での値ではなく関数の曲率について比較することを考える。シミュレーション結果から得られた圧力分布について、各 x 座標に対応する幅方向圧力分布の頂点が全て入力圧力に一致するよう表示方法を変更し、その結果を Fig.4-9 に示す。

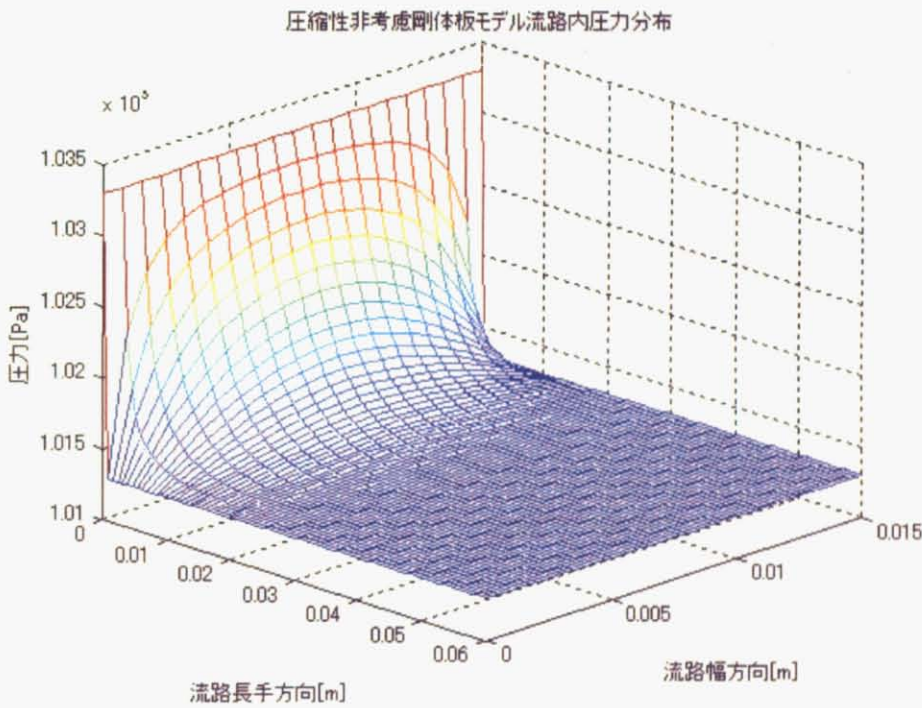


Fig.4-6 境界圧力が大気圧の場合の流路内圧力分布(全体像)

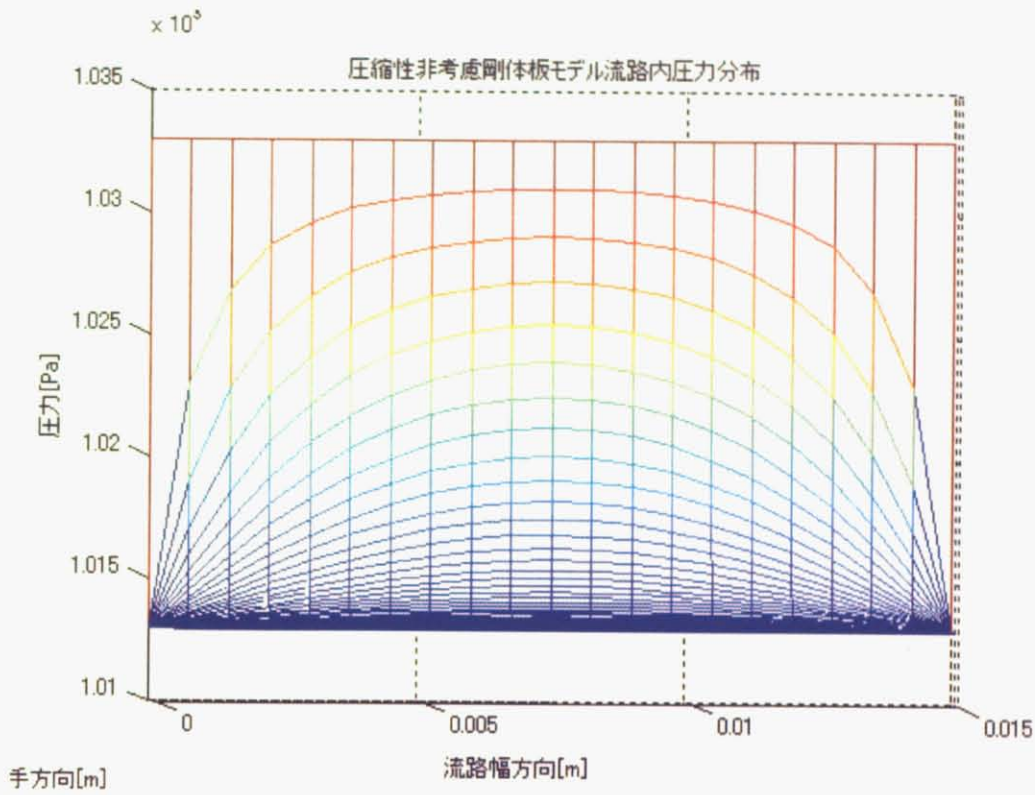


Fig.4-7 境界圧力が大気圧の場合の流路内圧力分布(幅方向)

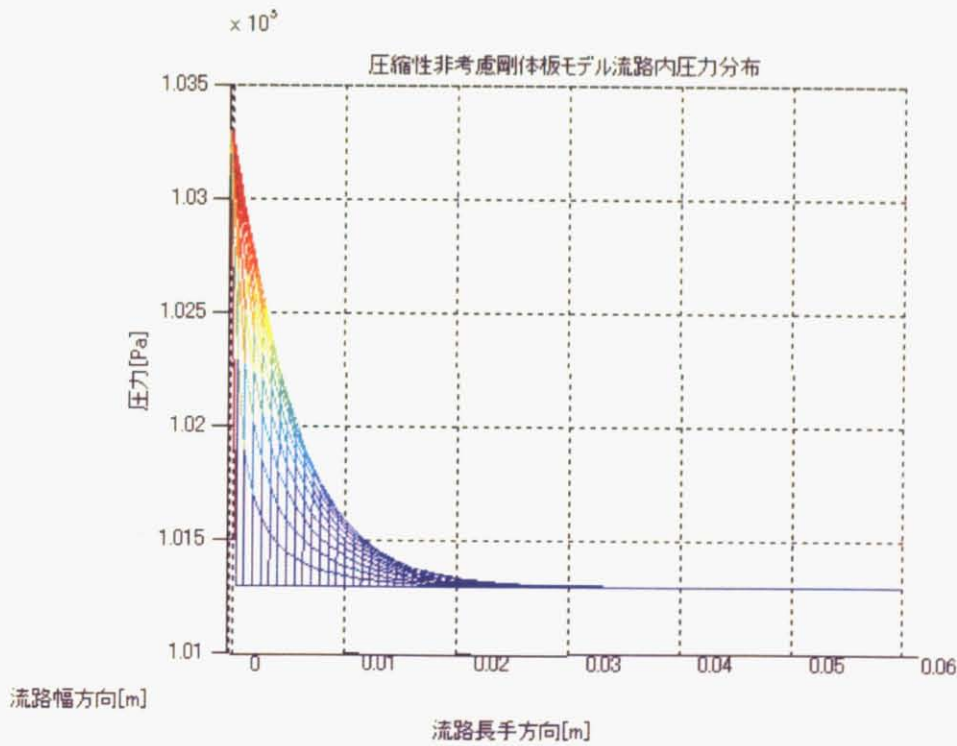


Fig.4-8 境界圧力が大気圧の場合の流路内圧力分布(長手方向)

以上より幅方向圧力分布関数が n 次関数形状に仮定することが妥当であるとの根拠を得た。

Fig.4-9 は有限幅近似の幅方向圧力分布形状を無限幅近似・無限小幅近似の中間形状に設定することを単純化して表現した図である。流路内圧力分布は幅方向の積分値、すなわち圧力の総量に相当する力を剛体板に加え、それにより剛体板の変位速度が決定されると予測される。ここで $g(y)$ を以下の数式におく。

$$g(y) = -y^{2n} + \left(\frac{b}{2}\right)^{2n} \quad (4-77)$$

この関数形状の特徴を要約する。1つ目は流路両端で $g(y)$ が0に等しくなり、それは流路両端における境界圧力が大気圧に等しいことを意味する。二つ目は n の値を増やすにつれて曲率が小さくなることである。 $n=1$ のときには関数形状は無限小幅近似を表現できる。また n を十分に大きく取ると無限幅近似に限りなく近い関数を表せる。

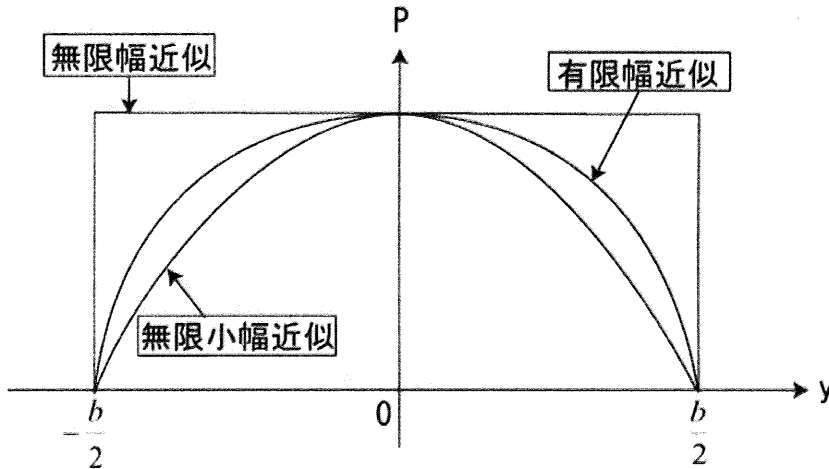


Fig.4-9 幅方向圧力分布

4.5.2 剛体板の変位速度の比較

前節で得られた幅方向圧力分布関数形状を有限幅近似に代入することで、有限幅近似の解析解が定まる。本節では幅方向圧力分布についての3通りの近似手法を施したときの剛体板の変位速度を比較する。

ここで解析解に代入するパラメータの値をtable4-1に示す。基本的には実験機の値を用いているが、初速度 v の値については予測の範囲内で設定するしかない。そこで数通りの v の値について各近似手法における剛体板の応答変位を比較することにする。また本解析解は微小変位においてのみ有効であるため、経過時間は十分に短く取った。

Fig.4-10, Fig.4-11, Fig.4-12はそれぞれ $v=0, 0.001, 0.005$ の場合における剛体板の応答変位を表す。初速度を一定以上大きくすると、初速度が剛体板の変位に対して支配的になり、幅方向近似による差異が隠れて見えないので、初速度は低く取った。 v がいずれの値を取っても有限幅近似を施した場合の剛体板の応答変位が無限幅近似・無限小幅近似を施した場合の剛体板の応答変位の中間に位置していることが確認できる。従って、有限幅近似によって無限幅近似・無限小幅近似の中間的な圧力の強さを表せることが分かった。

また、有限幅近似において n の値を大きくするにつれて剛体板の応答変位が小さくなっていることが分かる。予測では、幅方向圧力分布関数形状の曲率が大きい程、幅方向の積分値が大きくなり、剛体板の中心にかかる圧力の集中加重の影響が強くなると思われたが、それに反した予想外の結果となった。この結果は、剛体板の応答変位に影響を与えるパラメータとして、幅方向圧力分布関数の積分値以外の何らかのパラメータが存在することを示唆している。それについては次章で考察し解決策を示す。いずれにしても幅方向圧力分布の各近似方法から得られた解析解の比較により、剛体板モデルの場合に関して、有限幅近似により無限幅近似・無限小幅近似の中間的な大きさの変位速度を実現できる可能性を見出したと言える。

Table4-1 代入パラメータ

代入パラメータ	パラメータの値
流路長 L [m]	55×10^{-3}
流路幅 b [m]	14.5×10^{-3}
粘性減衰係数 μ [Pa · s]	1.809×10^{-5}
剛体板質量[kg]	55×10^{-6}
流路高さ h_0 [m]	275×10^{-6}
初速度 v [m/s]	0~0.01
入力圧力 P_A [Pa]	5.0×10^3

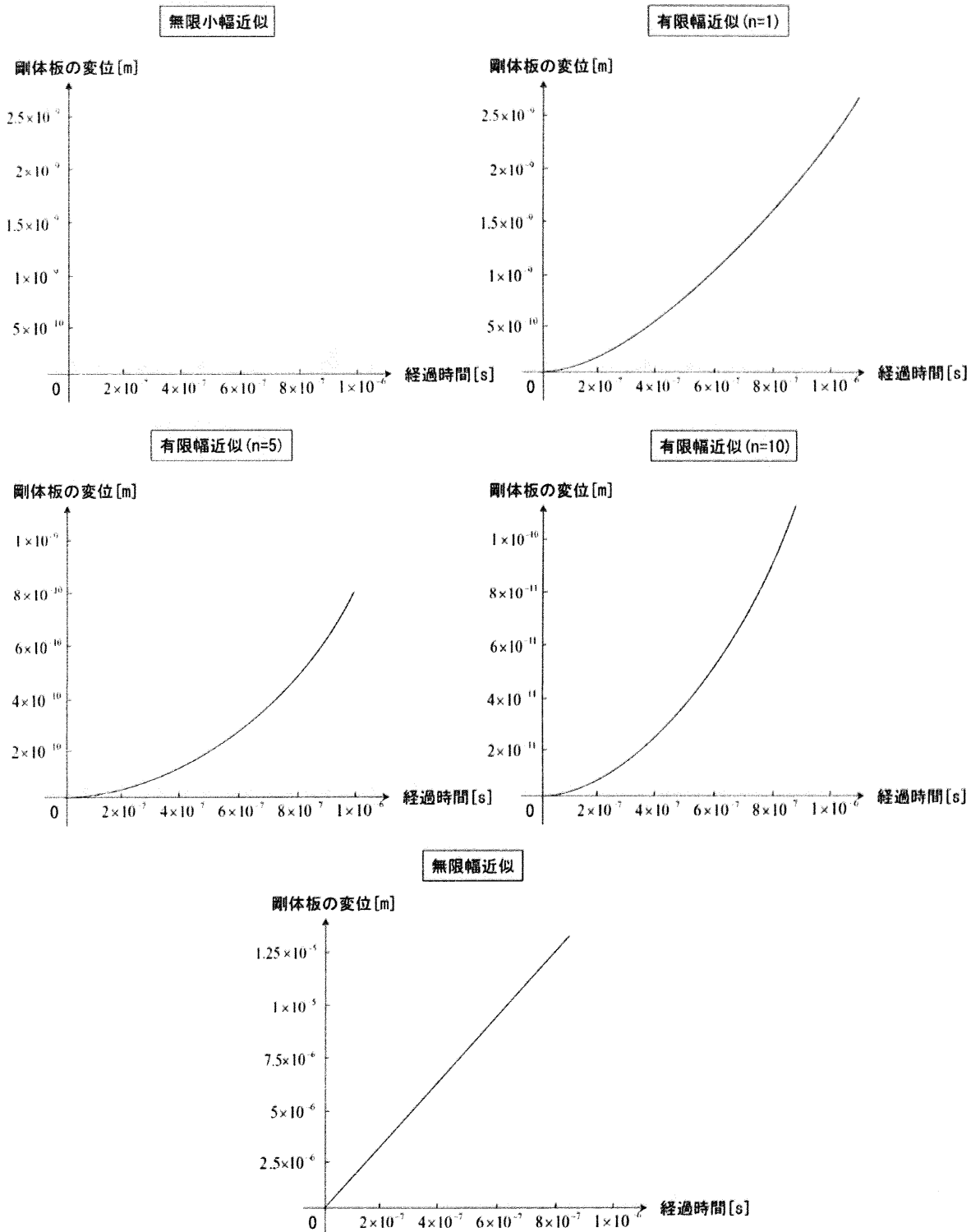


Fig.4-10 剛体板の応答($v=0$ [m/s])

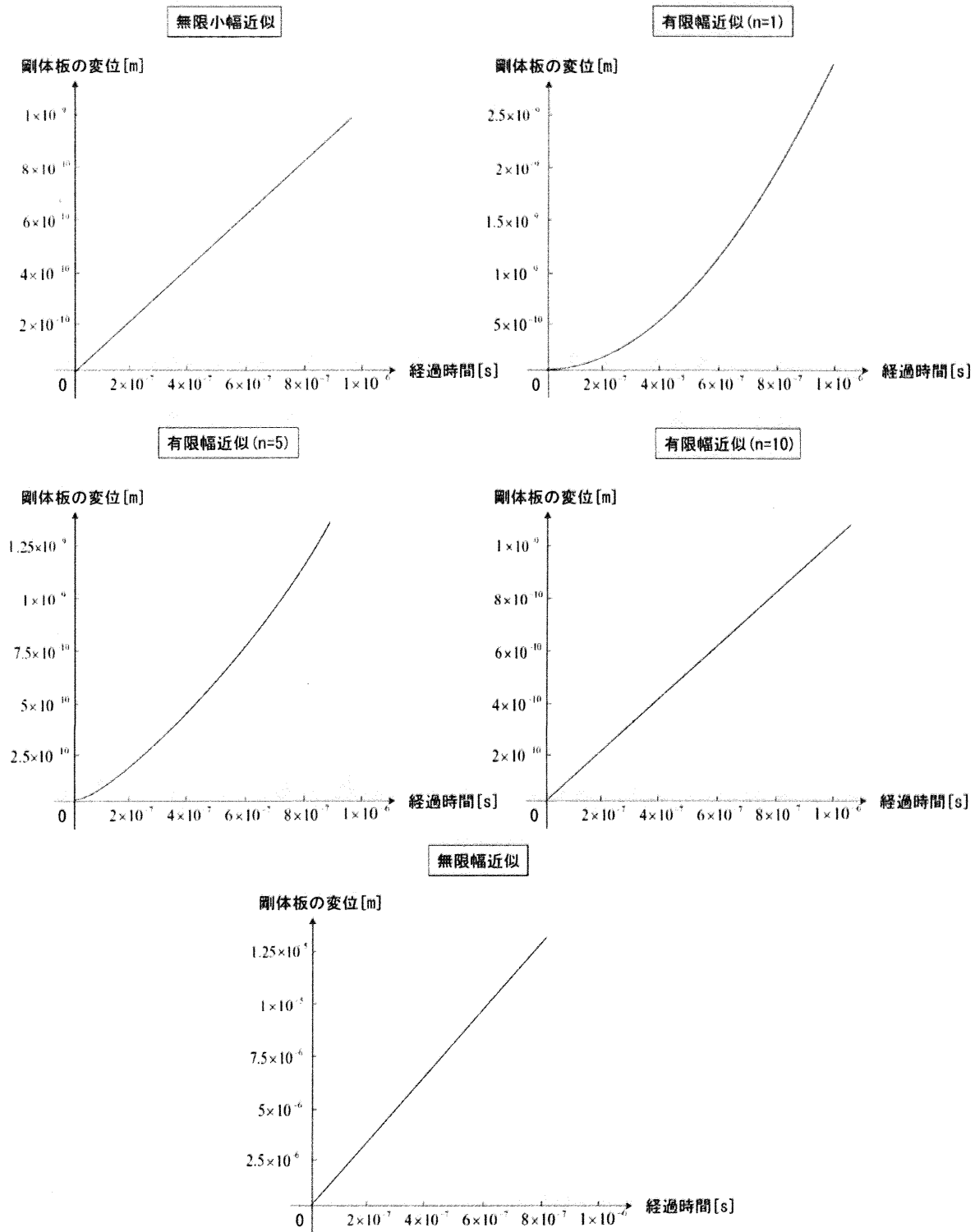


Fig.4-11 剛体板の応答($v=0.001$ [m/s])

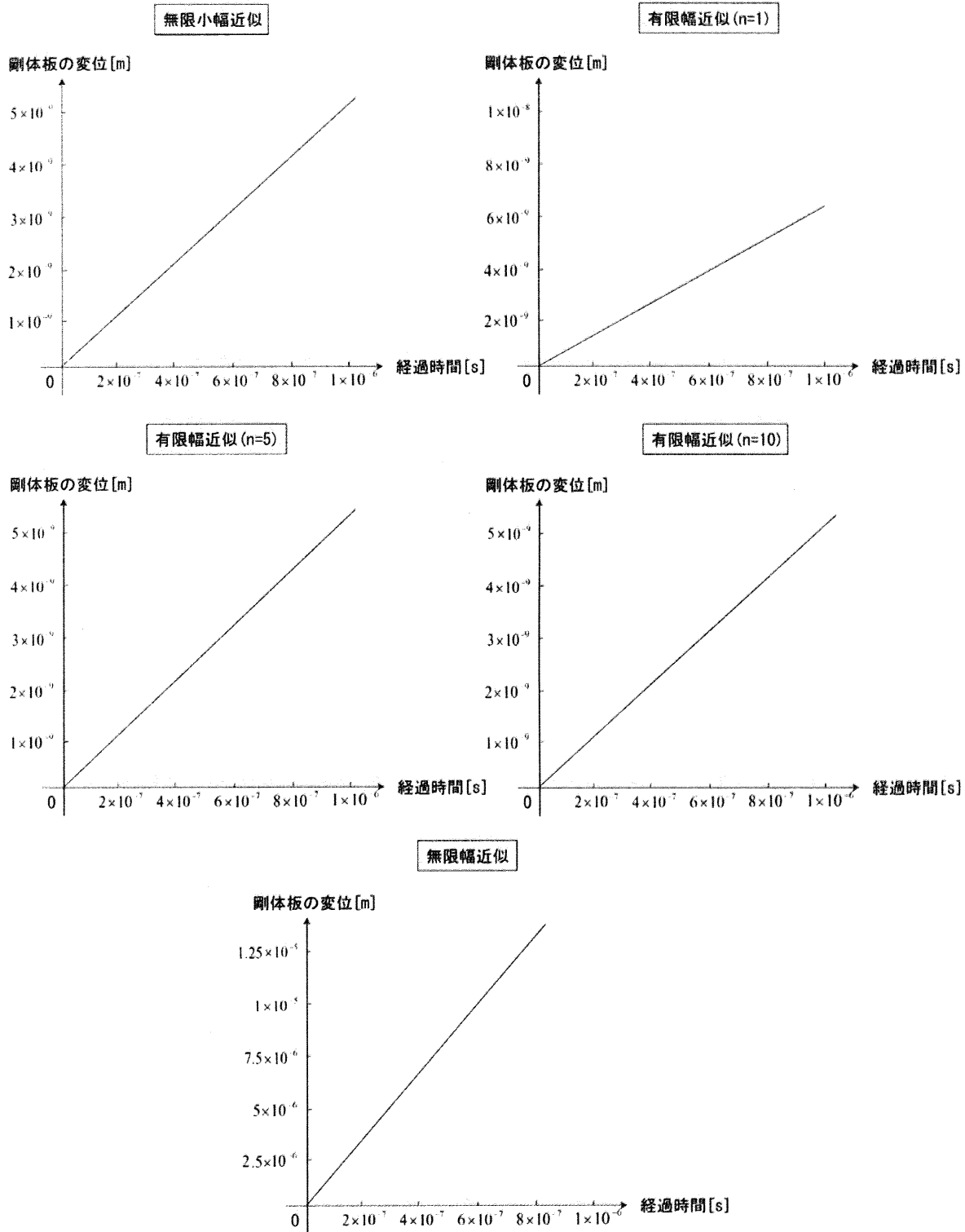


Fig.4-12 剛体板の応答($v=0.005$ [m/s])

4.6 結言

本章ではシミュレータにおける自励振動を実験の実験の自励振動に近づけるために必要な幅方向圧力分布の近似手法について議論した。

4.2節では無限幅近似と対照的な近似手法である無限小幅近似を施した場合に、振動体が自励振動を起こさないことを証明した。これにより実験機における振動体の自励振動を表現するには無限幅近似・無限小幅近似の中間的な性質を持つ新たな近似手法の提案が必要であることが分かった。

4.3節では新たな幅方向圧力分布を提案した。幅方向圧力分布については自分で仮定し、 y 方向に積分した2次元レイノルズ方程式を満たすよう流路内圧力分布を決定する手法で有限幅近似と名付けた。また、解析解を求める途中で非線形偏微分方程式を線形化するために、剛体板モデルを仮定することが有効であることを示した。

4.4節では剛体板静止モデルを仮定した2次元シミュレータを構築し、2次元レイノルズ方程式を幅方向についても解くことで、有限幅近似における幅方向圧力分布関数形状を決定する根拠を得た。すなわち幅方向圧力分布を n 次関数形状に仮定し、 n の値を増加させるにつれて無限小幅近似から無限幅近似までの流路内圧力分布を表現できることが分かった。最後に幅方向圧力分布についての3通りの近似手法を施した場合の剛体板の変位速度を比較することで、有限幅近似により無限幅近似・無限小幅近似の中間的な圧力の影響を表現できる可能性を得た。

以上の理論解析により、実際の実験機により近いシミュレータの構築に際して、新しく提案した有限幅近似が有効であることが示せた。すなわち、無限幅近似では自励振動が起こり過ぎ、無限小幅近似では自励振動が全く起こらないという問題を解決すべく、それら2通りの近似手法を融合した有限幅近似により、幅方向圧力分布関数 $g(y)$ を調節するだけで実験機を反映した自励振動の強さを制御することができる可能性を見出した。