

東京大学大学院新領域創成科学研究科
人間環境学専攻

修士論文

残留応力を考慮した X-FEM き裂進展解析

2007年2月20日提出

指導教員 鈴木 克幸 助教授 印

学生証番号 56799

中川 玲

目次

第1章 序論	1
1.1 研究背景	2
1.1.1 計算機を用いた設計について	2
1.1.2 メッシュフリー法	3
1.1.3 き裂進展解析	4
1.2 本研究に関連した既往の研究	5
1.2.1 き裂進展解析における現状での取り組み	5
1.2.2 X-FEM 研究の経緯	5
1.3 本論文の目的と構成	7
第2章 理論	8
2.1 破壊力学	9
2.1.1 応力拡大係数	9
2.1.2 エネルギー解放率と J 積分	11
2.1.3 混合モードき裂における K 値の評価	13
2.1.4 境界積分から領域積分への変換—領域積分法—	16
2.2 X-FEM	19
2.2.1 X-FEM とは	19
2.2.2 X-FEM における変位の近似式	19
2.2.3 剛性マトリクスの導出 (2次元)	20
2.2.4 剛性マトリクスの導出 (3次元)	24
2.3 X-FEM における接触の考慮	27
2.4 残留応力の考慮	31
2.5 き裂進展	33
2.5.1 き裂進展方向	33
2.5.2 き裂進展速度	33
2.5.3 き裂進展解析の流れ	34
第3章 X-FEM によるき裂進展解析	35
3.1 2次元数値解析例	36
3.1.1 エッジクラックの解析	36
3.1.2 一様引き張り力を受ける斜めき裂	40

3.1.3 フィレット部分に発生したき裂の進展解析.....	42
3.2 接触を考慮したき裂進展解析	44
3.3 残留応力を含む数値解析例	46
3.4 3次元数値解析例	49
第4章 鋼床版への適用	51
4.1 はじめに	52
4.2 デッキ貫通型き裂の再現試験	54
4.3 X-FEM によるデッキ貫通型き裂の進展解析（2次元モデル）	56
4.4 溶着金属部の範囲を変えた場合のき裂進展経路の変化の予測.....	60
4.5 寿命推定	62
4.6 形状を変化させた場合の寿命の変化の予測	64
4.7 X-FEM によるデッキ貫通型き裂の進展解析（3次元モデル）	67
第5章 結論	73
参考文献	75
謝辞	78

目次

図 1.1.1	メッシュ生成アルゴリズムの例	3
図 2.1.1	き裂の変形モード	9
図 2.1.2	き裂端付近の局所座標系	10
図 2.1.3	J 積分の経路	12
図 2.1.4	相互積分法の場合	13
図 2.1.5	領域積分法の場合	16
図 2.1.6	関数 q の形状とその空間微分 (コンターは局所座標系における dq/dx の値)	18
図 2.2.1	き裂端近傍の変位	19
図 2.2.2	X-FEM における節点のエンリッチ	20
図 2.2.3	き裂面・き裂端周辺の座標系	21
図 2.2.4	3次元き裂における座標系の定義	24
図 2.3.1	境界値問題概念図	27
図 2.3.2	反復手順	28
図 2.4.1	溶接部	31
図 2.5.1	き裂進展方向	33
図 3.1.1	エッジクラック	36
図 3.1.2	重み関数 q の形状	37
図 3.1.3	各重み関数 q に対する無次元化した応力拡大係数	38
図 3.1.4	き裂線の長さ a に対する無次元化した応力拡大係数	39
図 3.1.5	一様引き張り力を受ける斜めき裂	40
図 3.1.6	一様引き張り力を受ける斜めき裂の解析に用いたメッシュ (2025 要素)	40
図 3.1.7	一様引き張り力を受ける斜めき裂の応力拡大係数	41
図 3.1.8	フィレット部分に発生したき裂の解析モデル	42
図 3.1.9	フィレット部分に発生したき裂の進展経路	43
図 3.2.1	一様圧縮力を受ける斜めき裂	44
図 3.2.2	き裂進展経路 (実験, 接触を考慮しない場合, 接触を考慮する場合)	45
図 3.3.1	斜接手試験片	46
図 3.3.2	斜接手試験片の解析に用いたメッシュ (570 要素)	46
図 3.3.3	温度分布 (斜接手試験片)	47
図 3.3.4	残留応力分布 (斜接手試験片)	47

図 3.3.5	き裂進展経路 (シミュレーション)	48
図 3.3.6	き裂進展経路 (実験)	48
図 3.4.1	エッジクラック	49
図 3.4.2	き裂を含む要素内の座標系の定義	50
図 3.4.3	き裂線の長さ a に対する応力拡大係数	50
図 4.1.1	鋼床版でひび割れが発生しやすい位置[30]	52
図 4.1.2	デッキ貫通型き裂[31]	53
図 4.2.1	試験状況写真	54
図 4.2.2	試験体図面	55
図 4.2.3	貫通き裂状況	55
図 4.3.1	鋼床版の2次元モデルのメッシュ	56
図 4.3.2	Uリブとデッキプレートの溶接部	56
図 4.3.3	温度分布 (溶接部)	57
図 4.3.4	残留応力分布 (鋼床版)	58
図 4.3.5	鋼床版き裂進展経路 (シミュレーション)	59
図 4.3.6	鋼床版き裂進展経路 (シミュレーション)	59
図 4.4.1	完全溶け込みの場合	61
図 4.4.2	(Uリブウェブ厚-溶け込み深さ)を短くした場合	61
図 4.5.1	着目ゲージ位置図	62
図 4.5.2	着目ゲージひずみ値推移	62
図 4.5.3	き裂長推移 (シミュレーション)	63
図 4.6.1	鋼床版	64
図 4.6.2	高さを変える場所	64
図 4.6.3	Uリブの高さ変更後の形状	65
図 4.6.4	幅を変える場所	65
図 4.6.5	Uリブの幅変更後の形状	66
図 4.6.6	各形状の寿命	66
図 4.7.1	鋼床版の3次元モデルのメッシュ (29570 要素)	67
図 4.7.2	鋼床版の3次元モデル (yz 平面)	68
図 4.7.3	温度分布 (溶接部)	68
図 4.7.4	残留応力分布 ($z=0$)	69
図 4.7.5	残留応力分布 ($z=144$)	70
図 4.7.6	鋼床版き裂進展経路 ($-6 < z < 0$)	71

図 4.7.7	き裂長推移 ($-6 < z < 0$)	72
図 4.7.8	き裂長推移 ($132 < z < 144$)	72

第1章 序論

1.1 研究背景

1.1.1 計算機を用いた設計について

現在の工学設計現場においては、計算機を用いた構造解析が日常化しており、さらに設計からシミュレーションまでのプロセスを全て計算機上で行う Computer Aided Engineering (CAE) が広く定着している。そしてその CAE を支援するツールとして、MSC/NASTRAN, ANSYS, MARC, ABAQUS, LS-DYNA 等の汎用コードが数多く開発され、設計現場で使用されている。このような数値解析の信頼性を数理面から支援するのが有限要素法 (Finite Element Method) である。有限要素法は、元来偏微分方程式の境界値問題を数値的に解く手段として開発され、その後、構造・流体・伝熱・電磁気などの物理的現象を数値シミュレーションするための計算手法として広く研究が行われてきた。

広く普及した CAE であるが、未だ解決されていない課題もある。それはメッシュ生成技術の問題である。近年の計算機能力の著しい向上の結果、解析に要する時間は大幅に短縮されたが、それに対して有限要素モデルの作成に要する時間はさほど短縮されていない。というのも、自動メッシュ生成の技術は、2次元においてはほぼ達成されたものの、3次元においては未だ、完全な自動メッシュ生成は不可能であるからである。写像によってメッシュを作成する構造メッシュ生成では、2次元ではデラウニー法、四分木・八分木法、そしてフロント法等 (図 1.1.1) の手法が確立されているものの、3次元においては特に六面体要素の自動メッシュ生成アルゴリズムは確立されていない[1]。

また、応力集中部を精度良く解析するには、その部分のメッシュを詳細に切る必要があること、加えて解析精度を向上させるためには品質の良い (すなわち形状がゆがんでいない) メッシュを作成することが必要であるが、このような要求を満たすメッシュを作成するには専門的な知識を有する人間が必要である。なおメッシュの品質に関して、要素のゆがみと精度の問題に取り組んだ研究が行われている[2]。

このように、自動メッシュアルゴリズムとメッシュの品質という問題が未だ解決されていないため、実際の設計現場では、CAD データを基にメッシュ生成アプリケーションソフトが作成したメッシュを人間が手作業で修正しているのが現状である、したがってメッシュ生成に費やされる人的コストは非常に大きいものとなり、設計コストを大きく押し上げている。また、計算機能力の大幅な向上に伴い、ソルバー部分の計算時間が大幅に短縮されているにも関わらず、設計プロセス全体に要する時間は以前と比べてもそれほど減少していない。

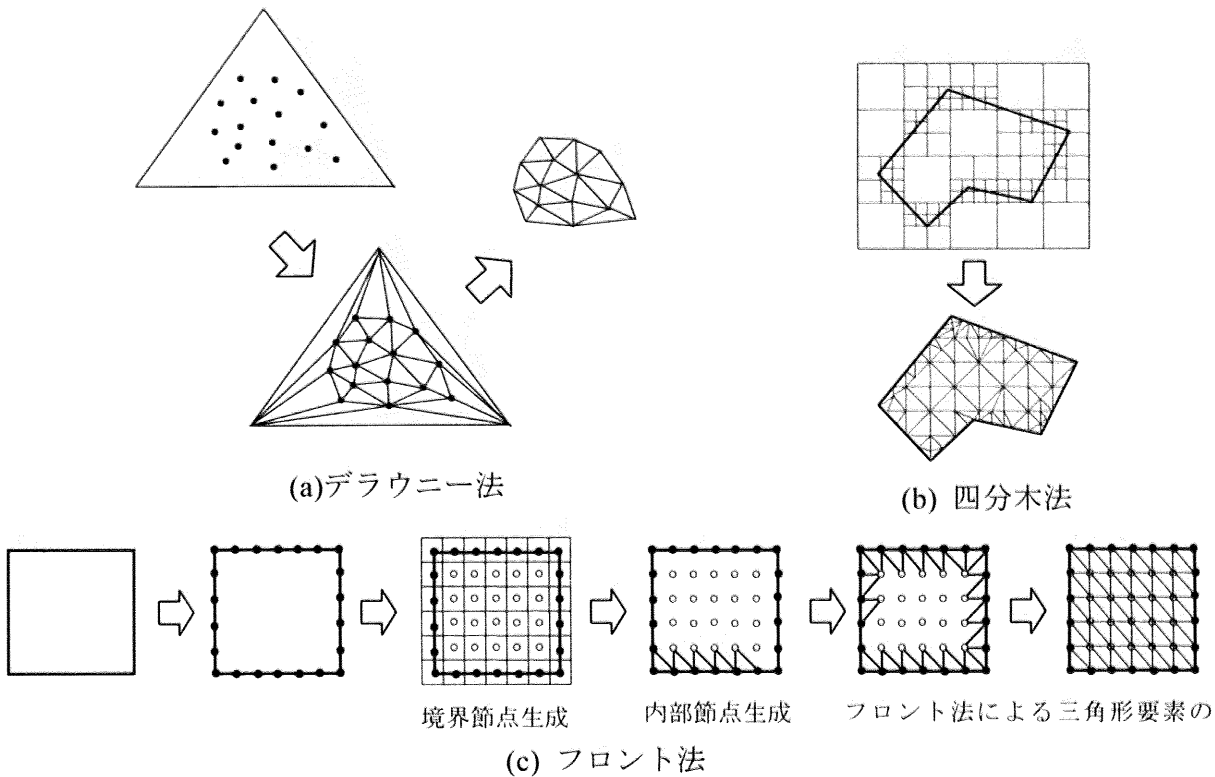


図 1.1.1 メッシュ生成アルゴリズムの例

メッシュ生成と解析精度の向上という2つの課題は、相互に影響しあいながら、計算工学技術の向上を促してきた。過去に多くの研究者達がこれらの問題の解決に取り組んだが、そのアプローチは大きく分けて3つに分類できる。すなわち、アダプティブ法[3]、複数のメッシュを用いる方法（マルチスケール解析、マルチグリッド法、重合メッシュ法など）[4]、そしてメッシュフリー法である。

1.1.2 メッシュフリー法

メッシュフリー法には大きく分けて2つの立場がある。1つは、文字通り要素を必要とせず、領域内に分布する点のデータのみから解析を行うという狭義のメッシュフリー法である。FEMとは数学的な定式化の段階から根本的に異なっており、別体系の計算手法である。もう一つは、解析ソルバー部分では要素に相当するものを使用するものの、プリプロセッシングとメインプロセッシングを連続して（シームレスに）処理するため、ユーザーには要素の存在を意識させない広義のメッシュフリー法である。前者の例としては Element Free Galerkin Method (EFGM)[5]、Moving Particle Semi-implicit Method (MPS)、Smooth Particle Hydrodynamics (SPH)、後者の例としては、Reproducing Kernel Particle Method, Finite Cover Method[6]、Generalized Finite Element Method[7]、Free Mesh Method、Extended Finite Element

Method (X-FEM)[8]が挙げられる。これらの手法は、基本境界条件の課し方が煩雑になるという側面もあることから、従来の有限要素法との対比で考えるならば、いずれもまだ研究段階に留まっており、実用化には至っていないのが現状である。

1.1.3 き裂進展解析

構造設計に求められる最も基本的要求は構造が破壊しないことであり、種々の破壊形態について研究が進められている。主な破壊形態として脆性破壊、崩壊・座屈、疲労破壊があげられる。最近の破壊の傾向の特徴的なことは、脆性破壊及び崩壊・座屈が激減していることである。その要因としては、有限要素法の発達によるところが大きい。有限要素法により、設計時の応力算定が容易になった。その一方で疲労破壊は現在でも散見される。疲労き裂の発生には作用する荷重の大きさや頻度はもとより、溶接部の応力集中や残留応力等多くの因子が影響するため、予測が難しい。

き裂の進展解析を行うことは疲労寿命予測の点から非常に重要である。有限要素法に基づくき裂の進展解析における課題は、き裂が進展するのにもなうリメッシュ作業である。これは特に3次元の場合には非常に多くの労力を必要とする。また、混合モードき裂の応力拡大係数を精度良く求め、き裂進展経路を予測し自動的に進展させるプログラムが必要となる。

本研究では、有限要素法をベースとして、その要素内に不連続面を定義することによりき裂の進展過程でリメッシュを不要とする X-FEM を使用する。

1.2 本研究に関連した既往の研究

1.2.1 き裂進展解析における現状での取り組み

き裂の進展に関しては多くの研究者が取り組んでいる。たとえば西岡ら[9]はデローニー三角分割に基礎をおく移動有限要素法を開発した。これはき裂端を中心として多層の同心円状に節点を配置し、これらをき裂先端とともに移動させるというものである。修正デローニー三角分割法により適応するメッシュは自動的にリメッシュされ、また、内部指定点群はき裂伝播角度に応じて回転するため任意のき裂進展が可能となる。また、角ら[10]は修正4分木自動要素分割法を用いた手法を提案し、き裂伝播経路について全く予断を必要としない数値シミュレーションを行った。さらに解析領域の周辺にスーパーエレメントを結合する手法を導入した。これらはいずれも、従来の有限要素法をベースとしたアプローチである。

一方で、メッシュフリー法によるき裂進展解析の研究も進んでいる。代表的なものは Belytschko らが提案したエレメントフリーガラーキン法 (Element Free Galerkin Method, EFGM) [5]であるが、さらに Fleming らは、き裂端近傍の漸近変位場を表す関数を変位の近似関数に付加することによって解析精度を向上し、2次元き裂進展解析を行った[11]。また、Babuska らによって提案された Generalized Finite Element Method (GFEM)を用いての3次元動的き裂進展解析例[12]も報告されている。

1.2.2 X-FEM 研究の経緯

上に挙げたような一連のメッシュフリー解析手法の一つとして、Belytschko らは、Extended Finite Element Method (X-FEM)と呼ばれる手法を提案した[8]。これは、Babuska らが提案した PU 条件 (Partition of Unity) [13]に基づいて有限要素法を拡張した手法である。

以下に現在までの X-FEM 研究の経緯をまとめる。X-FEM は、EFGM を用いてき裂を解析した研究[5]と同じ発想で、Belytschko らによって提案された。き裂端近傍の漸近変異場を変異の近似式に含めるという発想はもっと以前から取り入れられてきているが、これを PU 条件と関係付けた点に新規性がある。文献[8]では、節点自由度がエンリッチされるのはき裂端漸近変異場だけであり、曲線き裂は、直線き裂を写像することによって扱っていた。そのため長いき裂や3次元き裂面への適用は困難であったのだが、文献[14]では漸近変異場に加えて Heaviside の step 関数が加えられることによりこの問題点が改善され、リメッシュ不要の進展プロセスが確立された。

この任意の不連続面を変位の近似式に適用するという概念は、文献[15]により一般化された。なお、任意の不連続面に関しては、Asai によって X-FEM と FCM が全く等価であることが示された[16]。

続いて、X-FEM とレベルセット法を結合させることが提案された[17]. すなわち、レベルセット法を用いて材料中の含有物や空部の境界面を表現し、エンリッチ処理に反映させようという発想である. このレベルセット法はき裂面の表現にも用いられ、文献[18]では X-FEM とレベルセット法を結合したき裂進展解析が行われた. これによりき裂進展解析がさらに効率的になった.

以上では、全て 2 次元の問題を扱っているが、文献[19]によって初めて 3 次元問題への適用が試みられ、その中でモード I の平面き裂が解析された.

より一般的な任意形状の 3 次元き裂問題への適用は文献[20]にて試みられた. その新規性は、き裂面を 2 つの符号付き距離関数を用いて表現したことにある. また、変位場も同様に符号付き距離関数を用いて表されている. よってき裂面を陽的に表現する必要はなくなり、完全に節点情報のみによって表現されることとなった.

1.3 本論文の目的と構成

近年、鋼床版に疲労き裂が多数発見されている。特にUリブとデッキプレートの溶接部に発生するデッキ貫通型き裂は、発生時のき裂長が比較的長く、交通障害を引き起こす可能性があり、早急の対策が必要とされている。このき裂の発生・進展メカニズムについては、未解明な部分も多く、効果的な補修・補強方法の模索のためには簡便で精度の高いシミュレーション技術が必要とされている。

デッキプレートとUリブ溶接部においては溶着金属の冷却に伴い、残留応力が生じており、き裂の発生、進展に影響を及ぼしている。本論文では、この残留応力の影響を考慮し、X-FEMによるデッキ貫通型き裂の進展解析を行った結果について報告する。本論文は以下の構成で展開する。

まず第2章では、破壊力学の基本的な事項の説明、X-FEMの定式化、接触のある場合の定式化、残留応力の考慮の方法、き裂進展の理論の説明を行う。

第3章では、数値解析例を用いてX-FEMの精度検証、X-FEMに新規に残留応力を考慮する手法の精度検証を行う。

第4章では、第3章で証明した残留応力を考慮した手法を用いて、鋼床版のき裂進展解析及び寿命推定を行い、その結果を検証する。

最後に第5章で結論を述べて本論文をまとめる。

第2章 理論

2.1 破壊力学

本節では、応力拡大係数やJ積分など、き裂進展解析に必要な破壊力学の事項について説明する。

2.1.1 応力拡大係数

き裂は、その近傍の応力分布に最も強い影響を与える。その分布の強さのみに影響し、分布形態には影響を与えない。き裂端近傍の応力場は以下の3つの基本的なモードに分類できる。これら3つの変形モードの線形和により任意の変位場および応力場を記述できる。小規模降伏状態を仮定した線形弾性体の破壊挙動については、応力拡大係数(stress intensity factor) K が、き裂先端近傍の特異応力場を特徴づける破壊力学パラメータとして用いられている。

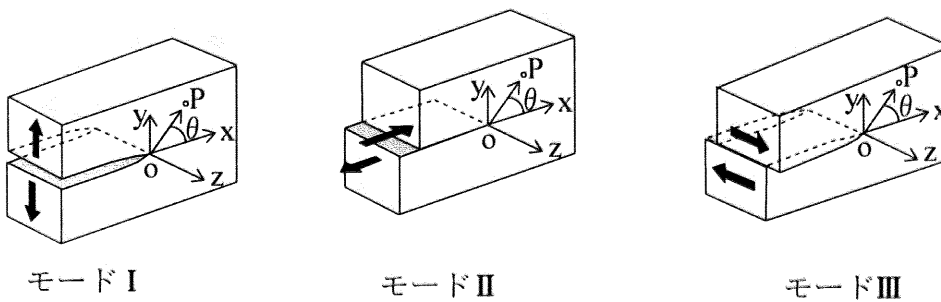


図 2.1.1 き裂の変形モード

線形破壊力学によるき裂の開口変形をここで確認する。き裂端上の1点を原点とする図 2.1.2 の様な直交デカルト座標系を考える。すなわち、き裂面上でき裂前縁と直交する方向を x 軸、き裂面の法線方向を y 軸、き裂前縁の接線方向を z 軸とし、この $x-y$ 面内に極座標系 $(r-\theta)$ を作成する。

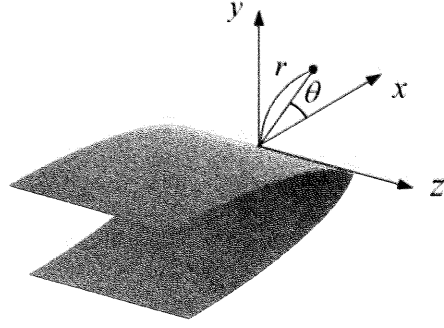


図 2.1.2 き裂端付近の局所座標系

線形破壊力学によれば、き裂端を原点とする局所デカルト座標系における変位 \mathbf{u} , \mathbf{v} は、き裂の開口モード **I** に対しては、

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.1.1)$$

と表され、また、開口モード **II** に対しては、

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ -\cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.1.2)$$

開口モード **III** に対しては、

$$w = \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.1.3)$$

と表される。ただし、

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{Plane strain} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{Plane stress} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

である。また、 G は横剪断係数、 ν は Poisson 比である。

2.1.2 エネルギー解放率と J 積分

(a) エネルギー解放率 (strain energy release rate)

き裂面を持つ弾性体を考え、き裂面の面積を A とする。き裂面が単位面積だけ増加する際に解放されるポテンシャルエネルギー q をエネルギー解放率と呼び、次式で定義する。ただし Π はポテンシャルエネルギーである。

$$q = - \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi}{\delta A} = - \frac{\partial \Pi}{\partial A} \quad (2.1.5)$$

線形弾性体及び小規模降伏状態では、エネルギー解放率と応力拡大係数の間には次式の関係が成立する。

$$q = \frac{1-\nu^2}{2G} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (2.1.6)$$

(b) J 積分 (J-integral)

J 積分は、非線形な挙動をする材料のき裂先端近傍におけるひずみ集中係数の性質を調べる目的で、Rice[21]により最初に導入された。き裂先端の塑性域が拡大して(2.1.1)式 ~ (2.1.3)式の特異場が消失し応力拡大係数とその力学的パラメータとしての意味を失った場合であっても、J 積分は弾塑性破壊力学における破壊条件を記述する上できわめて重要なパラメータとなるのである。その定義を以下に述べる。

以下の図に示すような2次元のき裂モデルを考える。 x_1 軸はき裂面と平行にあるものとし、経路 Γ は図のように、き裂の一方の面から出発し、き裂先端を反時計回りに囲んで、き裂の他面で終わる任意の曲線とする。また、表記を簡潔にするため、以下ではテンソルの添え字表記を行う。まず、ひずみエネルギー密度 (strain energy density) を次式で定義する。

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2.1.7)$$

このとき、J 積分を次式で定義する。

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Gamma \quad (2.1.8)$$

ここで、 T_i , u_i は経路 Γ 上の表面応力及び変位ベクトルであり、経路 Γ に沿う外向き法線ベクトルを n_j ($j=1,2$) とすると、以下の関係が成り立つ。

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (i=1,2) \quad (2.1.9)$$

また、J 積分の値は、その積分経路 Γ に依存しないことが知られている (経路独立性)。

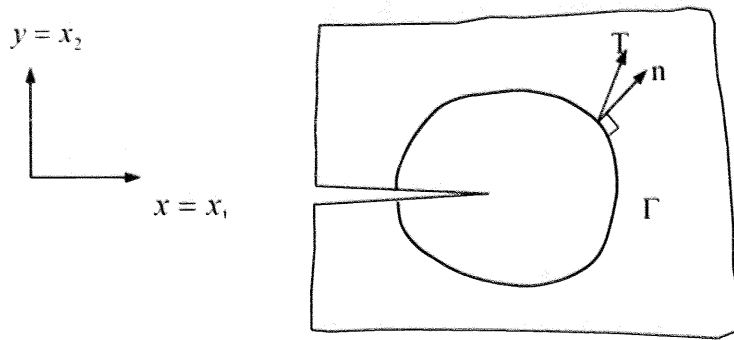


図 2.1.3 J 積分の経路

(c) エネルギー解放率と J 積分の関係

そして重要な特徴として、線形弾性体（及び小規模降伏）の場合には、次式が成り立つ。

$$J = \frac{1-\nu^2}{2G} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (2.1.10)$$

すなわち、J 積分とエネルギー解放率は等価である。一般にエネルギー法による解は、ある領域内での平均値を求めていることになるので、き裂端近傍における要素分割に比較的鈍感である。き裂端近傍のごく近傍に積分経路をとった場合を除けば、比較的粗い要素分割でも精度の高い解析が期待できる。

2.1.3 混合モードき裂における K 値の評価

(2.1.10)式によると、J 積分を用いての応力拡大係数の算出では、混合き裂のモード分離を行うことができない。単一モードき裂でなければ K 値を求めることはできない。

混合モードき裂の K 値を求める方法として、VCCM (Virtual Crack Closure Method)[22]などが提案されている。本論文では、2次元の混合モードき裂の K 値算出に interaction integral method と呼ばれる手法を用いる。2次元問題における混合き裂の応力拡大係数を数値的に求める interaction integral method は文献[23]によって初めて導入された。その後、Moran, Gosz *et al.* は interaction energy integral approach を使って3次元平面き裂の応力拡大係数を求めた。以下ではこの手法の概略を説明する。

J 積分の値 (J 値) は、き裂端周辺の応力・ひずみ・変位の関数である。いま、ある形状のき裂に対して、実際に K 値を求めたい現実の状態 (actual state field: $J = J(\boldsymbol{\sigma}^{act}, \boldsymbol{\varepsilon}^{act}, \mathbf{u}^{act})$) と、補助状態 (auxiliary state field, $J = J(\boldsymbol{\sigma}^{aux}, \boldsymbol{\varepsilon}^{aux}, \mathbf{u}^{aux})$) を想定し、さらにそれらを重ね合わせた状態を考える (図 2.1.4 参照)。

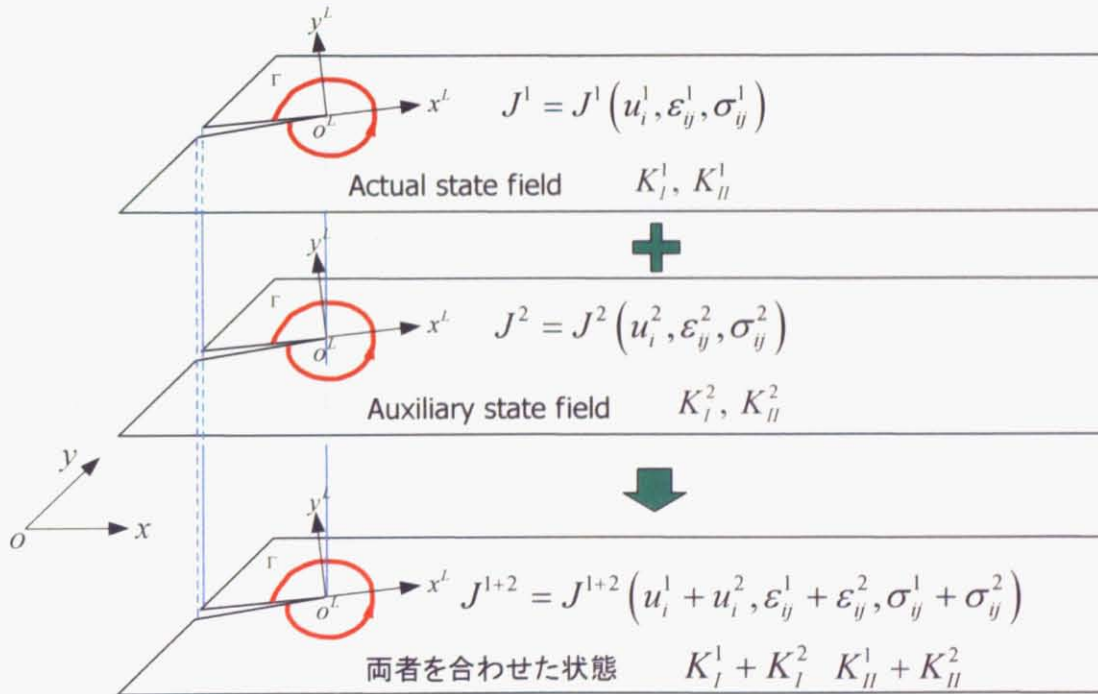


図 2.1.4 相互積分法の概念

この場合、

$$\begin{cases} K_I^{act+aux} = K_I^{act} + K_I^{aux} \\ K_{II}^{act+aux} = K_{II}^{act} + K_{II}^{aux} \end{cases} \quad (2.1.11)$$

が成り立つことは自明のこととする。

両者を重ね合わせた状態で実行した J 積分の式を展開することにより次式が得られる。

$$J(\boldsymbol{\sigma}^{act} + \boldsymbol{\sigma}^{aux}, \boldsymbol{\varepsilon}^{act} + \boldsymbol{\varepsilon}^{aux}, \mathbf{u}^{act} + \mathbf{u}^{aux}) = J(\boldsymbol{\sigma}^{act}, \boldsymbol{\varepsilon}^{act}, \mathbf{u}^{act}) + J(\boldsymbol{\sigma}^{aux}, \boldsymbol{\varepsilon}^{aux}, \mathbf{u}^{aux}) + I^{(act,aux)} \quad (2.1.12)$$

ここで、右辺の $I^{(act,aux)}$ は interaction integral と呼ばれ、次式のように計算される。

$$I = \int_{\Gamma} \left[W^{(act,aux)} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(act)} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{act}}{\partial x_j} \right] n_j d\Gamma \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.1.13)$$

ただし $w^{(act,aux)}$ は interaction strain energy と呼ばれ次式で定義される。

$$W^{(act,aux)} = \sigma_{ij}^{act} \varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}^{act} \quad (2.1.14)$$

ところで2次元では J 値と応力拡大係数の間には、

$$J = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.1.15)$$

の関係が成り立つ((2.1.10)式参照)。そこで、(2.1.11)式、(2.1.15)式を(2.1.12)式に代入して整理すると、

$$I^{(act,aux)} = \frac{2}{E} (K_I^{act} K_I^{aux} + K_{II}^{act} K_{II}^{aux}) \quad (2.1.16)$$

が導かれる。

ここで、補助状態を純粋なモード I ($K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0$) と仮定してその応力場、ひずみ場、変位場の式を(2.1.16)式に代入すると、

$$K_I^{act} = \frac{E}{2} I^{(act, Model)} \quad (2.1.17)$$

となり、現実状態の K_I 値が得られる。逆に、補助状態を純粋なモード II ($K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1$) と仮定して、その応力場・ひずみ場、変位場の式を(2.1.16)式に代入すると、

$$K_{II}^{act} = \frac{E}{2} I^{(act, ModelII)} \quad (2.1.18)$$

となって、現実状態の K_{II} 値を得ることができる。

なお、(2.1.13)式の計算に際しては座標変換に注意することが必要である。すなわち被積分関数の物理量は全てき裂端形状に基づくローカル座標系 (図 2.1.4 の $o^l - x^l - y^l$ 座標系) で表さなければならない。図 2.1.4 の全体座標系 $o - x - y$ から $o^l - x^l - y^l$ へベクトルを変換する座標変換マトリクスを \mathbf{L} とすると、

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{Local}^{act} = \mathbf{L}^T \mathbf{u}^{act} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{Local}^{act} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\varepsilon}^{act} \mathbf{L} \\ \boldsymbol{\sigma}_{Local}^{act} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}^{act} \mathbf{L} \end{cases} \quad (2.1.19)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{Local}^{aux} = \mathbf{L}^T \mathbf{u}^{aux} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{Local}^{aux} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\varepsilon}^{aux} \mathbf{L} \\ \boldsymbol{\sigma}_{Local}^{aux} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}^{aux} \mathbf{L} \end{cases} \quad (2.1.20)$$

となる. これらを(2.1.13)式に代入して $I^{(act,aux)}$ を求める.

2.1.4 境界積分から領域積分への変換—領域積分法—

(2.1.13)式を計算する場合には経路 Γ を指定する必要があるが、これを領域積分に変換すると数値計算が好都合になる。これは一般に Domain integral method と呼ばれる。すなわち、(2.1.13)式の被積分関数に、ある関数 $q(\mathbf{x})$ を掛け Gauss の発散定理を適用する。

この領域積分法は、異種材料境の界面き裂問題を解くのに適した方法として提案された。この領域積分法では、き裂端周りの輪郭に沿った積分が、そのき裂端を取り囲む有限要素の領域に対する面積（あるいは体積）積分として表現される。

境界積分を領域積分に変換するという過程は数値計算上では有利に働く。それは、き裂端近傍の特異場の挙動を詳細に把握する必要なしに、正確な破壊力学パラメーターを得ることができるからである。

Domain integral method の方法を以下に述べる。(2.1.13)式の境界 Γ の外側にもう一つの境界 Γ_0 を作成する。そして Γ と Γ_0 の間の領域に分布し、

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{on } \Gamma \\ 0 & \text{on } \Gamma_0 \end{cases} \quad (2.1.21)$$

を満たす十分なめらかな任意の関数 $q(\mathbf{x})$ を用意する。(2.1.13)式は、

$$I^{(acr, aux)} = \int_C \left[W^{(acr, aux)} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(acr)} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{acr}}{\partial x_j} \right] q m_j d\Gamma \quad (2.1.22)$$

と表される。ただし、 C は $C = \Gamma + C_+ + \Gamma_0 + C_-$ で定義される閉曲線であり、 m_j は閉曲線 C に対する外向き単位法線ベクトルである（図 2.1.5 参照）。

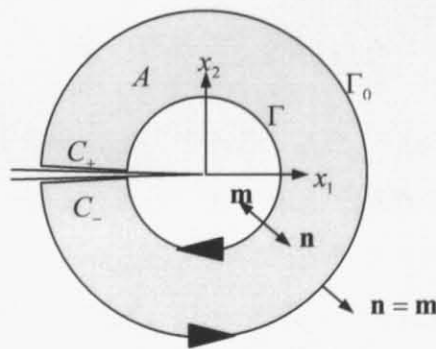


図 2.1.5 領域積分法概念図

「き裂面に外力が課されない」等の条件を用いて式を変換すると最終的に(2.1.23)式が得られる。

$$I^{(act, aux)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(act)} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{act}}{\partial x_j} - W^{(act, aux)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (2.1.23)$$

ただし、 A は閉曲線 C によって囲まれる領域である。そして境界 Γ の半径が 0 になった極限を考える。

ここで問題になるのは関数 $q(\mathbf{x})$ の具体的な形状であるが、 $q(\mathbf{x})$ は(2.1.21)式を満足する十分なめらかな関数であれば、任意のもので良いことが示されている。便利なのは領域 A 内で 1、その外側で 0 となる形、すなわち卓上形である (図 2.1.6)。その勾配を取れば境界 Γ 上の要素のみが $\partial q / \partial x_j \neq 0$ となり、結局、通常の経路積分と全く同じ計算をすることになる。

実際の数値計算に際しては以下のように作成する。すなわち、有限要素によって離散化された空間内での q の値を(2.1.24)式で表す。

$$q = \sum_{I=1}^{mp} N_I Q_I \quad (2.1.24)$$

ここで、 Q_I は節点番号 I の節点が有する節点値であり、 N_I は通常のアイソパラメトリック要素で用いる形状関数である。節点値 Q_I は、たとえば $q(\mathbf{x})$ が図 2.1.6 (a) に示すような円形卓上形状であれば、き裂端を中心とするある半径 r の内部にある節点で 1 を、その外側で 0 の値をとるように指定すればよい。ある境界に沿った経路であれば、方向、すなわちベクトル量を扱わなければならないのに対し、半径のようなスカラー量を扱うのであれば処理が簡単になる。

(2.1.23)式に表れる関数 q の空間微分 $\partial q / \partial x_j$ は、通常のアイソパラメトリック要素と同じ手続きにより求まる。すなわち、

$$\frac{\partial q}{\partial x_j} = \sum_{I=1}^{mp} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial N_I}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} Q_I \quad (2.1.25)$$

ここで $\partial \eta_k / \partial x_j$ は Jacobian マトリクスである。また、 $q(\mathbf{x})$ の値は節点に対して与えることにすると、節点間は、変位・座標と同様に形状関数で補間すれば良く、その勾配もアイソパラメトリック要素と同様の手順で完全に自動的に計算できるので非常に便利である。

このように、領域積分法を用いれば、(2.1.13)式の積分計算を機械的に行うことができる。

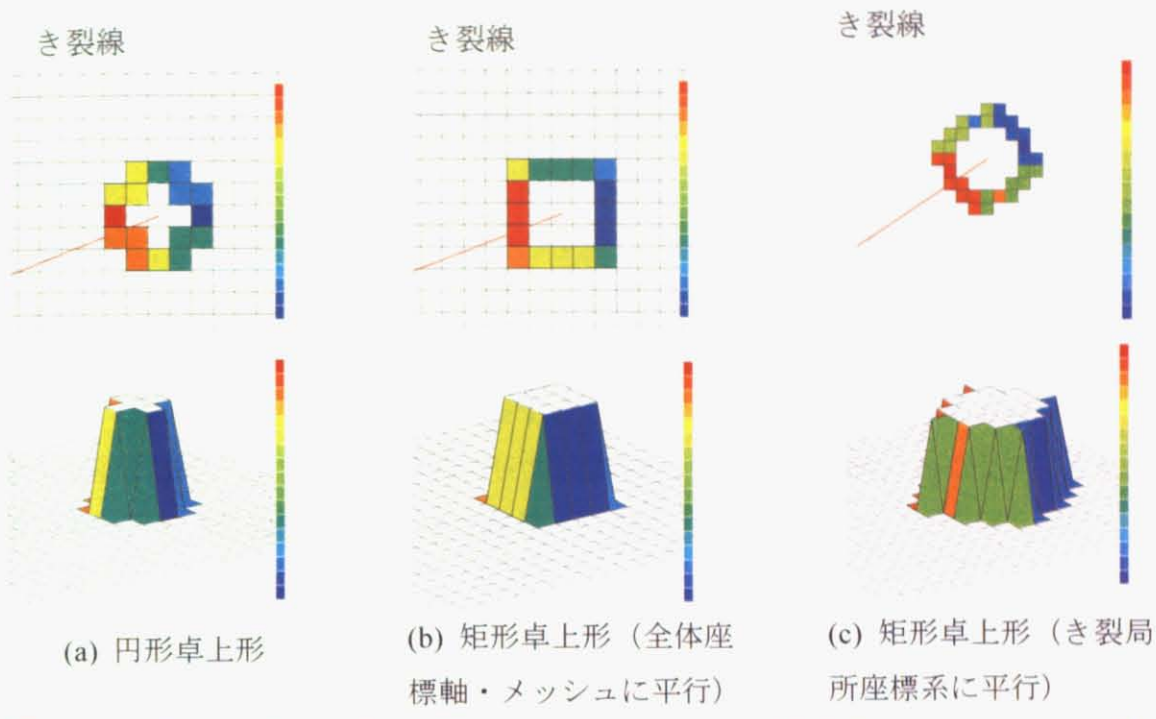


図 2.1.6 関数 q の形状とその空間微分 (コンターは局所座標系における dq/dx の値)

2.2 X-FEM

2.2.1 X-FEM とは

X-FEM は、Babuska ら[13]の PU-FEM の重み関数において重み関数として有限要素法の形状関数を使い、近似関数として要素内でのき裂の不連続性を表す関数およびき裂先端の特異場を表す関数を付加したものである。節点自由度には、通常の変位関数のみならず、き裂面の不連続性を表す関数と、き裂端周辺の特異変位場を表す関数の係数が付加されている。これにより、メッシュにき裂面を陽に表現することなく、変位の近似関数に不連続性を与えることが可能になる。また、き裂が進展してもリメッシュを行う必要はなくなる。これにより有限要素モデルの作成の労力が大きく軽減される。

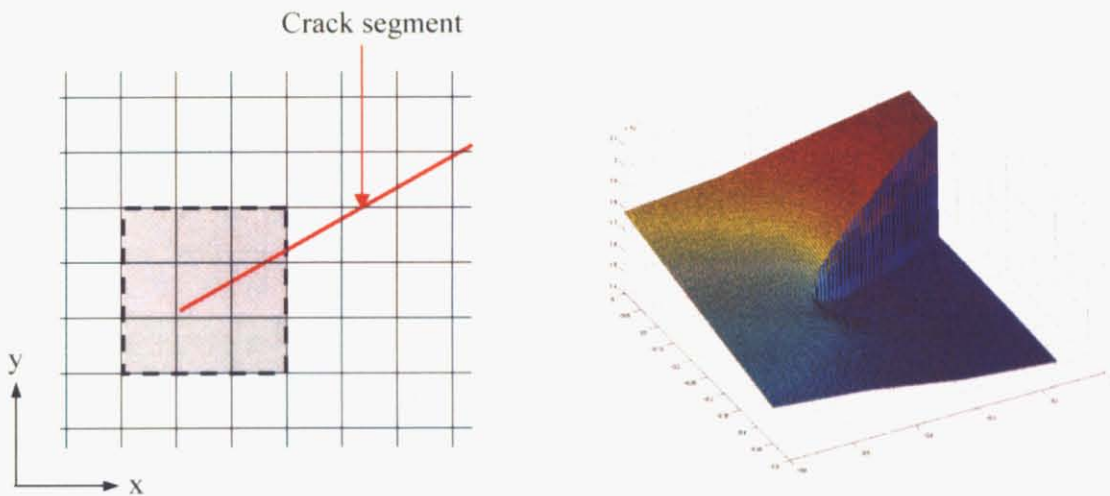


図 2.2.1 き裂端近傍の変位

2.2.2 X-FEM における変位の近似式

以下では X-FEM の理論を概説する。き裂近傍（き裂面近傍あるいはき裂端近傍）に位置する要素内の、位置ベクトル \mathbf{x} における変位 \mathbf{u} を次式で近似する。

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i + \sum_{i \in C} \phi_i(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \psi_k(\mathbf{x}) \mathbf{c}_i^k + \sum_{i \in J} \phi_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_i \quad (2.2.1)$$

ただし、 ϕ_i は通常の FEM で用いられる節点 i に関する内挿関数、 m は要素を構成する節点数（四辺形の場合 4）、 J はき裂面周辺の変位の不連続性を考慮する節点の集合、そして C はき裂端周辺の特異変位場を考慮する節点の集合である（図 2.2.2 参照）。すなわち、節点の内挿関数がき裂線によって完全に切断されるような節点（たとえば図 2.2.2 の Δ 印節点）は集合 J に属し、内挿関数が完全には切断されず、その内部にき裂端を含むような節点（同じく

□印節点) は集合 C に属する. また $\mathbf{d}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i^k$ は適当な定係数ベクトルである.

なお, $H(\mathbf{x})$ はき裂面の不連続性を表す関数 (Heaviside の step 関数), すなわち,

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (y > 0) \\ -1 & (y < 0) \end{cases} \quad (2.2.2)$$

である. また, $\psi(\mathbf{x})$ はき裂端周辺の特異変位場を張る関数の基底で, 次式で表わされる.

$$\begin{aligned} \Psi &= \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\} \\ &= \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

ここで, (r, θ) はき裂端を中心とする局所極座標系を表わす.

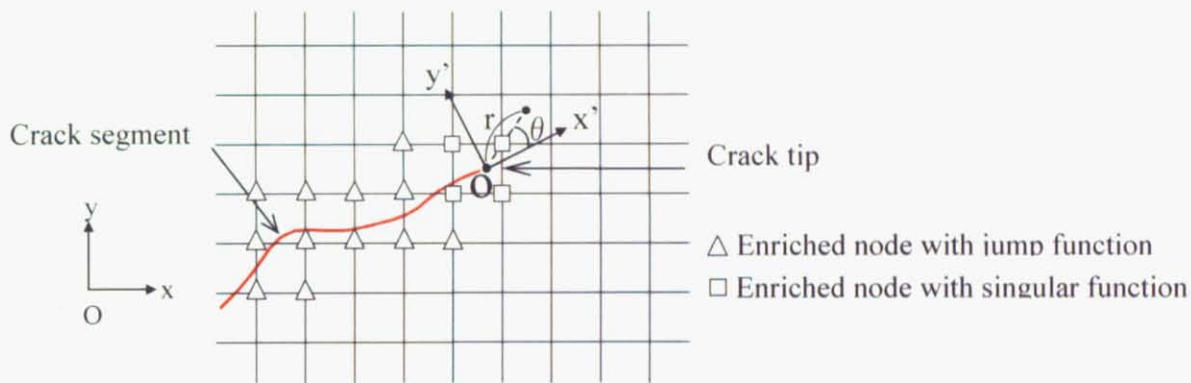


図 2.2.2 X-FEM における節点のエンリッチ

2.2.3 剛性マトリクス of 導出 (2次元)

X-FEM は, き裂面の挙動を内部で処理するため, メッシュにき裂面を陽的に表現する必要はなくメッシュ生成処理がき裂面の取り扱いから解放されて簡便になる. しかしその反面, き裂面の取り扱いが定式化に影響し, ソルバー部分を複雑にしている. 特に特異関数を含む要素の B マトリクスの作成には複雑な計算手順を必要とする. これに関して Belytschko らの論文では, 実装に至るまでの詳細な計算式は割愛されている.

以下では, 2次元問題の場合について X-FEM の変位の近似関数から, 要素剛性マトリクスを導く課程を説明する. 変位の近似式が,

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i + \sum_{i \in C} \phi_i(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \psi_k(\mathbf{x}) \mathbf{c}_i^k \quad (2.2.4)$$

であるから, ひずみ成分を

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (2.2.5)$$

と定義するならば、 \mathbf{B} マトリクスは、

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{B}_I = [\mathbf{B}_{I1} \quad \mathbf{B}_{I2} \quad \mathbf{B}_{I3} \quad \mathbf{B}_{I4}] \quad (I=1,2,3,4) \quad (2.2.7)$$

となる。ただし、 \mathbf{B}_I は要素内節点番号 I ($I=1\sim 4$) に関する成分であることを意味し、 \mathbf{B}_{Ij} は \mathbf{B}_I の中で特異関数 ψ_j ($j=1\sim 4$) に対応する成分であることを意味する。そして、

$$\mathbf{B}_{Ij} = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} + (\phi_I \psi_j)_{,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} + (\phi_I \psi_j)_{,y} \\ \phi_{I,y} + (\phi_I \psi_j)_{,y} & \phi_{I,x} + (\phi_I \psi_j)_{,x} \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

と表される。これを以下で、さらに詳しく説明する。

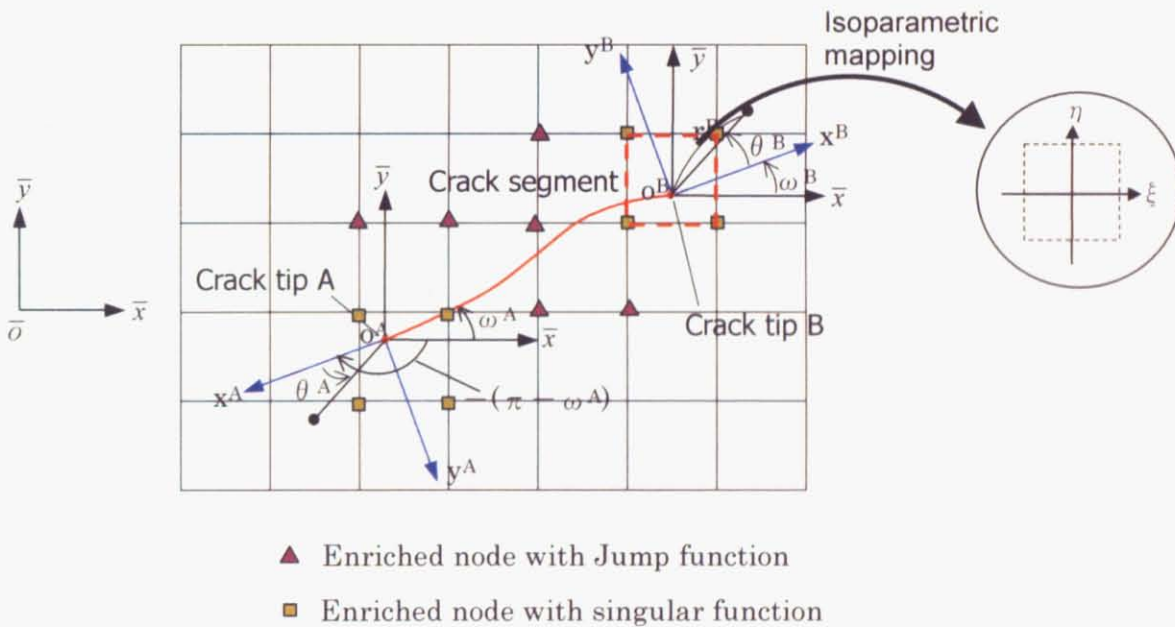


図 2.2.3 き裂面・き裂端周辺の座標系

2次元の場合、き裂端は2つ存在するので、全体座標系 $\bar{o} - \bar{x} - \bar{y}$ とは別に、き裂端 A、き裂端 B をそれぞれ原点とし、き裂線に平行な方向を x 軸とする局所デカルト座標系 $o^A - x^A - y^A$ と $o^B - x^B - y^B$ 、及びそれらと対応関係にある極座標系 $o^A - r^A - \theta^A$ 、 $o^B - r^B - \theta^B$ を導入する (図 2.2.3)。また、局所座標系の x 軸と全体座標系の x 軸がなす角をそれぞれ ω^A 、 ω^B とする。一般には、 $\omega^A \neq \omega^B$ である。

(2.2.8)式において、特異関数 ψ_j を含む部分だけを取り出すと、

$$\begin{cases} (\phi_i \psi_j)_{,\bar{x}} = \phi_{i,\bar{x}} \cdot \psi_j + \phi_i \cdot \psi_{j,\bar{x}} \\ (\phi_i \psi_j)_{,\bar{y}} = \phi_{i,\bar{y}} \cdot \psi_j + \phi_i \cdot \psi_{j,\bar{y}} \end{cases} \quad (2.2.9)$$

である。ここで、全体座標系 $\bar{o}-\bar{x}-\bar{y}$ と自然座標系 (ξ, η) の間には、局所座標系 $o^A-x^A-y^A$, $o^B-x^B-y^B$ を介さず直接アイソパラメトリック写像が行われる。したがって $\phi_{i,\bar{x}}$ と $\phi_{i,\bar{y}}$ は、通常アイソパラメトリック要素の場合と同じ手続きで計算される。すなわち、

$$\begin{cases} \phi_{i,\bar{x}} \\ \phi_{i,\bar{y}} \end{cases} = \begin{cases} N_{i,\bar{x}} \\ N_{i,\bar{y}} \end{cases} = \mathbf{J}^{-1} \begin{cases} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{cases}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

である。ここで、 ξ, η は、その積分点を含む要素を正規化された座標系に写像したときの座標値である。 \mathbf{J} は積分変数・積分領域が変換されたことに伴う Jacobian である。

これに対して、 $(\phi_i \psi_j)_{,\bar{x}}$ や $(\phi_i \psi_j)_{,\bar{y}}$ の計算には、座標系の変換を考慮しなくてはならない。すなわち以下の2つの操作を行う。

(a) $(x, y) \leftrightarrow (r, \theta)$ の変換

ψ_j は直接的には極座標系 $r-\theta$ の関数として表現されているので、チェーンルールを用いてデカルト座標系 x, y 方向に関する微分に変換する。

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.2.11)$$

であるから、

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases} \quad (2.2.12)$$

として、

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \psi_j}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \end{cases} \quad (j=1 \sim 4) \quad (2.2.13)$$

と書き換える。さらに $\frac{\partial \psi_j}{\partial r}, \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta}$ の具体的な計算式を以下で示す。

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (2.2.14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_3}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) = \sqrt{r} \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta + \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_4}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) = \sqrt{r} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) \end{cases} \quad (2.2.17)$$

(b) $(x, y) \leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ の変換

全体剛性マトリクスに足し込むのは、 $o^A - x^A - y^A$ 座標系や $o^B - x^B - y^B$ 座標系での変位に対する剛性ではなく、 $\bar{o} - \bar{x} - \bar{y}$ 座標系での変位に対する剛性である。そこでやはり同様にし、チェーンルールを用いて微分の変数を変換する。き裂端Aとき裂端Bでは、回転角 ω の取り扱いが異なることに注意する。すなわち、図 2.2.3 の回転角 ω^0 を用いて

$$\begin{cases} \omega = -(\pi - \omega^A) & \text{around cracktipA} \\ \omega = \omega^B & \text{around cracktipB} \end{cases} \quad (2.2.18)$$

と定義した ω に対して、

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = \cos \omega, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = -\sin \omega, \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} = \sin \omega, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \cos \omega \quad (2.2.19)$$

が成り立つので、

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \cos \omega - \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \sin \omega \\ \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \sin \omega + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \cos \omega \end{cases} \quad (2.2.20)$$

となる。(2.2.14)~(2.2.17)式を(2.2.20)式に代入した値を用いて(2.2.9)式を計算する。

2.2.4 剛性マトリクスの導出（3次元）

ここではX-FEMを用いて3次元き裂を解析する場合のBマトリクスの計算方法を述べる。全体座標系 $\bar{o}-\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$ に対して、き裂面上においてき裂前縁（クラックフロント）と直交する方向を x 軸，き裂面に直交する方向を y 軸，そしてき裂縁に接する方向を z 軸とするような局所デカルト座標系 $o-x-y-z$ を設ける。また， $o-x-y-z$ と対応関係にある局所円筒座標系 $o-r-\theta-t$ を設ける（図 2.2.4 参照）。

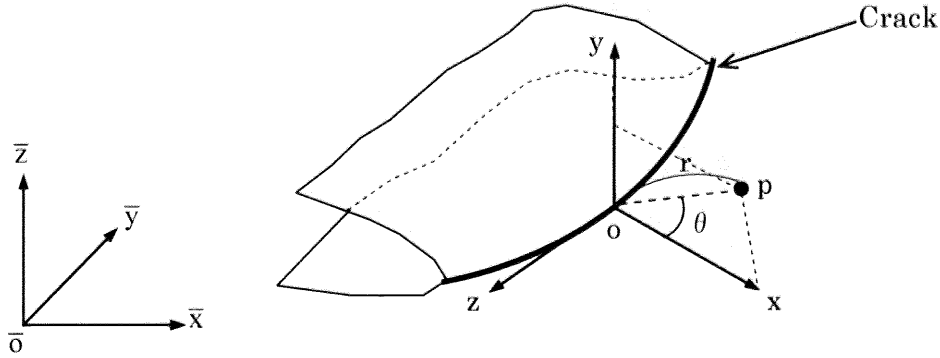


図 2.2.4 3次元き裂における座標系の定義

ひずみ成分を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\}^T \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\}^T \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

と定義すると，Bマトリクスは，

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4 \quad \mathbf{B}_5 \quad \mathbf{B}_6 \quad \mathbf{B}_7 \quad \mathbf{B}_8 \right] \quad (2.2.22)$$

となる。ただし，

$$\mathbf{B}_l = \left[\mathbf{B}_{l1} \quad \mathbf{B}_{l2} \quad \mathbf{B}_{l3} \quad \mathbf{B}_{l4} \right] \quad (2.2.23)$$

$$\mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} N_{l,\bar{x}} + (N_l \psi_j)_{,\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & N_{l,\bar{y}} + (N_l \psi_j)_{,\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & N_{l,\bar{z}} + (N_l \psi_j)_{,\bar{z}} \\ N_{l,\bar{y}} + (N_l \psi_j)_{,\bar{y}} & N_{l,\bar{x}} + (N_l \psi_j)_{,\bar{x}} & 0 \\ 0 & N_{l,\bar{z}} + (N_l \psi_j)_{,\bar{z}} & N_{l,\bar{x}} + (N_l \psi_j)_{,\bar{x}} \\ N_{l,\bar{z}} + (N_l \psi_j)_{,\bar{z}} & 0 & N_{l,\bar{x}} + (N_l \psi_j)_{,\bar{x}} \end{bmatrix} \quad (2.2.24)$$

と表される。ただし、 I ($I=1\sim 8$) は要素内の節点番号に対応し、また、 j ($j=1\sim 4$) は特異関数 ψ_j に対応する。微分に関して、

$$\begin{cases} (N_I \psi_j)_{,\bar{x}} = N_{I,\bar{x}} \cdot \psi_j + N_I \cdot \psi_{j,\bar{x}} \\ (N_I \psi_j)_{,\bar{y}} = N_{I,\bar{y}} \cdot \psi_j + N_I \cdot \psi_{j,\bar{y}} \\ (N_I \psi_j)_{,\bar{z}} = N_{I,\bar{z}} \cdot \psi_j + N_I \cdot \psi_{j,\bar{z}} \end{cases} \quad (2.2.25)$$

が成り立つが、全体座標系 $\bar{o}-\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$ と自然座標系 (ξ, η, ζ) の間には、局所座標系 $o^A-x^A-y^A$ 、 $o^B-x^B-y^B$ を介さず直接アイソパラメトリック写像が行われる。したがって $\phi_{I,\bar{x}}$ 、 $\phi_{I,\bar{y}}$ 、 $\phi_{I,\bar{z}}$ は、通常のアイソパラメトリック要素の場合と同じ手続きで計算される。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} N_{I,\bar{x}} \\ N_{I,\bar{y}} \\ N_{I,\bar{z}} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \\ N_{I,\zeta} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.2.26)$$

である。ここで、 ξ, η は、その積分点を含む要素を正規化された座標系に写像したときの座標値である。 \mathbf{J} は積分変数・積分領域が変換されたことに伴う Jacobian である。それに対して、 $(\phi_I \psi_j)_{,\bar{x}}$ や $(\phi_I \psi_j)_{,\bar{y}}$ の計算式は、座標系の変換を考慮しなくてはならない。

ψ_j は直接的には極座標系 r, θ の関数として表現されている。そこで、チェーンルールを用いて局所直交デカルト座標系 $o-x-y-z$ に関する微分を導く。両座標系の上に成り立つ式は、

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = y(r, \theta) = r \sin \theta \\ z = z(t) = t \end{cases} \quad (2.2.27)$$

であるから、微分に関して以下の式が成り立つ。

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}, & \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, & \frac{\partial t}{\partial z} = 1 \end{cases} \quad (2.2.28)$$

として、

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \psi_j}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_j}{\partial z} = \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (j=1\sim 4) \quad (2.2.29)$$

と書き換える. ここで, $\frac{\partial \psi_i}{\partial r}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial \theta}$ の具体的な計算式は(2.2.14)式~(2.2.17)式で表されている.

全体座標系 $\bar{o}-\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$ から局所座標系 $o-x-y-z$ への座標変換マトリクスを \mathbf{L} とすると,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\bar{x}} \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_{\bar{x}} \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_{\bar{x}} \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{\bar{y}} \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_{\bar{y}} \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_{\bar{y}} \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{\bar{z}} \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_{\bar{z}} \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_{\bar{z}} \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.2.30)$$

となる. ただし, $(\mathbf{e}_{\bar{x}}, \mathbf{e}_{\bar{y}}, \mathbf{e}_{\bar{z}})$, $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ はそれぞれ全体座標系 $\bar{o}-\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$, 局所デカルト座標系 $o-x-y-z$ の基底ベクトルである.

以上より, (2.2.29)式を(2.2.30)式に代入して得られた $\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{x}}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{y}}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}}$ の値を用いて(2.2.25)

式が計算できる.

2.3 X-FEMにおける接触の考慮

接触を考慮した X-FEM 解析は[24]等で述べられている．ここでは X-FEM の接触の理論について説明する．

き裂面 Γ_d を含む領域 Ω を考える (図 2.3.1 (a))．ここで， \mathbf{b} : 体積力， $\bar{\mathbf{t}}$: 表面力， $\bar{\mathbf{u}}$: 変位境界条件 である．き裂面 Γ_d を Γ_d^+ と Γ_d^- の 2 つに分ける (図 2.3.1 (b))．また， Γ_d^+ の法線を \mathbf{n} とする．

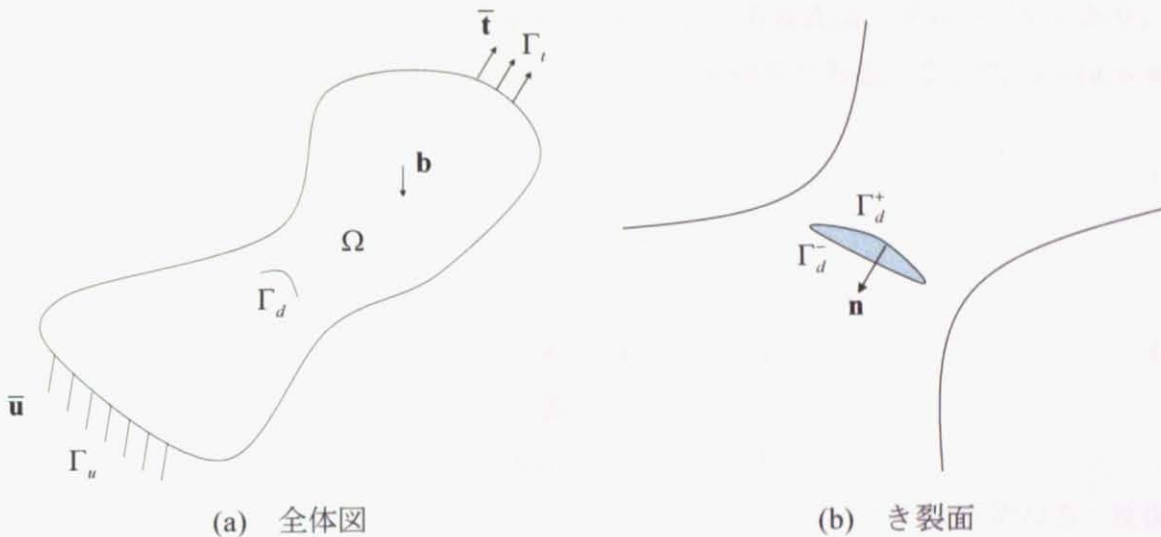


図 2.3.1 境界値問題概念図

変位場，応力場を $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}$ と書く．また，き裂面上の変位，表面力は $\mathbf{w}^+, \mathbf{t}^+$ on Γ_d^+ ， $\mathbf{w}^-, \mathbf{t}^-$ on Γ_d^- とする． $\mathbf{w}^+, \mathbf{w}^-$ を共に参照する場合， \mathbf{w} と書く．同様に， $\mathbf{t}^+, \mathbf{t}^-$ を共に参照する場合， \mathbf{t} と書く． Ω が線形弾性体であると仮定すると， Ω 上の構成則は，

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (2.3.1)$$

となる．ここで， $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみ (\mathbf{u} の勾配) である．一方，き裂面上での構成則は，

$$G(\mathbf{w}^+, \mathbf{w}^-, \mathbf{t}^+, \mathbf{t}^-) = 0 \quad (2.3.2)$$

となる． G は摩擦のあるなし等により変わる．詳細は本節の後半で説明する．

まず先に，運動学と釣り合い方程式について述べる． $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in U_a$ を満たす (\mathbf{u}, \mathbf{w}) を運動学的許容であるという．ここで，

$$U_a = \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in U : \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}|_{\Gamma_d} = \mathbf{w}^+, \mathbf{u}|_{\Gamma_d} = \mathbf{w}^-\} \quad (2.3.3)$$

である．空間 U は運動学の場の規則に基づいている．また， $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in U_0$ を満たす (\mathbf{u}, \mathbf{w}) を運動学的許容が 0 であるという．ここで，

$$U_0 = \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in U : \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = 0, \mathbf{u}|_{\Gamma_d} = \mathbf{w}^+, \mathbf{u}|_{\Gamma_d} = \mathbf{w}^-\} \quad (2.3.4)$$

である。静的許容な応力，表面力 $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{t})$ の集合を T_a とする。

$$T_a = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{t}) \in T : \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Gamma_d} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}^* dS \quad \forall (\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) \in U_0\} \quad (2.3.5)$$

ここでは簡略化した表記を用いている。

$$\int_{\Gamma_d} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}^* dS = \int_{\Gamma_d} \mathbf{t}^+ \cdot \mathbf{w}^{*+} dS + \int_{\Gamma_d} \mathbf{t}^- \cdot \mathbf{w}^{*-} dS \quad (2.3.6)$$

空間 T は静的な場の規則に基づいている。

空間 U_a, T_a によって特徴付けられる運動学と釣り合い方程式は，グローバルであり，線形である。一方，(2.3.2)式の構成則はローカルであり，非線形である。ここで， $s = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{t})$ と書く。空間 S を次のように定義する。

$$S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{t}) : (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in U, (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{t}) \in T\} \quad (2.3.7)$$

また，集合 A, I を次のように定義する。

$$A = \{s \in S : (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in U_a, (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{t}) \in T_a, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ on } \Omega\} \quad (2.3.8)$$

$$I = \{s \in S : G(\mathbf{w}^+, \mathbf{w}^-, \mathbf{t}^+, \mathbf{t}^-) = 0 \text{ on } \Gamma_d\} \quad (2.3.9)$$

集合 A, I に含まれる s をそれぞれ s^A, s^I と書く。

境界値問題を解くためには， A, I の共通集合を見つければよい。

A, I の共通集合を見つける手順は，幾何学的に表現すると図 2.3.2 のようになる。反復手順は $s_n^A \rightarrow s_n^I$ (local step) と $s_n^I \rightarrow s_{n+1}^A$ (global step) の繰り返しである。以下，local step と global step について説明する。

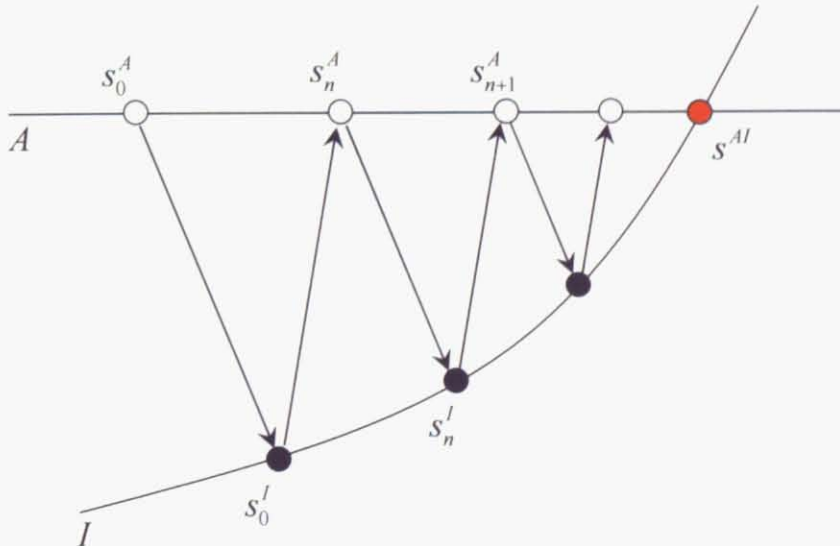


図 2.3.2 反復手順

(a) The local step : き裂面上での更新

$$s_n^A \in A \rightarrow s_n^I \in I$$

s の更新は係数 k ($\mathbf{k}_0 = k\mathbf{I}_d$ (2.3.10), \mathbf{I}_d は単位行列) を用いて次のようになる.

$$\mathbf{t}_n^{I+} - \mathbf{t}_n^{A+} = \mathbf{k}_0(\mathbf{w}_n^{I+} - \mathbf{w}_n^{A+}) \quad \text{on } \Gamma_d^+ \quad (2.3.11)$$

$$\mathbf{t}_n^{I-} - \mathbf{t}_n^{A-} = \mathbf{k}_0(\mathbf{w}_n^{I-} - \mathbf{w}_n^{A-}) \quad \text{on } \Gamma_d^- \quad (2.3.12)$$

また同時に, き裂面の構成則を満たす必要がある.

$$G(\mathbf{w}_n^+, \mathbf{w}_n^-, \mathbf{t}_n^+, \mathbf{t}_n^-) = 0 \quad \text{on } \Gamma_d \quad (2.3.13)$$

以下 G の具体的な式について述べる.

き裂面は離れているか接触しているかのどちらかである. つまり,

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+) \cdot \mathbf{n} &\geq 0 \\ \mathbf{t}^+ \cdot \mathbf{n} &\leq 0, \quad \mathbf{t}^- \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad \mathbf{t}^+ \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{t}^- \cdot \mathbf{n} \\ (\mathbf{t}^+ \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+) \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

さらに, 接線成分は釣り合っている必要があるので,

$$\mathbf{P}_T \mathbf{t}^+ + \mathbf{P}_T \mathbf{t}^- = 0 \quad (2.3.15)$$

ここで,

$$\mathbf{P}_T \mathbf{t} = \mathbf{n} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \quad (2.3.16)$$

き裂面の最大摩擦力は, $g = \mu |\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}|$ となる. ここで, μ は摩擦係数である. 摩擦がある場合,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_T \mathbf{t}\| &\leq g \\ \mathbf{P}_T \mathbf{w}^- &= \mathbf{P}_T \mathbf{w}^+ \quad \text{if } \|\mathbf{P}_T \mathbf{t}\| < g \quad (\text{stick}) \\ \mathbf{P}_T (\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+) &= -\frac{1}{k} \mathbf{P}_T \mathbf{t}^+ \quad \text{if } \|\mathbf{P}_T \mathbf{t}\| = g \quad (\text{slip}) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

となる. 摩擦がない場合(2.3.17)式は次のようになる.

$$\mathbf{P}_T \mathbf{t}^+ = \mathbf{P}_T \mathbf{t}^- = 0 \quad (2.3.18)$$

(b) The global step

$$s_n^I \in I \rightarrow s_{n+1}^A \in A$$

s の更新は次のようになる.

$$\mathbf{t}_{n+1}^{A+} - \mathbf{t}_n^{I+} = -\mathbf{k}_0(\mathbf{w}_{n+1}^{A+} - \mathbf{w}_n^{I+}) \quad \text{on } \Gamma_d^+ \quad (2.3.19)$$

$$\mathbf{t}_{n+1}^{A-} - \mathbf{t}_n^{I-} = -\mathbf{k}_0(\mathbf{w}_{n+1}^{A-} - \mathbf{w}_n^{I-}) \quad \text{on } \Gamma_d^- \quad (2.3.20)$$

(2.3.5), (2.3.19), (2.3.20)より,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{k}_0 \mathbf{w}_{n+1} \cdot \mathbf{w}^* dS \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Gamma_d} (\mathbf{t}'_n + \mathbf{k}_0 \mathbf{w}'_n) \cdot \mathbf{w}^* dS \quad \forall (\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) \in U_0
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

ここでは(2.3.6)式のような簡略化を行っている。(2.3.21)式を解くと各節点の変位が求まる。 $\mathbf{w} = \mathbf{u}|_{\Gamma_d}$ であるので、 $\mathbf{w}_{n+1}^{A+}, \mathbf{w}_{n+1}^{A-}$ が求まる。さらに、(2.3.19), (2.3.20)に代入することで $\mathbf{t}_{n+1}^{A+}, \mathbf{t}_{n+1}^{A-}$ が求まる。

なお、 s_0^A は(2.3.19), (2.3.20), (2.3.21)に $\mathbf{t}'_n = \mathbf{w}'_n = 0$ を代入して得られる解とする。

η がある値以下になった時に収束したとみなす。

$$\eta^2 = \frac{\|s_{n+1}^A - s_n^A\|^2}{\|s_{n+1}^A\|^2 + \|s_n^A\|^2} \tag{2.3.22}$$

$$\|s\|^2 = \int_{\Gamma_d} \mathbf{t} \cdot \mathbf{k}_0^{-1} \mathbf{t} dS + \int_{\Gamma_d} \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}_0 \mathbf{w} dS \tag{2.3.23}$$

2.4 残留応力の考慮

溶接構造物の溶接部付近からのき裂進展を解析する際には、溶接による残留応力の評価が必要である。溶接残留応力の評価には、解析対象のなかの溶接材からなる領域を定義し、その部分がある一定温度であると仮定する。溶接材が溶けている場合の応力分布をゼロとして、冷却され固まることにより溶接材が収縮し残留応力が発生するとする。

なお、溶接部が固まりだしてから完全に冷却するまでの温度低下は数百℃程度と言われている。実際の温度分布は不連続ではなく、今後溶接プロセスのシミュレーションを行うことによって改善される余地は残されているが、現実をある程度表現できるモデルであると思われる。

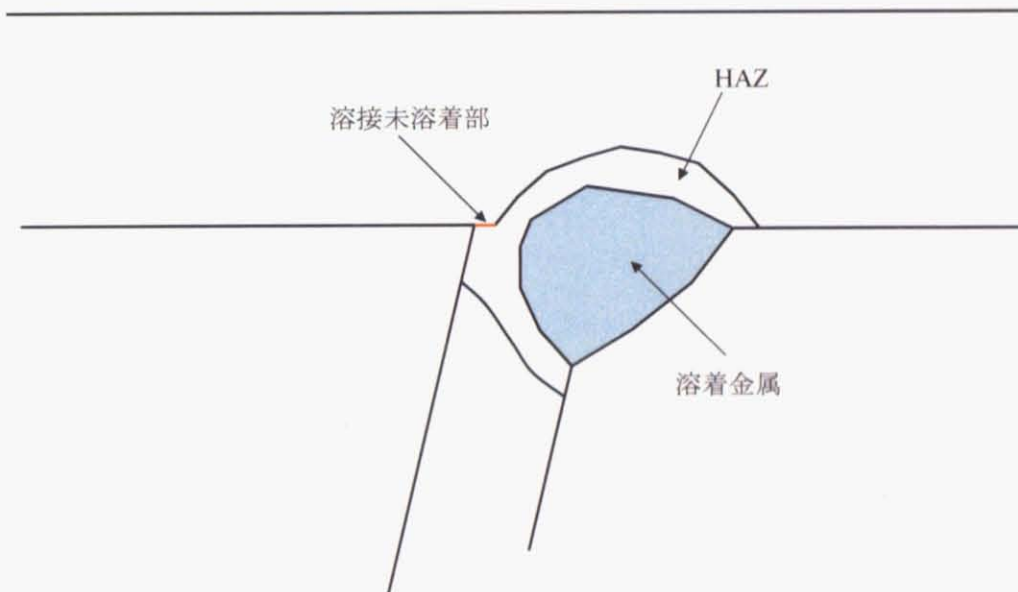


図 2.4.1 溶接部

具体的には、解析対象の溶接部（図 2.4.1）の溶着金属部に温度低下を与え、残留応力を求める。釣り合い方程式に残留応力を加える手順は以下の通りである。

残留応力 σ_0 がある場合、応力 σ とひずみ ε の関係は(2.4.1)式のように表すことができる。

$$\sigma = D\varepsilon + \sigma_0 \quad (2.4.1)$$

このとき、節点力 \mathbf{q}^e は、

$$\mathbf{q}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \sigma d(vol) \quad (2.4.2)$$

となる。残留応力による節点力を \mathbf{f}^e とすると、

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{f}^e$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d(vol) \quad (2.4.3)$$

よって、残留応力を考慮した解析においては節点に対して下記のような等価節点力 \mathbf{f}^e を与えればよい。

$$\mathbf{f}^e = \int_{vol} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d(vol) \quad (2.4.4)$$

2.5 き裂進展

2.5.1 き裂進展方向

き裂端近傍の応力は次式のようになる。

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{cases} 3\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \end{cases} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{cases} -3\sin(\theta/2) - 3\sin(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2) + 3\cos(3\theta/2) \end{cases} \quad (2.5.1)$$

き裂の進展方向を決めるための基準となる式はいくつか提案されているが、本論文では、maximum circumferential stress criterion を使用した。これは、円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ が最大であるような方向にき裂は進展するという仮定に基づいた式である。図 2.5.1 で示されるき裂進展方向 θ_c は、応力拡大係数 K_I, K_{II} を用いて次式で与えられる。

$$\theta_c = 2\arctan \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right) \quad (2.5.2)$$

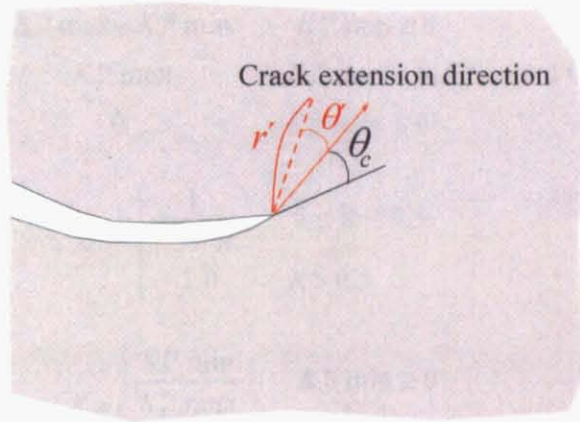


図 2.5.1 き裂進展方向

極座標系 $r'-\theta'$ における K_I を K_I^{eq} と書くと、

$$K_I^{eq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_h}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_h}{2} \sin \frac{\theta_h}{2} \quad (2.5.3)$$

となる。極座標系 $r'-\theta'$ における K_{II} は 0 である。

2.5.2 き裂進展速度

繰り返し荷重が与えられた時のき裂伝播寿命の計算で広く使われている手法として Paris[25]によって提案されたパリス則(2.5.4)がある。

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (2.5.4)$$

ここで、 a : き裂進展長さ、 N : 繰返し回数、 C, m : 伝播定数、 ΔK : 応力拡大係数範囲である。

しかし、定数 C, m は平均応力、残留応力、荷重変動などの影響を受けるため、き裂開閉口挙動に基づく有効応力拡大係数範囲 ΔK_{eff} [26]あるいは、RPG 荷重に基づく ΔK_{RP} が提案されている[27]。これらの手法は溶接残留応力の影響を考慮するのに適している。

本論文では ΔK_{eff} によるき裂伝播寿命解析を簡略化したものを用いる。 ΔK_{eff} を用いたき裂伝播速度は式(2.5.5)となる。

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eff}^m - \Delta K_{eff_{th}}^m) \quad (2.5.5)$$

$$\Delta K_{eff} = U \cdot \Delta K \quad (2.5.6)$$

ここで、 $\Delta K_{eff_{th}}$: き裂進展下限界、 U : き裂開口比 である。

ΔK および U を以下のように定義する。 $K_I^{eq} \max, K_I^{eq} \min$ は1回の繰返しの間での K_I^{eq} の最大値、最小値である。

$$\Delta K = \begin{cases} K_I^{eq} \max - K_I^{eq} \min & K_I^{eq} \min \geq 0 \\ K_I^{eq} \max & K_I^{eq} \max \geq 0, K_I^{eq} \min \leq 0 \\ 0 & K_I^{eq} \max \leq 0 \end{cases} \quad (2.5.7)$$

$$U = \begin{cases} \frac{1}{1.5 - R} & 0 \leq R \leq 0.5 \\ 1.0 & R > 0.5 \end{cases} \quad (2.5.8)$$

$$R = \begin{cases} \frac{K_I^{eq} \min}{K_I^{eq} \max} & K_I^{eq} \min \geq 0 \\ 0 & K_I^{eq} \min < 0 \end{cases} \quad (2.5.9)$$

2.5.3 き裂進展解析の流れ

き裂進展解析の全体の流れは以下の通りである。

2.2節で説明したX-FEMを用いて応力解析を行い、2.1.3項の相互積分法にもとづき K_I 値、 K_{II} 値を求め、2.5.1節の考え方でき裂進展方向を決定する。その方向に対するき裂進展量は、適当な長さを用いる。再びき裂が進展した場合($K_I^{eq} > \Delta K_{eff_{th}}$)に対して、全体を繰返し、構造全体が不安定になるまで解析を進める。き裂面に接触がある場合、2.3節に基づき解析を行う。また、残留応力がある場合、2.4節の考え方に基づき残留応力を求め、等価節点力として節点に与える。寿命を求める場合、2.5.2項の手法により、き裂長推移を求め、寿命を推定する。

第3章 X-FEM によるき裂進展解析

3.1 2次元数値解析例

3.1.1 エッジクラックの解析

まず、解析精度検証のための線形解析を行う。図 3.1.1 (a)に示すエッジクラックを解析した（ヤング率 $E = 2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ ）。用いたメッシュは図 3.1.1 (b)。

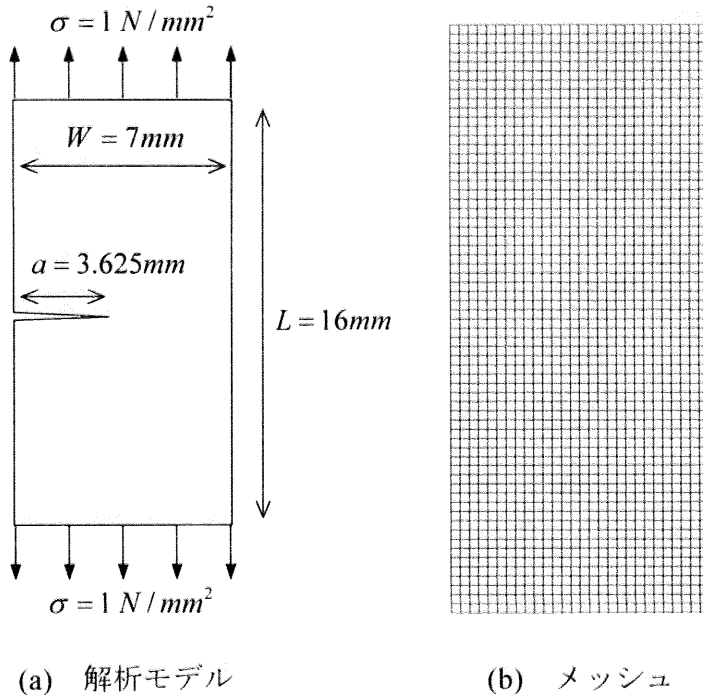


図 3.1.1 エッジクラック

このモデルの応力拡大係数の近似解析解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K_I &= C\sigma\sqrt{a\pi} \\ K_{II} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

ただし、 C は次式で表わされる補正係数である。

$$C = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{W}\right) + 10.55\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (3.1.2)$$

(2.1.23)式の重み関数 $q(x_1, x_2)$ の形状が応力拡大係数の精度に及ぼす影響を調べるため、図 3.1.2 に示す5種類の重み関数を使用した。すなわち、台地形(円)、台地形(矩形)、放物線、二重放物線(上下に凸である2つの放物線を変曲点で結合したもの)、そして円錐形である。これらは図 2.1.5 の領域 A 内において関数 $q(x_1, x_2)$ がどのような勾配で分布しているかを示すものである。さらにそれぞれの種類の関数 q に対して、中心部（すなわちき裂端）からの広がりも3段階に変化させた。これは図 2.1.5 の境界 Γ_0 が円であるとすれば、その半径のこ

とを指す。これをき裂端周辺部に存在する要素の大きさの1倍から3倍まで変化させることとした。

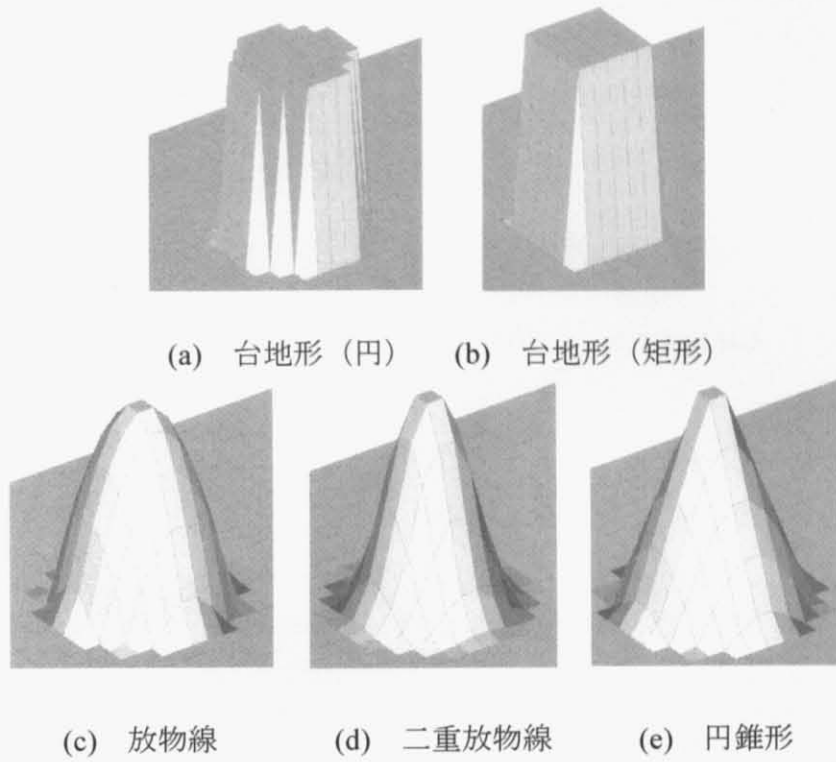


図 3.1.2 重み関数 q の形状

これらの重み関数を用いて無次元化した応力拡大係数を評価した結果を図 3.1.3 に示す。これによると台地形 (円) と台地形 (矩形) の2種類は非常に精度が高い。それに対して他の関数は精度が低く、円錐形が最も精度が低い。実際の(2.1.23)式で計算されるのは関数 q の微分 (勾配) であるから、この結果はその勾配がなるべく中心 (き裂端) から離れたところに存在するような関数 q の形状が望ましいことを示している。

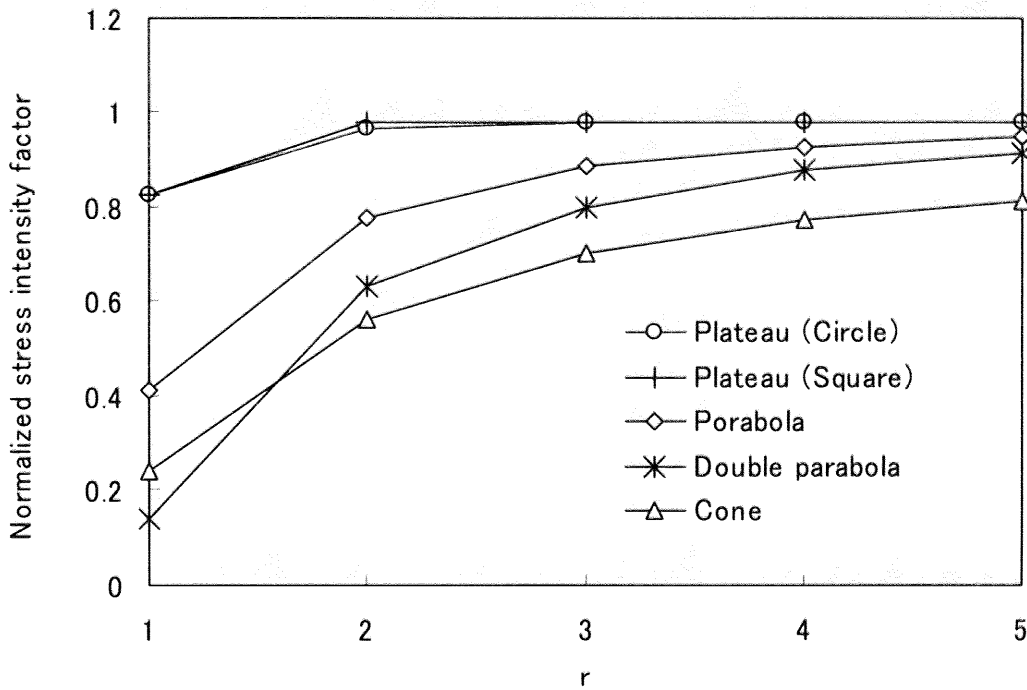


図 3.1.3 各重み関数 q に対する無次元化した応力拡大係数

また、同じ台地形であっても、それが円形か矩形かはあまり精度に影響しないこともわかる。ただしき裂端からの広がりには重要で、中心（き裂端）から要素 1 個分の長さでは十分な精度が得られていない。2 個分以上ではほぼ収束している。

次に、き裂線の長さ a を変化させた場合の無次元化した応力拡大係数を図 3.1.4 に示す。重み関数は台地形（円）の形状のものを用い、その広がり半径を 3 段階に変化させた。半径を要素長の 2 倍または 3 倍とすると、 $1 < a < 5$ の範囲では近似解析解との良い一致が得られた。ただ、き裂線が短い場合 ($a=1$) 程度では、半径が要素長 3 倍の場合に精度が大きく低下している。き裂線の長さが短い場合には重み関数の広がりを大きくし過ぎ無いことに注意が必要である。そして通常は半径が要素長の 2 倍程度で十分な精度が得られることがわかった。なお、 $a < 1$ 及び $a > 5$ の場合は、き裂先端近傍の応力、変位の誤差が大きくなった結果、精度の悪化が起きている。

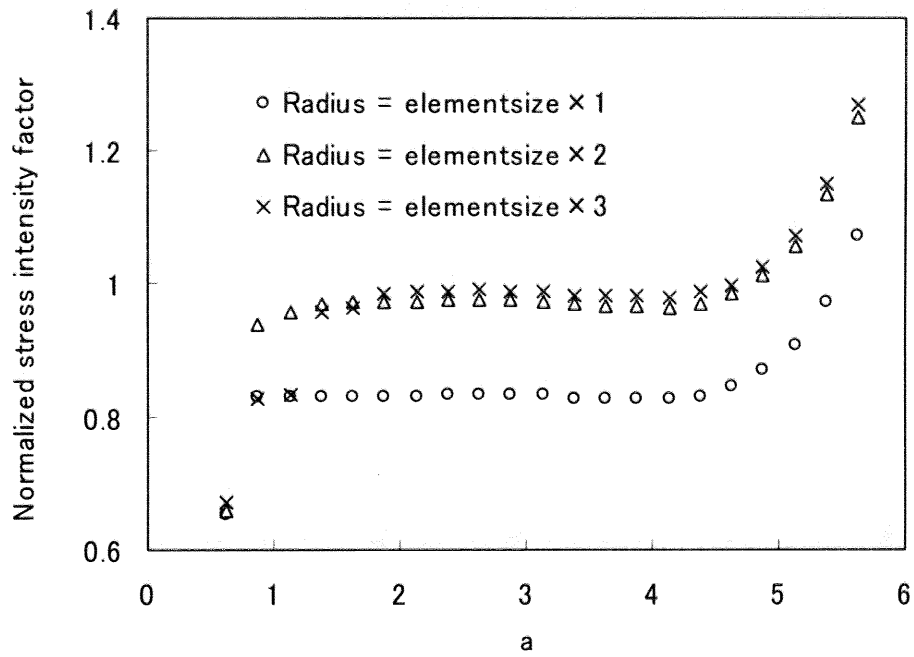


図 3.1.4 き裂線の長さ a に対する無次元化した応力拡大係数

以降の解析では、重み関数 $q(x_1, x_2)$ の形状としては、台地形（円）とし、また、き裂端からの広がり、中心（き裂端）から要素 2 個分の長さとした。

3.1.2 一様引き張り力を受ける斜めき裂

中央に斜めのき裂を有し、一様引き張り力を受ける板を解析した (図 3.1.5). 解析に用いたメッシュを図 3.1.6 に示す. メッシュは $45 \times 45 = 2025$ 要素分割. また, 用いた要素は全て四節点四角形要素である. き裂長さ a と板の一辺の長さ W の比率は, $a/W = 0.1$ である. また, 無限板中の斜めき裂の理論解は次式で与えられる.

$$\begin{cases} K_{\perp} = \sigma \sqrt{\pi(a/2)} \cos^2 \beta \\ K_{\parallel} = \sigma \sqrt{\pi(a/2)} \sin \beta \cos \beta \end{cases} \quad (3.1.3)$$

応力拡大係数の算出には相互積分法及び領域積分法を用いた. 角度 β の変化に対する応力拡大係数の変化を図 3.1.7 に示す. 無限板の理論値との差は 1% 程度であり, 理論値とほぼ一致した.

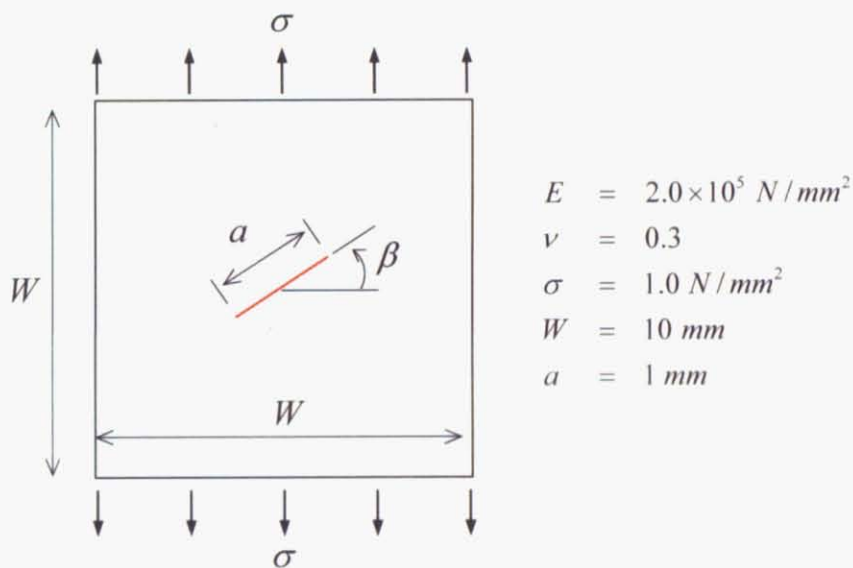


図 3.1.5 一様引き張り力を受ける斜めき裂

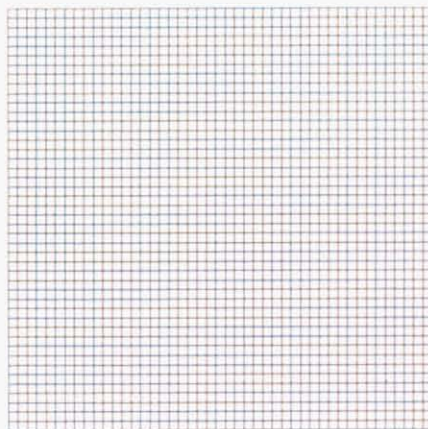


図 3.1.6 一様引き張り力を受ける斜めき裂の解析に用いたメッシュ (2025 要素)

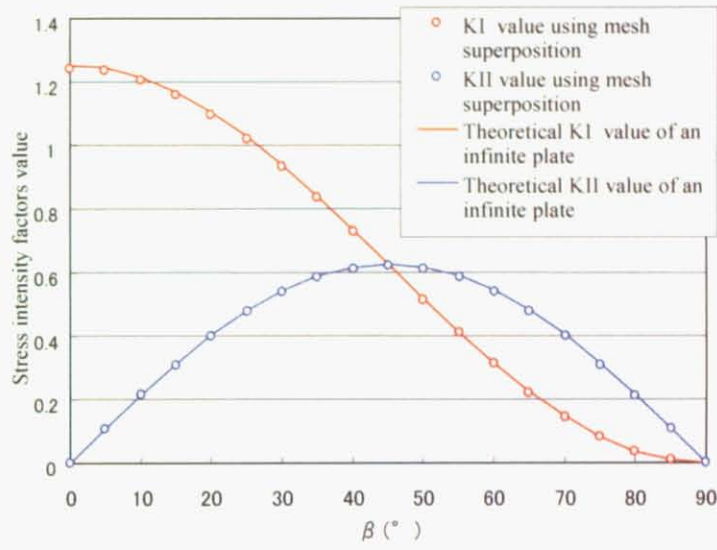


図 3.1.7 一様引き張り力を受ける斜めき裂の応力拡大係数

3.1.3 フィレット部分に発生したき裂の進展解析

フィレットを有する構造部材に生じたき裂の進展を解析した。本例題の配置図を図 3.1.8 に示す。実際の計算対象領域は灰色の部分である。荷重 $P = 20.0 \text{ kN}$ ，初期き裂のき裂長さは 5 mm である。

この例題では計算領域の下側に付着している I 型梁部材の厚さがき裂の進展経路に及ぼす影響を調べているが，ここではその I 型梁部材が剛体（非常に厚い）の場合と，柔軟部材（非常に薄い場合）の場合を取り上げることとする。そしてその差異は，計算領域に対する境界条件として反映される。すなわち，前者は下部境界の垂直方向変位を拘束することで，また，後者は側面境界の垂直方向変位を拘束することにより，それぞれ表現される。ただし剛体運動は拘束されるものとする。

各計算ステップでのき裂進展長さは 3 mm とした。解析の結果得られたき裂進展経路を図 3.1.9 に示す。I 型梁部材が剛体の場合はき裂が反対側に向かってほぼ直線的に進展しているのに対し，柔軟な部材の場合はき裂が下側に向かって急激に落ち込んで進展しているのが観察できた。この結果は文献[28]とほぼ同等である。

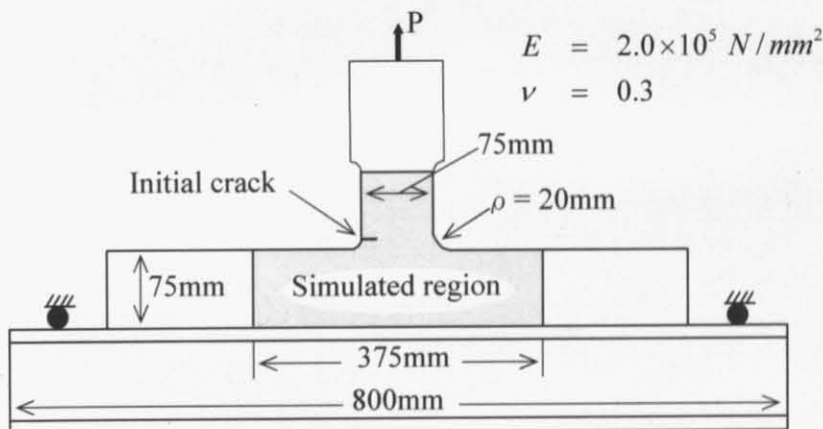


図 3.1.8 フィレット部分に発生したき裂の解析モデル

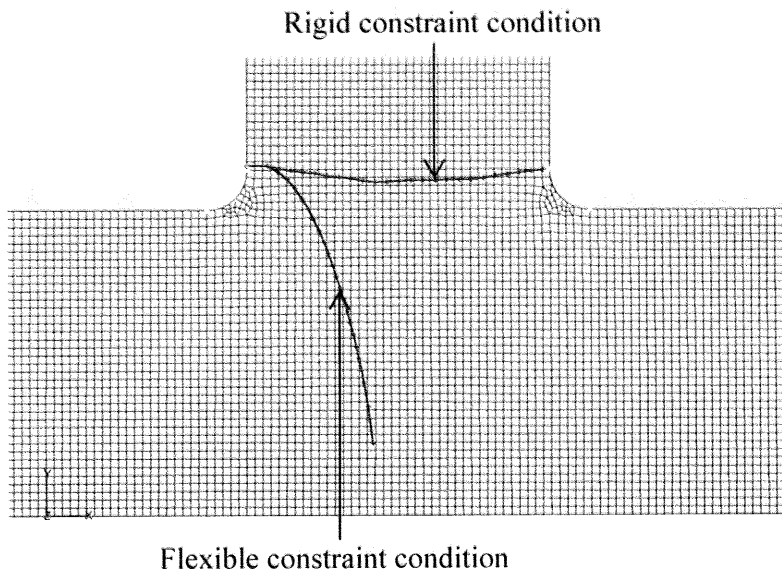


図 3.1.9 フィレット部分に発生したき裂の進展経路

3.2 接触を考慮したき裂進展解析

接触を考慮した X-FEM 解析の精度検証を行う。中央に斜めのき裂を有し、一様圧縮力を受ける板（図 3.2.1）を解析した。用いたメッシュは、4900 個の正方形要素である。摩擦係数 $\mu=0.2$ とし、各計算ステップでのき裂進展長さは 0.12mm とした。また、(2.3.10)式の $k = E$ とする。

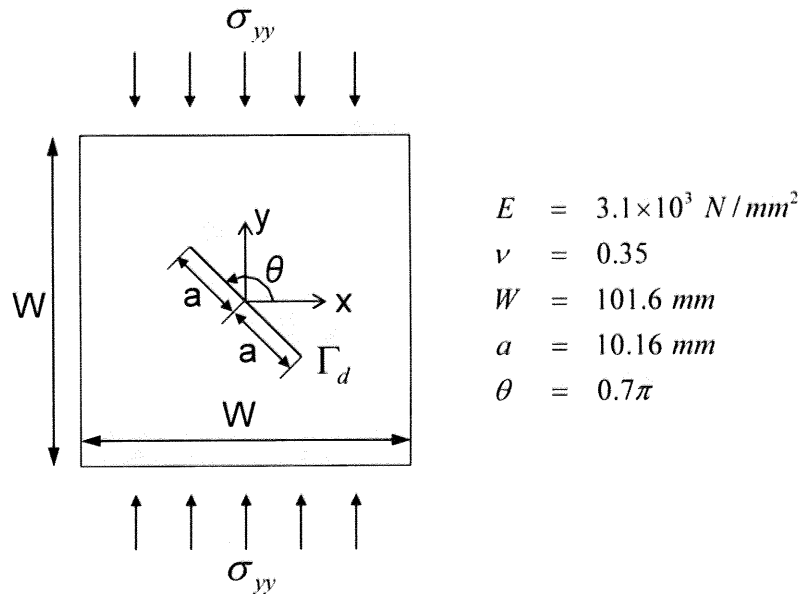


図 3.2.1 一様圧縮力を受ける斜めき裂

$\sigma_{yy} = 10 \text{ N/mm}^2$ とし、接触を考慮する場合、接触を考慮しない場合のそれぞれにおいて X-FEM 解析を行った。実験結果[24]及び解析結果は図 3.2.2, 表 3.2.1 のようになった。図 3.2.2 においてシミュレーションではき裂がギザギザに進んでいるが、実際には進展量は微小であるため、滑らかに進んでいるとみなせる。き裂進展経路は、接触を考慮する場合、接触を考慮しない場合のどちらも実験に近い結果が得られた。一方、 K_I^{eq} に関しては、接触を考慮する場合のほうが大きい値となった。接触を考慮することで貫入しなくなり、き裂が進展し易くなったと考えられる。パリス則(2.5.4)を用いてき裂長推移を比較すると、図 3.2.3 となる。

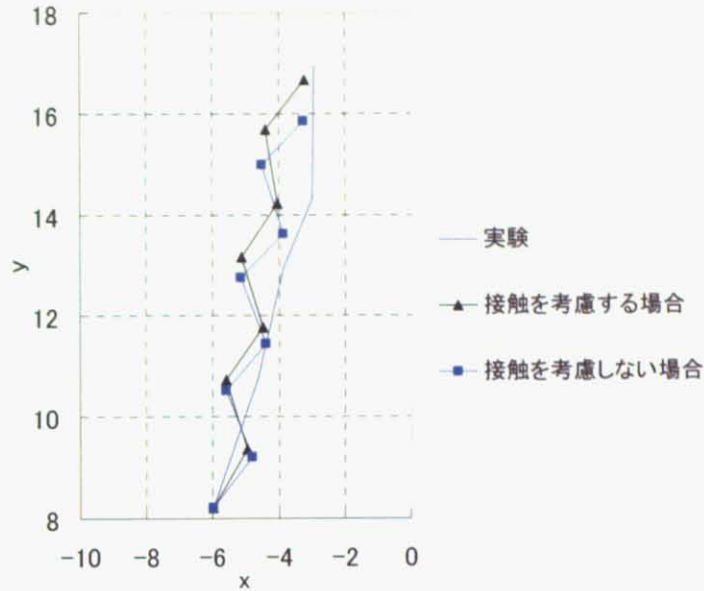


図 3.2.2 き裂進展経路（実験，接触を考慮しない場合，接触を考慮する場合）

表 3.2.1 接触を考慮しない場合とする場合の応力拡大係数 ($MPa \cdot m^{1/2}$) の比較

接触を考慮しない場合				接触を考慮する場合					
K1	K2	き裂端	K1eq	K1	K2	き裂端	K1eq		
-0.6280254	0.83242	-5.9719	8.219613	0.665399	-0.29024	0.773457	-5.97154	8.21944	0.745705
-0.1034996	-0.19912	-4.81727	9.214304	0.178831	0.073177	-0.28641	-4.96316	9.3599	0.372342
-0.4014071	0.605805	-5.60858	10.51676	0.506908	-0.05125	0.65998	-5.61086	10.73912	0.734579
-0.2489472	-0.42804	-4.39711	11.44137	0.372837	0.198867	-0.32703	-4.49072	11.7729	0.497089
-0.2966973	0.398053	-5.14702	12.7681	0.319629	0.197226	0.497599	-5.1308	13.1572	0.689293
-0.1474699	-0.29554	-3.88404	13.62101	0.268159	0.142623	-0.36962	-4.03606	14.21892	0.509618
-0.2056532	0.418041	-4.52531	15.00352	0.380615	0.184426	0.343061	-4.39928	15.6972	0.505776
		-3.26688	15.86313				-3.23342	16.67764	

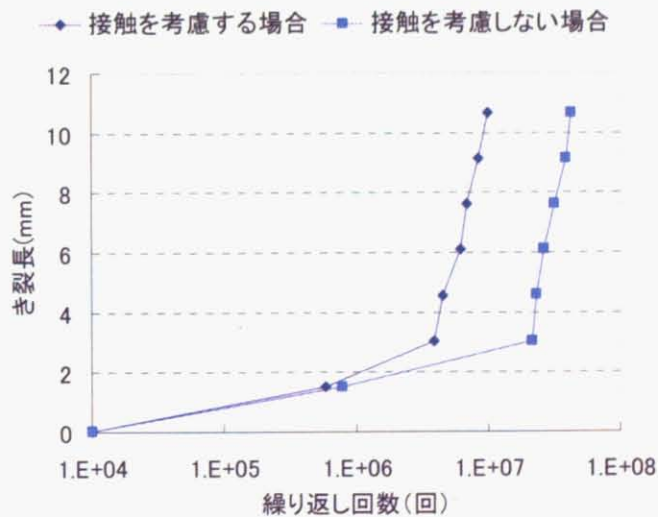


図 3.2.3 き裂長推移（接触を考慮しない場合，接触を考慮する場合）

3.3 残留応力を含む数値解析例

実験結果[29]のある簡単なモデルで残留応力の評価手法の検証をする。図 3.3.1 のような溶接接手のある試験片に対してき裂進展解析を行った。具体的には、図 3.3.2 のような有限要素メッシュに対し、仮想的に溶接線上の節点に 200°Cの温度低下を与えることにより、残留応力分布を求め、外力 σ がある場合のき裂進展解析を行った。なお、溶接部の温度低下は解析結果が実験結果に近くなるような値にしている。初期き裂は実験に合わせて 44.5mm とした。なお、節点に温度を与えたということは、ちょうど溶接線のところの要素 1 要素分に温度が分布していると考えられる。図 3.3.3 に温度分布を示す。また、図 3.3.4 (a)~(c) に残留応力分布を示す。

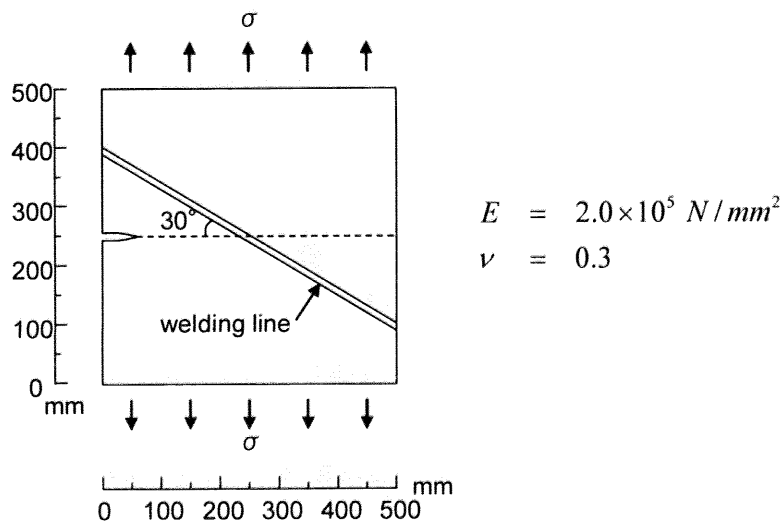


図 3.3.1 斜接手試験片

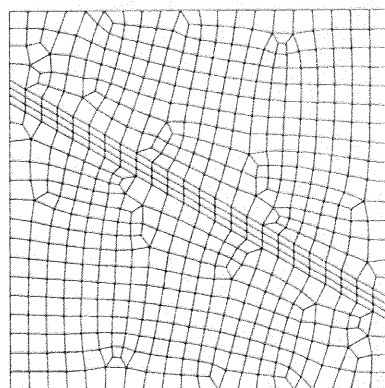


図 3.3.2 斜接手試験片の解析に用いたメッシュ (570 要素)

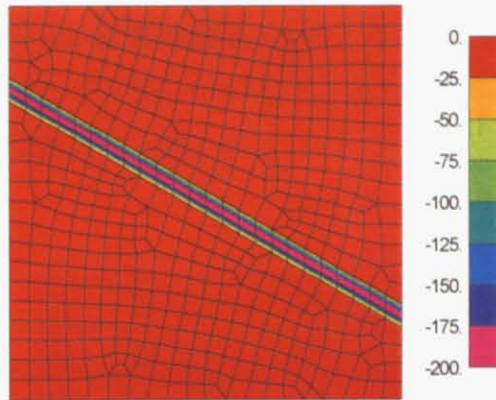
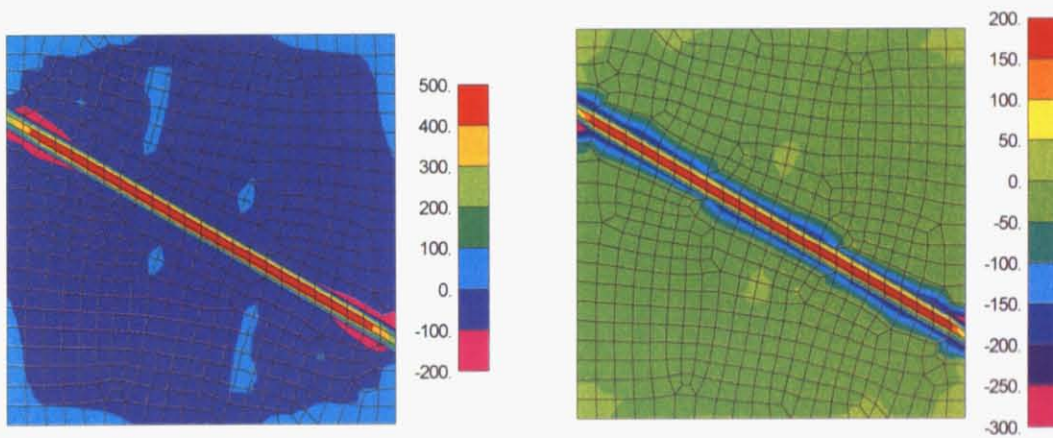
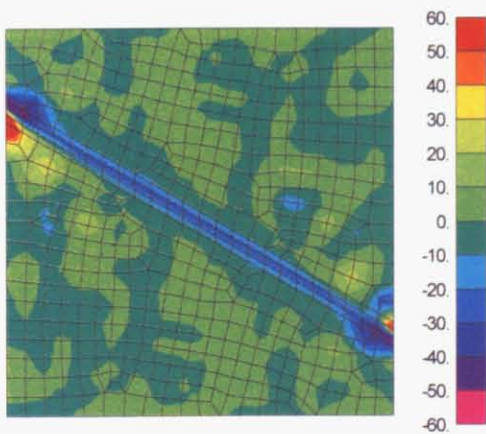


図 3.3.3 温度分布 (斜接手試験片)



(a) x 方向応力 (N/mm^2)

(b) y 方向応力 (N/mm^2)



(c) せん断応力 (N/mm^2)

図 3.3.4 残留応力分布 (斜接手試験片)

外力 $\sigma = 55.86 \text{ N/mm}^2$ の場合について解析を行った。各計算ステップでのき裂進展長さは 30mm とした。シミュレーション結果は図 3.3.5 のようになった。文献[29]の実験結果 (図 3.3.6) と比べると、進展経路がよく一致していることから、本手法により残留応力の影響を考慮したき裂進展解析が可能であることがわかる。

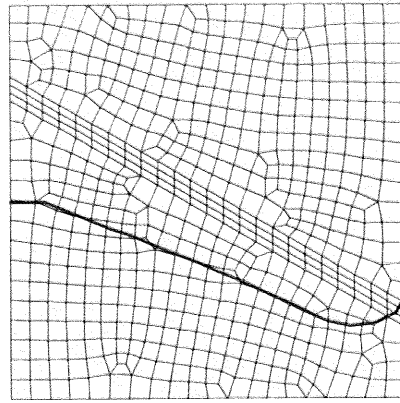


図 3.3.5 き裂進展経路 (シミュレーション)

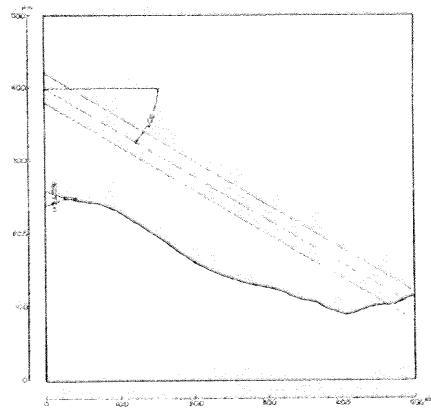


図 3.3.6 き裂進展経路 (実験)

3.4 3次元数値解析例

3次元の問題で X-FEM 解析の精度検証を行う。図 3.4.1 (a) に示すエッジクラックを解析した (ヤング率 $E=2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, ポアソン比 $\nu=0.3$)。用いたメッシュは, 図 3.4.1 (b)。パラメータは, $\sigma=1 \text{ N/mm}^2$, $D=7 \text{ mm}$, $W=7 \text{ mm}$, $L=16 \text{ mm}$ である。き裂を含む要素内の座標系は図 3.4.2 のように定義する。本解析では, K_I と K_{II} のみを考え, K_{III} は 0 とする。つまり, き裂は z 方向には進展しないと仮定する。

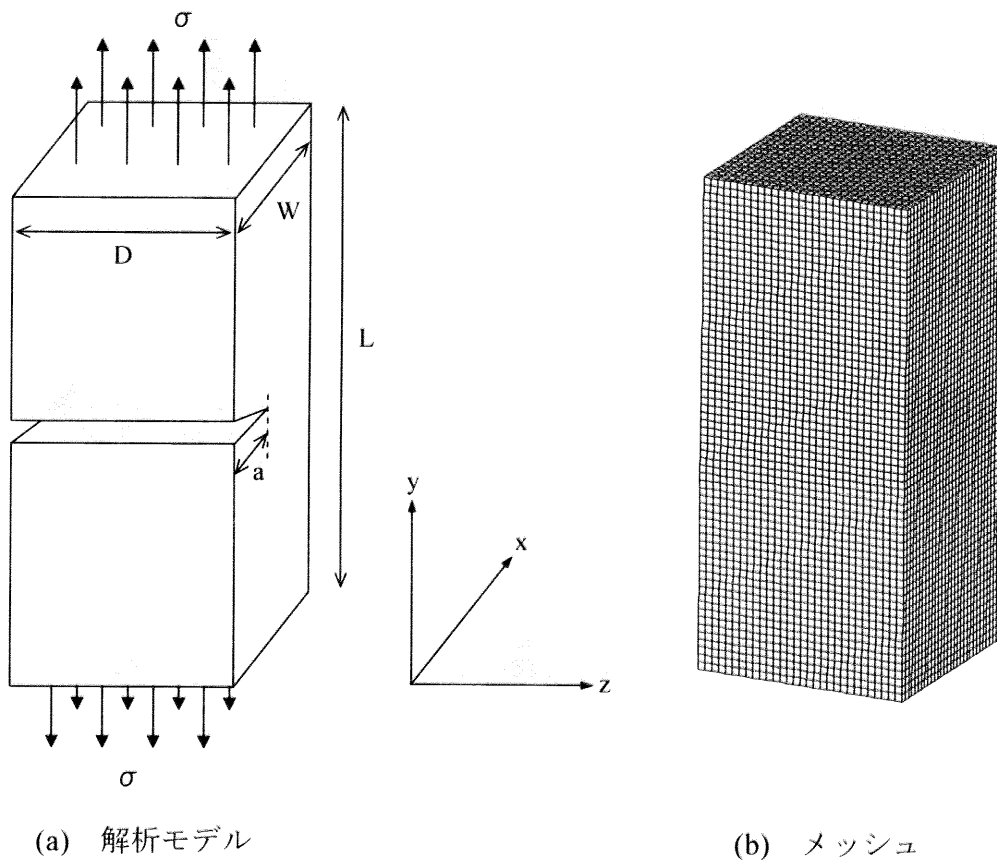


図 3.4.1 エッジクラック

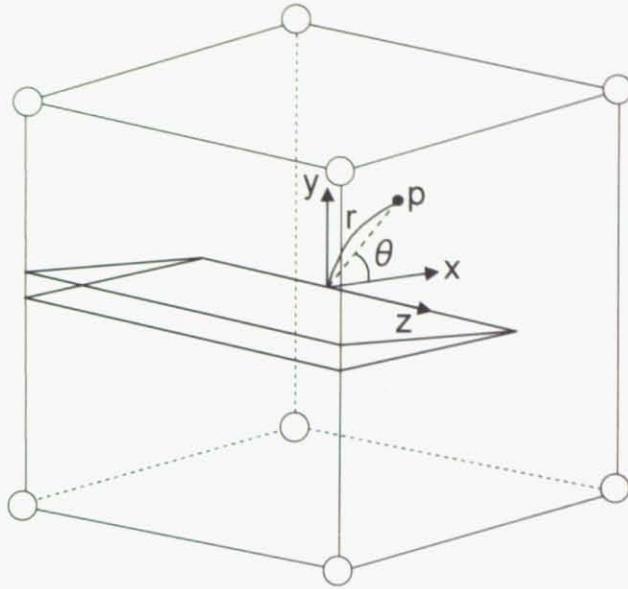


図 3.4.2 き裂を含む要素内の座標系の定義

エッジクラックの応力拡大係数の近似解析解は(3.1.1)式で与えられる。き裂の長さ a を変えて、応力拡大係数の比較を行った (図 3.4.3)。 $1 < a < 5$ では理論値との誤差は 2%程度であり、よく一致している。3.1.1 の例題と同様に、 $a < 1$ 及び $a > 5$ では、き裂先端近傍の応力、変位の誤差が大きくなった結果、精度の悪化が起きている。

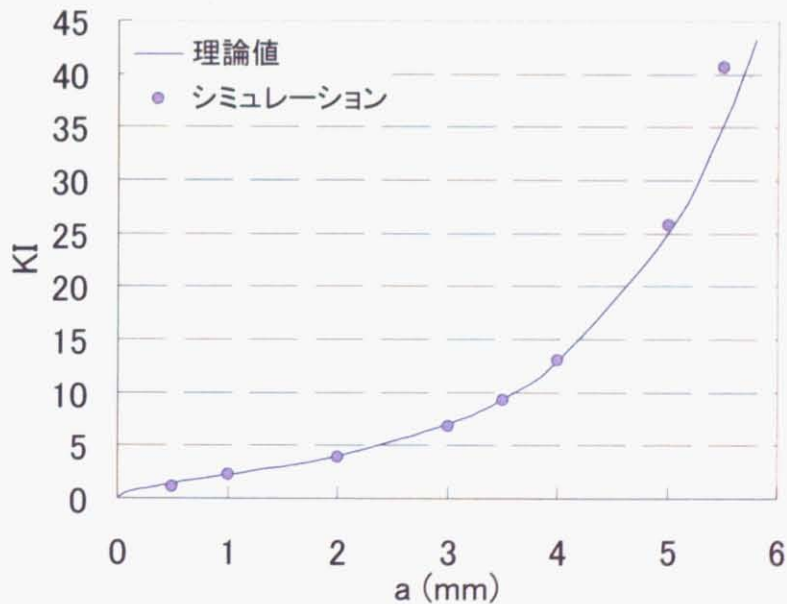


図 3.4.3 き裂線の長さ a に対する応力拡大係数

第4章 鋼床版への適用

4.1 はじめに

近年、鋼床版（図 4.1.1）に疲労き裂が多数発見されている。鋼床版とは、鋼板を使用した床組で、鋼材で構成されたデッキプレート下面を縦リブ（Uリブ）や横リブなどで補強をした構造物である。

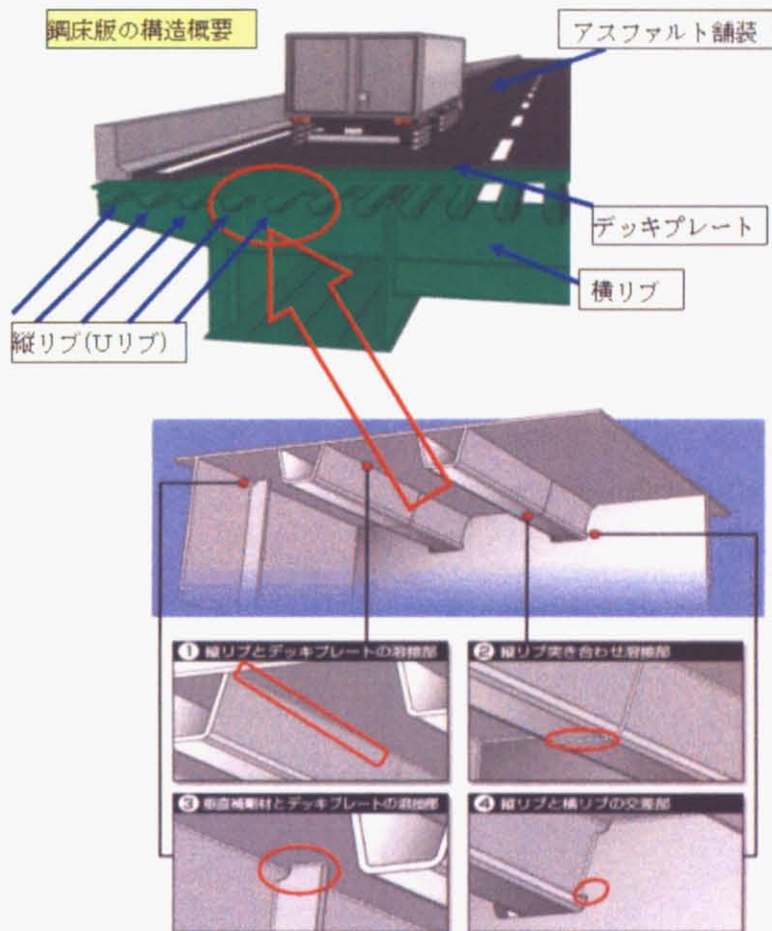
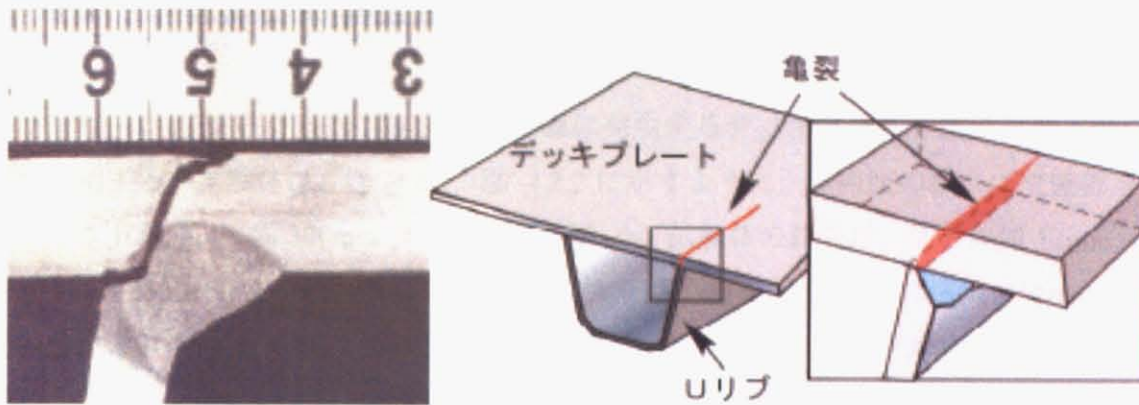


図 4.1.1 鋼床版でひび割れが発生しやすい位置[30]

き裂が発生しやすい場所はいくつかあるが（図 4.1.1）、特にUリブとデッキプレートの溶接部に発生するデッキ貫通型き裂（図 4.1.2）は、発生時のき裂長が比較的長く、交通障害を引き起こす可能性があり、早急の対策が必要とされている。このき裂の発生・進展メカニズムについては、未解明な部分も多く、効果的な補修・補強方法の模索のためには簡便で精度の高いシミュレーション技術が必要とされている。



(a) 実橋断面写真例

(b) イメージ図

図 4.1.2 デッキ貫通型き裂[31]

デッキプレートとUリブ溶接部においては溶着金属の冷却に伴い、残留応力が生じており、き裂の発生、進展に影響を及ぼしている[32]。本章では、この残留応力の影響を考慮し、X-FEMによるデッキ貫通型き裂の進展解析及び、鋼床版の寿命推定を行った結果について述べる。

4.2 デッキ貫通型き裂の再現試験

本節では、U リブとデッキプレート溶接部に発生するデッキ貫通型き裂の再現実験[31]の概要を説明する。試験体は、図 4.2.1、図 4.2.2 に示すように、鋼床版の横リブ交差部を対象とし、長さ 1600mm×幅 300mm の部分模型である。試験体の諸元は、デッキ厚 12mm, U リブ形状 320×250×8mm, 中心間隔 655mm で 2 本配置。横リブは、1600×600×12mm とし、隅肉溶接によりデッキと U リブに接合している。横リブのスカラップ形状は、図 4.2.2(b)に示すように、デッキ側を R=35mm の切り欠きとし、U リブ下端を R=35mm の長円形切り欠きとしている。デッキと U リブの溶接は、高速回転アーク MAG 溶接を用いて、U リブ端とデッキの間は自然開先でトーチ角度を約 50 度に保ち施工している。その他、横リブとデッキおよび U リブの溶接には CO2 半自動溶接を用いている。

荷重は、デッキ上面の U リブ内中心位置にシングルタイヤを想定した 200×200mm 硬質ゴムを介して 50kN (荷重範囲 10kN~60kN : 周波数は、1~10Hz 程度) の繰り返し荷重を 2 箇所同時に与えている。試験体の設置は、下フランジの一部を H 型鋼と固定ボルトで固定している。なお、アスファルトの全体剛性への影響は比較的小さい[33]ため、アスファルト舗装無しで荷重を実施している。



図 4.2.1 試験状況写真

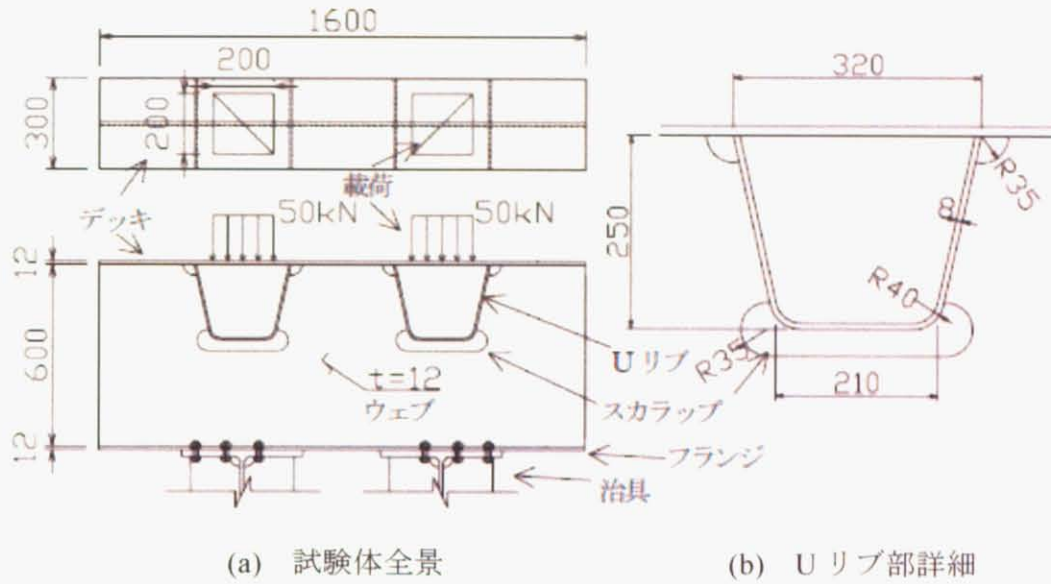
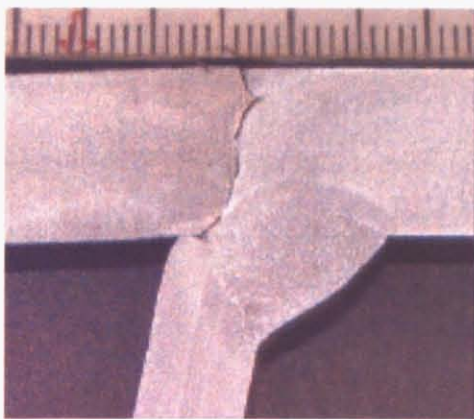


図 4.2.2 試験体図面

再現実験で発生した疲労き裂のデッキ上面への進展は図 4.2.3 のような経路となる。き裂の最後は、せん断による破断によりき裂が貫通している。最後の破断については、デッキ上面からもき裂が進展していることが他の破面観察により確認されている。



(a) 破面マクロ写真



(b) 破面スケッチ

図 4.2.3 貫通き裂状況

4.3 X-FEMによるデッキ貫通型き裂の進展解析（2次元モデル）

本解析では鋼床版（図 4.2.2）を2次元モデルで近似している。使用したメッシュを図 4.3.1 に示す。初期き裂の長さ（図 4.3.2 (b)）は、溶接未溶着部の長さ（図 4.3.2 (a)）とみなせる。溶接未溶着部の長さは（Uリブウェブ厚－溶け込み深さ）以下であるが、実験条件等により様々な値を取りうる。初期き裂の長さは、き裂が上方方向に進みやすい位置にしている（具体的には3.0mmとしている）。なお、初期き裂の長さを3.0mmから大きく変えると、き裂が横方向に進む、下方方向に進む、全く進まない（ K_I^{eq} が $\Delta K_{eff,th}$ 以下となる）などの結果となる。実際の鋼床版でもすべてのき裂が上方方向に進むわけではなく、横方向、下方方向に進むき裂も存在する。また、き裂が発生しない場所もある。

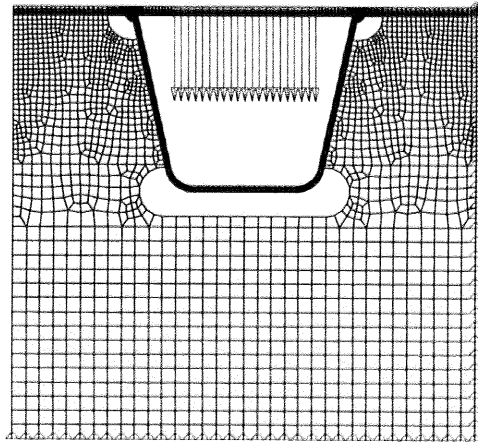
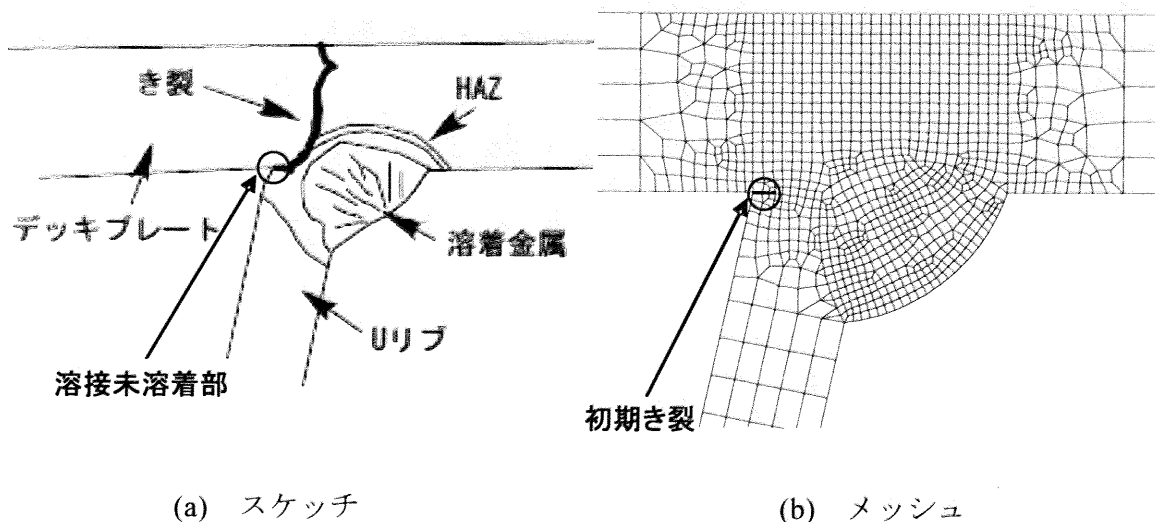


図 4.3.1 鋼床版の2次元モデルのメッシュ



(a) スケッチ

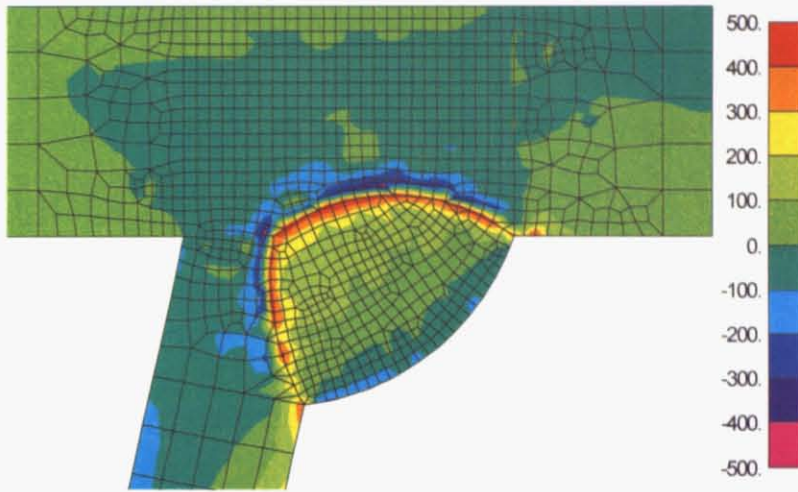
(b) メッシュ

図 4.3.2 Uリブとデッキプレートの溶接部

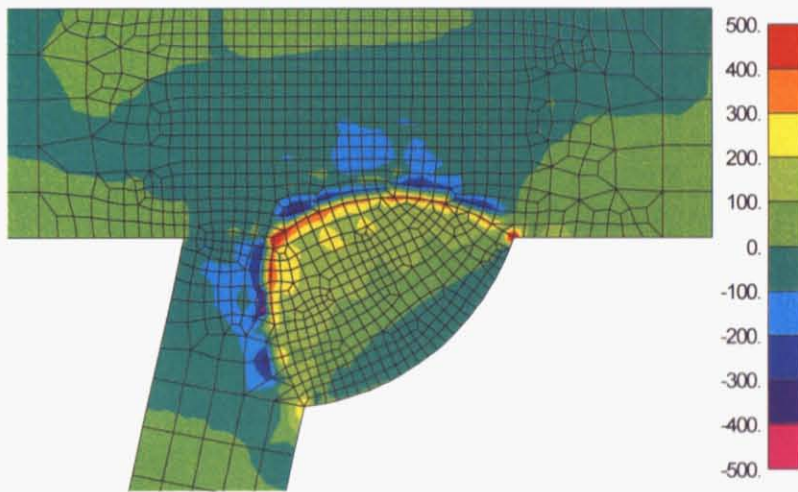
鋼床版の U リブとデッキプレートの溶接部（図 4.3.2）では，高温の溶着金属が冷却し，溶接部に残留応力が生じる．溶着金属部分に仮想的に 200℃の温度低下を与え（図 4.3.3），残留応力を求めている．この時の熱収縮による応力の分布を図 4.3.4 (a) ~ (c)に示す．なお，実際の溶着金属部分の残留応力を同定することは困難であるが，直感的におかしくない範囲でき裂進展解析が実験結果に近くなるように，温度を下げる部分及び，温度を設定している．本モデルの場合，き裂面の一部には接触が起きるため，接触を考慮した X-FEM 解析をする必要がある．



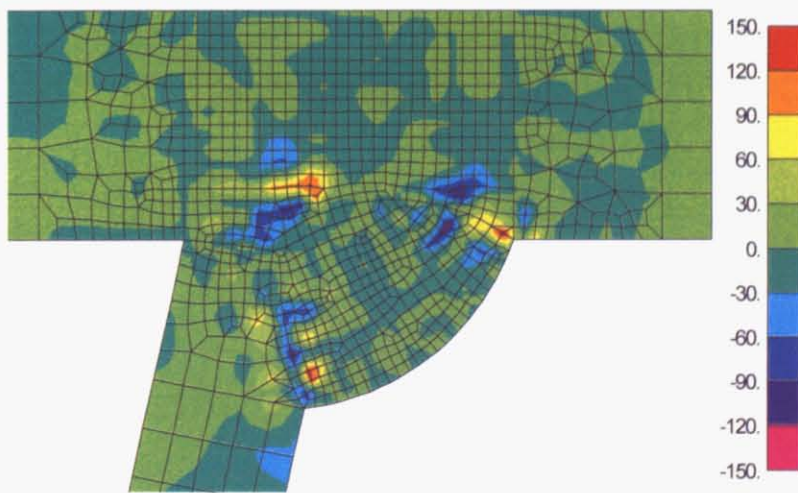
図 4.3.3 温度分布（溶接部）



(a) x 方向応力 (N/mm^2)



(b) y 方向応力 (N/mm^2)



(c) せん断応力 (N/mm^2)

図 4.3.4 残留応力分布 (鋼床版)

解析結果（図 4.3.5）は、実験結果（図 4.2.3 (a)）及び実橋き裂状況（図 4.1.2 (a)）に近い挙動を示している。き裂は最初、残留応力の影響により斜め上方向に進み（図 4.3.6 ①）、その後は、デッキの曲げ応力の影響をより強く受けて進む（図 4.3.6 ②）。破断直前の部分は、デッキの有効断面が小さくなりせん断力により破断（デッキを貫通）する。この部分は解析では予測できない。また、残留応力を考慮せずいき裂進展解析を行うと、き裂は進展しない。鋼床版のデッキ貫通型き裂は残留応力の影響が強く、現実に近い残留応力が求めれば、正確なき裂進展解析が可能となることがわかる。

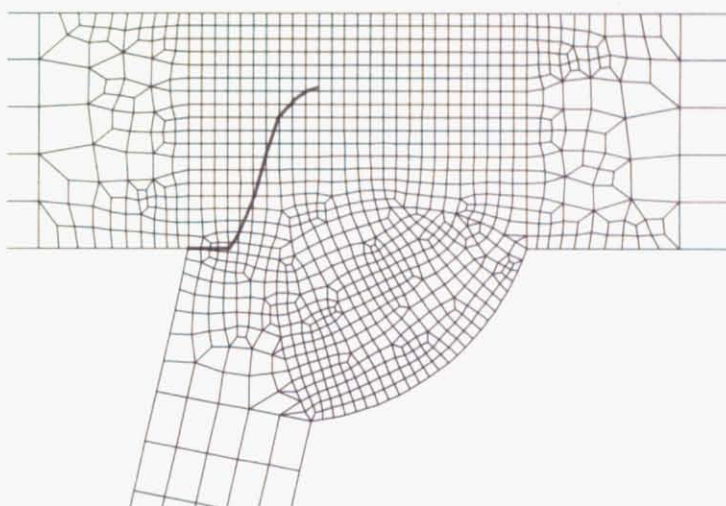


図 4.3.5 鋼床版き裂進展経路（シミュレーション）

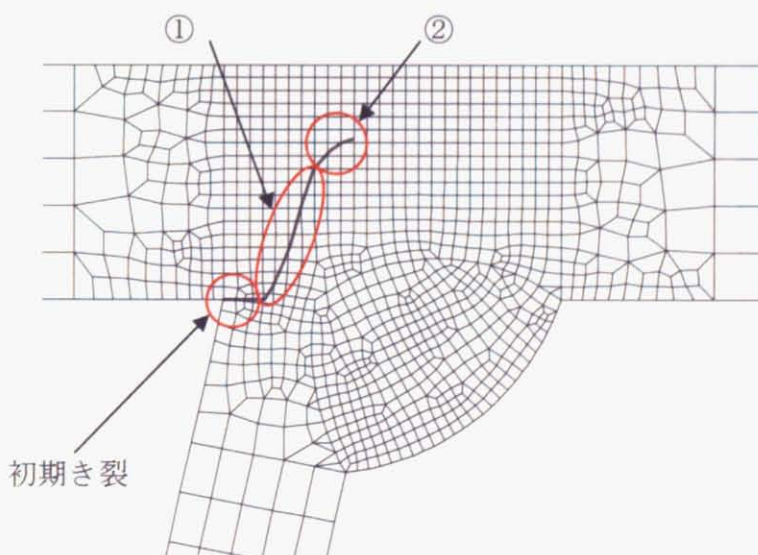


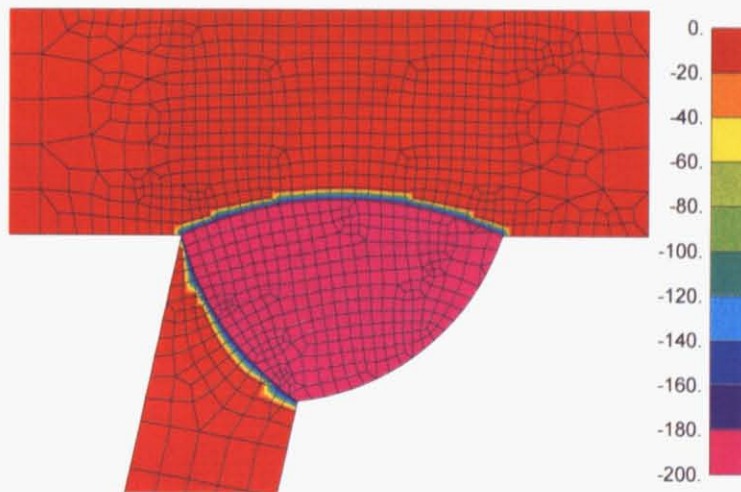
図 4.3.6 鋼床版き裂進展経路（シミュレーション）

4.4 溶着金属部の範囲を変えた場合のき裂進展経路の変化の予測

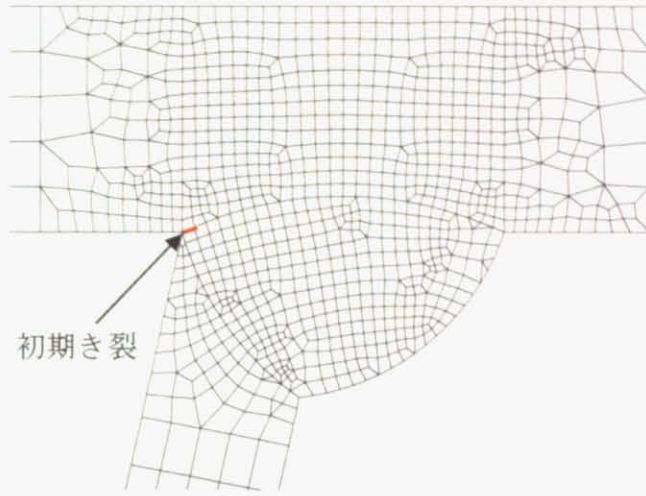
溶接方法を変えることで溶着金属部の範囲も変わる。デッキ貫通型き裂が発生しにくくなるような範囲を解析で求めることが出来れば、溶接方法を決める際の指針になりうる。ただし、2.4節の手法では残留応力の値はある程度の誤差を含むため、本節では、溶着金属部の範囲を大きく変えた場合のき裂進展経路の変化の傾向についてのみ言及する。なお、残留応力の評価方法は、今後実験等との比較による詳細な検討が必要であり、その結果次第では本章の結果が必ずしも実験結果と一致しない可能性もあることを付け加えておく。

4.3節の結果と（Uリブウェブ厚－溶け込み深さ）を短くした場合の比較を行う。完全溶け込みの場合（図 4.4.1）と（Uリブウェブ厚－溶け込み深さ）を短くした場合（図 4.4.2）の2つの場合について解析を行った。残留応力を求める際の温度分布は、それぞれ図 4.4.1 (a)、図 4.4.2 (a)である。また、初期き裂は図 4.4.1 (b)、図 4.4.2 (b)とする。

完全溶け込みの場合、（Uリブウェブ厚－溶け込み深さ）を短くした場合について X-FEM き裂進展解析を行うと、どちらの場合もき裂は進展しない（ K_I^{eq} が $\Delta K_{eff,m}$ 以下となる）。（Uリブウェブ厚－溶け込み深さ）を十分短くする若しくは0にすることで、デッキ貫通型き裂が発生しにくくなると考えられる。

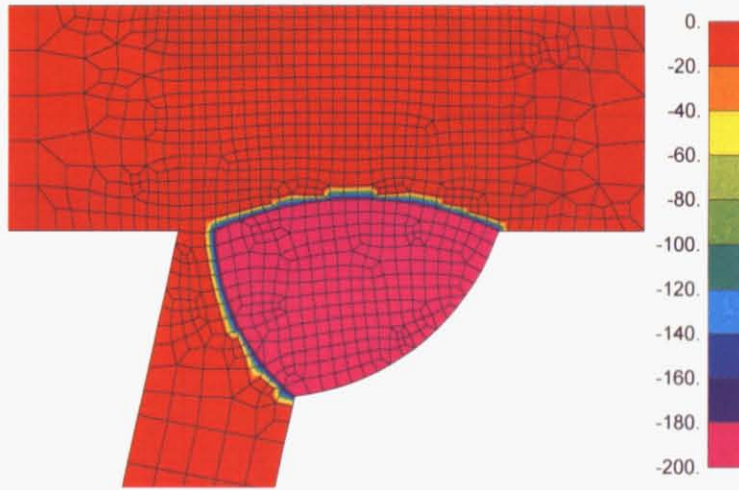


(a) 温度分布



(b) 初期き裂

図 4.4.1 完全溶け込みの場合



(a) 温度分布



(b) 初期き裂

図 4.4.2 (Uリブウェブ厚-溶け込み深さ) を短くした場合

4.5 寿命推定

実験では、き裂長の推移を計測することは出来ない。しかし、き裂近傍のひずみ値の推移はき裂長に対応（反比例）している。図 4.5.1 に示すように、実験の計測結果からデッキ貫通型き裂に対して感度が最も高いUリブ付け根から5mm 内側に入った位置で橋軸直角方向のひずみゲージを着目ゲージとする。着目ゲージのひずみ推移は図 4.5.2 となる[31]。

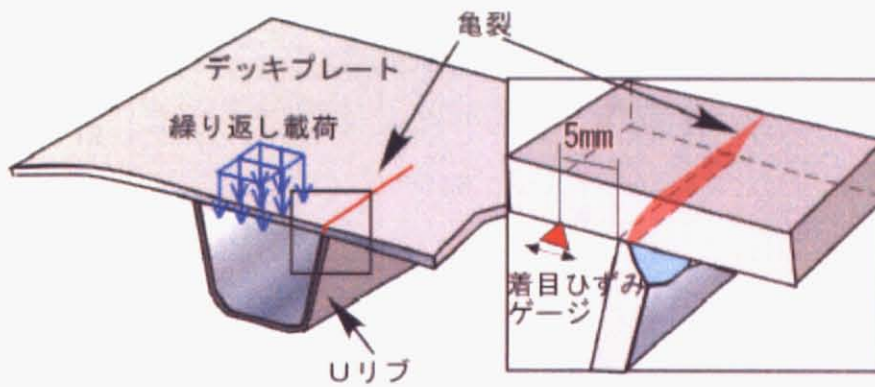


図 4.5.1 着目ゲージ位置図

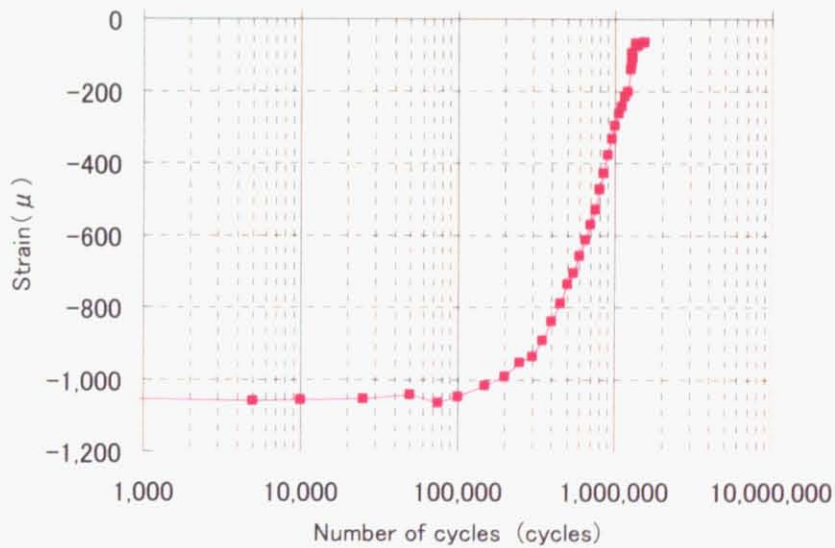


図 4.5.2 着目ゲージひずみ値推移

一方、解析でき裂長の推移を求める場合、各ステップの応力拡大係数及び(2.5.5)式によって繰り返し回数を計算する。き裂伝播寿命解析の結果は図 4.5.3 となる。用いたパラメータは、 $C=1.5 \times 10^{-10}$ 、 $m=2.5$ 、 $\Delta K_{eff_{th}}=2.0 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ である。図 4.5.2 と図 4.5.3 を比べると、解析ではき裂長の進展は途中で急激に早くなっている。解析では、2次元化しているため、き裂進展速度が速くなっていると考えられる。より正確な寿命推定のためにはモデルの3次元化をする必要がある。

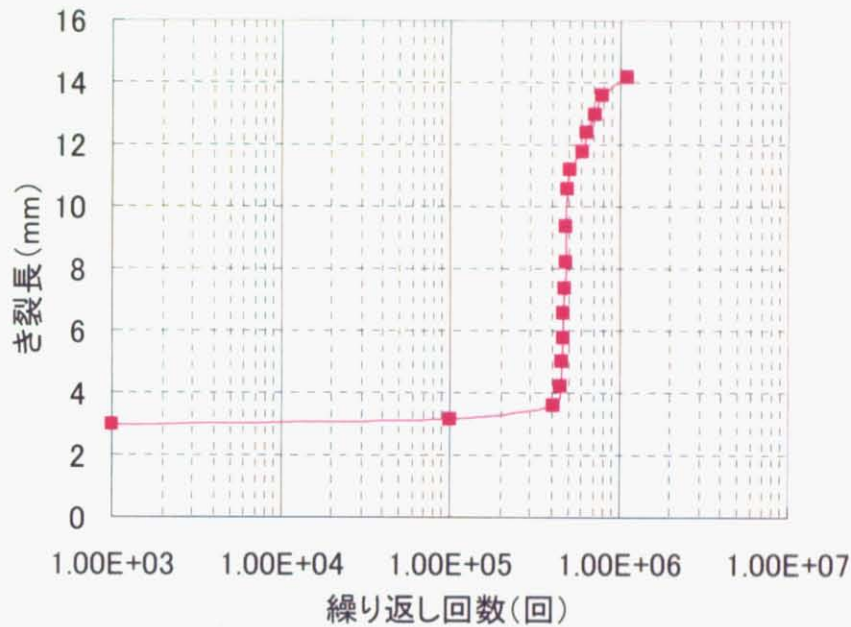


図 4.5.3 き裂長推移 (シミュレーション)

4.6 形状を変化させた場合の寿命の変化の予測

鋼床版の疲労き裂の対策のためには、寿命を最大化するような最適設計や、効果的な補修・補強方法の模索が必要である。具体的には、デッキプレートの厚さ、Uリブの位置、形状、溶接の方法などを変えて寿命が最長になるような構造の設計、舗装構造の改良による疲労性状改善効果の検証、デッキプレートの上に補強版を設置した場合の疲労性状改善効果の検証などである。

本節では、最適設計のための第一段階として、鋼床版の形状を変えて寿命（き裂端が高さ8mmに到達するまでの繰り返し回数）を比較した。形状を変える部分としては、Uリブの幅や高さをパラメトリックに変更させている。基本となる形状は図 4.6.1 である。

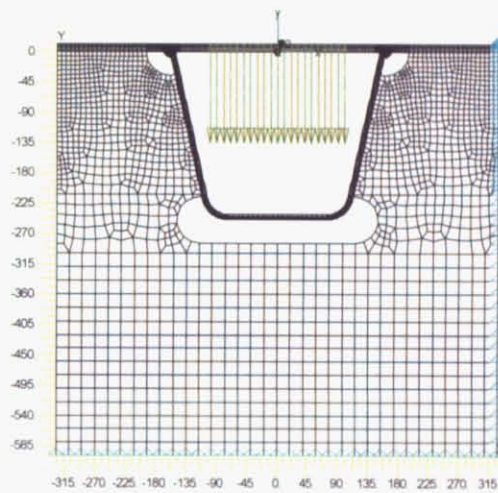


図 4.6.1 鋼床版

Uリブの高さを変える場合、図 4.6.2 の a の部分を伸縮させ、それに合わせて b の部分を変える。Uリブの高さを変えた後の形状は図 4.6.3 のようになる。

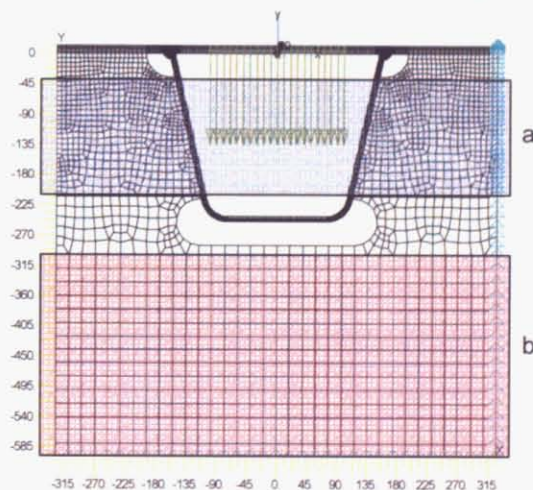


図 4.6.2 高さを変える場所

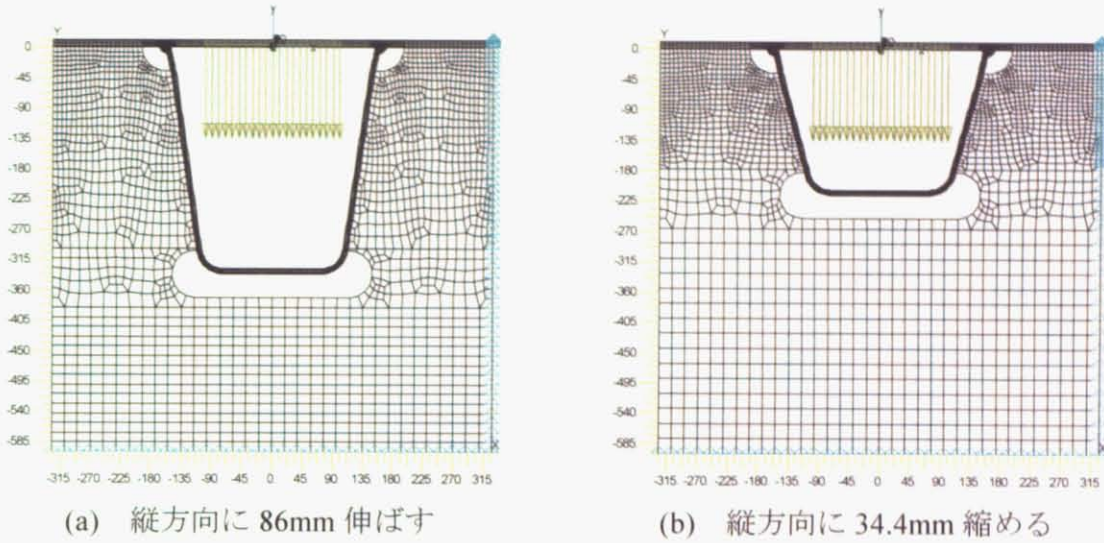


図 4.6.3 Uリブの高さ変更後の形状

Uリブの幅を変える場合，図 4.6.4 の a の部分を伸縮させ，それに合わせて b の部分を変える。Uリブの幅を変えた後の形状は図 4.6.5 のようになる。

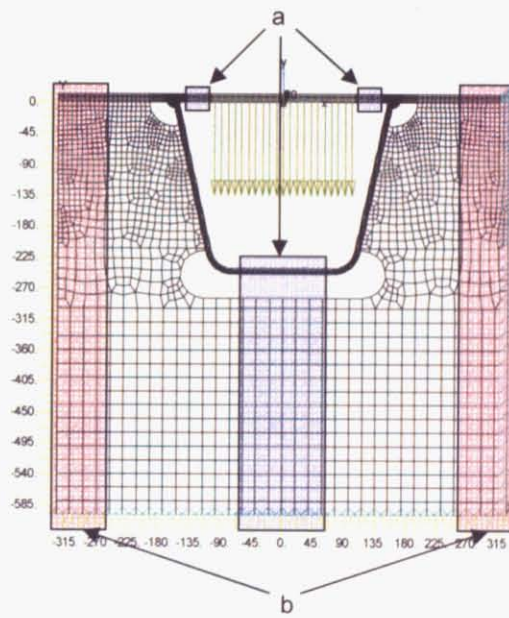


図 4.6.4 幅を変える場所

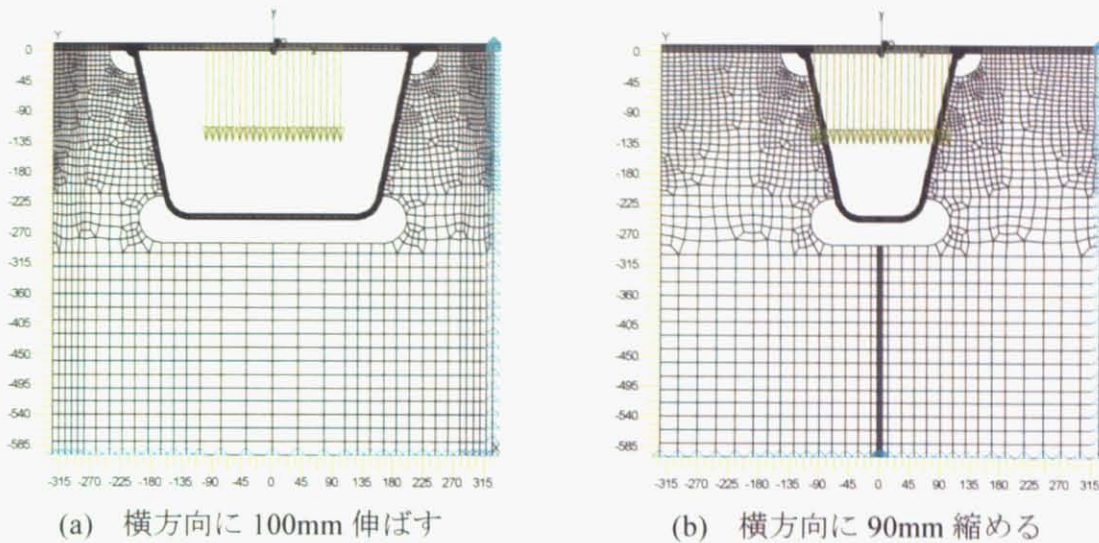


図 4.6.5 U リブの幅変更後の形状

U リブの高さ，幅を変えて寿命を比較した（図 4.6.6）．縦方向に伸縮させた場合には寿命に大きな差は生じなかった．単純に縦方向の長さを変えても応力拡大係数はあまり影響を受けない．横方向に伸縮させた場合は横幅を狭めるほど寿命が延びる．ただし，荷重を与えている範囲より狭くすると U リブの外側の部分が弱くなる可能性がある．荷重部分と溶接部分の相対位置が影響を及ぼしていると考えられる．

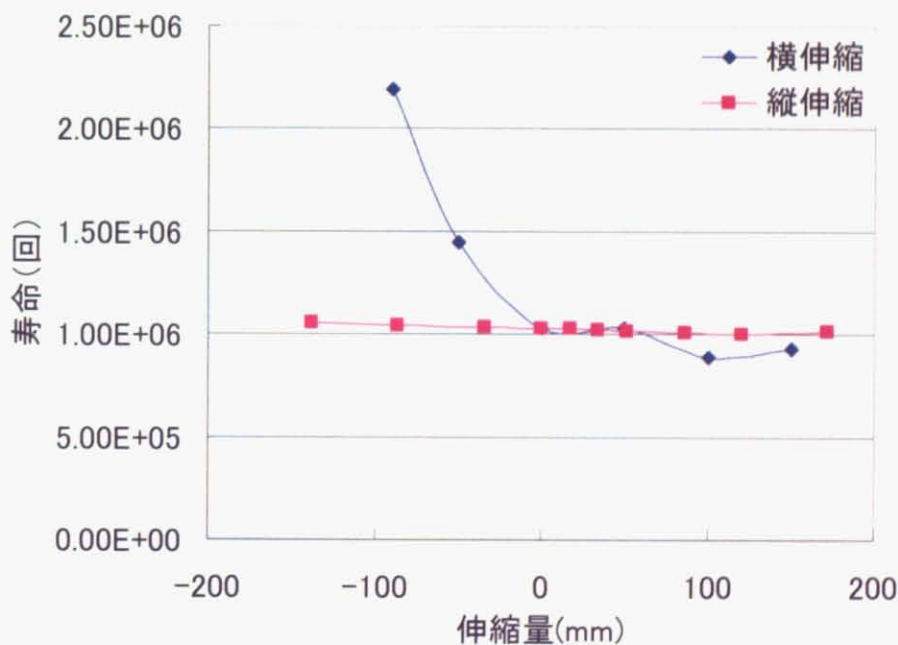


図 4.6.6 各形状の寿命

4.7 X-FEMによるデッキ貫通型き裂の進展解析（3次元モデル）

4.3節で述べたとおり，き裂進展経路の予測に関しては，2次元モデルでもある程度正確なシミュレーションが可能である．しかし，寿命予測に関しては2次元モデルでは問題があり（4.5節），より正確なシミュレーションが必要である．また，2次元モデルでは，奥行き方向の位置の違いによる変化を表現できない．

本節では，上記の問題を解決するために，鋼床版の3次元モデルを用いて解析を行う．ただし，本解析では， K_I と K_{II} のみを考え， K_{III} は0とする．つまり，き裂は z 方向には進展しないと仮定する．解析をする対象は，鋼床版（図4.2.2）の4分の1モデルとする．用いたメッシュは，図4.7.1である．き裂が横リブのある平面内（ $-6 < z < 0$ ）を進展する場合と横リブから離れた平面内（ $132 < z < 144$ ）を進展する場合のそれぞれについて解析を行う．

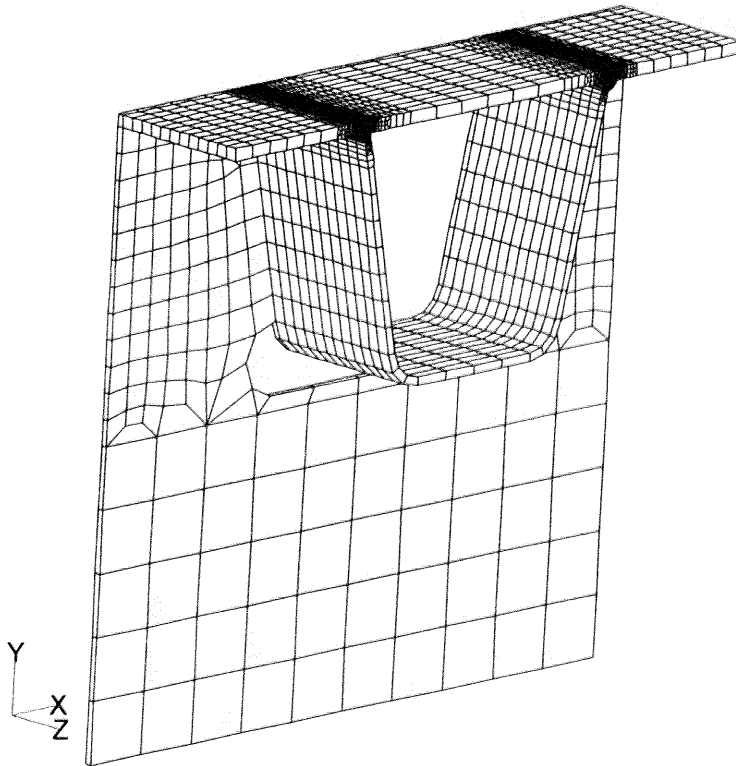


図 4.7.1 鋼床版の3次元モデルのメッシュ（29570要素）

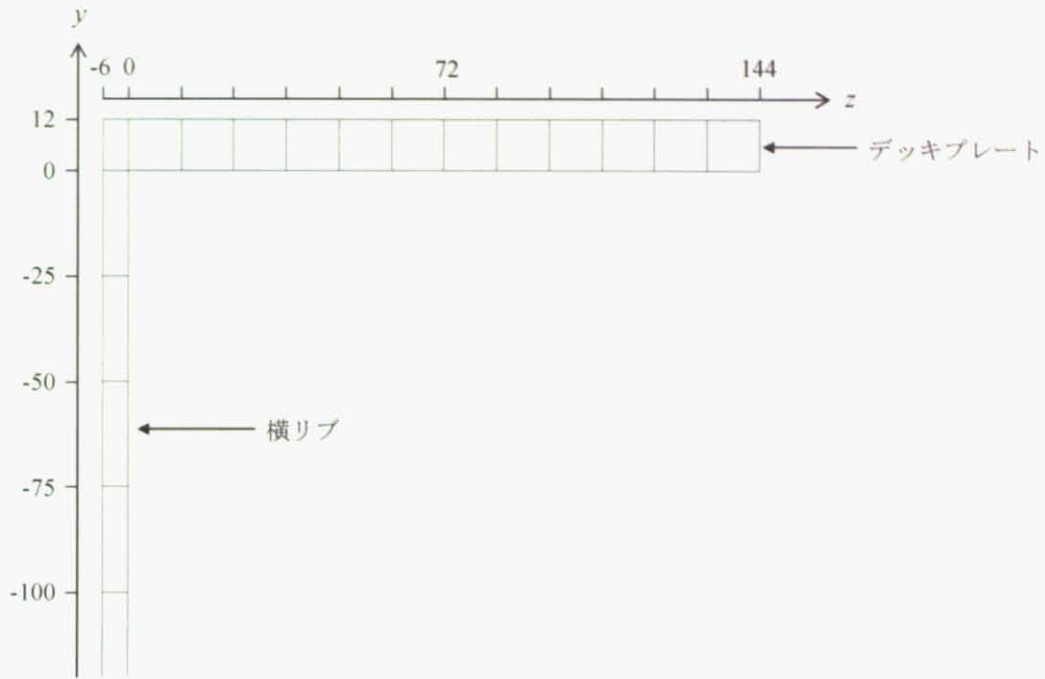
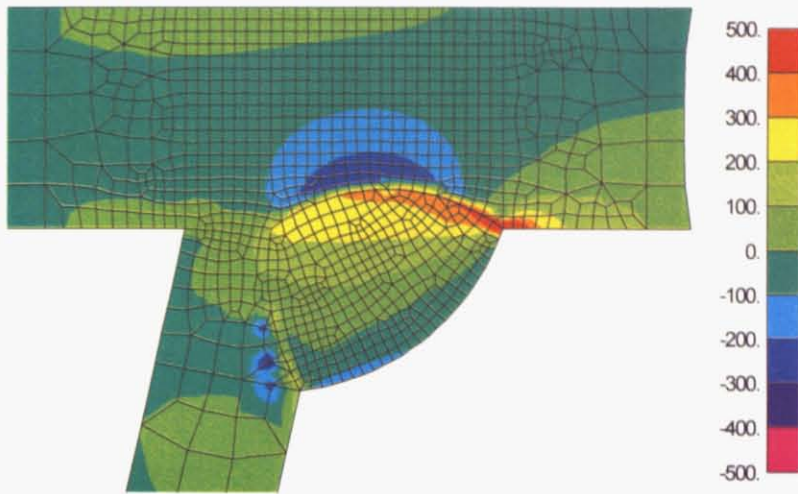


図 4.7.2 鋼床版の3次元モデル (yz平面)

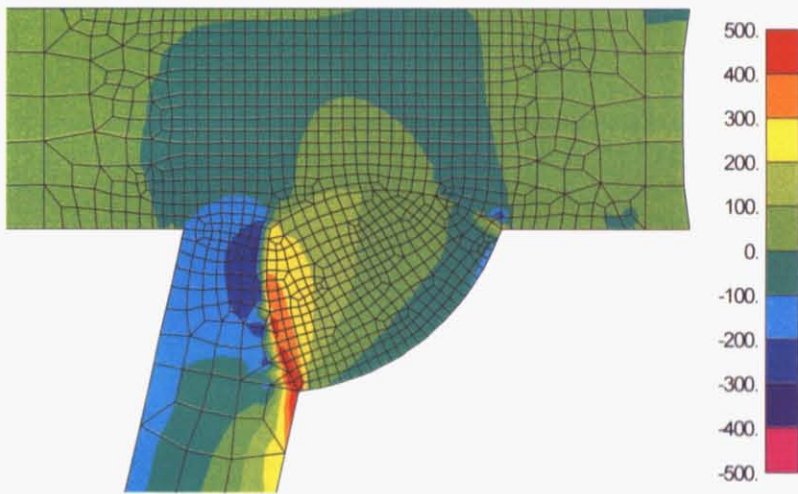
4.3節と同様に、溶着金属部分に仮想的に200°Cの温度低下を与え(図4.7.3)、残留応力を求めている。この時の熱収縮による応力の分布は、 $z=0$ では図4.7.4(a)~(c)、 $z=144$ では図4.7.5(a)~(c)となる。



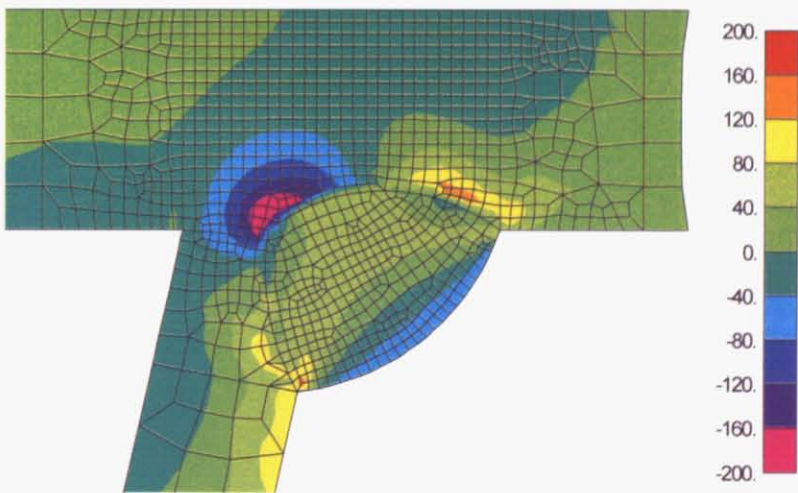
図 4.7.3 温度分布 (溶接部)



(a) x 方向応力 (N/mm^2)

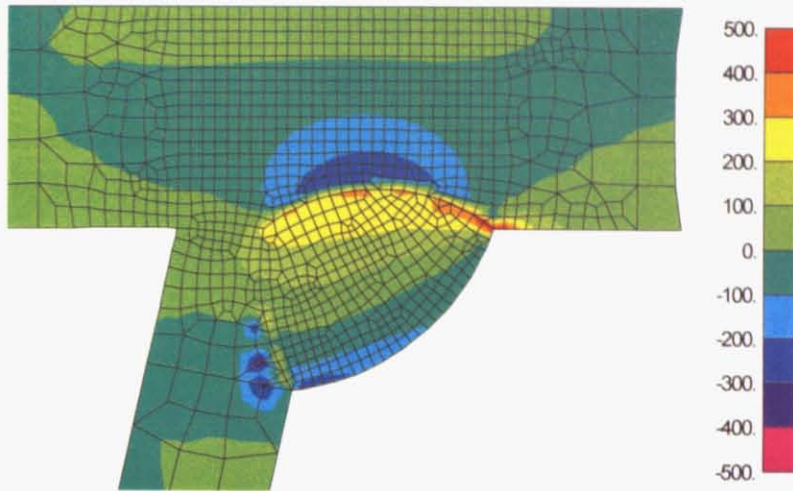


(b) y 方向応力 (N/mm^2)

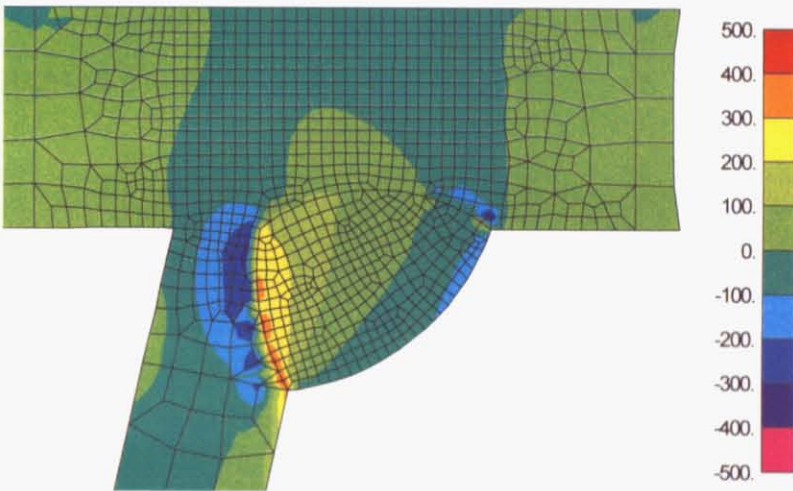


(c) せん断応力 (N/mm^2)

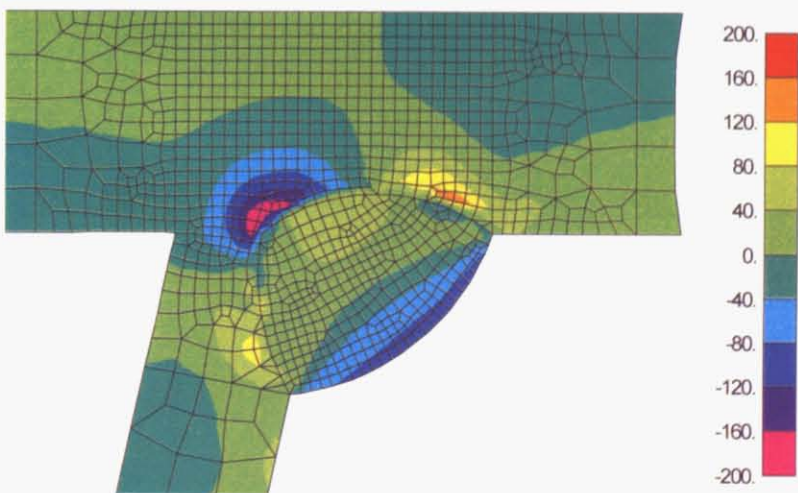
図 4.7.4 残留応力分布 ($z=0$)



(a) x 方向応力 (N/mm^2)



(b) y 方向応力 (N/mm^2)



(c) せん断応力 (N/mm^2)

図 4.7.5 残留応力分布 ($z=144$)

初期き裂の長さは 3.0mm とし、接触を考慮した X-FEM 解析を行った。き裂が横リブのある平面内 ($-6 < z < 0$) を進む場合、き裂進展経路は図 4.7.6 となった。また、横リブから離れた平面内 ($132 < z < 144$) を進む場合もほぼ同じ経路となる。き裂進展経路に関しては、2次元と3次元で大きな違いは見られなかった。

き裂が横リブのある平面内 ($-6 < z < 0$) を進展する場合と横リブから離れた平面内 ($132 < z < 144$) を進展する場合のき裂長推移はそれぞれ図 4.7.7, 図 4.7.8 となる。なお、4.5節と同様に、各ステップの応力拡大係数及び(2.5.5)式によって繰り返し回数を計算している。用いたパラメータは、 $C = 1.0 \times 10^{-9}$, $m = 2.8$, $\Delta K_{eff_{th}} = 1.0 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ である。図 4.7.7, 図 4.7.8 は、2次元モデルの結果(図 4.5.3)と比べると、実験結果(図 4.5.2)に近づいている。モデルを3次元化したことで、応力拡大係数が小さくなり、現実に近い値になったと考えられる。また、図 4.7.8 では図 4.7.7 に比べてき裂進展が遅い。この原因としては、横リブ付近のほうが局所的な曲げが大きくなるためであると考えられる。実際の鋼床版においても、経験的に横リブ付近のほうがき裂が進展しやすいと言われている。

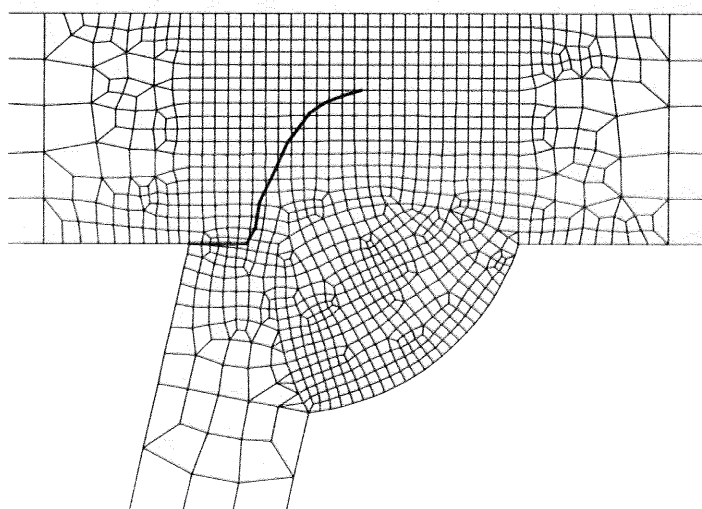


図 4.7.6 鋼床版き裂進展経路 ($-6 < z < 0$)

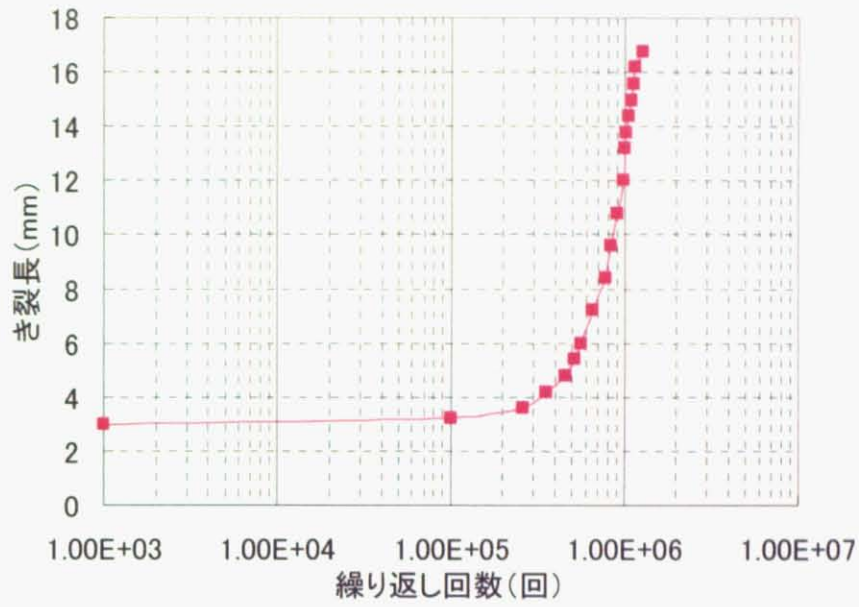


図 4.7.7 き裂長推移 ($-6 < z < 0$)

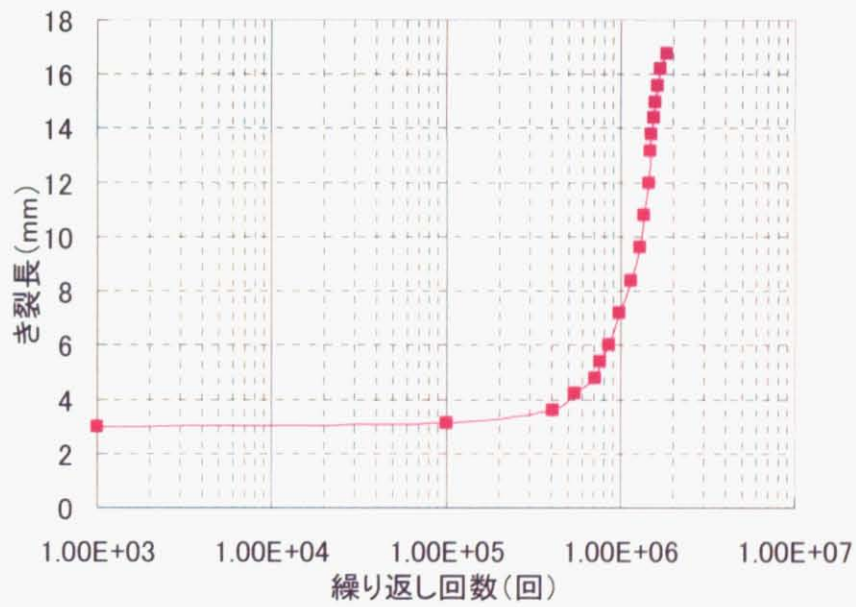


図 4.7.8 き裂長推移 ($132 < z < 144$)

第5章 結論

本論文では、鋼床版デッキ貫通型き裂における残留応力の影響を評価するため、き裂進展解析においてリメッシュを必要としない手法である X-FEM を導入し、X-FEM に新規に残留応力を考慮する手法を提案した。

第3章では、2次元及び3次元の基本的なき裂問題に対して、X-FEM き裂進展解析を行い、その結果を近似解析解と比較して良好な結果が得られること数値的に示した。また、単純な例で領域積分法における重み関数の形状の影響を評価した。重み関数 $q(x_1, x_2)$ の形状としては、台地形（円）が好ましく、また、き裂端からの広がり、中心（き裂端）から要素2個分の長さのときに最も精度の良い解が得られる。さらに、斜溶接試験片の問題において、残留応力を考慮した手法により、実験結果に近いき裂進展経路が得られることを示した。

第4章では、斜溶接試験片の問題で証明した残留応力を考慮した手法を用いて、鋼床版のデッキ貫通型き裂の進展の問題に対し、き裂の進展経路が実験結果及び実橋き裂状況によく一致することを示した。さらに、モデルを3次元化することで、より正確な寿命の推定が可能であることを示した。また、Uリブの形状、溶着金属部の範囲を変えた場合のき裂進展経路、き裂長推移の変化について簡単な検証を行い、本手法が最適設計のための指針になりうることを確認した。

本手法を用いれば、寿命を最大化するような最適設計や、効果的な補修・補強方法の決定などが可能であると言える。具体的には、デッキプレートの厚さ、Uリブの位置、形状、溶接の方法などを変えて寿命が最長になるような構造を設計する等が考えられる。

参考文献

- [1] 日本機械学会, 計算力学ハンドブック (I 有限要素法構造編), 丸善 (1998)
- [2] M. Sekiguchi, A study of element distortion for membranes and plate, 東京大学博士論文 (2003)
- [3] J. Fih and S. Markolefas, Adaptive global-local refinement strategy based on the interior error estimates of the h-Method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 37, 827-838 (1994)
- [4] 中住昭吾, 重合メッシュ法を用いた構造解析手法に関する研究, 東京大学博士論文 (2003)
- [5] T. Belytschko, Y.Y. Lu and L. Gu, Element-free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 37, 229-256 (1994)
- [6] 鈴木克幸, 大坪英臣, 寺田賢二郎, ミン勝載, 金伝栄, 中西克嘉, ボクセル被覆による3次元ソリッドのメッシュレス解析, 土木学会応用力学論文集, 1, 215-222 (1998)
- [7] T. Strouboulis, K. Copps and I. Babuska, The generalized finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 190, 4081-4193 (2001)
- [8] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 45(5), 601-620 (1999)
- [9] 西岡俊久, 岸本健吾, 藤本岳洋, 移動有限要素法による介在物を含む材料中の破壊経路予想シミュレーション, 計算工学講演会論文集, 7, 447-450 (2002)
- [10] 角洋一, 船橋智司, 「スーパーエレメントを用いた溶接構造体のき裂伝播シミュレーション」日本造船学会論文集, 180, 549-557 (1996)
- [11] M. Fleming, Y.A. Chu, B. Moran and T. Belytschko, Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 40, 1483-1504 (1997)
- [12] C.A. Duarte, O.N. Hamzeh, T.J. Liszka and W.W. Tworzydlo, A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 190, 2227-2262 (2001)
- [13] J. Melenk, I. Babuska, The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 139, 289-314 (1996)
- [14] N. Moes, J. dolbow and T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46, 131-150 (1999)

- [15] C. Daux, N. Moes, J. Dolbow, N. Sukumar and T. Belytschko, Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* , 48, 1741-1760 (2000)
- [16] 浅井光輝, 微視的構造特性を考慮した非均質脆性材料の破壊シミュレーション, 学位論文 (博士 (工学)), 2003
- [17] N. Sulumar, D.L. Chopp, N. Moes, T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* , 190, 6183-6200 (2001)
- [18] M. Stolarska, D.L. Chopp, N. Moes and T. Belytschko, Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* , 51, 943-960 (2001)
- [19] N. Sukumar, N. Moes, B. Moran and T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* , 48, 1549-1570 (2000)
- [20] N. Moes, A. Gravouil and T. Belytschko. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part I: Mechanical model. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* , 53, 2549-2568 (2002)
- [21] J.R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *J. Appl. Mech.* , 35, 379-386 (1968)
- [22] S.K. Maiti, Finite element computation of crack closure integrals and stress intensity factors, *Engineering Fracture Mechanics*, 41-3, 339-348 (1992)
- [23] J.F. Yau, S.S. Wang, H.T. Corten, A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *J. Appl. Mech.* , 47, 335-341 (1980)
- [24] J. Dolbow, N. Moes, T. Belytschko, An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190, 6825-6846 (2001)
- [25] P.C. Paris, The mechanics of fracture propagation and solutions to fracture arrestor problems, *The Boeing Company Document*, D-2-2195 (1957)
- [26] W. Elber, The Significance of Fatigue Crack Closure, *ASTMSTP*, 486 (1971)
- [27] 豊貞ら, RPG 荷重のシミュレーション, 日本造船学会論文集, 176 (1994)
- [28] Y. Sumi, Chen Yang and Z. N. Wang, Morphological aspects of fatigue crack propagation: PartII-Effects of stress biaxiality and welding residual stress, *Int. J. Fracture*, 82, 221-235 (1996)

- [29] 木原博, 楠田忠雄, 飯田國廣, 前田豊生, 松岡忠博: 脆性破壊の伝播におよぼす溶接残留応力の影響, 日本造船学会論文集, 108, 385-393 (1960)
- [30] <http://www.hanshin-exp.co.jp/company/torikumi/anzen/sonsyou.html>
- [31] 栗原康行, 川畑篤敬, 鋼床版デッキ貫通き裂発生メカニズムの実験的検討, 第 61 回年次学術講演会, (2006)
- [32] 三木千壽, 舘石和雄, 奥川淳志, 藤井裕司, 鋼床版縦リブ・横リブ交差部の局部応力と疲労強度, 土木学会論文集, 519 1-32 (1995)
- [33] 岩崎雅紀, 永田考, 西川武宏, 小塩達也, 山田健太郎, アスファルト舗装が鋼床版の疲労に及ぼす影響, 土木学会論文集, 563 1-32 (1997)

謝辞

本論文を執筆するに当たってご指導を賜りました東京大学大学院新領域創成科学研究科の鈴木克幸助教授に心より感謝申し上げます。

また、昨年まで特別研究員として本研究室に在籍されていた現産業技術研究所の中住昭吾さんには、理論面、プログラム実装面の両面に渡り様々な助言を頂きました。深く感謝致します。

本研究室の博士課程の張愛年さん、Shi Jiangshui さん、Kirkayak Levent さん、修士課程2年の岩田隆道君、高明さん、牧野哲也君、修士課程1年の De Souza Vinicius Aguiar さん、有木俊博君、伊藤陽介君、市川幸太君、卒論生の磯部信君、橘田尚明君、呉琛曦君、そして、すでに卒業された嶋村寿文さんには、公私共々多くの助力を頂きました。深く感謝致します。

本研究室の吉田二郎技官及び秘書の大嶋さやかさんには主に事務手続きでお世話になりました。ありがとうございました。

JFE 技研の栗原康行さんには、鋼床版についてのご指導や貴重な助言を頂きました。厚く御礼申し上げます。

2007年2月 中川玲