

2007年度 修士論文

CIP法による時間領域音場解析に関する研究

Study on the time domain sound field analysis
by the CIP method

太刀岡 勇気
Yuuki Tachioka

2008年 1月 28日

東京大学大学院新領域創成科学研究科
社会文化環境学専攻

Institute of Environmental Studies,
Graduate School of Frontier Science, University of Tokyo

目次

第 1 章	はじめに	1
1.1	本研究の背景	1
1.2	本研究の目的	4
1.3	論文の構成	4
第 2 章	時間領域の音場解析手法	7
2.1	概要	7
2.2	音場の基礎方程式	7
2.3	時間領域差分法の定式化	8
2.4	伝達線路網法の定式化	9
2.5	境界条件	10
2.5.1	インピーダンス境界条件	10
2.5.2	階段近似	11
2.6	音源	13
2.6.1	空間分布型	13
2.6.2	時間分布型	14
2.7	まとめ	16
第 3 章	音響問題のための CIP 法の定式化	17
3.1	概要	17
3.2	CIP 法に関する既往研究	17
3.2.1	流体力学分野での研究	18
3.2.2	電磁界・波動解析分野での研究	18
3.2.3	音響分野での研究	18
3.2.4	既往研究のまとめ	21
3.3	CIP 法の定式化	21
3.3.1	特性曲線法	21
3.3.2	CIP 法の基礎式の一般的な導出法	23
3.3.3	CIP 補間	23
3.3.4	様々な内挿の手法	25
3.3.5	多次元への適用	27
3.3.6	保存性	28
3.4	CIP 法の拡張	29
3.4.1	補間を用いない方法	29
3.4.2	M 型 CIP 法の改良	30
3.4.3	インピーダンス境界条件の導入法	30
3.4.4	振動速度境界条件の導入	32

3.4.5	音響振動連成解析	33
3.4.6	$CFL > 1$ となる時間離散化幅での計算	37
3.5	計算効率の比較	37
3.5.1	概要	37
3.5.2	メモリー量	37
3.5.3	計算量	37
3.5.4	考察	38
3.6	まとめ	38
第 4 章	時間・空間離散化に関する検討	39
4.1	概要	39
4.2	数値分散性に関する検討	39
4.2.1	球面波伝搬問題	39
4.2.2	1 次元音場	41
4.2.3	3 次元音場	43
4.2.4	M 型 CIP 法の改良手法に関する検討	44
4.2.5	必要な空間・時間離散化幅と計算効率	45
4.3	時間離散化幅のみを大きくした場合の検討	46
4.3.1	1 次元音場	46
4.3.2	球面波伝搬問題	47
4.3.3	2 次元音場 吸音率が中程度の場合	47
4.3.4	2 次元音場 吸音率が低い場合	49
4.3.5	3 次元音場 吸音率が中程度の場合	49
4.3.6	3 次元音場 吸音率が低い場合	50
4.3.7	3 次元音場 (補間を用いない手法) 吸音率が中程度の場合	52
4.3.8	3 次元音場 (補間を用いない手法) 吸音率が低い場合	52
4.3.9	残響室の解析 吸音率が 0.2 の場合	53
4.3.10	残響室の解析 吸音率が 0.8 の場合	54
4.4	空間・時間離散化幅を同時に大きくした場合の検討	55
4.4.1	3 次元音場 (粗い格子) 吸音率が中程度の場合	55
4.4.2	3 次元音場 (粗い格子) 吸音率が低い場合	57
4.5	まとめ	59
第 5 章	任意形状への対応のための CIV A 法の導入	61
5.1	概要	61
5.2	メッシュフリー型スキームについて	61
5.3	不等間隔格子で分割された 1 次元空間への CIV A 法の適用	62
5.4	ソロバン格子と A 型 CIV A 法, B 型 CIV A 法	63
5.5	CIV A 法の定式化	65
5.5.1	2 次元 3 角形要素	65
5.5.2	3 次元 4 面体要素	67
5.6	CIV A 法の音響問題への適用	68
5.6.1	2 次元音場	69
5.6.2	3 次元音場	70
5.6.3	パラメータ d, c の調整	71

5.6.4	前処理の高速化	72
5.7	CIVA 法の適合要素化	73
5.7.1	2次元での場合	73
5.7.2	3次元での場合 稜線上での適合要素化	75
5.7.3	3次元での場合 要素界面での適合要素化	77
5.8	汎用 CFD 解析プログラム OpenFOAM との連携	79
5.8.1	プリ・ポストプロセッサとして OpenFOAM を用いた解析例 残響室の解析	81
5.9	まとめ	84
第 6 章	周波数特性を持つ境界条件の取扱いに関する検討	85
6.1	概要	85
6.2	周波数特性を持った境界条件 吸音材のモデリングによる方法	85
6.2.1	定式化	85
6.2.2	音響管での検討 背後が剛壁の場合	87
6.2.3	音響管での検討 必要時間離散化幅	90
6.2.4	音響管での検討 背後に空気層を持つ場合	92
6.3	周波数特性を持った境界条件 フィルターを用いる方法	93
6.3.1	概要	94
6.3.2	音響管での検討 直線位相 FIR フィルターの次数	95
6.3.3	音響管での検討 FIR フィルターによる Rayleigh モデル	98
6.3.4	音響管での検討 IIR フィルターによる Rayleigh モデル	100
6.3.5	音響管での検討 IIR フィルターによる Miki モデル	103
6.3.6	バネマス近似のフィルターとしての解釈	104
6.4	吸音境界条件	107
6.4.1	1次元音場での完全無反射境界条件	107
6.4.2	2次元音場の吸音境界条件	108
6.4.3	PML 境界条件の定式化	109
6.4.4	2次元音場での完全無反射境界条件の検討	111
6.5	まとめ	112
第 7 章	まとめ	115
付録 A	開発プログラムについて	117
参考文献		119
謝辞		129
発表論文一覧		131

第1章 はじめに

1.1 本研究の背景

音楽ホールなどの音響的に特別な配慮が必要となる空間を設計する際には、簡易な理論式を用いて吸音材の量などを決定し初期設計を行った後で、エコーなどの音響障害が起こらないことや響きの質を検討するために、1/10 程度の模型を作成して実測を行う実験的手法がよく用いられる [98, 105]。しかしながらこの手法は、コストがかかることや細かな設計変更を反映してその影響を検討することが難しい。このことが早くから問題視されていた機械設計の分野では CAE (Computer Aided Engineering) の実用化が近年急速に進みつつあり、試作数の大幅削減、開発の初期段階における不具合の改善率向上に役立つことが示されている。建築音響の分野でもこの流れを受けて、コンピューターによる数値解析手法 (シミュレーション) が設計に取り入れられつつある。

建築音響の分野で用いられる数値解析手法は、Fig. 1.1 に示す「幾何音響手法」と「波動音響手法」に大きく分けられる。「幾何音響手法」とは、光学の分野で発展したレイトレーシングの理論を用いて、音響エネルギーを持たせた音線を音源点から各方向に放出し、受信点において到来したエネルギー量をカウントすることで時系列応答を近似的に求めるものである。1970 年代頃のコンピューターの普及とともに実際の計算が行われるようになった歴史ある技術である [92]。音波の波動性を考慮に入れない近似であるため精度の保証はないものの、ホールのような大空間であっても CAD (Computer Aided Design) の図面データから読み込んでパソコンで数十分程度で計算できるため、大規模空間の時系列応答を求めるには非常に重宝され、様々な商業用のソフトウェアが売り出されている。この手法のメリットは、エコーの経路が視覚的に分かりやすいことであり、拡散体をつけるなどの音響的な対策を考える上で大いに参考にされている。また近年その適用範囲を拡大するため拡散係数 (scattering coefficient) [109] が導入され、ISO (International Standardization Organization) [111] の中でも定義されるなど期待されている。波動音響解析による拡散係数の同定 [112] や、幾何音響ソフトウェアへの導入法の検討 [113]、幾何音響解析と波動音響解析との比較 [114]、パラメトリックスタディーによる実験的検討 [115, 116] が行われているが、試行段階である。

「波動音響解析」とは、線形化された圧縮性流体の基礎方程式より導かれる波動方程式を近似的に解くもので、差分法 (Finite Difference Method: FDM)、有限要素法 (Finite Element Method: FEM)、境界要素法 (Boundary Element Method: BEM) などがある。これらは時々刻々と非定常な音場の状態を計算する「時系列解析」と、ある特定の周波数の純音性音源による定常音場を仮定して周波数ごとに計算を行う「周波数解析」に分けられる。これらの手法は対象とする周波数

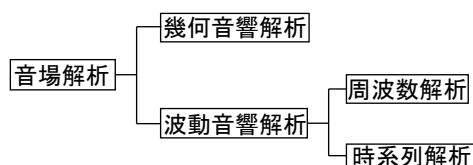


Fig. 1.1 The types of acoustic simulation.

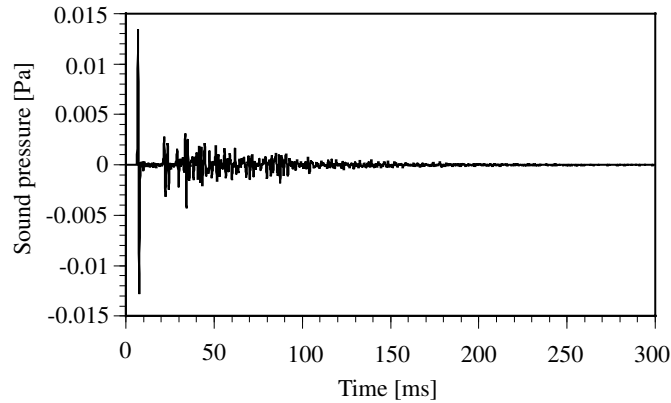


Fig. 1.2 An example of impulse response.

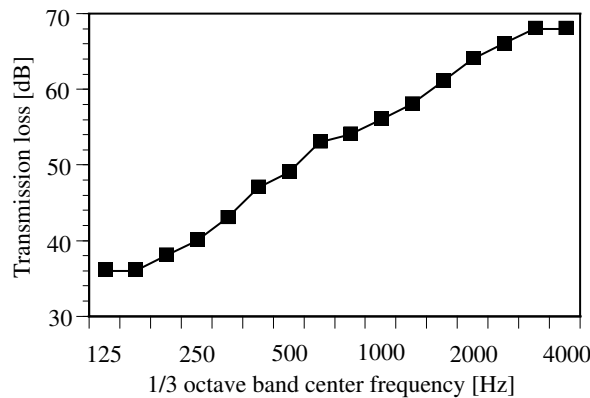


Fig. 1.3 An example of transmission loss.

のFDM, FEMは3乗に、BEMは2乗に比例して自由度が大きくなるため現在でも計算負荷は大きく、中規模程度のホールでも500Hzから1kHz程度までしか計算することができない。人間の可聴域が20kHzまでで、1kHzから5kHz付近の感覚がもっとも鋭いことを考えると、音楽などを畳み込むためにはより高周波成分までの解析が必要となる。ただし人間の音声のエネルギーの大半は1kHz以下の低い周波数範囲に集中し、それ以上のところにはわずかしかなかったことを考えると[130]、音声を畳み込んでスピーチの伝送特性などの検討はできる段階に入っていると思われる。

周波数解析は楕円型の偏微分方程式問題なのに対し、時系列解析は双曲型の偏微分方程式問題なので一般に時系列解析のほうが解きやすいとされる。しかしながら時系列解析はインパルス性の音源を用いた場合、理想的には全周波数解析であるため、非常に有用である。また室内音場の残響や明瞭性の評価は、時系列応答を聴いて行われる。Fig. 1.2にインパルス応答の一例を示す。このように直接音が到来し、その後多くの反射音が続いて到来している様子が、時系列解析の結果を見るとよく分かる。騒音問題でもFig. 1.3に示す壁の透過損失の測定例のように、オクターブバンドや1/3オクターブバンドといった帯域幅を持つ周波数幅での性能評価が行われる。時系列解析を行えば、インパルス応答からフィルタリングを行うことで一度の解析で対象周波数帯域すべての透過損失が求められるので、有用である。

FEMやBEMにおいても時系列解析は行われているものの[100, 138]、時間ステップごとに連立方程式を解く必要があるため周波数解析が多く、時系列解析には、連立方程式を解く必要がない時間領域のFDM(FDTD法)が用いられることが多い[72]。大規模問題に対しては、領域分割型の解法であるFDM, FEMに比べて、境界分割型の解法であるBEMのほうが問題の自由度が小さいため、BEMに優位性があると思われる。しかしながらBEMは密行列からなる連立方程

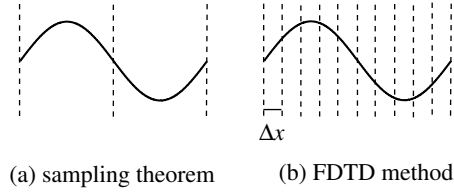


Fig. 1.4 Space discretization.

式を解く必要があるのに対し、FEMは疎行列から成る連立方程式であり、FDMでは連立方程式を解く必要がないため一概にどの手法が効率がよいかは言えない。連立方程式の解法は行列ベクトル積の効率に支配されることになるため、改善策として高速多重極境界要素法 (Fast Multipole BEM: FMBEM) が音場解析にも導入されており [90]、今まで解くことのできなかつた大規模問題の解析に役立てられている [99, 104, 112]。ただし現在音響分野で用いられている FMBEM は周波数解析のため、実用上重要であるインパルス応答を求めるためには、インパルス応答長 T [s] に対し、非常に細かい周波数間隔 $\Delta f = 1/T$ で計算を行う必要がある。例えば 5 秒間のインパルス応答を 1kHz まで求めるためには、5000 個の周波数応答を求めて逆フーリエ変換する必要があり、大変な手間がかかる。そのためこれらの手法の時系列解析への応用が望まれている。

FDTD 法は簡便でよく用いられる反面、高周波成分の位相速度が遅れる数値分散性の影響によって波形を正しく求めるためには空間離散化幅を相当小さく (最短波長 10 分割程度) 取らなくてはならない。Fig. 1.4 に空間離散化の様子を示す。左側がサンプリングの定理で最低限必要とされている波長 2 分割であるのに対し、右側が FDTD 法で標準的に用いられている波長 10 分割である。相当細かいことが分かる。このように空間離散化幅を小さく取らなければならないことは計算時間・記憶容量の増大に直結する。さらに現在用いられている FDTD 法は陽解法のため、空間離散化幅 Δx に対する時間離散化幅 Δt の最大値を定める CFL 条件により、時間離散化幅 Δt に厳しい制限が課せられる。von Neumann の安定性解析 [118] により、1 次元の場合、式 1.1 で表されるクーラン数 CFL が 1 より小さくなくてはならない。

$$CFL = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad (1.1)$$

ここで、 c : 音速 [m/s] である。CFL 条件は 1, 2, 3 次元でそれぞれ以下のようになる。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (1.2)$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \quad (1.3)$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (1.4)$$

さらに FDTD 法は、任意形状に対応するために後述する階段近似を用いるため空間離散化幅 Δx を小さく取らなければならない、それにつれて時間離散化幅 Δt も小さく取る必要がある。これは、境界付近でのみ細かい空間離散化幅を用いたり、有限体積法 [103] のような任意形状に対応するメッシュを用いたりする場合に、最も細かい要素に合わせて解かなければならないということを意味しており、それらの解析を行う上でボトルネックとなってしまっている。例えば 3 次元の場合、空間離散化幅を $1/2$ にすると、記憶容量は 8 倍、計算時間は 16 倍となってしまう。

必要な空間離散化幅を保持したまま時間離散化幅を大きく取るためには、陰解法化が考えられる。実際流体力学の分野では定常解を求めることが重要であるため、陰解法化が常套手段であり SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) が時間離散化幅 Δt を自由に取

ることのできる手法としてよく用いられる [159, 162]。ただしこれは大規模な疎行列を解く必要があることや、音響問題は非定常問題であるため時間離散化幅 Δt をサンプリング周波数以上に行うことができないことなどの理由から、陰解法化のメリットはそれほど大きくないと思われる。

一方で陽解法でありながら時間離散化幅を大きく取ることができる手法として流体力学の分野では、1985年に特性曲線法と3次多項式による補間を組み合わせたCIP法 (Constrained Interpolation Profile 法)[1, 20] が提案され、広く用いられている。この手法は移流方程式の解の性質を利用し、解を特性曲線にそって移流させるものである。そのためCIP法は数値分散の影響が小さく、空間離散化幅を大きくできることが知られている。さらにCFL条件にとらわれない計算が可能である。近年、CIP法は音場解析にも適用が進みつつあり [38, 40, 42–44]、主として開空間の球面波伝搬問題に関して、理論解やFDTD法との比較が行われ、FDTD法と比較して高精度であることが知られている。しかしながら、室内音場解析のような閉空間への適用が行われた事例は見られず、室内音場解析で必須となるインピーダンス境界条件の適用に関する検討や多重反射が起こる長い時間での検討は行われていない。そのため室内音場解析で重要な反射音の解析や残響減衰特性の把握にCIP法が有利であるかは不明である。また音響問題にCFL条件を超えるような大きな時間時間離散化幅での解析手法を導入した事例は見られない。閉空間での解析が行われていないことから、任意形状に対応する手法に関する検討もなされていない。

1.2 本研究の目的

建築音響の時系列解析において現在しばしば用いられているFDTD法の課題は、数値分散が大きいこと、複雑な形状には階段近似を用いて対応していること、任意の周波数特性を持つ境界条件を与えるための手法が確立していないことなどが考えられる。本研究ではCIP法を用いることで、これらの課題を解決することを目的とする。

1.3 論文の構成

以上を研究の目的とした本論文の構成を Fig. 1.5 に示す。第2章では、時間領域の音場解析手法について概観し、最も一般的に用いられているFDTD法の理論について述べる。特に音源や境界条件はCIP法でも共通のものをを用いるため詳しく述べる。

第3章では音響問題のためのCIP法について定式化を行う。基礎方程式となる移流方程式を導いた上で、CIP法の要であるCIP補間について述べる。その上で、計算時間の短縮を図る手法と精度を向上させる手法を提案する。また室内音場問題に対応するために必要な実数のインピーダンス境界条件や振動速度境界条件をCIP法に導入する際の定式化を行う。さらに $CFL > 1$ となるような時間離散化幅で計算を行うために必要な工夫を行う。

第4章ではCIP法がFDTD法に比べて数値分散が小さく高周波成分まで正確に解析できる手法であることを示すため、開空間の球面波伝搬問題と閉空間の1次元の音場問題、3次元の剛壁室の問題の理論解が存在する3問題で、解析解と理論解との比較を行う。本研究で用いた手法は多次元への拡張の際に方向分離手法を用いており、2次元・3次元の場合に精度が落ちる可能性があるためその影響を考察する。また室内音場問題に対応する際の境界条件の影響を検証する。さらに、CFL条件を超える時間離散化幅で実際の問題に適用を行い、方向分離手法がもたらす影響に関して検証する。これらは波形とエネルギー減衰の2つの観点から検討を行い、空間・時間離散化幅に関する知見を得る。

第5章では任意の3角形/4面体要素でCIP補間を行うCIVA(Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates)法の有効性を検証する。実際に2次元/3次元の音響問題に適用し有効性を確認する。

第6章ではCIP法を実問題に適用する際に必要となる周波数特性を持った境界条件に関する検討を行う。吸音材のモデルとしてよく用いられるRayleighモデルをCIP法に導入し、音響管の解析によって有効性を確認する。さらに周波数特性を取り入れる簡便な手法としてフィルターを用いる手法を導入した後に、音響管の解析によって有効性を確認する。

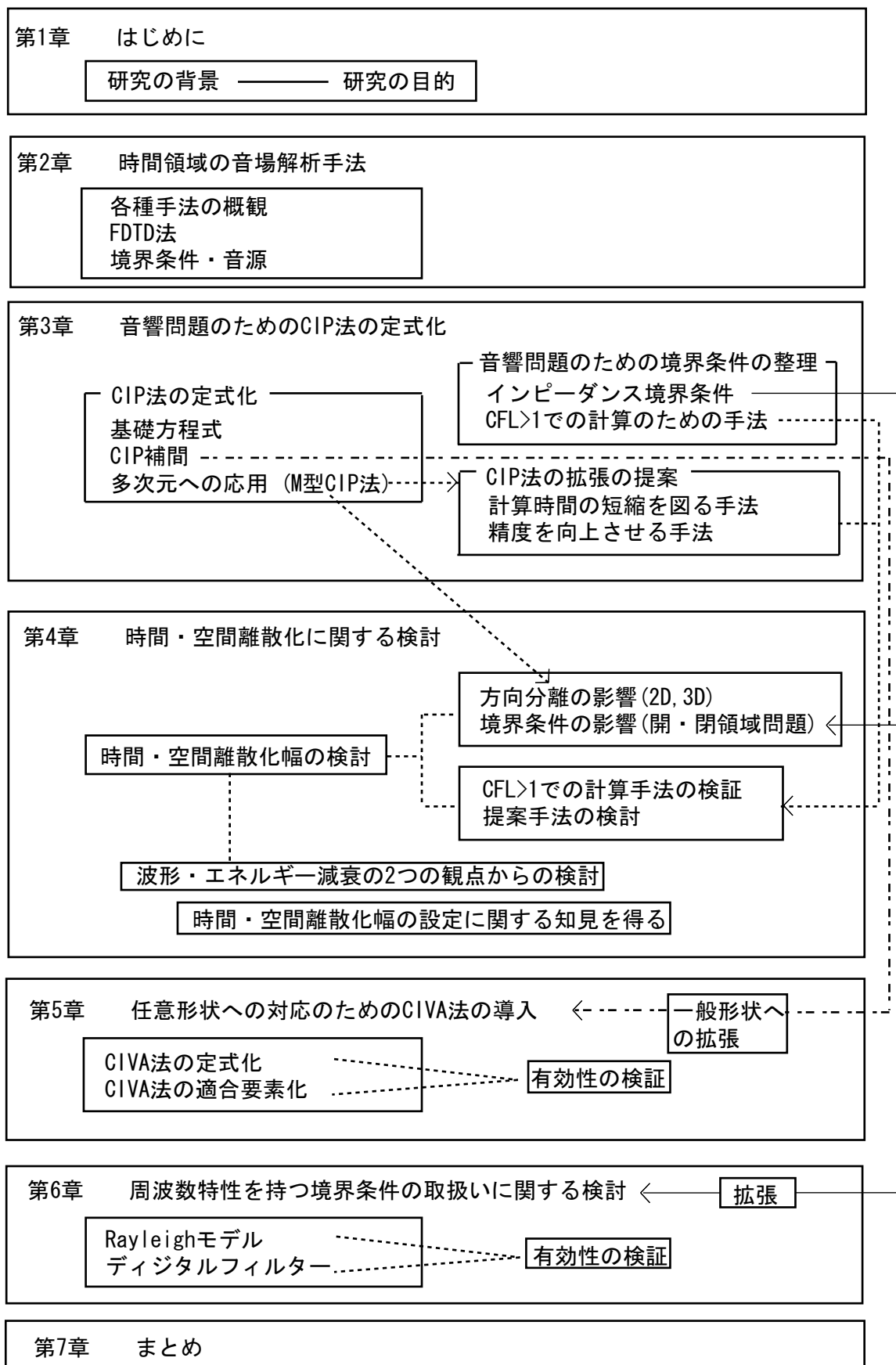


Fig. 1.5 Flow chart of this thesis.

第2章 時間領域の音場解析手法

2.1 概要

微分方程式の理論解はある特殊な条件下でしか求まらないため、何らかの形で離散化を行い数値的に解く必要がある。時間領域の音場解析手法には

- (1) 時間領域差分法 Finite Difference Time Domain (FDTD) 法
- (2) 有限要素法 Finite Element Method (FEM)
- (3) 有限体積法 Finite Volume Method (FVM)
- (4) Constrained Interpolation Profile 法 (CIP 法)
- (5) 境界要素法 Boundary Element Method (BEM)
- (6) 伝達線路網法 Digital Huygens Model (DHM)

などがある [138]。この内 FEM, BEM, FVM が基礎方程式を積分したもの (弱形式) を離散化して解析する手法である。これに対して FDTD 法, CIP 法は基礎方程式を直接 (強形式) 離散化して解析する手法である。DHM は他の手法とは異なり、物理モデルをそのまま表したモデルである。この章では本研究の主題である CIP 法に最も関係が深いと思われる FDTD 法について詳しく述べる。FDTD 法は第 4 章での検討で CIP 法の妥当性の検証のための比較手法として用いる。第 6 章で述べる境界条件にやや関係すると思われる DHM についても触れる。

2.2 音場の基礎方程式

空気中の波動伝搬は、圧縮性流体の方程式を線形化して、3次元の場合以下の運動方程式 2.1, 2.2, 2.3 および連続の式 2.4 で表される [128]。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.4)$$

ここで p : 音圧 [Pa], u, v, w : 粒子速度 [m/s], ρ : 空気の密度 [kg/m³], c : 空気中の音速で $\sqrt{\gamma RT}$ である。 (γ : 比熱比 (1.4), R : 気体定数 (287[J/(kgK)]), T : 気温 [K]) これらから粒子速度を消去することで、波動方程式 2.5 が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0 \quad (2.5)$$

ここで角周波数 ω の定常振動を仮定し、

$$p = P_0 e^{-i\omega t} \quad (2.6)$$

を波動方程式 2.5 に代入して時間項を消去し、ポアソン方程式 2.7

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) p = 0 \quad (2.7)$$

を解くのが周波数解析である。

2.3 時間領域差分法の定式化

差分法は、微分を差分に置き換えて解く手法であるため、適用範囲が非常に広く非線形問題にも比較的簡単に対応することができる。この手法は、Lax の同等定理「差分スキームが微分方程式に適合 (consistent) して安定 (stable) ならば、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で、差分スキームの解は元の微分方程式の解に収束する」により空間・時間離散化幅が十分に小さければ元の方程式の解に収束することが保証されている。

FDTD 法によって解く場合、式 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 を離散化して解く手法 [51] と、式 2.5 を離散化して解く手法 [59] の 2 種類があるが、前者の手法が主に用いられている。これは各時刻における音圧 p と粒子速度 u, v, w が同時に求まるため、受音点におけるインテンシティー $I = pv$ が簡単に算出できるという特長を持つ [134]。このため、スピーカを 6 つ用いることで音の到来方向も含めての可聴化を行うことができるという点や [71]、室内音場問題を解く上で重要であるインピーダンス境界条件を課すのが容易であるという利点を持つためである。これらの方程式を離散化する際に Fig. 2.1 に示すスタガード格子と呼ばれる音圧と粒子速度の定義点が、空間的にも時間的にも半グリッドずれた格子を用いる。(図には描けないが、粒子速度と音圧の時間の定義点も半グリッドずれている。) これによって音圧と粒子速度がカップリングされると同時に、保存則が自然な形で満たされることになる。これに対して後者の手法は、スタガード格子を用いる必要がなく、音圧の時間 2 ステップ分のみのメモリーを確保すればよいので必要なメモリー量が少なくすむという利点を持つが、インピーダンス境界条件の導入が容易でない。文献 [102] において有限体積法における同様の問題が議論されており、FDTD 法にも応用可能である。

本論文では前者の手法を用いることにする。多点を用いて高次差分を行う手法も提案されているが [67, 68]、一般に 2 次以上ではそれほど精度向上が望めないことや、数値振動を生じて安定性が悪くなること [72]、境界付近で精度を下げなければならないなどの欠点もあるため広く用いら

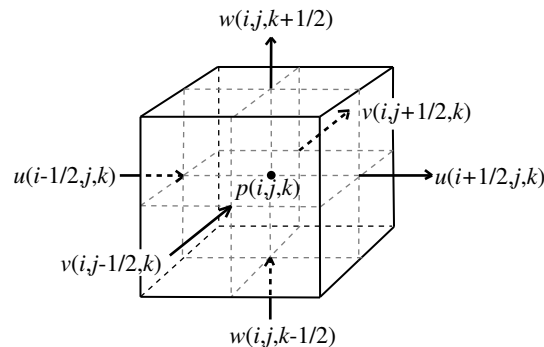


Fig. 2.1 Definition point of p, u, v, w on staggered grid system.

れているとは言えない。ここでは最もよく用いられている空間 2 次の中心差分、時間 1 次の差分を用いて離散化を行った。

$$u^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) = u^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left\{ p^{n+\frac{1}{2}}(i + 1, j, k) - p^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) \right\} \quad (2.8)$$

$$v^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) = v^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left\{ p^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 1, k) - p^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) \right\} \quad (2.9)$$

$$w^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) = w^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta z} \left\{ p^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + 1) - p^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) \right\} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} p^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) &= p^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) \\ &\quad - \frac{\rho c^2 \Delta t}{\Delta x} \left\{ u^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - u^n(i - \frac{1}{2}, j, k) \right\} \\ &\quad - \frac{\rho c^2 \Delta t}{\Delta y} \left\{ v^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - v^n(i, j - \frac{1}{2}, k) \right\} \\ &\quad - \frac{\rho c^2 \Delta t}{\Delta z} \left\{ w^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - w^n(i, j, k - \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで変数の肩の添数は時間ステップを、括弧のなかは x, y, z それぞれの格子点番号を表す。 Δt は時間離散化幅 [s]、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ はそれぞれの方向の空間離散化幅 [m] を表す。例えば 2 次の中心差分は以下のようにして求める。まず Taylor 級数展開

$$p(x + \Delta x) = p(x) + \Delta x \frac{\partial p(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + O(\Delta x^3) \quad (2.12)$$

$$p(x - \Delta x) = p(x) - \Delta x \frac{\partial p(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + O(\Delta x^3) \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

の両者を引き算することによって

$$p(x + \Delta x) - p(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial p(x)}{\partial x} + O(\Delta x^3) \quad (2.15)$$

となる。これより

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{p(x + \Delta x) - p(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.16)$$

が得られる。このように本来は無限に続く級数展開を打ち切って、微分を差分に置き換えるため低次のスキームを用いると数値分散が問題になりやすい。打ち切る級数の次数を上げることで、高次の差分スキームを作ることができるものの、多点を用いることになるため数値振動が問題になりやすい。

2.4 伝達線路網法の定式化

ここまで差分法についてみてきたが、これとは全く異なる時間領域の解析手法に伝達線路網法がある。この手法も CIP 法と若干関連すると思われ、境界条件の与え方などが参考になる部分があるので簡単に触れておく。おもにデジタルフィルターを用いて境界条件に周波数特性を持たせる第 6 章に關係する。

伝達線路網法、デジタルホイヘンスモデル (DHM) とは、ホイヘンスの原理の直接的なモデル化である [86]。Fig. 2.2 のように時間ステップ n において、ある節点 (i, j) に節点 $(i - 1, j)$ から

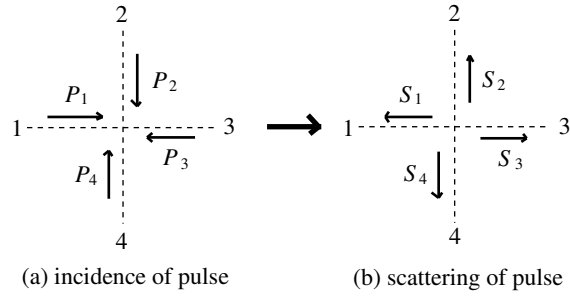


Fig. 2.2 Digital Huygens' Model

入射するパルスを $P_{(i-1,j)}^n$ などと書き表し、次の時間ステップ $n+1$ に節点 $(i-1, j)$ に散乱するパルスを $S_{(i-1,j)}^{n+1}$ としたときに、以下のようなマトリックスで表される。

$$\begin{pmatrix} S_{(i-1,j)}^{n+1} \\ S_{(i,j+1)}^{n+1} \\ S_{(i+1,j)}^{n+1} \\ S_{(i,j-1)}^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{(i-1,j)}^n \\ P_{(i,j+1)}^n \\ P_{(i+1,j)}^n \\ P_{(i,j-1)}^n \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

この手法は空間離散化幅・時間離散化幅に制限があるが、演算の特徴を生かして高速化を図る手法が提案されており、FDTD法以上の高速化が図られている [107]。また境界面において入射パルスを入力、散乱パルスを出力と考えることでデジタルフィルターを用いて任意の周波数特性を与えることができる [96]。

2.5 境界条件

実際の音場の境界は、吸音材・開口・板・膜など様々な部材によって構成され非常に複雑であり、これらの境界を数値解析においてすべて直接的にモデリングするのは困難であるし現実的でない。ただし位相的な特性などの差異を無視すれば、入射したエネルギーの内の吸収・透過するエネルギーの比率を表す吸音率（エネルギー吸収率）を設定した境界において実現することで、様々な境界に対応することができる。

2.5.1 インピーダンス境界条件

吸音率を持った境界を実現するための最も簡単な手法は、吸音率と関係づけることができるインピーダンスを境界条件に用いるものである。インピーダンスは音響系と等価な電気系のアナロジーから導かれるもので、音圧と粒子速度の比で定義される。本章では基礎的な境界条件として、

- (1) 周波数によらず吸音率が一定である境界
- (2) 境界付近の音圧と境界法線方向の粒子速度成分のみが作用するとするローカルリアクティブの仮定が成り立つ

に関して述べる。ただし (1) に対しては FDTD 法においても音響系と等価な機械系であるバネマス系を境界条件として導入することで、周波数によって異なる吸音率を与える手法が提案されている [55, 58]。CIP 法における周波数特性を持つ境界条件は第 6 章で扱っている。また (2) に対してもローカルリアクティブの仮定そのものの妥当性の検討も行われており [83, 84]、限定された条件下での境界条件であることに注意する必要がある。

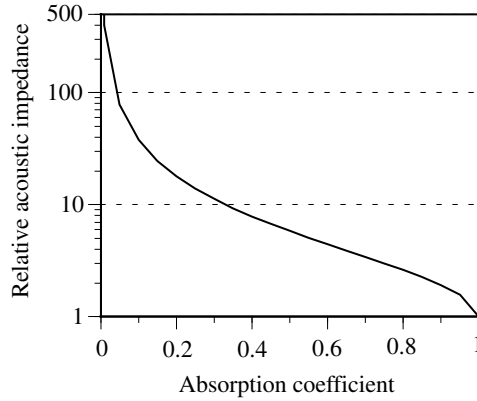


Fig. 2.3 The relation between absorption coefficient and impedance.

境界面においてローカルリアクティブを仮定すると、境界外向きの法線方向の粒子速度 u_n は

$$u_n = \frac{p}{Z_n} \quad (2.18)$$

で表される。ここで p は境界面における音圧、 Z_n は境界面のノーマルインピーダンスを表す。FDTD法ではスタガード格子を用いているため u_n と p の定義点は時間的にも空間的にも半グリッドずれており、ローカルリアクティブの仮定を厳密に成立させることは難しい。本来は何らかの対策が必要であるが、実用上はずれていることを無視して、式 2.18 から境界面近傍の圧力 p より境界面上の粒子速度 u_n を求めることが多い。

一般的にノーマルインピーダンス Z_n は位相特性も含まれた複素数の物理量であるため、エネルギーベースの評価量である実数の垂直入射吸音率とは次元が違い多対1の関係にある。すなわちある垂直入射吸音率に対応する複素数のノーマルインピーダンスは無限に存在する。ただし、通常位相特性を無視することでノーマルインピーダンスの虚数成分を0とおき実数で与えることが多い。この場合 Z_n と垂直入射吸音率 α_n は以下のように1対1の関係になる。

$$Z_n = \rho c \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha_n}}{1 - \sqrt{1 - \alpha_n}} \quad (2.19)$$

この関係を Fig. 2.3 に示す。垂直入射吸音率は試料の法線方向から音が入射したときの吸音率であるため、あらゆる方向から音が入射する統計的入射条件下では吸音率が異なる。この場合の吸音率を統計的入射吸音率と呼び、 Z_n と統計的入射吸音率 α_{st} の関係は、各方向に対して Z_n を積分することによって、文献 [128] p. 580 の関係式

$$\alpha_{st} = 8 \frac{1}{z} \left[1 - \frac{1}{z} \ln(1 + 2z + z^2) + \frac{1}{1+z} \right] \quad (2.20)$$

が導かれる。これより垂直入射吸音率と統計的入射吸音率の関係は Fig. 2.4 のようになり、 $\alpha = 1$ 付近を除いて $\alpha_{st} > \alpha$ であることが分かる。境界条件として吸音率を与える際にはどちらの吸音率を用いているかを明確にしなければならない。本論文では単に吸音率といった場合、垂直入射吸音率を指すものとする。

2.5.2 階段近似

直交グリッドを基本とする FDTD 法では、直交グリッドになじまない任意形状に対応する際に何らかの工夫が必要になる。流体力学などの分野では一般座標系によって任意形状に対応する方

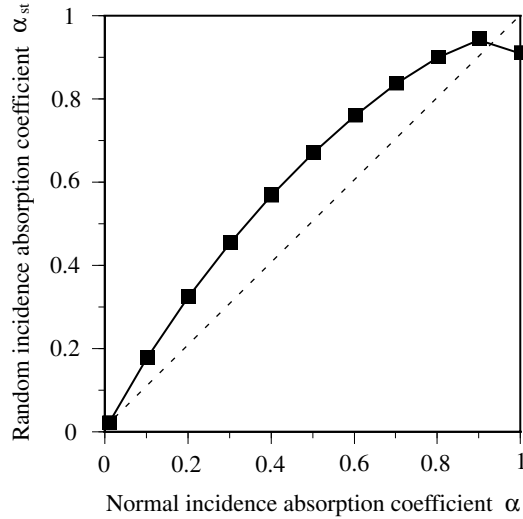
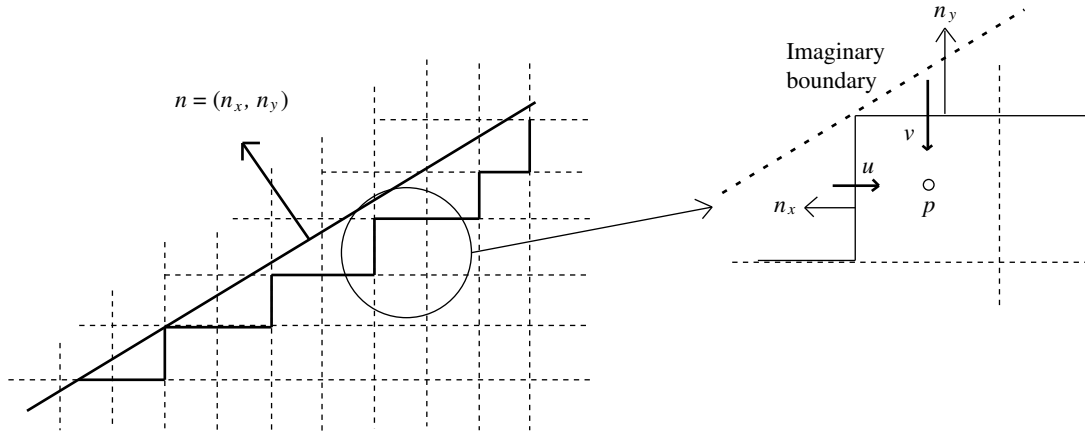
Fig. 2.4 The relation between α_{st} and α .

Fig. 2.5 General boundary represented by rectangular grid.

法が一般的に用いられている [151]。この際にはスタガードグリッドのまま解くと、方程式の本数分 (3次元で4つの互いにずれたコントロールボリューム) の幾何学量を記憶する必要があるため、一般的には振動を防ぐための工夫をした後コロケートグリッドに変換して解く手法が主流である [153] 第6章。音響の分野でも一般座標系変換の導入が2次元の基本的な形状において検討されているが [66]、幾何学量の算出に任意性を有することや境界条件を課することが難しいことが課題である。また境界適合させたところで精度が向上することが保証されるわけではない。このため境界面を折れ線で近似する階段近似が多く用いられており [56]、空間分割幅が十分小さければ正確であるといえる。境界条件は、Fig. 2.5 に示すような階段近似を行うと以下ようになる。

$$u^{n+1}(M + \frac{1}{2}, N) = \frac{p^{n+\frac{1}{2}}(M, N)}{Z_n} n_x \quad (2.21)$$

$$v^{n+1}(M, N + \frac{1}{2}) = \frac{p^{n+\frac{1}{2}}(M, N)}{Z_n} n_y \quad (2.22)$$

ここで n_x と n_y は x, y 方向の境界面上の外向きの単位法線ベクトルである。この手法は単純にブロックを内接させるだけではなく、仮想境界面を仮定してその傾きに合わせるようにしているためプログラミングが多少複雑である。ただ同じ階段近似でもこのように仮想境界面を仮定するのではなく、単純に解析形状に外接 (または内接) させる手法 (ブロック近似) も流体力学の分野ではよく用いられる。実際有限体積法ベースのフリーの流体解析ソフトである OpenFOAM [141] で

は、このようなメッシュ生成法が blockMesh として実装されている。十分に格子分割をすれば、この方法でも精度が確保できるものと思われる。ただし後者の手法はスタガードグリッドに用いる場合は工夫が必要である。

2.6 音源

線形・時不変なシステムではインパルス応答がすべての情報を含むため、任意の入力波形をこれに畳み込むことでシステムの出力を得ることができる。そのためインパルス応答を求めることが最も重要であるといえる。デルタ関数は以下の性質を満たすため、理想的なインパルスである。

$$(1) x \neq 0 \text{ の時 } \delta(x) = 0$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - t) dx = f(t)$$

ただしデルタ関数は強い不連続性を持つため、離散化手法で音源として用いることはできない。これに近い三角波も、高周波数域で伝搬速度が遅れる数値分散の影響によって音源として用いることはできない。

2.6.1 空間分布型

以上のような理由でデルタ関数を直接音源として用いることはできないため、これを擬似する初期条件としてある程度滑らかなコサイン波やガウス関数を初期の空間分布として与える手法が提案されている。これらは音源の幅から規定される上限周波数以下では擬似的なインパルスとして振舞う。具体的には以下のような音源を用いることが多い。

(1) コサイン波を音源に用いる場合

$$p(r) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi r/d) & (r \leq d) \\ 0 & (r > d) \end{cases} \quad (2.23)$$

(2) ガウス関数を音源に用いる場合

$$p(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{d^2}\right) \quad (2.24)$$

ここで r : 音源からの距離 [m], d : 初期空間波形の幅を代表するパラメータ [m] である。音場解析では初期の粒子速度は 0 とすることが多い。コサイン波はその特性上高周波成分を多く含みエイリアシングが発生しやすいのに対し、ガウス関数は高周波成分が少ないことが知られているため [67]、本論文ではガウス音源を用いることにする。この音源は文献 [72] によると

$$p(r, t) = \frac{1}{2r}(r - ct) \exp\left(-\frac{(r - ct)^2}{d^2}\right) + \frac{1}{2r}(r + ct) \exp\left(-\frac{(r + ct)^2}{d^2}\right) \quad (2.25)$$

のように進行波と後退波に分離できるため、前者の進行波成分についてのみフーリエ変換することで以下のスペクトルが得られる。

$$F[p(r, t)] = \frac{\omega \sqrt{\pi} d^3}{2rc^2} \exp\left(-i\omega \frac{r}{c} - \frac{(\omega d)^2}{4c^2}\right) \quad (2.26)$$

これは以下のような特徴を持つ。

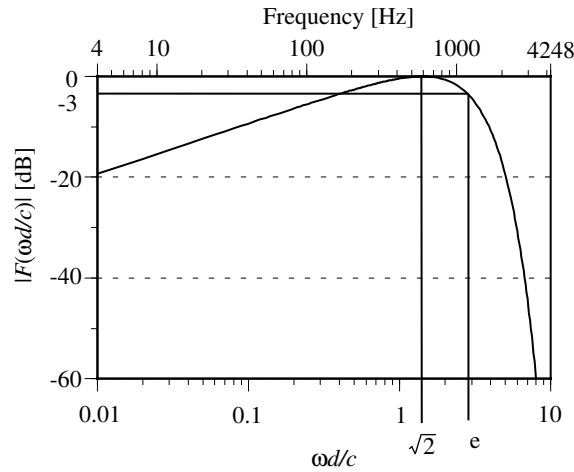


Fig. 2.6 The spectrum of gaussian source.

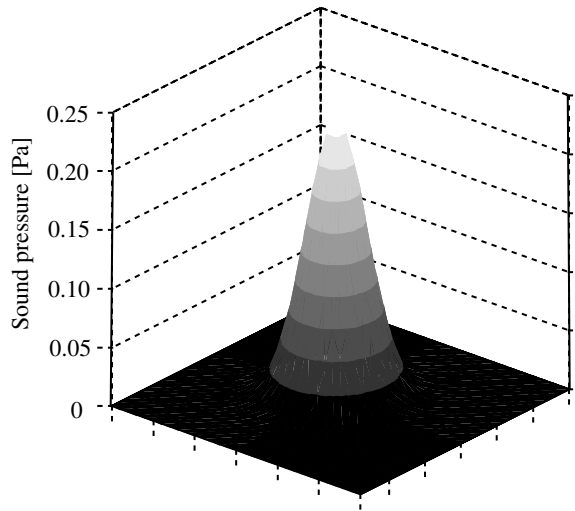


Fig. 2.7 An example of a spatial gaussian source.

- (1) 低周波数帯域では周波数に比例してスペクトル成分が増加する。
- (2) スペクトルのピークは $\omega d/c = \sqrt{2}$ 、すなわち $f = c/(\sqrt{2}\pi d)$ であられる。ピーク周波数以上の周波数では急激にスペクトル成分が低下するローパスフィルターの性状を示す。
- (3) ピーク周波数は初期空間波形の幅を代表するパラメータ d に反比例する。

また Fig. 2.6 を見ると ([72] Fig. 3 と同じ)、ピークから 3dB 下がったところが、 $\omega d/c = e$ である。本研究ではその点を対象とする周波数の上限 f_{max} と設定し

$$d = \frac{ce}{\omega} = \frac{ce}{2\pi f_{max}} \quad (2.27)$$

となるように d を設定した。例えば 1kHz の 1/3 オクターブバンド上限を f_{max} とした場合、 $d = 0.13$ 程度である。この場合の空間分布形状は、Fig. 2.7 に示すとおりであり、周波数を Fig. 2.6 の上側の横軸に示す。

2.6.2 時間分布型

このように空間的に分布を与える方法とは別に、ある点に時間的に変化する音圧や粒子速度を与えることで音源とすることも考えられる。既往研究ではサイン波を合成してバンドパスフィル

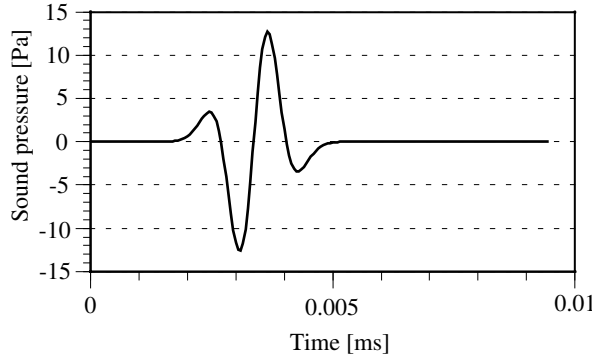


Fig. 2.8 The time-domain gaussian source.

ターに通したトーンバースト音源を音源点に時間分布として与える手法や、時間領域のガウス関数を与える手法が用いられている。後者の手法の中で、既往研究で用いられているのは以下のようなものである。

(1) 文献 [89]

$$v(t) = t^3 \exp(-kft) \cos(2\pi ft) \quad (2.28)$$

(2) 文献 [65]

$$v(t) = \sin(2\pi f(t - t_0)) \exp(-(4/t_0)^2(t - t_0)^2) \quad (0 \leq t \leq 2t_0) \quad (2.29)$$

$$= 0 \quad (2t_0 \leq t) \quad (2.30)$$

(3) 文献 [42, 128, 135]

$$p(t) = \beta(12\alpha^2(t - \tau) - 8\alpha^3(t - \tau)^3) \exp(-\alpha(t - \tau)^2) \quad (2.31)$$

これらの中で、解析的にフーリエ変換が可能な3番目の音源の周波数特性を検討する。これは例えば、文献 [44] で用いられている $\Delta t = 67.35[\mu\text{s}]$, $\tau = 50\Delta t$, $\alpha = 1.5 \times (1/10\Delta t)^2$, $\beta = 5.4 \cdot 10^{-10}$ を代入すると、時間領域では Fig. 2.8 のような音源である。これをフーリエ変換すると、

$$F[p(t)] = \beta \left(\frac{18}{\alpha} - \frac{3\omega^2}{\alpha^2} + 8 \right) F_1(\omega) \quad (2.32)$$

となる。ここで

$$f_1(t) = 2\alpha(t - \tau) \exp(-\alpha(t - \tau)^2) \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= -i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha(t - \tau)^2) \exp(-i\omega t) dt \\ &= -\frac{2i\omega\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \exp(-i\omega\tau) \exp\left(-\left(\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$f_2(t) = 2\alpha(t - \tau)^2 \exp(-\alpha(t - \tau)^2) \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} F_2(\omega) &= -\frac{i\omega}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \exp(-i\omega t) dt + \frac{1}{-i\omega} F_1(\omega) \\ &= -\left(\frac{i\omega}{2\alpha} + \frac{1}{i\omega}\right) F_1(\omega) \end{aligned} \quad (2.36)$$

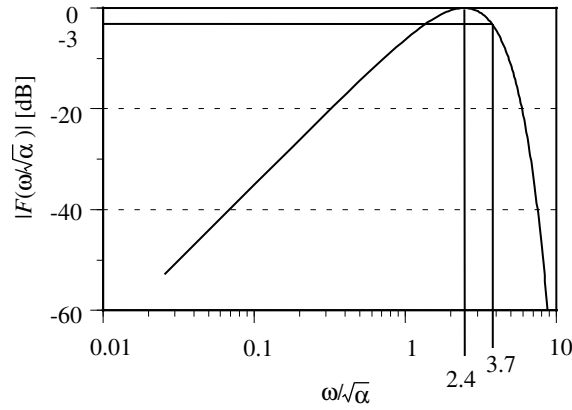


Fig. 2.9 The spectrum of time-domain gaussian source.

$$f_3(t) = 2\alpha(t - \tau)^3 \exp(-\alpha(t - \tau)^2) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} F_3(\omega) &= -\frac{i\omega}{2\alpha} F_2(\omega) + \frac{1}{\alpha} F_1(\omega) \\ &= \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega^2}{4\alpha^2} \right) F_1(\omega) \end{aligned} \quad (2.38)$$

が成り立つことを利用した。 $F_1(\omega)$ を求める部分の積分に関しては、文献 [146] p. 170 参照。

$\omega/\sqrt{\alpha}$ で規格化したスペクトルを Fig. 2.9 に示す。おおむね空間分布としてガウス分布を与えるものと傾向は一致しているが、低周波数成分のエネルギーは低く、より狭帯域な音源であるといえる。スペクトルのピークは $f = 2.4\sqrt{\alpha}/(2\pi)$ 付近であらわれる。ピークより高い周波数側で 3dB 下がる周波数は $f = 3.7\sqrt{\alpha}/(2\pi)$ 付近である。様々な周波数を含む振動速度で駆動させたい時には、粒子速度を

$$u(t) = \frac{p(t)}{\rho c} \quad (2.39)$$

と与えればよい。

2.7 まとめ

時間領域の音場解析について概観し、その中でもよく用いられる FDTD 法に関して詳述した。階段近似が複雑な室内形状に対応する際に問題になりやすいということや、空間 2 次精度を用いる場合には空間離散化幅を十分小さく取らないと精度が出にくいということが示されている。音源・境界条件は CIP 法でも同一のものを用いる。

第3章 音響問題のためのCIP法の定式化

3.1 概要

Constrained Interpolation Profile 法 (CIP 法) とは、移流方程式を高精度に解くための手法である。移流方程式とは

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

で表される方程式である。一般解は、一般の関数 f を用いて $f(x - ct)$ で表されるため、特性曲線 $x - ct = k$ 上で常に同じ値 $f(k)$ となる。すなわち特性曲線に沿って値が移動するだけの、物理的な特性は非常に簡単な方程式である。しかしながら移流方程式は数値的に解くのが難しい方程式で、中心差分などの手法を用いるとすぐに発散してしまう。安定性の改善のために、流れの上流点のみを用いる上流差分があるが、数値拡散によって安定性を保つため伝搬とともに波形が崩れやすい。これを改善するため、上流点を多く用いる QUICK スキームなど様々な手法が提案されている [123]。文献 [125] p. 812 に種々の手法がまとめられているように、古くから研究され様々なスキームが提案されているものの、決定的なものはないのが現状である。

これらの手法は、微分を差分に置き換える際にそれを工夫することで、安定性を保とうとするものであるが、これとは全く違ったアプローチで、移流方程式の解の性質である特性曲線に沿って値が移動することを利用して、実際に値を移流させてしまう特性曲線法が提案されており、圧縮性流体解析ではよく用いられる手法である [155]。この方法は前の時間ステップの移流元の値を内挿によって求めて、その物理量を移流させることになるため、内挿の精度が鍵となる。CIP 法はこの内挿を高精度に行うための手法であるといえる。

CIP 法は FDTD 法と比べて、優れた点が主に以下の 2 点ある。

- (1) 数値分散の小さい手法であるため、格子幅に対して相対的に短い波長、すなわち高周波成分まで正確に解くことができる。
- (2) 特性曲線に沿って値を移流させるだけなので、時間離散化幅に制限がない。

欠点は以下の 2 点である。

- (1) 通常のスキームでは保存則を満足しないため、伝搬に伴って高周波成分に減衰が生じる。
- (2) 計算時間・必要記憶量の点で不利である。

音響問題は初期条件としてインパルスを模擬するために急峻な空間分布を用いるため、高周波成分の数値分散が問題になりやすい。また移流速度が非常に速いため、時間離散化幅の制限が問題になりやすい。これはまさにここで示した CIP 法の利点に一致するため、音響問題に CIP 法を適用すれば有利ではないかと考えられる。

3.2 CIP 法に関する既往研究

ここで CIP 法の理論に入る前に、これまでの既往研究の状況についてまとめておく。

3.2.1 流体力学分野での研究

CIP法は流体力学分野で矢部らによって提唱された手法であり、初めての論文[1]は1985年に出版された。前述したCIP法が高周波成分まで分散が少なく解くことができることについて議論された論文が[21, 28, 36]である。これらの論文で1次元の移流方程式において、ある格子サイズに対して解像できる波数領域、すなわち計算手法の分解能が議論されている。差分法を改良した6次中心差分、4次コンパクト差分などの高精度手法を用いても高周波数域では位相速度に遅れが生じるが、CIP法(やさらに高精度化を行なったIDO法)は解像できる最小の波長、つまり格子幅が波長の1/2であるような周波数域でも厳密解とほぼ一致することが示されている。

一般に波が1格子分伝搬したときの増幅率では、中心スキームが全波数領域で減衰は生じないのに対し、風上差分スキームは人工粘性が含まれているため増幅率は全領域で1より小さくなる特徴があり、伝搬に伴い減衰が生じる。これによって位相速度が遅れる高周波数成分を減衰させて、安定性を保っているのであるが、正しく位相を評価する低周波成分も減衰させる。CIP法も同様の傾向があるが、風上スキームに比べればその減衰率は小さいことが示されている。

CIP法の2つめの特徴である時間離散化幅に制限がないことに関しては、流体力学分野では、2001年にCFL条件を超える時間幅での検討がされている[12]。

3.2.2 電磁界・波動解析分野での研究

流体力学以外の分野に適用され始めたのは比較的最近で、音響分野と関連の深い電磁界・波動解析分野では、1次元の波動方程式で方形パルスの伝搬を解析することで数値分散が少ないことを明らかにした1998年の文献[6]がはじめである。

これらは基礎的な検討であり、実際の解析に必要な3次元の電磁界解析に適用したのは、2005年の文献[29]がはじめである。ここまでは単純な境界条件についての検討がほとんどで、複数の異なる媒質を含む境界についての定式化が行われ1次元での検討が行われている[30]。これによって、様々な境界に対応できることになった。これを多次元解析に適用したものが、文献[31]である。

これらは必要メモリー量・計算効率の点で有利なM型CIP法による検討であるが、より精度のよいC型CIP法を適用した際の計算精度の検討を、M型CIP法・FDTD法との比較をすることで行ったのが、文献[33, 34]である。

3.2.3 音響分野での研究

音響分野への適用は電磁界・波動解析分野よりさらに遅れる。音響問題と同じスカラー波である地震波を対象にして2004年に波動伝播シミュレーションが行われ、CIP法・上流差分法・Lax-Wendroff法・FDTD法との比較が行われた[23]。また2005年には定式化が同じである弾性波への適用が行われた[38]。これは3次元の半無限弾性体への加振を行った際のCIP法とFDTD法の手法を比較したもので、定式化がほとんどであり、具体的な検討はあまりない。

音響問題への適用となると、3次元の球面波伝搬問題にM型CIP法を適用した文献[39, 40]がはじめである。この文献では、2.6.1に示した急峻なガウス分布を初期条件として伝搬させ、FDTD法・厳密解との誤差を比較し、以下の結論を得ている。

- 格子間隔に関する検討
 - 格子間隔を2倍にしてもFDTD法よりCIP法のほうが誤差が小さい。
- 対称性の崩れに関する検討(鉛直方向に一定の面で切って比較)

- FDTD 法は値のばらつきが大きく、厳密解との差が大きい。
- CIP 法は値のばらつきが小さく精度が高い。
- 誤差の角度依存性に関する検討
 - FDTD 法、CIP 法ともに 45° 方向で誤差が最大。
 - CIP 法で格子間隔を 2 倍にしても FDTD 法よりも誤差が小さく、対称性に優れる。

さらに詳しい検討は文献 [41, 42] で行われている。これも 3 次元の M 型 CIP 法で 2.6.2 に示したガウス分布を時間分布に持つ音源を用いて解析し、FDTD 法・厳密解と比較し、以下の結論を得た。

- 伝搬距離に関する検討
 - 伝搬距離が長くなるほど FDTD 法は波形が歪む。
- 位相誤差に関する検討
 - CIP 法は高周波域まで位相誤差がほとんどない。
 - FDTD 法は高周波数域で大きく位相速度が遅れている。
- 振幅比すなわち増幅率に関する検討
 - CIP 法は高周波数域で減少する。
 - FDTD 法ではほぼすべての周波数で厳密解とほぼ一致する。
- 伝搬方向による検討
 - CIP 法は 45° 方向で誤差が最大 (軸方向で最小)。
 - FDTD 法は 0° で誤差が最大 (対角方向で最小)。全領域にわたって FDTD 法の誤差が大きい。
- C 型 CIP との比較では若干の精度向上が見られた。

これまでは標準的な FDTD 法との比較がほとんどであった。これに対し、1 次元の検討ではあるが様々な手法と比較を行ったのが文献 [43] である。これは CIP 法・CIP 法を保存則を満足するように改善した CIP-CSL4 法・上流差分法 (Upwind)・QUICKEST・Lax Wendroff 法を用いて、ガウス分布を初期条件として比較し、以下の結論を得た。

- 波形の比較
 - Upwind は振幅が減少、パルス幅が広がる。
 - LW は分散によって後方に高周波数成分が遅れる。
 - QUICKEST は形は保たれているものの振幅が半分。
 - CIP 法は振幅が減少するが、分散は小さい。
 - CIP-CSL4 は波形振幅ともに厳密解と一致。
 - FDTD は数値分散が大きい。
 - コンパクト差分は逆に高周波成分が進む。

- CIP法は無反射境界条件が自動的に満足される。
- 振幅誤差の周波数特性
 - $Upwind \propto f^2$ 、 $LW \cdot QUICKEST \cdot CIP \propto f^4$ 、 $CIP- CSL4 \propto f^6$ で誤差が増加する。
 - FDTDは3p.p.w. (points per wavelength) 以上でほとんど無視できる程度。
 - 10p.p.w. ではCIPは大きい、CIP-CSL4は実用上満足できる程度。
 - 特性曲線法は振幅誤差が大きい。
- 位相誤差
 - $LW \cdot FDTD$ は周波数が高くなると、数値分散により音速が遅くなる。
 - $Upwind \cdot QUICKEST \cdot CIP$ は速くなる。
 - CIP-CSL4では全域にわたって、CIPは5p.p.w. 以上では音速変化は見られない。
- ピーク値の伝搬特性
 - CIP-CSL4以外は伝搬とともに振幅が減少。
 - CIPとコンパクト差分は同様の傾向だが、コンパクト差分のほうが傾きが大きい。
 - FDTDは伝搬直後から減衰が大きい。(分散の影響)
 - 周波数領域ではFDTD法の振幅誤差が小さいが、時間領域ではCIP法のほうがピーク値のホールド性能は高い。
- CFL数と誤差との関係。
 - CIPはCFL数が大きいほど精度がよくなる(ただし $CFL < 1$ での検討)。
 - FDTDはCFLが小さいほど精度がよくなる。

文献[41]と同じような検討を、精度の高いC型CIP法を用いて行ったのが、文献[44]であり、以下の結論を得ている。

- 振幅の減衰に関する検討
 - C型CIP法は、M型に比べて格子対角方向の振幅の減衰が小さい。
 - C型は、軸方向から対角方向に向かって減衰が小さくなる。
 - M型は、対角方向から軸方向に向かって減衰が小さくなる。
 - M型とC型でそれほど顕著な差はない。

これらの検討とは少し離れるが、非線形音響(有限振幅音波)への適用を適用を行ったのが、文献[45]であり、

- FDTD法・CIP法・CIP-CSL4法と理論解との比較
 - CIP系の解法は高い精度。

という結論を得た。

CIP法で不均一媒質中の伝搬を解析する場合に問題になる空間微分値の境界条件の取り扱いに関する論文が文献[48]で、反射に加えて透過も考慮に入れた境界条件を導入している。実質的には電磁界・波動解析での文献[30]と同じものである。具体例として2次元の2つの媒質中の伝搬を解析している。

これらが音響分野に関する著者の論文を除くCIP法の文献すべてである。

3.2.4 既往研究のまとめ

- 位相速度
 - CIP 法は解像できる最小の波長、つまり格子幅が波長の $1/2$ であるような周波数域でも厳密解とほぼ一致することが示されている。
- 波が 1 格子分伝搬したときの増幅率
 - 中心スキームは、全波数領域で数値拡散は生じない。
 - 風上スキームは、人工粘性が含まれているためゲインは全領域で 1 より小さくなる。
 - 周波数領域で全時間的にみれば、FDTD 法の振幅誤差が小さい。
 - 時間領域では、CIP 法のほうがピーク値のホールド性能は高い。
- 伝搬方向による検討
 - M 型 CIP 法は 45° 方向で誤差が最大 (軸方向で最小)。
 - FDTD 法は 0° で誤差が最大 (対角方向で最小)。
 - 全領域にわたって FDTD 法の誤差が大きい。
 - C 型 CIP 法は M 型に比べて格子対角方向の振幅の減衰が小さく、軸方向から対角方向に向かって減衰が小さくなる。

これらのことから、CIP 法の 1 番目の特徴である、高周波数域で数値分散が小さいことが示された。そのことにより時間領域での波形の崩れが小さく、CIP 法は時間領域での評価に適した手法であるということが出来る。逆に言えば周波数領域で見るとすれば、FDTD 法のような中心差分スキームを用いる手法の方がエネルギー保存の観点から見て有利である。

CIP 法の第 2 の特徴である時間離散化幅に制限がないことに関する検討は、音響分野ではされておらず、著者による論文 [46] がはじめである。

3.3 CIP 法の定式化

CIP 法は前述の通り移流方程式を高精度に解く手法のため、基礎方程式を移流方程式に変形する必要がある。1 次元の場合には簡単であるが、多次元への適用には多少の困難がある。その辺りの理論について、この節では詳細に述べることにする。

3.3.1 特性曲線法

空気中の波動伝搬は運動方程式と連続の式で表され、1 次元の場合はそれぞれ以下のようなになる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

ここで p : 音圧 [Pa], u : 粒子速度 [m/s], ρ : 空気の密度 [kg/m³], c : 空気の音速 [m/s] である。式 3.2 に c を掛け、式 3.3 との和と差を作ると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu + p) + c \frac{\partial}{\partial x}(\rho cu + p) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu - p) - c \frac{\partial}{\partial x}(\rho cu - p) = 0 \quad (3.5)$$

のように、正方向と負方向に一定速度で移流する移流方程式に変形できる。また波動方程式を因数分解した

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) p = 0 \quad (3.6)$$

から

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) p = D \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) D = 0 \quad (3.8)$$

のように 2 つの移流方程式に分解する方法 (DA(Differential Algebraic)-CIP 法) も提案されているが [4]、上の式を解く際に非移流項の影響で精度が悪くなることが知られているため、前者を用いることにする。

前述の通り以下のような形の方程式を移流方程式と呼ぶ。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

この方程式の一般解は、一般の関数 f を用いて $f(x - ct)$ で表され、特性曲線 $x - ct = k$ 上で常に同じ値 $f(k)$ となる。ここで

$$f_x^+ = \rho cu + p \quad (3.10)$$

$$f_x^- = \rho cu - p \quad (3.11)$$

とおくと、式 3.4, 3.5 は、以下のようなになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} f_x^+ + c \frac{\partial}{\partial x} f_x^+ = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_x^- - c \frac{\partial}{\partial x} f_x^- = 0 \quad (3.13)$$

式 3.12 は f_x^+ が正方向に、式 3.13 は f_x^- が負方向に、それぞれ速さ c で伝搬する移流方程式である。そこで Fig. 3.1 のように、 f_x^+, f_x^- を特性曲線に沿って移流させることで次ステップの値が求まる。この際 $c\Delta t \neq N\Delta x$ (N は自然数) の場合、格子点以外の場所の値を参照するため、3.3.3 で述べる CIP 補間によって移流元の値を求める。 p や u の値は、それぞれの和と差より求める。このように移流させるだけなので、FDTD 法と異なり CFL 条件を超える大きな時間ステップでの計算が可能である。

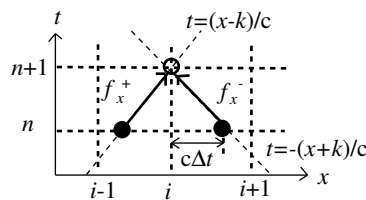


Fig. 3.1 The up-wind method of solving advection equation.

3.3.2 CIP 法の基礎式の一般的な導出法

以下のような手順で、CIP 法の基礎式 3.4, 3.5 を一般的に導くことができる [20] pp. 59-63。式 3.2, 3.3 は、行列形式で以下のように書くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

ここで行列 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = \pm c$ であり、固有ベクトルはそれぞれの固有値に対応して $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm \rho c \end{pmatrix}$ である。ゆえに固有値の行列 $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho c & -\rho c \end{pmatrix}$ の逆行列 $L^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\rho c} \\ -1 & \frac{1}{\rho c} \end{pmatrix}$ を 3.14 に左から作用させると

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\rho c} \\ -1 & \frac{1}{\rho c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + c \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\rho c} \\ -1 & \frac{1}{\rho c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

のようになる。これは CIP 法の基礎式 3.4, 3.5 である。すなわち 3.3 で示した操作は、行列 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}$ を対角化したことに対応している。

3.3.3 CIP 補間

FDTD 法では格子点の p と u の値が与えられている。CIP 法ではこれに加えて p と u の直交方向の微分値も与えられている。これによって数値拡散を小さくできる。例えば Fig. 3.2 のような急峻な波形が伝搬する問題を考える。ここで黒丸が現ステップの波形、白丸が次のステップの波形である。厳密解のプロフィールは実線で表される。空間 2 次精度の FDTD 法では、(a) の点線のように補間することになり、伝搬とともに波の形が崩れる。一方 (b) の CIP 法では格子点での値・微分値から 3 次多項式を用いて滑らかに内挿することにより、厳密解のプロフィールを比較的よく維持できる。式 3.4, 3.5 の両辺を x で微分した式 3.16, 3.17 も移流方程式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (\rho c u + p) + c \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\rho c u + p) = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (\rho c u - p) - c \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\rho c u - p) = 0 \quad (3.17)$$

そこで 3 次多項式の未知数決定には、格子点における f_x^+, f_x^- に加えて、 $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ を用いる。ここで微分演算子 $\partial_x = \partial/\partial x$ を定義した。補間に用いる 3 次多項式を

$$y = a(x - x_i)^3 + b(x - x_i)^2 + c(x - x_i) + d \quad (3.18)$$

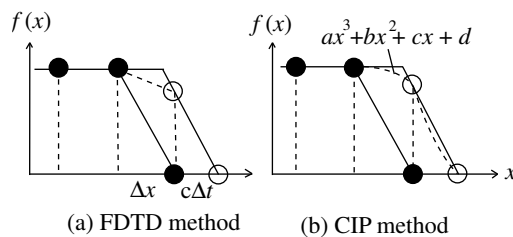


Fig. 3.2 The FDTD method and the CIP method.

Table 3.1 Relation between the interpolation function and the scheme.

interpolation function	scheme
1 st order	SUPG, upwind sheme
2 nd order(symmetry)	BTD, Lax-Wendroff
2 nd order(asymmetry (up-stream points))	Beam-Warming, QUICKEST
3 rd order	CIP
5 th order	IDO
exponential function	hybrid GSMAC

とおく。

ここで移流速度が負の場合の a, b は以下の形で与えられる。

$$a = \frac{\partial_x f_x^-(x_i) + \partial_x f_x^-(x_{i+1}) + 2(f_x^-(x_i) - f_x^-(x_{i+1}))/\Delta x}{\Delta x^2} \quad (3.19)$$

$$b = -\frac{2\partial_x f_x^-(x_i) + \partial_x f_x^-(x_{i+1}) + 3(f_x^-(x_i) - f_x^-(x_{i+1}))/\Delta x}{\Delta x} \quad (3.20)$$

移流速度が正の場合の a, b は以下の形で与えられる。

$$a = \frac{\partial_x f_x^+(x_i) + \partial_x f_x^+(x_i) - 2(f_x^+(x_i) - f_x^+(x_{i-1}))/\Delta x}{\Delta x^2} \quad (3.21)$$

$$b = \frac{2\partial_x f_x^+(x_i) + \partial_x f_x^+(x_i) - 3(f_x^+(x_i) - f_x^+(x_{i-1}))/\Delta x}{\Delta x} \quad (3.22)$$

補間に用いる関数は本質的でなく、いろいろなものが提案されている。Table 3.1 のように手法を整理することができる [35] p.236。コードに関しては [20] p. 28 に例が載せられているが、これはあまり効率がよくない。そこでは次の時間ステップの値に対して新たな記憶域を割り当てているが、次に示すプログラムの例のように、負方向に移流させるものは正方向にインクリメントし、正方向に移流させるものは負方向にデクリメントとすることで、新たな記憶域を確保する必要がなくなる。sub は f_x^- , sum は f_x^+ , dsub は $\partial_x f_x^-$, dsum は $\partial_x f_x^+$ の記憶域である。

```
double xx = -c*dt;
for(int i=0; i<nx; i++){
    //負方向
    int iup = i+1;
    double D = dx;
    double subdif = (sub[i]-sub[iup])/D;
    double a = (dsub[i]+dsub[iup]+2.0*subdif)/(D*D);
    double b = -(2.0*dsub[i]+dsub[iup]+3.0*subdif)/D;

    sub[i] += ((a*-xx+b)*-xx+dsub[i])*-xx;
    dsub[i] += (3.0*a*-xx+2.0*b)*-xx;
}

for(int i=nx; i>0; i--){
    //正方向
    int iup = i-1;
```

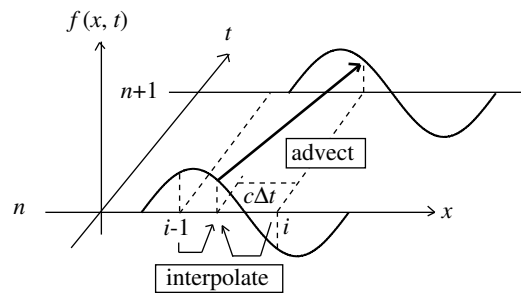


Fig. 3.3 The procedure of the CIP method.

```

double D = -dx;
double sumdif = (sum[i]-sum[iup])/D;
double a = (dsum[i]+dsum[iup]+2.0*sumdif)/(D*D);
double b = -(2.0*dsum[i]+dsum[iup]+3.0*sumdif)/D;

sum[i] += ((a*xx+b)*xx+dsum[i])*xx;
dsum[i] += (3.0*a*xx+2.0*b)*xx;
}

```

CIP 法についてまとめたのが Fig. 3.3 である。 $n+1$ ステップの格子点番号 i の値を求めるのに前ステップ n の $x_i - c\Delta t$ の値を移流させる。そこでその値を求めるために前ステップ n での上流点 $i-1$ の値と i の値とそれらの微分値から 3 次多項式を構成して内挿する。

3.3.4 様々な内挿の手法

これまで述べたように CIP 法では、移流元の物理量を補間で求める際に隣接点の物理量と微分値を用いて 3 次多項式を構成し内挿を行う。他にも様々な内挿の手法が考えられる中で、なぜこの手法が選ばれたのかを考えてみよう。そもそも多項式が選ばれたのは、簡単なことに加えて、以下に述べるワイエルシュトラスの多項式近似定理で保証されているように任意の連続関数に一樣収束するため、近似に用いるのに性質がよいためである。例えば \sin, \cos の系列で近似を行うと微分不可能点で Gibbs 現象などの好ましくない現象が生じる。

定理 1 ワイエルシュトラスの多項式近似定理 $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数とする。そのとき任意の $\epsilon > 0$ に対して、多項式 $P(x)$ が存在して、

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \quad (3.23)$$

が成り立つ。

ここで代数多項式を

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (3.24)$$

とおく。

多項式を用いる補間の代表的なものには、ラグランジュ補間とスプライン補間、エルミート補間などが挙げられる。これらの補間は

- (1) 内挿する区間だけでなく周囲の点も用いるラグランジュ補間に代表される「多点スキーム」

- (2) 内挿区間のみの値と微分値を用いて連続性を高めた補間を行うエルミート補間に代表される「微分の連続性を重視したスキーム」

の2種類に分けられる。補間の方法について数学的な見地から検討することにする [148]。まずは前者の多点スキームについてみていこう。ラグランジュ補間は以下の補間定理

定理 2 補間定理 n 個の相異なる点 x_1, x_2, \dots, x_n と n 個の値 y_1, y_2, \dots, y_n を与えたとき、 $n-1$ 次以下の多項式 P が一意に存在して、

$$P(x_k) = y_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.25)$$

が成り立つ。

に基づき、周辺の点を多く使うことによって、補間の精度を向上させることを目指すものである。スプライン補間は、ラグランジュ補間と似たようなものであるが、つなぎ目での滑らかさを考慮に入れた以下のスプライン関数を用いるものである。

定義 1 スプライン関数 m, n を正の整数とし、閉区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

を考える。 $[a, b]$ 上で定義された関数 $S(x)$ がつなぎ目節点 x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) をもつ $m-1$ 次以下のスプライン関数であるとは以下の2条件を満たすことである。

- (1) 各小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) 上では、 S は $m-1$ 次以下の多項式である。
- (2) S は $[a, b]$ 上で $m-2$ 回連続微分可能である。すなわち S は $C^{(m-2)}[a, b]$ に属する。

すなわち3次多項式を用いるとすると、スプライン関数は C^2 級 (2回連続微分可能) である。このような手法で高次多項式を内挿に用いると振動を生みやすいことが知られており、さらにCIP法のような上流化手法に適用する際には上流点のみから補間を行うことになるため、境界付近で次数を落とすことになる。

これに対し微分値を用いることで、補間に用いる点数を減らすことができる。これがエルミート補間に代表される後者のスキームである。エルミート補間とはエルミート補間定理

定理 3 エルミート補間定理 n 個の相異なる点 x_1, x_2, \dots, x_n と n 個の値 y_1, y_2, \dots, y_n および y'_1, y'_2, \dots, y'_n を与えたとき、 $2n-1$ 次以下の多項式 P が一意に存在して、

$$P(x_k) = y_k \quad P'(x_k) = y'_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.26)$$

が成り立つ。

に基づいて行うもので、点の値と微分値から多項式を補間するものである。ただし微分値の求め方に任意性があり、それによって精度が左右されることになる。

まとめると、高い精度で内挿を行うためには、多点を用いるラグランジュ補間に代表されるスキームと、微分値を用いるエルミート補間に代表されるスキームがある。高次差分スキームは明らかに前者の手法である。この手法の欠点はグローバルに誤差の影響が入り、境界付近での取扱が難しくなることである。CIP法はエルミート補間に近いが、微分値も移流によって求めるため、その求め方に物理的な合理性があり、1次元の音響問題のような一様流の場合には比較的高い精度 (空間3次精度) が維持できるといわれている。つまりCIP補間とは、隣接点の値と微分値を用いてコンパクトに3次多項式を近似し内挿するため、振動や誤差などの要因を排除しつつ高い精度を実現することができる。

3.3.5 多次元への適用

多次元化については、多次元空間に3次多項式を作成するA型CIP法などの手法が提案されている。2次元の連続の式と運動方程式を用いて、2次元の移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (3.27)$$

の形に変形できればよいが、2次元の場合は、

$$\frac{\partial(\rho c(u+v)+p)}{\partial t} + c \frac{\partial(\rho c(u+v)+p)}{\partial x} + c \frac{\partial(\rho c(u+v)+p)}{\partial y} = c \frac{\partial \rho c v}{\partial x} + c \frac{\partial \rho c u}{\partial y} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial(-\rho c(u+v)+p)}{\partial t} - c \frac{\partial(-\rho c(u+v)+p)}{\partial x} - c \frac{\partial(-\rho c(u+v)+p)}{\partial y} = c \frac{\partial \rho c v}{\partial x} + c \frac{\partial \rho c u}{\partial y} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial(\rho c(u-v)+p)}{\partial t} + c \frac{\partial(\rho c(u-v)+p)}{\partial x} - c \frac{\partial(\rho c(u-v)+p)}{\partial y} = -c \frac{\partial \rho c v}{\partial x} - c \frac{\partial \rho c u}{\partial y} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial(\rho c(-u+v)+p)}{\partial t} - c \frac{\partial(\rho c(-u+v)+p)}{\partial x} + c \frac{\partial(\rho c(-u+v)+p)}{\partial y} = -c \frac{\partial \rho c v}{\partial x} - c \frac{\partial \rho c u}{\partial y} \quad (3.31)$$

のように右辺に非移流項があらわれ、これの正確な評価がなかなか難しい。例えば、上流差分で求めたのではうまくいかない。

このような問題を避ける手法としてCIP法が空間精度が高いことを利用して、多次元を1次元に分離する方向分離解法(フラクショナルステップ法)が提案されている。例えば2次元の場合、Fig. 3.4の(a)の星印の点が白丸の点に移動することになるが、 x 方向の移流方程式3.4, 3.5に加え、 y 方向の移流方程式3.32, 3.33を解くことで、これを実現する。

$$\frac{\partial}{\partial t} f_y^+ + c \frac{\partial}{\partial y} f_y^+ = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_y^- - c \frac{\partial}{\partial y} f_y^- = 0 \quad (3.33)$$

ここで、 v は y 方向の粒子速度である。また

$$f_y^+ = \rho c v + p \quad (3.34)$$

$$f_y^- = \rho c v - p \quad (3.35)$$

とおいた。この手法は元の方程式と一致しないが、時間離散化幅が十分小さければ正確であることを示せる。本論文ではそのような方向分離解法の中で、最も基礎的かつ必要メモリー量が少ないため一般的によく用いられるM型CIP法[2]を採用した。

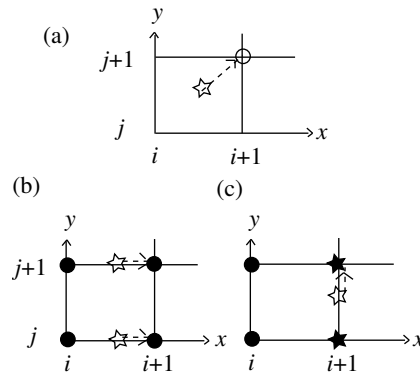


Fig. 3.4 Procedures of the M-type CIP method.

Table 3.2 Variables needed.

		f	∂_x	∂_y
x	positive direction	f_x^+	$\partial_x f_x^+$	-
	negative direction	f_x^-	$\partial_x f_x^-$	-
y	positive direction	f_y^+	-	$\partial_y f_y^+$
	negative direction	f_y^-	-	$\partial_y f_y^-$

ここで1次元の CIP 法を2次元に拡張することを考えてみよう。 x 方向には x 方向微分、 y 方向には y 方向微分を移流させることから、Table 3.2 に示す変数が実際に移流させる変数である。ところが x, y 方向を方向分離して解くと、 x 方向へ移流させた後に、 y 方向へ移流させようとすると、必要な $\partial f/\partial y$ が求まっていない。同じく y 方向へ移流させた後再び x 方向に移流させる際に必要な $\partial f/\partial x$ が y 方向への移流からは求まらない。最も簡単な解決策は直交方向の微分に関して、1次の上流差分を用いることである。この方法は M 型 CIP 法と呼ばれ、メモリ量・計算時間の点で有利な手法である。 x 方向に f_x^+, f_x^- が伝搬する場合には、 x 方向の勾配 $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ が最も重要で、それと垂直な方向の $\partial_y f_x^+, \partial_y f_x^-$ の x 方向への移流に伴う変化はあまり正確である必要がない (cf. [20] p.71) との仮定に基づき、直交方向 (y 方向) の微分を1次上流差分で求める。

直交方向の微分に対しても CIP 法を用いることもできるが、 x 方向への移流に伴い $\partial f/\partial y$ を CIP 補間する際に、 $\partial f/\partial y$ の x 微分である交差2階微分項 $\partial^2 f/\partial x \partial y$ をメモリーに保持する必要があり、必要な変数の量は次元の増加とともに指数的に増大する。例えば3次元では、 $\partial^2 f/\partial x \partial y, \partial^2 f/\partial x \partial z, \partial^2 f/\partial y \partial z$ が必要であり、あまり現実的でない。この手法は C 型 CIP 法 [5] と呼ばれている。

M 型 CIP 法の具体的な手順を示す。

- (i) x 方向に式 3.4, 3.5 によって f_x^+, f_x^- と $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ の移流を行う (Fig. 3.4 の (b) で星印の点を黒丸の点に移流)。その際、 $\partial_y f_x^+, \partial_y f_x^-$ を1次の上流差分により求める。
- (ii) 全格子点に対して $p, \partial_x p, \partial_y p$ の更新を行い、 f_y^+, f_y^- とその微分を再構成する。
- (iii) 式 3.32, 3.33 に従い f_y^+, f_y^- と $\partial_y f_y^+, \partial_y f_y^-$ の移流を行う。(ii) の手順で更新された Fig. 3.4 (c) の黒星印点から、白星印の点を内挿し移流させる。その際 $\partial_x f_y^+, \partial_x f_y^-$ を1次の上流差分によって求める。
- (iv) 全格子点に対して $p, \partial_x p, \partial_y p$ の更新を行い、 f_x^+, f_x^- とその微分を再構成する。

これを繰り返す。3次元も同様である。

3.3.6 保存性

通常の CIP 法は保存が保たれないスキームである。ただし一様流の場合には保存性がよいといわれている。文献 [20] (pp. 33-34) には、物理量 f_i とその微分値 g_i に関する CIP 補間の式

$$f_i^{n+1} = a_i \xi^3 + b_i \xi^2 + g_i^n \xi + f_i^n \quad (3.36)$$

$$g_i^{n+1} = 3a_i \xi^2 + 2b_i \xi + g_i^n \quad (3.37)$$

を全空間に渡って足し合わせると

$$\sum_i f_i^{n+1} = (2\chi^2 - 3\chi + 1)\chi\Delta x \sum_i g_i^n + \sum_i f_i^n \quad (3.38)$$

$$\sum_i g_i^{n+1} = (6\chi^2 - 6\chi + 1)\chi \sum_i g_i^n \quad (3.39)$$

となるため、初期に $\sum_i g_i^0 = 0$ であれば、すべての時刻で $\sum_i g_i^n = 0$ であるため完全な保存 $\sum_i f_i^{n+1} = \sum_i f_i^n$ が実現されるとある。ここで $\chi = -c\Delta t/\Delta x$ と定義した。よって

$$\sum_i g_i^0 \approx \int_0^L g dx = \int_0^L \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(L) - f(0) \quad (3.40)$$

の関係より、 $f(L) = f(0)$ であれば保存則が満たされることになる。これ以外でも $|\chi| < 1$ の場合には、 $(6\chi^2 - 6\chi + 1)\chi < 1$ であるため、時間ステップごとに $\sum_i g_i^n$ は減少するため、非常に保存性がよいとされている。

これを音響問題について考察すると、対称音場か音源点が端点から遠い場合（インパルス性の音源を用いるため $f(L) = f(0) \simeq 0$ である）に保存則が満たされやすいことになる。ゆえに 1 次元音場であったとしても、対称音場でなく音源点が端点に近ければ保存則は満足されにくいことになる。その場合ここで定義した χ とは CFL 数のことであるため、 $CFL > 1$ では $\sum_i g_i^n$ は発散することになる。

流束と物理量から 2 次多項式を構成する CIP-CSL2 法、流束と物理量とその微分値から 4 次多項式を構成する CIP-CSL4 法も提案されている。しかしながら多次元への適用に当たって方向分離解法を用いているため、そのような保存則を満足するスキームを用いるだけで単純に精度の向上にはつながらず不明である。

3.4 CIP 法の拡張

この節では前節までに導入した CIP 法を拡張する。具体的には、補間を用いない手法によって高速化を図ることを目指す。また M 型 CIP 法を改良することによって精度向上を目指すことにする。室内音場解析に必要なインピーダンス境界条件・振動速度境界条件・音響振動連成問題に関する定式化を行う。さらに音響問題ではなされていない CFL 条件を超える時間幅での計算を行う上での工夫を述べる。

3.4.1 補間を用いない方法

移流させる際に $c\Delta t \neq N\Delta x$ (N は自然数) の場合、格子点以外の場所の値を参照するため、CIP 補間によって移流元の値を求める必要がある。ただし Fig. 3.5 に示すように $c\Delta t = N\Delta x$ の場合、補間が不要になる。この場合離散化の影響がなく厳密解が移流するとみなせるので、補間に伴う精度の劣化がない。 $N = 1$ の場合について後ほど議論する。この方法は微分値の保持が必要ないため FDTD 法と同程度の低メモリー量であり、計算量も少ない。さらに前節での検討によれば

$$\sum_i f_i^{n+1} = \sum_i f_i^n \quad (3.41)$$

であるため保存則も満足するように思われる。

時間離散化幅と空間離散化幅で 1 つの自由度しかなく、 x, y, z 方向に同じ空間離散化幅の直交メッシュを用いる必要があるが、領域分割をすることで道路からの騒音伝搬問題などに遮音壁の近傍は CIP 法を伝搬部分はこの方法を適用し、高速化・高精度化を図ることができる可能性がある。

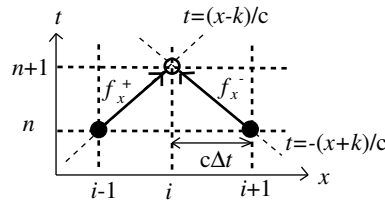


Fig. 3.5 Advection method.

3.4.2 M型CIP法の改良

M型CIP法は直交方向の微分 $\partial_y f_x$ を直接上流差分で求めているため数値粘性の影響が懸念される。これに対して2次の交差微分を変数として各節点に与えて直交方向にもCIP補間を行うのがC型CIP法であるが、メモリー量・計算時間の飛躍的な向上の割には精度はそれほど向上しないことが知られている [44]。そこでメモリー量をこれ以上向上させることなく精度を向上させることを考える。そこで Fig. 3.6 に示すように、(a) のように上流差分で近傍の格子点の直交方向の微分値 $\partial_x(\partial_y f_x)$ を求め、さらに格子点の物理量 $\partial_y f_x$ も用いて (b) のように3次多項式を構成しCIP法を使うことで直交方向の微分値 $\partial_y f_x$ を求める手法でM型CIP法を改良した。ただし上流側の境界近接点では1次上流差分を用いている。すなわちこれはM型とC型の間違った手法である。さらにQUICKスキームを用いて改善を試みた。QUICKスキームとは1次の微分を

$$C \frac{\partial u}{\partial x} = C \frac{u_{i-2} - 7u_{i-1} + 3u_i + 3u_{i+1}}{8\Delta x} \quad (C \geq 0) \quad (3.42)$$

$$C \frac{\partial u}{\partial x} = C \frac{-3u_{i-1} - 3u_i + 7u_{i+1} - u_{i+2}}{8\Delta x} \quad (C < 0) \quad (3.43)$$

を用いるもので、3次上流と同じ点の数を用いる。減衰が少なく、比較的安定なスキームであるとされ、よく用いられる。これを用いて直交方向の微分値 $\partial_x(\partial_y f_x)$ を求めた。ただし上流側の境界の近接点では1次上流差分を、境界から2番目の点では上記の上流差分で微分値を求めるスキームを用いている。

3.4.3 インピーダンス境界条件の導入法

インピーダンス境界条件の導入は以下のように行う。Fig. 3.7 において現ステップの点が黒丸である。Fig. 3.7 のような境界層を仮定した場合、負方向に伝搬する f_x^- は (a) のようにそのまま移流させればよい。また (b) のように正方向に移流する f_x^+ の場合でも、格子番号1以上は移流させるだけでよい。境界層では $n+1$ ステップで式 3.44 が成り立つため、現ステップの値に関係なく $n+1$ ステップの f_x^- の値から f_x^+ が一意に定まる。このように時間方向にもコロケートなのはFDTD法と大きく異なる点である。例えば剛壁の場合、比音響インピーダンス $z \rightarrow \infty$ である

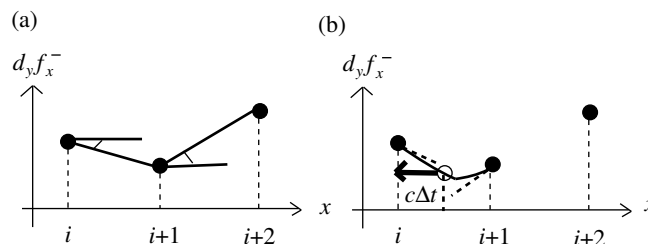


Fig. 3.6 Revised M-type CIP.

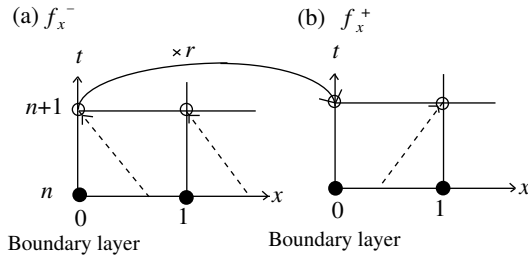


Fig. 3.7 How to assign boundary condition.

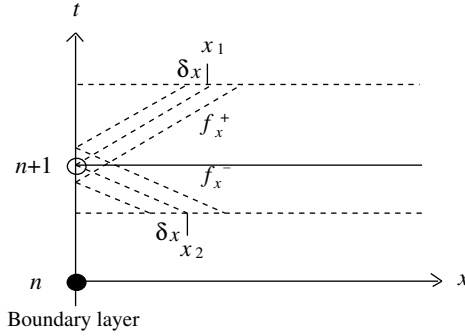


Fig. 3.8 Boundary condition of $\partial_x f_x^+$.

ため、 $n + 1$ ステップの $f_x^+ = -f_x^-$ となる。吸音境界 ($z = 1$) の場合、 $f_x^+ = 0$ である。

$$f_x^+ = \frac{1 - z}{1 + z} f_x^- = r f_x^- \quad (3.44)$$

ここで反射率を r とおいた。

(式 3.44 の証明)

境界における $n + 1$ ステップの粒子速度は

$$u^{n+1} = \frac{f_x^+ + f_x^-}{2\rho c} \quad (3.45)$$

とかける。これに対して音圧は

$$p^{n+1} = \frac{f_x^+ - f_x^-}{2} \quad (3.46)$$

である。よって

$$Z = \rho c z = -\frac{p}{u} \quad (3.47)$$

の関係を用いて、式 3.44 のようにかける。

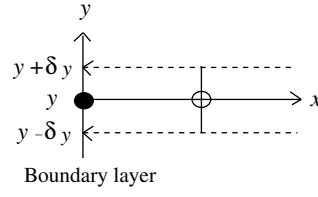
微分値に対しても式 3.48 より求める。

$$\partial_x f_x^+ = -\frac{1 - z}{1 + z} \partial_x f_x^- \quad (3.48)$$

(式 3.48 の証明)

Fig. 3.8 に示す x_1, x_2 の近傍での差分を考えることによって、式 3.48 を導出する。

$$\partial_x f_x^+ \simeq \frac{f_{x, x_1 + \delta x}^+ - f_{x, x_1 - \delta x}^+}{2\delta x} = \frac{1 - z}{1 + z} \frac{f_{x, x_2 - \delta x}^- - f_{x, x_2 + \delta x}^-}{2\delta x} \simeq -\frac{1 - z}{1 + z} \partial_x f_x^- \quad (3.49)$$

Fig. 3.9 Boundary condition of $\partial_y f_x^+$.

2次元以上の場合直交方向の境界条件は次式で求める。

$$\partial_y f_x^+ = \frac{1-z}{1+z} \partial_y f_x^- \quad (3.50)$$

$$\partial_z f_x^+ = \frac{1-z}{1+z} \partial_z f_x^- \quad (3.51)$$

(式 3.50 の証明)

これも Fig. 3.9 のように差分的に考えることで証明できる。

$$\partial_y f_x^+ \simeq \frac{f_{y,y+\delta y}^+ - f_{y,y-\delta y}^+}{2\delta y} = \frac{1-z}{1+z} \frac{f_{y,y+\delta y}^- - f_{y,y-\delta y}^-}{2\delta y} \simeq \frac{1-z}{1+z} \partial_y f_x^- \quad (3.52)$$

負方向に移流する逆側の境界に対しても以下の式を用いればよい。

$$f_x^- = \frac{1-z}{1+z} f_x^+ \quad (3.53)$$

$$\partial_x f_x^- = -\frac{1-z}{1+z} \partial_x f_x^+ \quad (3.54)$$

$$\partial_y f_x^- = \frac{1-z}{1+z} \partial_y f_x^+ \quad (3.55)$$

$$\partial_z f_x^- = \frac{1-z}{1+z} \partial_z f_x^+ \quad (3.56)$$

境界面が傾いている場合には、境界外向きを正とする法線方向ベクトルを $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ として

$$u = \frac{p}{z} n_x \quad (3.57)$$

であることから、

$$f_x^+ = \frac{n_x + z}{n_x - z} f_x^- \quad (3.58)$$

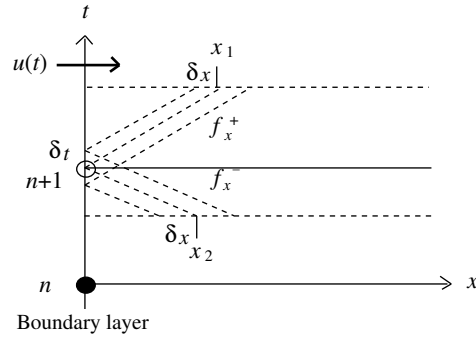
$$f_x^- = \frac{n_x - z}{n_x + z} f_x^+ \quad (3.59)$$

とすればよい。なお実際のプログラミングの際にはインピーダンス z でなく、その逆数のアドミタンス $y = 1/z$ を用いると、剛の場合の場合わけが必要なく便利である。

3.4.4 振動速度境界条件の導入

Fig. 3.10 のように、境界が振動速度 $u(t)$ で振動している場合を考える。次時間ステップ $n+1$ の左端から正方向に移流する成分 f_x^+ に関しては、式 3.60 のように与えればよい。

$$f_x^+ = 2\rho c u((n+1)\Delta t) - f_x^- \quad (3.60)$$

Fig. 3.10 Boundary condition of $\partial_x f_x^+$.

微分値は式 3.48 の導出と同じように考えれば

$$\partial_x f_x^+ = \partial_x f_x^- - \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho c u((n+1)\Delta t) \quad (3.61)$$

のように求まる。

(式 3.61 の証明)

式 3.48 の証明と同様に、Fig. 3.10 に示す x_1, x_2 の近傍での差分を考える。

$$\begin{aligned} \partial_x f_x^+ &\simeq \frac{f_{x,x_1+\delta x}^+ - f_{x,x_1-\delta x}^+}{2\delta x} \\ &= \frac{(2\rho c u((n+1)\Delta t - \delta t) - f_{x,x_2-\delta x}^-) - (2\rho c u((n+1)\Delta t + \delta t) - f_{x,x_2+\delta x}^-)}{2\delta x} \\ &\simeq \partial_x f_x^- - \frac{2\rho c u((n+1)\Delta t + \delta t) - 2\rho c u((n+1)\Delta t - \delta t)}{2\delta x} \\ &= \partial_x f_x^- - \frac{2\rho c u((n+1)\Delta t + \delta t) - 2\rho c u((n+1)\Delta t - \delta t)}{2c\delta t} \\ &\simeq \partial_x f_x^- - \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho c u((n+1)\Delta t) \end{aligned} \quad (3.62)$$

ここで $\delta x = c\delta t$ の関係を利用した。 ■

3.4.5 音響振動連成解析

厚いコンクリート壁のように重い壁を考える場合には、音が壁を振動させる影響はあまりないと考えてよい。しかしながら窓ガラスのように薄くて面密度の小さい部材においては、音が部材を振動させ、そのことによって音が透過する現象が見られる。窓ガラスの透過損失の解析を行う上では、このような現象も含めて解析を行う必要があるため、音響振動連成解析が重要である。FDTD 法では振動方程式を差分化して、音響解析と連成することで容易に音響振動連成を扱うことができる [64, 74]。

そこで CIP 法においても、音響振動連成を行うことを考えた。しかしながら振動方程式は 4 次の偏微分方程式で時間微分項と空間微分項の交差微分も入っているため、移流方程式に変形することは難しいと考えられる。厚さ 0 の薄板要素を導入することで振動部分は FDTD 法で解析を行い、音響部分は CIP 法で解析を行い両者を連成させることとした。簡単のため 2 次元での検討を行い、次節で 3 次元への拡張を行うが、ほとんど同じである。

3.4.5.1 連成手法 2次元

まずは板の振動方程式を差分法で離散化する。差分式の導出までは文献 [64] とほぼ同じである。

板を一様断面 (断面 2 次モーメント $I = \text{Const.}$) のビームとみなすことにする。また周辺の空気がビームに及ぼすモーメントを無視すると、2次元ビームの曲げ振動は式 3.63 によって表すことができる。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2} = q_y \quad (3.63)$$

ここで w は垂直方向の変位であり、 $\mu, \rho I, EI, q_y$ はそれぞれビームの線密度、回転慣性、曲げ剛性、単位長さに働く垂直外力である。

上の式を差分法によって離散化すると、式 3.64 になる。ただしCIP法は時間方向にもコロケートであるため、文献 [64] とは、変位 w の時間の離散点を $1/2$ ずらしている。

$$\begin{aligned} w_j^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{(\Delta t)^2}{\mu} q_j^n + \left(2w_j^{n-\frac{1}{2}} - w_j^{n-\frac{3}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{EI(\Delta t)^2}{\mu(\Delta y)^4} \left(w_{j-2}^{n-\frac{1}{2}} - 4w_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} + 6w_j^{n-\frac{1}{2}} - 4w_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} + w_{j+2}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{\rho I}{\mu(\Delta y)^2} \left\{ \left(w_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} - 2w_j^{n-\frac{1}{2}} + w_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} \right) - 2 \left(w_{j-1}^{n-\frac{3}{2}} - 2w_j^{n-\frac{3}{2}} + w_{j+1}^{n-\frac{3}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(w_{j-1}^{n-\frac{5}{2}} - 2w_j^{n-\frac{5}{2}} + w_{j+1}^{n-\frac{5}{2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

ここまではFDTD法の場合とほぼ同じである。

次にビームの振動と音場との連成を考えるにあたって、Fig. 3.11 に示す厚さ 0 で表裏に音圧差はあるが粒子速度の差はない薄板要素を導入し、式 3.63 の外力項を、その表裏の音圧差 Δp と考える。すなわち

$$q_j^n = \Delta p_j^n \quad (3.65)$$

$$u_j^n = \frac{w_j^{n+\frac{1}{2}} - w_j^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (3.66)$$

である。Fig. 3.11 のように、 $f_{x(i)}^+, f_{x(i)}^-, f_{x(i+1)}^+, f_{x(i+1)}^-$ を定義すると

$$f_{x(i)}^+ = \rho c u + p \quad (3.67)$$

$$f_{x(i)}^- = \rho c u - p \quad (3.68)$$

$$f_{x(i+1)}^+ = \rho c u + (p + \Delta p) \quad (3.69)$$

$$f_{x(i+1)}^- = \rho c u - (p + \Delta p) \quad (3.70)$$

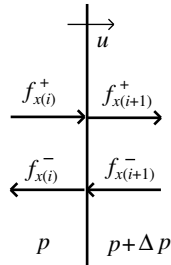


Fig. 3.11 Schematic of thin-plate.

である。これらの関係から

$$u_j^n = \frac{f_{x(i)}^+ + f_{x(i)}^-}{2\rho c} = \frac{f_{x(i+1)}^+ + f_{x(i+1)}^-}{2\rho c} \quad (3.71)$$

$$q_j^n = \Delta p_j^n = f_{x(i+1)}^+ - f_{x(i)}^+ \quad (3.72)$$

が得られる。式 3.71 より

$$f_{x(i)}^- = -f_{x(i)}^+ + f_{x(i+1)}^- + f_{x(i+1)}^+ \quad (3.73)$$

が成り立ち、 $f_{x(i)}^+, f_{x(i+1)}^-$ は音場解析から既知であることから、独立な変数は $f_{x(i+1)}^+, f_{x(i+1)}^-$ のうち1つである。また式 3.64 の右辺は時間ステップ n において q_j^n を除き、すべて過去の値から求まるので、 $w_j^{n+1/2} - (\Delta t)^2/\mu \Delta p_j^n$ は、陽的に求めることができる。ここで

$$A = w_j^{n+1/2} - \frac{(\Delta t)^2}{\mu} \Delta p_j^n \quad [\text{m}] \quad (3.74)$$

とおく。この A を式 3.66 に代入して $w_j^{n+1/2}$ を消去することによって、以下の等式が導かれる。

$$u_j^n = B + \frac{\Delta t}{\mu} \Delta p_j^n \quad (3.75)$$

ここで

$$B = \frac{A - w_j^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (3.76)$$

とおいた。これらを上の関係式 3.71,3.72 に代入し整理することで最終的に

$$f_{x(i+1)}^+ = \frac{\mu}{\mu - 2\rho c \Delta t} \left\{ -f_{x(i+1)}^- + 2\rho c \left(B - \frac{\Delta t}{\mu} f_{x(i)}^+ \right) \right\} \quad (3.77)$$

が得られ、 $f_{x(i)}^-$ は 3.73 によって求めることで、音響振動連成ができることになる。

CIP 法では微分値も得る必要があるが、これも式 3.63 の両辺を微分して離散化することで得られる。すなわち

$$w \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} w \quad \Delta p \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \Delta p$$

などの置き換えを行うことで全く同様に

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{x(i+1)}^+ = \frac{\mu}{\mu - 2\rho c \Delta t} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} f_{x(i+1)}^- + 2\rho c \left(B - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} f_{x(i)}^+ \right) \right\} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{x(i)}^- = -\frac{\partial}{\partial x} f_{x(i)}^+ + \frac{\partial}{\partial x} f_{x(i+1)}^- + \frac{\partial}{\partial x} f_{x(i+1)}^+ \quad (3.79)$$

が得られる。ただし、微分は

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{x(i+1)}^+ = \frac{f_{x(i+2)} - f_{x(i+1)}}{\Delta x} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{x(i)}^- = \frac{f_{x(i)} - f_{x(i-1)}}{\Delta x} \quad (3.81)$$

のように差分で求めても、それほど大きな差異はないものと考えられる。

具体的な手順は、一般的に安定性の問題から、音場解析の時間離散化幅 Δt_1 のほうが振動解析の時間離散化幅 Δt_2 より大きいことを考慮して以下のようになる。

- (i) 音場解析により n ステップの $f_{x(i+1)}^-, f_{x(i)}^+$ を求める。
- (ii) 過去の w の値から A, B を求める。 $\partial_x w$ についても同じように求める。
- (iii) 式 3.77, 3.73 より $f_{x(i+1)}^+, f_{x(i+1)}^-$ を求める。
- (iv) 式 3.78, 3.79 より $f_{x(i+1)}^+, f_{x(i+1)}^-$ の微分値を求める。
- (v) 式 3.72 より Δp_j^n を求め、式 3.64 を $\Delta t_1/\Delta t_2$ 回繰り返すことによって w を時間発展させる。 $\partial_x w$ についても同じように求める。

これを繰り返す。

3.4.5.2 連成手法 3次元

板の曲げ振動方程式は

$$D\nabla^4 w + \xi D \frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_y \quad (3.82)$$

で表される。ここで

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (3.83)$$

D は曲げ剛性で、

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\gamma^2)} \quad (3.84)$$

である。ここで w は垂直方向の変位、 ξ は内部損失に関する係数、 μ は梁の面密度、 γ はポアソン比、 q_y は単位面積に働く垂直外力である。これを内部損失を無視して、 $\xi = 0$ とおいて有限差分近似することで以下が得られる [74]。ただし原文には齟齬らしいところが見られるので訂正した。

$$\begin{aligned} w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{(\Delta t)^2}{\mu} q_{i,j}^n + \left(2w_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} - w_{i,j}^{n-\frac{3}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{D(\Delta t)^2}{\mu(\Delta x)^4} \left(w_{i-2,j}^{n-\frac{1}{2}} - 4w_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}} + 6w_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} - 4w_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}} + w_{i+2,j}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{D(\Delta t)^2}{\mu(\Delta y)^4} \left(w_{i,j-2}^{n-\frac{1}{2}} - 4w_{i,j-1}^{n-\frac{1}{2}} + 6w_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} - 4w_{i,j+1}^{n-\frac{1}{2}} + w_{i,j+2}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{D(\Delta t)^2}{\mu(\Delta x)^2(\Delta y)^2} \left\{ \left(w_{i+1,j-1}^{n-\frac{1}{2}} - 2w_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}} + w_{i+1,j+1}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \quad \left. - 2 \left(w_{i,j-1}^{n-\frac{1}{2}} - 2w_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} + w_{i,j+1}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \quad \left. + \left(w_{i-1,j-1}^{n-\frac{1}{2}} - 2w_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}} + w_{i-1,j+1}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.85)$$

内部損失に関わる項の時間微分には、後退差分を用いれば容易にその影響を考慮することができる。

$$\begin{aligned} w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{(\Delta t)^2}{\mu} q_{i,j}^n + \left(2w_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} - w_{i,j}^{n-\frac{3}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{(\Delta t)^2}{\mu} D \nabla^4 w^{n-\frac{1}{2}} - \frac{(\Delta t)^2}{\mu} \xi D \frac{\nabla^4 w^{n-\frac{1}{2}} - \nabla^4 w^{n-\frac{3}{2}}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.86)$$

ここでも、 $w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - (\Delta t)^2/\mu q_{i,j}^n$ を、陽的に求めることができるため、全く同じ手順で音響振動連成解析ができることになる。

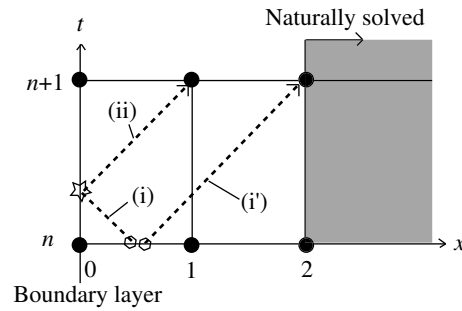


Fig. 3.12 The region which is naturally solved and the one which is specially dealt with.

3.4.6 $CFL > 1$ となる時間離散化幅での計算

CIP法において、式 1.1 に示したクーラン数 CFL が 1 を超えるような条件で計算を行う場合には、境界付近での境界条件の取扱いに工夫が必要である。 $1 < CFL < 2$ の場合の例を Fig. 3.12 に示す。求めたい点・与えられている点は、黒丸で示した点である。格子番号が $CFL + 1$ より大きい点であれば、(i') のように移流させるだけで自然に求まる。しかしながら境界付近（この場合格子番号 1）では、移流させる点が n ステップの段階では直接的に求まらない。まず f_x^- を (i) のように移流させ、境界条件式 3.44 を課して f_x^+ を求めた後、星印の点を (ii) のように移流させる必要がある。

3.5 計算効率の比較

3.5.1 概要

CIP法はFDTD法同様、メモリー量・計算量ともに総格子点数に比例する手法である。しかしながらCIP法は、内挿を行ったり微分値を保持したりする必要性から、同じ格子・時間ステップで行えばFDTD法に比べて、計算量・メモリー量ともに負荷の大きな手法である。

3.5.2 メモリー量

FDTD法では p, u_i の変数が必要である。これに対しCIP法では、 p, u_i に加えて、 $\partial p / \partial x_i, \partial u_j / \partial x_i$ が必要である。1次元で2倍 ($i = j = 1$)、2次元で3倍 ($i = 1, 2; j = 1, 2$)、3次元で4倍 ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) のメモリー量が最低でも必要である。また効率的な計算のためには $f_x^+, f_x^-, f_y^+, f_y^-, f_z^+, f_z^-$ とそれぞれの直交方向の微分値の24変数が必要であるため、同じ格子点数の場合、3次元の計算では6倍程度のメモリー量が必要となる。ただし $\Delta t = N\Delta x/c$ であれば、補間は必要なくFDTD法と同様 p, u_i のみのメモリー量でよい。

3.5.3 計算量

CIP法では多次元問題を1次元に還元して解くため、3次元問題になると直交3軸方向の粒子速度 u_i それぞれについて3次元のループが必要である。また3.3.5(ii)のプロセスでも3次元ループが必要である。それぞれ1回ずつがFDTD法以上の計算量である。このためCIP法の計算量は6倍はかかると思われる。その他にも内挿や境界条件の適用、変数のコピーなどの手間がかかるため、同じ時間ステップ・格子点数で計算した場合、3次元で10倍程度の計算時間がかかって

Table 3.3 Repetition numbers of main calculations at a time step.

	read array element	write array element	multiply
FDTD	10	4	6
CIP	99	87	114

いる。 $\Delta t = N\Delta x/c$ であれば内挿が必要ないため、 $N = 1$ の場合、FDTD法の数倍程度で計算できる。筆者のソースコードにおける1ステップ当たりの主要な演算量をTable 3.3にまとめた。

3.5.4 考察

このように、一見するとFDTD法に比べてメリットがないように思われるが、粗い格子でも高精度を維持できるため、そうとばかりもいえない。例えば同じ精度を2倍の空間離散化幅で実現できるとすれば、メモリー量は1/8になるためFDTD法に匹敵する。計算時間に関しても1回のループあたり1/8、さらに時間ステップを、CFL条件を満たすようにしても2倍にできるため、1/16の計算量に抑えることができ、FDTD法以上の高速化が可能である。さらにCFL条件を超えるような時間ステップで計算できるアルゴリズムを3次元に実装すれば、FDTD法以上の高速化が可能であると考えられる。室内音場の問題で、波長に対してどの程度まで空間離散化幅を粗くすることができるかに関する詳細な検討を次章以降で行う。

例え同じ計算時間であったとしても、少ない格子点数で計算できることはメリットがある。3次元音場の可視化を行う際に、2次元断面で切断して可視化を行う分にはそれほどデータは大きくなりませんが、3次元音場をそのまま可視化しようとする、膨大な要素数は可視化の際のデータ処理時間に直結する。また任意形状に対応する際には、細かいメッシュが必要となり、メッシュ生成にも多大な時間がかかる。このようにプリポストプロセスのことも考慮に入れれば、例え計算時間が同じであったとしても、精度を維持したまま格子点数(要素数)を減らすことにはメリットがある。

3.6 まとめ

音響問題のためのCIP法の定式化を行った。既往研究を発展させて、高速化と高精度化の2点から手法の提案を行った。さらにこれまで検討されていない室内音場問題への適用のために、境界条件に関する整理を行った。実数のインピーダンス境界条件の導入法や、振動速度境界条件、音響振動連成問題のための定式化を行った。さらに音響問題についてはされていないCFL条件を超える時間幅で計算を行うための工夫を行った。次章以降でこれらを実際の問題に適用することにする。

第4章 時間・空間離散化に関する検討

4.1 概要

前章までに CIP 法に関する理論を構築した。既往研究によると CIP 法は、FDTD 法に比べて 2 つの利点があることが分かっている。

- (1) 空間精度が 3 次であり標準的な FDTD 法の 2 次精度より高い。また格子に対して相対的に短い波長に対しても解像度が高い。
- (2) サンプリングの定理を満たす範囲内で、時間離散化幅を自由に取ることができる。

まずはこの 2 つの特徴を実例を用いて検証する。これらの特徴を利用して、CIP 法において計算負荷の低減を図ることを考える。そのためには以下の 2 つの方法が考えられる。

- (1) 空間離散化幅は FDTD 法と同程度にして時間離散化幅をサンプリングの定理を満たす限り大きく取る。この場合計算量は $O(\Delta t^{-1})$ で低減することができる。例えば時間離散化幅を 2 倍にすれば計算量を半分にすることができる。ただし記憶量は減らすことができない。
- (2) CFL 数は同じにしたまま空間離散化幅・時間離散化幅を同時に変化させる。この場合計算量は 3 次元解析の場合 $O(\Delta t^{-4})$ で低減することができる。例えば時間離散化幅・空間離散化幅を同時に 2 倍にすることで計算量を 16 分の 1 にすることができる。こちらは記憶量も $O(\Delta t^{-3})$ で低減することができる。

本章では両手法の適用を試みることで、実用上重要な波形・残響時間の 2 つの観点から評価することにする。

4.2 数値分散性に関する検討

まずは球面波伝搬問題、1 次元音場問題、3 次元の剛壁室の問題の理論解が存在する 3 問題で、CIP 法が FDTD 法よりも空間精度が高く高周波成分に対しても数値分散が小さいことを示す。

4.2.1 球面波伝搬問題

はじめに境界からの反射の影響を考慮する必要のない球面波伝搬問題を検討する。この問題に関する基礎的な検討はすでになされているが、プログラムの確認や定性的傾向の把握のため文献 [40] とほぼ同条件の検討を行った。計算領域は、Fig. 4.1 に示す 1 辺 0.4 m の立方体領域である。空間離散化幅 Δx を 4 mm、時間離散化幅 Δt を CFL 条件を満たす 0.0026 ms ($CFL = 0.23$)、音源点 S を (0.1, 0.2, 0.2)、受音点 R0 を (0.3, 0.2, 0.2) とした。この領域は数値計算の便宜上確保したもので、境界からの反射の影響が受音点にあらわれない 300 ステップ (0.78 ms) までを解析対象にしたため、領域の大きさは結果に影響しない。これは Fig. 4.2 のような球面波伝搬問題

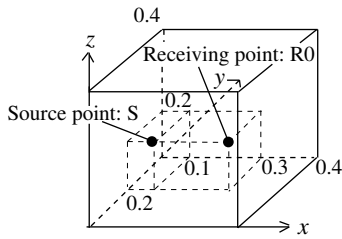


Fig. 4.1 Geometry of a propagation model.

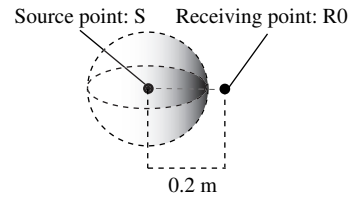


Fig. 4.2 Schematic image.

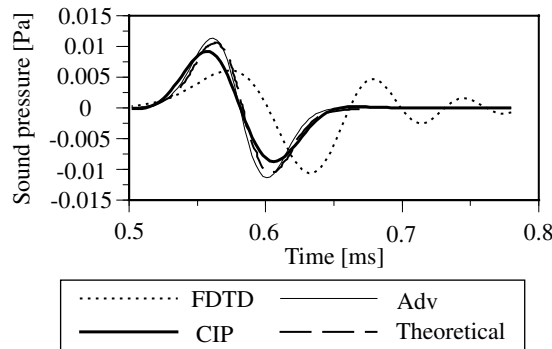


Fig. 4.3 Pseudo impulse response at R0.

に相当する。初期空間音圧分布を、式 4.1 の形のガウス分布に仮定し、音源の幅を与える定数を $d = 0.01$ [m] とした。これは数格子でガウス分布を与え 15 kHz までの成分が含まれる非常に急峻な波形である。

$$p(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{d^2}\right) \quad (4.1)$$

結果を Fig. 4.3 に示す。上述の通り、高周波成分まで含まれる急峻なガウス分布を音源として与えているため、FDTD 法では高周波成分の位相速度が遅れる分散が起きている。CIP 法でも分散は起こってしまっているが、おおむね伝搬を捕捉していることがわかる。これは既往研究とおおむね同様の結果である。また 3.4.1 で述べた補間を用いない手法、すなわち $c\Delta t = \Delta x$ となる $\Delta t = 0.012$ [ms] で計算を行い、リサンプリングしたものを特性曲線法 (図中 Adv) として示す。補間に伴う誤差がないため CIP 法と比べても精度が高い。最大振幅の誤差は CIP 法で -14 %、FDTD 法で -43 %、CIP 法 (補間なし) で +7 % であった。

ところで FDTD 法は空間・時間離散化幅ともに小さくするほど、精度の向上が期待できる手法である。同様に CIP 法でも空間離散化幅は小さければ小さいほどよい。ところが時間離散化幅を小さくしすぎると補間が多数回行われることになり、補間の誤差によって精度が低下する。実際 1 次元音場ではあるが時間離散化幅に関する検討が行われ、FDTD 法は CFL 数が小さいほど精度がよくなるのに対して、CIP 法は CFL 数が大きいほど精度がよくなることが示されている [43]。 $CFL > 1$ とした場合は境界付近で特殊な処理が必要となり誤差の要因となるためその検討は改めて後に示すが、ここでは $CFL < 1$ の範囲で先ほどの時間離散化幅の 4 倍の $\Delta t = 10.4$ [μ s] ($CFL = 0.92$) とした場合を検討した。Fig. 4.4 に結果を示す。括弧の中は CFL 数である。このように境界条件の影響が入らない開領域問題で $CFL < 1$ の場合は、方向分離を行っているのにも関わらず CFL 数を大きくする (時間離散化幅を大きくする) ほど精度がよくなる傾向が 3 次元でも確認された。

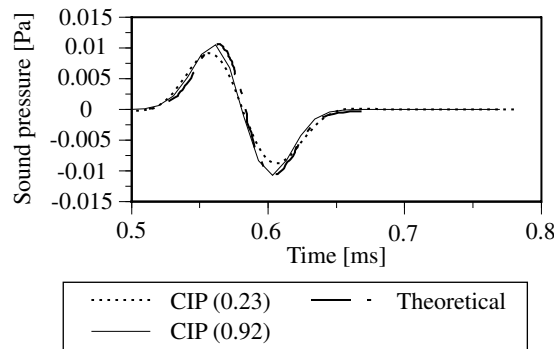


Fig. 4.4 Pseudo impulse response at R0.

4.2.2 1次元音場

以上のような単純な球面波伝搬問題では CIP 法は FDTD 法に比べて数値分散が小さく、伝搬に伴う波形の変化も少ないことが既往研究で示されており、上の検討でも確認された。次に一般に伝搬問題解析に比べ複雑となる室内音場解析への CIP 法の適用性について、インピーダンス境界条件を導入して検討する。このような多重反射が起こる問題での CIP 法の精度に関する検討を行った文献は見られない。これ以降、初期空間音圧分布を、式 4.1 の形に仮定し、特に断りのない場合には、音源の幅を $d = 0.13$ [m] に統一した。これは音源に含まれる最大周波数が、1 kHz の $1/3$ オクターブバンド上限周波数となるような音源である。空間離散化幅は、FDTD 法の場合最小波長の 10 分の 1 程度に設定することが多いため、 0.033 m とした。時間離散化幅は、空間離散化幅に対する 3 次元の CFL 条件を満足する 0.05 ms で検討した。音源特性・空間離散化幅・時間離散化幅は以後これを用い、FDTD 法・CIP 法ともに同じとする。

Fig. 4.5 に示すように、長さ 1 m の 1 次元音場を考えた。両端部に吸音率 0.5 相当のノーマルインピーダンスを実数で与えた。音源・受音点を $x = 0.5$ [m] に設置した。結果を Fig. 4.6 に示す。FDTD 法に対して、CIP 法はオーバーシュート・アンダーシュートが少なくシャープなプロフィールを保つことができることがわかる。CIP 法と理論解の比較を Fig. 4.7 に示す。このように位相速度のずれは多少見られるものの振幅はよく一致している。また、R0 における CIP 法・FDTD 法の空間離散化幅と精度との関係を Fig. 4.8 に示す。これは、両者で最小波長 $4, 6, 8, 10$ 分割とした音圧波形を p_i を、理論解 $p_{i,theo}$ と比較したものである。誤差評価には、平均二乗誤差

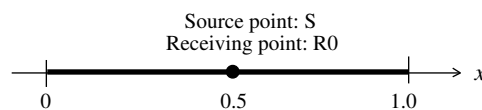


Fig. 4.5 Geometry of 1D sound field.

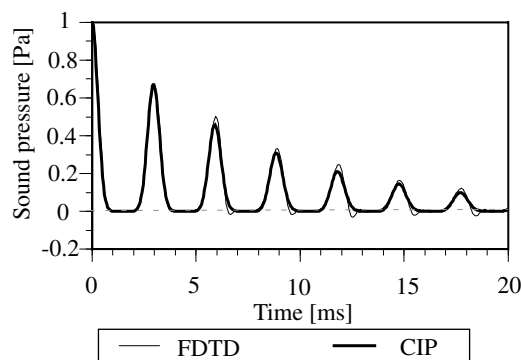


Fig. 4.6 Pseudo impulse response at R0 calculated by the FDTD method and the CIP method.

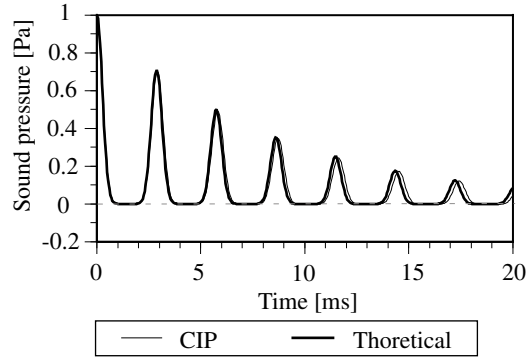


Fig. 4.7 Pseudo impulse response at R0 calculated by the CIP method and the theory.

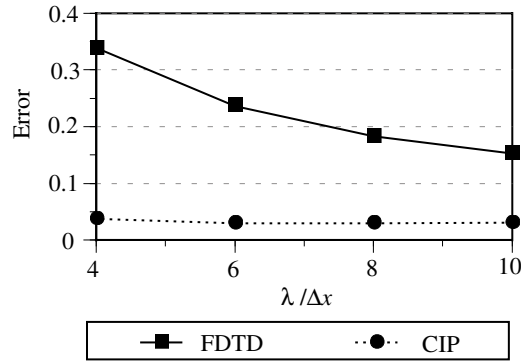


Fig. 4.8 Average square error with $\lambda/\Delta x$.

Err を用いた。

$$Err = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (p_i - p_{i,theo})^2}{\sum_{i=0}^{N-1} p_{i,theo}^2} \quad (4.2)$$

ここで時間の観測点数 N を 100 ms までの 2000 点とした。FDTD 法と比べて CIP 法は、空間離散化幅を大きくしたときにも誤差が小さいことが、反射の影響を考慮した室内音場問題でも確認された。

(補足: 理論解に関して)

1次元音場の場合、理論解は周波数領域での波動方程式の解を重ね合わせることで求めることができるが、以下のように移流方程式 3.12, 3.13 を基礎方程式として考えると、物理的にイメージしやすく簡単に求めることができる。簡単のため両端の吸音率は等しいとするが、異なる場合にも容易に拡張できる。音場の長さを L 、受音点位置を x_r とすると、正方向への移流成分 f_x^+ は t 秒後には N 回反射している。

$$N = \begin{cases} [(ct - x_r)/L] + 1 & (L - x_r) \leq ct \\ 0 & (L - x_r) > ct \end{cases} \quad (4.3)$$

$[]$ はガウス記号。すると、 t 秒後の f_x^+ は N の偶奇によって、

$$f_x^+(x_r) = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^N f_x^-(ct - (N-1)L - x_r) \Big|_{t=0} \quad N \text{ is odd.} \quad (4.4)$$

$$f_x^+(x_r) = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^N f_x^+(L - (ct - (N-1)L - x_r)) \Big|_{t=0} \quad N \text{ is even.} \quad (4.5)$$

となる。ただし $f_x^-|_{t=0}, f_x^+|_{t=0}$ は初期値、 y はアクセプタンス $1/z$ である。

同様にして負方向への移流成分 f_x^- は t 秒後には N 回反射している。

$$N = \begin{cases} [(ct - (L - x_r))/L] + 1 & x_r \leq ct \\ 0 & x_r > ct \end{cases} \quad (4.6)$$

すると、 t 秒後の f_x^- は N の偶奇によって、

$$f_x^-(x_r) = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^N f_x^+(L - (ct - NL + x_r)) \Big|_{t=0} \quad N \text{ is odd.} \quad (4.7)$$

$$f_x^-(x_r) = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^N f_x^-(ct - NL + x_r) \Big|_{t=0} \quad N \text{ is even.} \quad (4.8)$$

のようになるので、音圧 p は

$$p = \frac{f_x^+ - f_x^-}{2} \quad (4.9)$$

として求まる。

4.2.3 3次元音場

次に3次元音場への拡張を行う。日本建築学会 環境工学委員会 音環境運営委員会 音響数値解析小委員会では、音響数値解析におけるいくつかのベンチマーク問題を提供しており、異なる解析手法間での精度の検証や計算効率の比較が行われている [140]。Fig. 4.9 はそのベンチマーク問題の1つで、1辺1 mの立方体室であり、全面が剛壁によって構成されている。受信点 R2 における音圧の波形を Figs. 4.10, 4.11 に示す。同時に理論解を示す。Fig. 4.10 に示す 0 ms から 20 ms までの領域では、FDTD 法・CIP 法ともにおおむね振幅・位相とも一致している。Fig. 4.11 に示す 80 ms から 100 ms までの領域では、CIP 法は FDTD 法と比べて理論値とよい対応を示している。特に FDTD 法はピークの位置がずれている。3.4.1 に示した補間を行わない特性曲線法 (図中 Adv) を用いた場合が、Figs. 4.12, 4.13 である。こちらも大きく外れていないものの、95 ms 辺りのピークがなくなっているようにずれている部分もある。

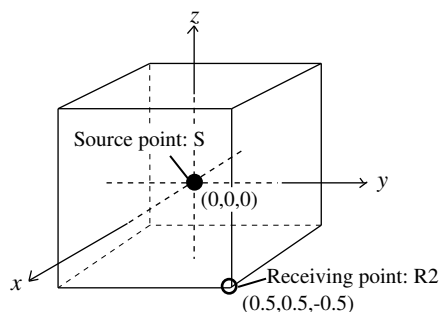


Fig. 4.9 Geometry of cubic cavity(B0-1T).

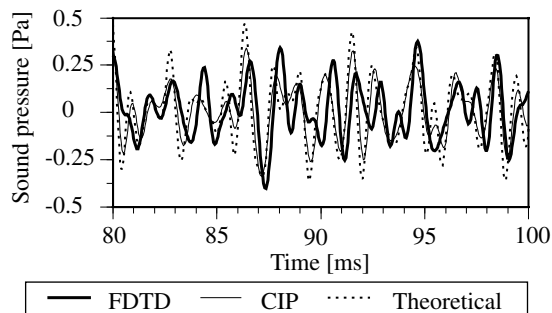
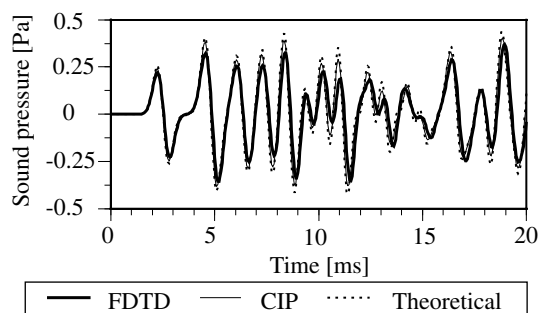


Fig. 4.10 Pseudo impulse response at R2 calculated by the FDTD method and the CIP method (0-20 ms).

Fig. 4.11 Pseudo impulse response at R2 calculated by the FDTD method and the CIP method (80-100 ms).

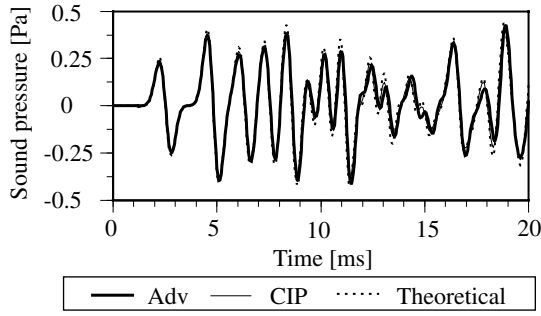


Fig. 4.12 Pseudo impulse response at R2 calculated by the Advection method ($CFL = 1$, without interpolation) and the CIP method (0-20 ms).

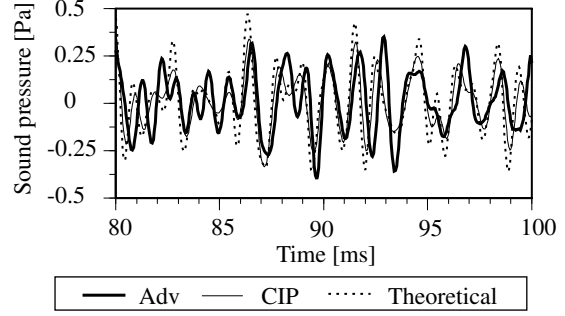


Fig. 4.13 Pseudo impulse response at R2 calculated by the Advection method ($CFL = 1$, without interpolation) and the CIP method (80-100 ms).

(補足: 理論解に関して)

3次元の剛壁(吸音率0)で囲まれた閉空間の理論解は以下の式より求まる [79]。

$$\begin{aligned}
 p(x, y, z, t) = & \sum_{l=0}^{N_{max}} \sum_{m=0}^{N_{max}} \sum_{n=0}^{N_{max}} \frac{F(l, m, n)}{L_1 L_2 L_3} \sqrt{\pi}^3 d^3 \cos \frac{l\pi x_s}{L_1} \cos \frac{m\pi y_s}{L_2} \cos \frac{n\pi z_s}{L_3} \\
 & \cdot \exp\left(-\left\{\left(\frac{l\pi d}{2L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi d}{2L_2}\right)^2 + \left(\frac{n\pi d}{2L_3}\right)^2\right\}\right) \\
 & \cdot \cos \frac{l\pi x}{L_1} \cos \frac{m\pi y}{L_2} \cos \frac{n\pi z}{L_3} \cos\left\{c\pi t \sqrt{(l/L_1)^2 + (m/L_2)^2 + (n/L_3)^2}\right\}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで $F(l, m, n)$ は以下の性質を満たす関数である。

$$\begin{aligned}
 F(0, 0, 0) &= 1 \\
 F(l, 0, 0) &= F(0, m, 0) = F(0, 0, n) = 2 \\
 F(l, m, 0) &= F(l, 0, n) = F(0, m, n) = 4 \\
 F(l, m, n) &= 8 \\
 & (l \neq 0, m \neq 0, n \neq 0)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

重ね合わせの原理により厳密には $N_{max} = \infty$ であるが、数値的に計算する際には有限の値で打ち切る必要がある。打ち切り次数 N_{max} について、文献 [79] では $N_{max} = 120$ としているが、対象としている室の大きさが異なるため改めて打ち切り次数について検討した。 $N_{max} = 10$ と 20 で相関係数 0.99994 と高い相関を示したが、若干の差異が見られた。 $N_{max} = 120$ と $N_{max} = 30$ は倍精度の誤差で完全に一致した。精度が得られるのであれば次数が低いほうが数値誤差の影響を受けにくいと考えられるため $N_{max} = 30$ を用いれば十分であり、このときの解を理論解としている。

4.2.4 M型CIP法の改良手法に関する検討

前節での検討は3.4.2で示した上流差分から3次多項式を構築するスキームを用いている。このスキームの有用性を示すため、このスキームを用いず直交方向の微分を直接上流差分から求めるM型CIP法と比較した。結果を Figs. 4.14, 4.15 に示す。上流差分から3次多項式を構築するスキームのほうが、通常スキームより誤差が少ない。特に通常スキームでなまっているピーク

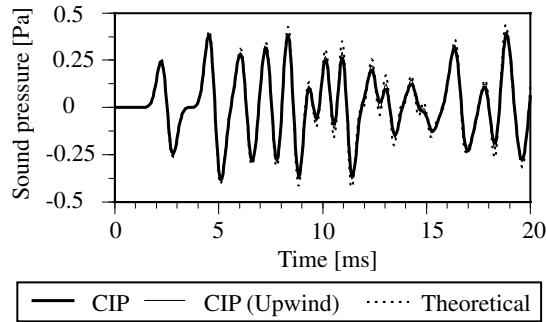


Fig. 4.14 Pseudo impulse response at R2 calculated by the improved M-type CIP method and the standard CIP method (0-20 ms).

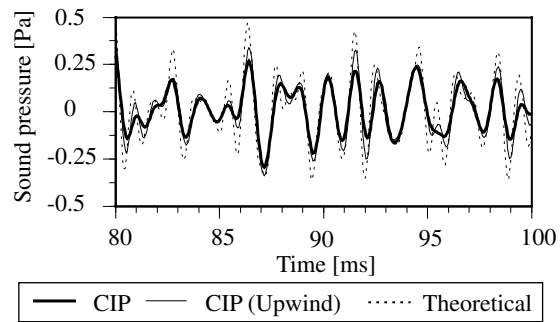


Fig. 4.15 Pseudo impulse response at R2 calculated by the improved M-type CIP method and the standard CIP method (80-100 ms).

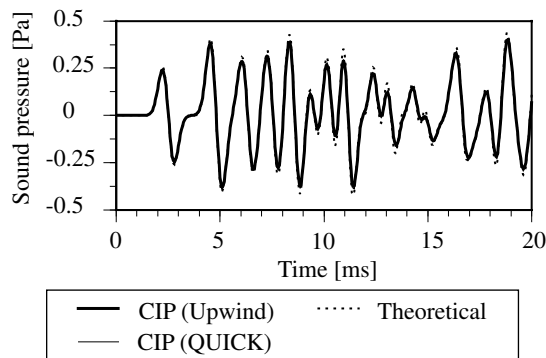


Fig. 4.16 Pseudo impulse response at R2 calculated by the CIP method (Upwind) and the CIP method (QUICK) (0-20 ms).

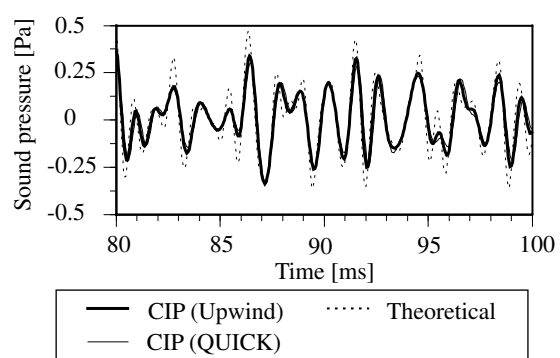


Fig. 4.17 Pseudo impulse response at R2 calculated by the CIP method (Upwind) and the CIP method (QUICK) (80-100 ms).

が、はっきりと出ている。さらに QUICK スキームを用いて改善を図った手法の結果を Figs. 4.16, 4.17 に示す。この手法は、下流点も含めて大域的に影響が入ってくるため通常の M 型 CIP 法と同程度の精度であった。

ここで 2 乗誤差の比較を行った。誤差は 100 ms までの $N = 2000$ に対して

$$Err = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (p_i - p_{i,theo})^2}{\sum_{i=0}^{N-1} p_{i,theo}^2} \quad (4.12)$$

によって評価し、理論解と比較した結果を Fig. 4.18 に示す。この問題は減衰のない非現実的な問題のためあくまで参考であるが、CIP 法系の解法が高い精度であることが分かる。

4.2.5 必要な空間・時間離散化幅と計算効率

3次元のベンチマーク問題で必要な空間離散化幅の検討を行う。空間離散化幅を最短波長 $5(\Delta x = 0.066 \text{ [m]})$, $7.5(\Delta x = 0.05 \text{ [m]})$, 10 分割 ($\Delta x = 0.033 \text{ [m]})$ として、 $\Delta t = 0.05 \text{ [ms]}$ に統一して誤差評価を行った。また時間離散化幅の検討を行うため $\Delta t = 0.075 \text{ [ms]}$ とした場合の同様の検討を行った。誤差は先ほどと同様に評価した。 $\Delta t = 0.075 \text{ [ms]}$ の場合には、sinc 関数補間によって $\Delta t = 0.05 \text{ [ms]}$ にリサンプリングした。結果を Fig. 4.19 に示す。例えば FDTD 法と同メモリーを仮定した場合、現状の 6 倍と原理上の 4 倍の 2 パターンでみると $\sqrt[3]{6} = 1.82$, $\sqrt[3]{4} = 1.59$ である

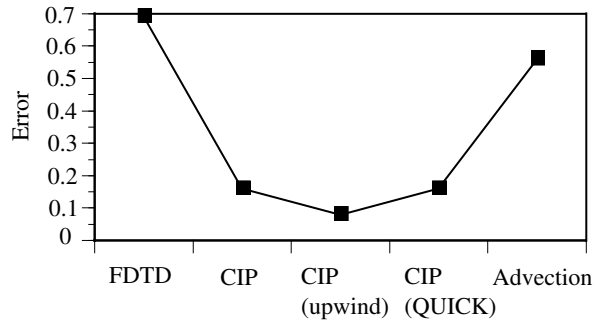


Fig. 4.18 Square error calculated by the FDTD method, the CIP method, the improved CIP method with upwind scheme, the improved CIP method with QUICK scheme and the advection method (without interpolation) ($\Delta x = 0.033$ [m], $\Delta t = 0.05$ [ms], $t_{max} = 100$ [ms]).

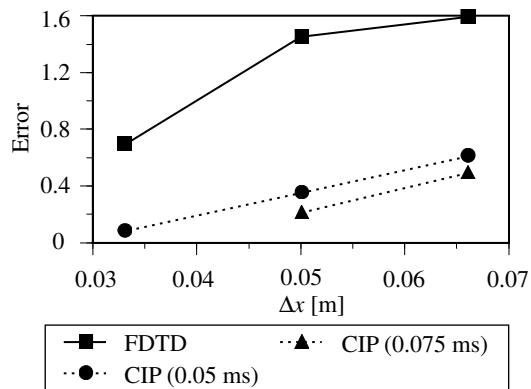


Fig. 4.19 Square error with Δx calculated by the CIP method ($\Delta t = 0.05, 0.075$ [ms]).

ので、 $\Delta x = 0.066, 0.05$ [m] に対応する。全体的に CIP 法が FDTD 法よりも誤差が少なく、CIP 法は時間離散化幅を大きくしたもののほうが誤差が小さいことがわかる。ただし $\Delta x = 0.033$ [m] で時間離散化幅 0.075 ms のときは、 $CFL = 0.78$ であるのにも関わらず、すぐにではないがやがて発散した。これは方向分離を行う上では時間離散化幅が小さいことが条件であったのと、ここで用いた CIP 法が保存則を満たさないことが原因であると考えられる。以上の検討より CIP 法で空間離散化幅を大きくするときには時間離散化幅も合わせて大きくしたほうが補間の誤差を減らすことができるため、計算量・誤差の両面で有利である。

4.3 時間離散化幅のみを大きくした場合の検討

本節では CIP 法の特長の一つである CFL 条件を超える時間離散化幅で計算ができることを示すために、3.4.6 で述べた工夫を用いて大きな時間離散化幅での解析を行いその精度を検証した。

4.3.1 1次元音場

4.2.2 と同条件のモデルで、時間離散化幅を CFL 条件を満足する 0.05 ms と、音源に含まれる最大周波数のサンプリング周波数におおむね対応する 0.5 ms とした場合を比較したものを Fig. 4.20 に示す。3.4.6 に述べた工夫を行うことで、高い精度を維持できていることが分かる。他にも前の時間ステップの段階での 3 次多項式を外挿して、移流先の点を求める方法も試したが精度は出なかった。文献 [43] で CFL 条件を満たす範囲内では時間離散化幅を大きくしたほうが精度が高いことが示されているため、音源のエイリアシングの問題がない範囲内であれば、1次元の場合にはな

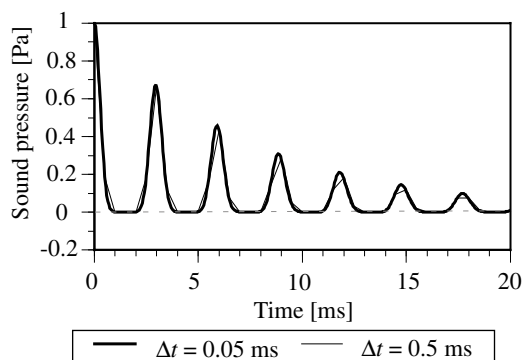


Fig. 4.20 Pseudo impulse response calculated by the CIP method ($\Delta t = 0.05, 0.5$ ms).

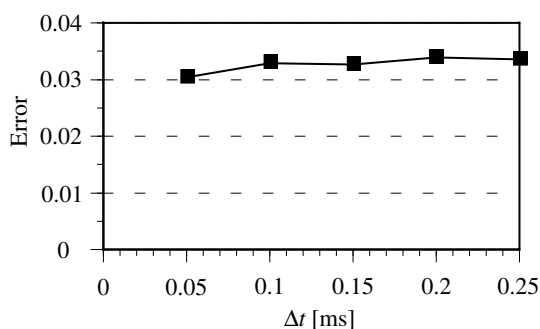


Fig. 4.21 Square error with Δt ($\Delta t = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$ ms).

るべく時間離散化幅を大きくしたほうが精度が向上することが期待される。そこで空間離散化幅を 0.033 m に固定し、時間離散化幅を 0.05 ms ($CFL = 0.52$)、0.1 ms ($CFL = 1.04$)、0.15 ms ($CFL = 1.56$)、0.2 ms ($CFL = 2.08$)、0.25 ms ($CFL = 2.6$) の 5 通りで先ほど示した理論解との比較を行った。これもすべて 0.05 ms でリサンプリングを行い 0.1 秒までの 2000 点で先ほどと同様に誤差を評価した。結果を Fig. 4.21 に示す。時間離散化幅によらず差がなかったが、いずれも高精度であることが分かる。

4.3.2 球面波伝搬問題

多次元への適用を行なう際に、まずは球面波伝搬問題 4.2.1 での検討を行った。時間離散化幅は 4.2.1 での検討の 4 倍と 10 倍に当たる $\Delta t = 10.4$ [μs] ($CFL = 0.92$) と 26 [μs] ($CFL = 2.2$) である。結果を Figs.4.22 に示す。 $CFL < 1$ では正確に計算できているものの、 $CFL = 2.2$ の時には、数値振動に加えて、オーバーシュート・アンダーシュートが起こっていることがわかる。これは方向分離の影響であると考えられる。また補間を用いない方法で $CFL = 1, 2, 3$ でそれぞれ計算したものを Fig. 4.23 に示す。 $CFL = 1$ のときは高精度に解析できているが、 $CFL = 2, 3$ の時にはもはや元の波形が分からないレベルまで崩れてしまっている。これらのことから考えて、方向分離の影響は補間を用いない方法において顕著であるといえる。内挿を行うことは高周波成分を減衰させて安定性を保つことになっているため [21]、内挿を行わない手法は安定性が悪くなっているものと思われる。

4.3.3 2次元音場 吸音率が中程度の場合

3次元の球面波伝搬問題の検討によって、境界条件の影響がなくても時間離散化幅を CFL 条件を超えて大きく取るとは安定性を悪くする原因となりうることを確認した。室内音場問題では

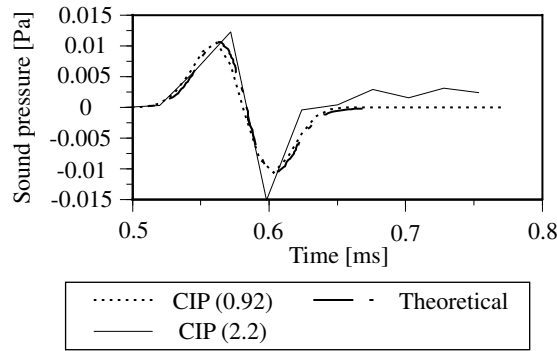


Fig. 4.22 Pseudo impulse response at R0 calculated by the CIP method ($CFL = 0.92, 2.2$).

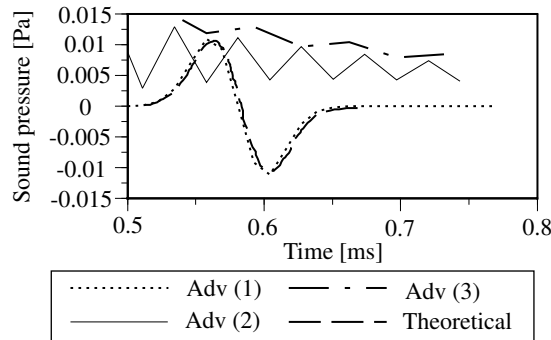


Fig. 4.23 Pseudo impulse response at R0 calculated by the advection method ($CFL = 1, 2, 3$, without interpolation).

さらに境界条件の影響が入ってくるため、精度低下の原因となることが考えられる。

そこで Fig. 4.24 に示す 2次元の $1\text{m} \times 1\text{m}$ の音場を対象にして時間離散化幅 Δt を大きく取った手法を検討した。空間離散化幅は $1/30\text{ m}$ とし、 Δt は FDTD 法で 0.05 ms ($CFL = 0.52$)、CIP 法で 0.05 ms 、 0.15 ms ($CFL = 1.56$)、 0.5 ms ($CFL = 5.2$) で検討した。FDTD 法では、2次元の CFL 条件 $CFL \leq 0.71 \Leftrightarrow \Delta t \leq 0.07\text{ [ms]}$ を満たす範囲でしか計算できない。最小波長10分割と十分小さい空間離散化幅としているため、FDTD 法による解析結果は(少なくとも残響減衰特性は)真値に近いものと思われる。そこで FDTD 法の解析結果を参照解として、それとの比較を行うことで精度を検証した。

まずは、周縁部の吸音率 0.5 相当の場合を検討した。結果を Figs.4.25, 4.26 に示す。FDTD 法と CIP 法で Δt を小さくした際には傾向は一致している。 Δt を大きくすると振幅が小さくなっている。 Δt を 0.15 ms とした場合には残響減衰特性は 0.05 ms のものとほぼ一致している。しかし Δt を 10 倍の 0.5 ms にした場合には、直流成分が残り、減衰が小さくなっている。Fig. 4.27 に $\Delta t = 0.05, 0.5\text{ [ms]}$ の場合の 5 ms 経過後の音圧の空間分布を示す。 Δt を 0.5 ms にしたものは、対称性は保たれているものの中心部の音圧が高く、初期音圧分布として与えたガウス分布の

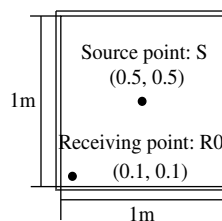


Fig. 4.24 Geometry of a 2D sound field.

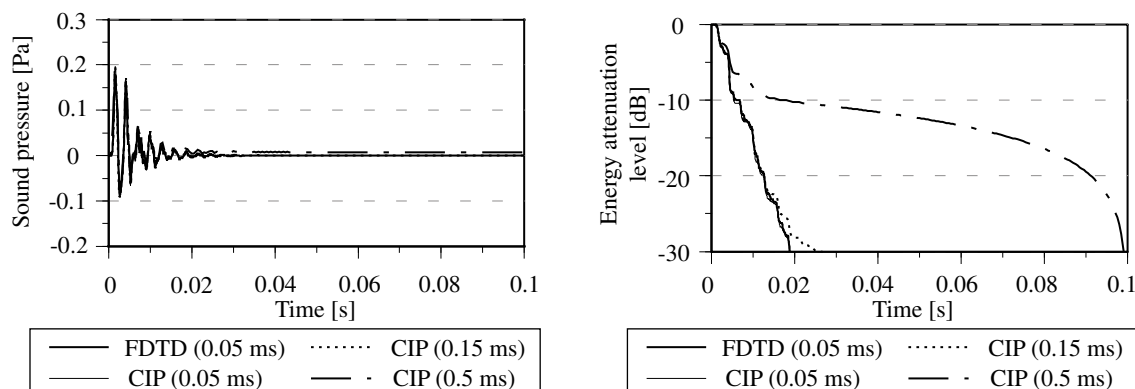


Fig. 4.25 Pseudo impulse responses at R0 Fig. 4.26 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method and the FDTD calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that Δx is 0.033 m.

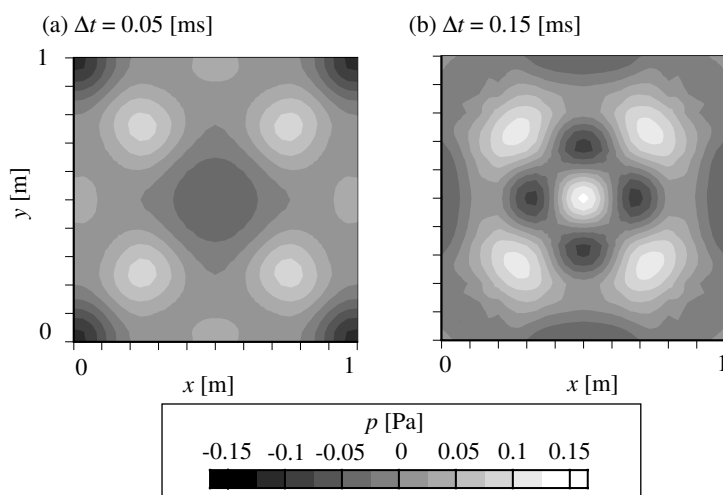


Fig. 4.27 Spatial distribution of p at $t = 5$ ms ($\Delta t = 0.05, 0.15$ ms).

形があまり変化せずそのまま残ることが分かった。これは方向分離の影響であると思われる。

4.3.4 2次元音場 吸音率が低い場合

つぎに吸音率の違いによる減衰特性の変化の影響を検討するため、前節と同様の形状で吸音率を0.1とした場合の検討を行った。結果を Figs. 4.28, 4.29 に示す。こちらは吸音率が大きい場合に比べて減衰が遅いため、減衰が早い場合に比べて時間離散化幅の影響を大きくしたことの影響はあまり見られない。先ほどの吸音率0.1の検討でも解析を打ち切る時間を早くすれば(例えば0.02秒程度)、直流成分の残留による影響を除外できるため、時間離散化幅10倍の場合でもある程度の一致が見られたものと思われる。

4.3.5 3次元音場 吸音率が中程度の場合

以上のように時間離散化幅を大きくする手法は、1次元の場合には精度低下の原因にはならなかったが、2次元音場では方向分離の影響で直流成分が残ることなどが起因して残響減衰特性に著しい変化をもたらすことがあることが分かった。3次元音場で検討を行うため、4.2.3に示した1辺1m

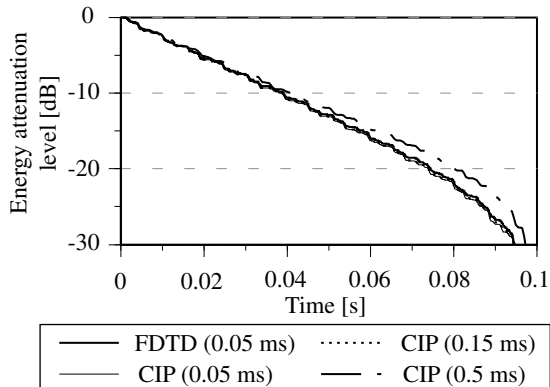
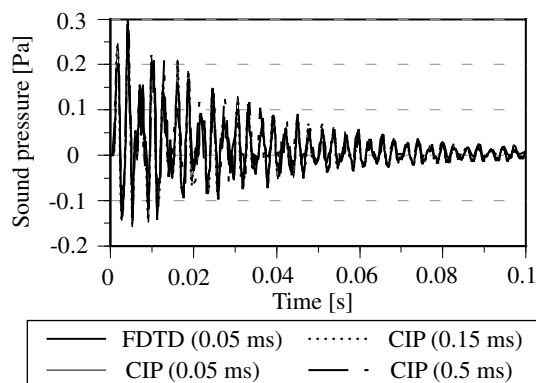


Fig. 4.28 Pseudo impulse responses at R0 Fig. 4.29 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that Δx is 0.033 m.

の立方体形状、音源・受音点で全面吸音率 0.5 とした場合に CFL 条件を超えるような時間幅を取った場合について検討した。空間・時間離散化幅は 2次元の場合と同じである。結果を Figs. 4.30,4.31 に示す。こちらでは 2次元の場合と異なり、 $\Delta t = 0.15$ [ms] の場合に、後期の残響域に振動が残った。そのため 0.01 秒以降の残響減衰特性に著しい変化が表れ、 $\Delta t = 0.5$ [ms] としたものよりも精度が悪かった。ただし $\Delta t = 0.5$ [ms] の場合も -10 dB 減衰までしか一致しておらず、残響時間の観点から評価する必要がある。インパルス応答積分法 (Schroeder 法) により -5 から -35 dB までの減衰曲線の傾きより求めた残響時間を Fig. 4.32 に示す。このように FDTD 法と CIP 法は $\Delta t = 0.05$ [ms] の場合にはよく一致したが、 Δt を大きくした場合には乖離が大きくなっている。

4.3.6 3次元音場 吸音率が低い場合

2次元の場合と同じように残響減衰特性の違いによる影響を把握するため、同様の立方体形状で全面の吸音率を 0.1 とした場合の検討を行った。結果を Figs. 4.33,4.34 に示す。こちらでも減衰が遅いため、減衰過程の早い段階で計算を打ち切ることにより、残留成分の影響を除去できており、吸音率 0.5 の場合よりは精度がよくなっているものと思われる。残響初期の波形を比較すると、時間離散化幅の小さいもののほうが精度がよい。特に $\Delta t = 0.15$ [ms] のものは -20 dB 減衰

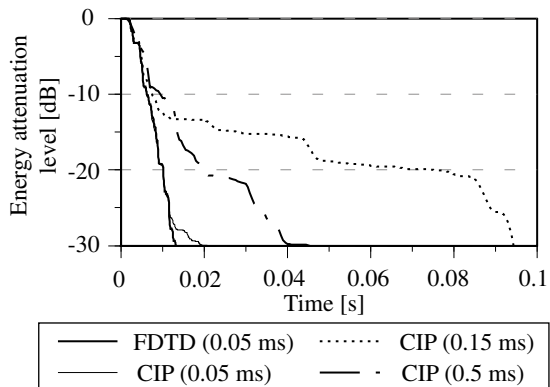
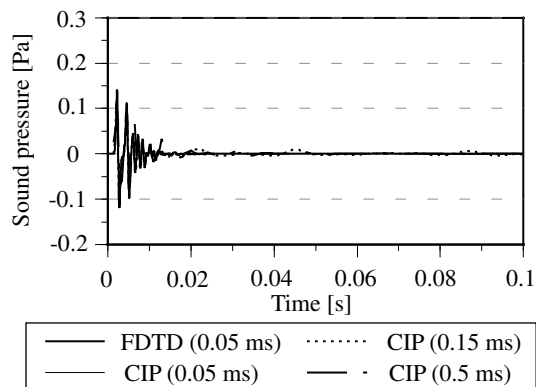


Fig. 4.30 Pseudo impulse responses at R2 Fig. 4.31 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that Δx is 0.033 m.

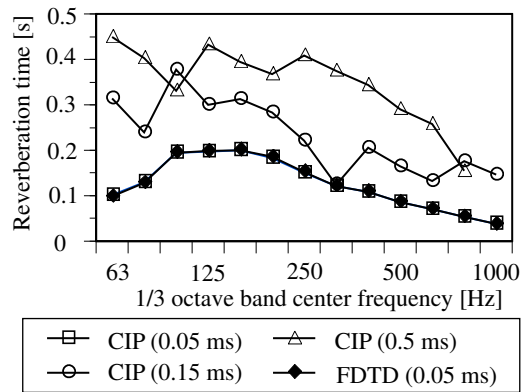


Fig. 4.32 Reverberation time calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that Δx is 0.033 m.

まで FDTD 法や CIP 法の $\Delta t = 0.05$ [ms] の場合とよく一致している。残響時間を Fig. 4.35 に示す。 $\Delta t = 0.05$ [ms] の場合には CIP 法と FDTD 法はよく一致している。しかしながら全周波数域で減衰特性を見た場合には一致しているように見えた $\Delta t = 0.15$ [ms] の場合は残響時間の観点で見ると全く一致していない。 Δt を大きくした場合にはおもに低周波数域で乖離が大きくなっている。

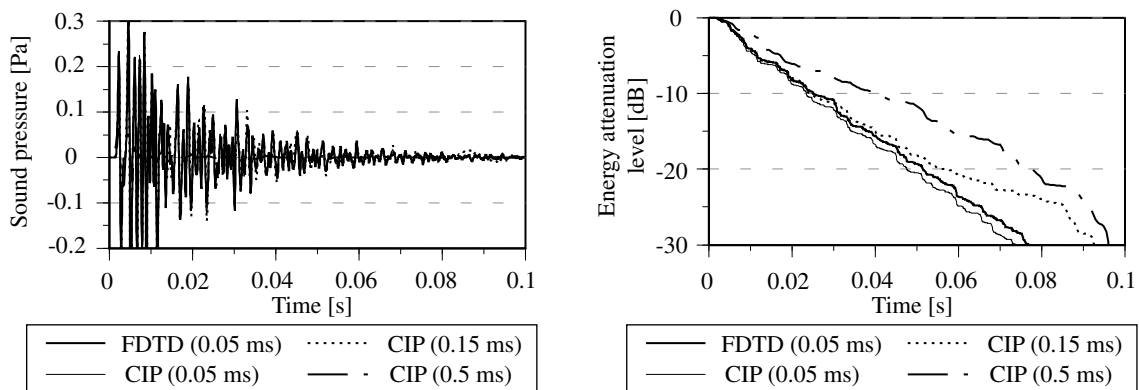


Fig. 4.33 Pseudo impulse responses at R2 Fig. 4.34 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that Δx is 0.033 m.

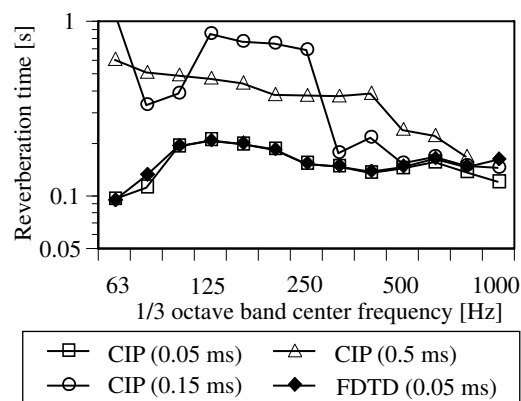


Fig. 4.35 Reverberation time calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that Δx is 0.033 m.

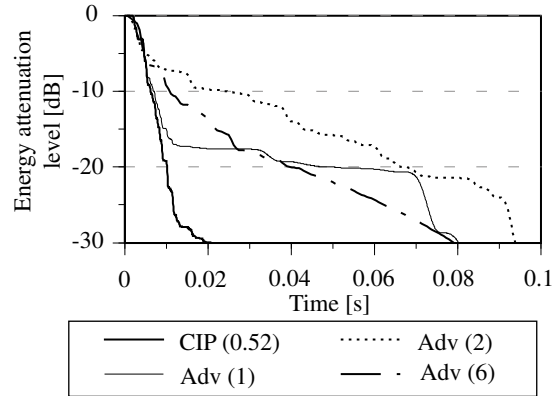
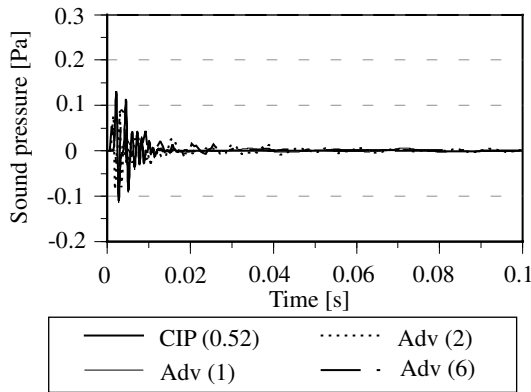


Fig. 4.36 Pseudo impulse responses at R2 Fig. 4.37 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method ($CFL = 0.52$) and the advection method ($CFL = 1, 2, 6$) under condition that Δx is 0.033 m.

4.3.7 3次元音場 (補間を用いない手法) 吸音率が中程度の場合

次に計算時間の高速化が図れる補間を用いない手法の検討を行った。こちらは CFL が整数である必要があるため、それぞれ $\Delta t = 0.15$ [ms] を切り上げた時間離散化幅に対応する $CFL = 2$ ($\Delta t = 0.192$ [ms])、 $\Delta t = 0.5$ [ms] に対応する $CFL = 6$ ($\Delta t = 0.577$ [ms]) としたものである。

まずは吸音率 0.5 の場合である。結果を Figs. 4.36, 4.37 に示す。残響の後期域において振動が残っていることに加えて、音圧波形がつぶれていることをみれば分かる通り、位相もずれている。また $CFL = 1$ の時は 4.2.3 での剛壁室の検討では解析が可能であったが、残響減衰特性で見たときには -20 dB 以降の減衰特性が大きくずれていることが分かる。

4.3.8 3次元音場 (補間を用いない手法) 吸音率が低い場合

吸音率が 0.1 である場合を検討した。結果を Figs. 4.38, 4.39 に示す。こちらも位相のずれが顕著である。また残響中期域においても振動が見られる。こちらは $CFL = 1$ のときは減衰曲線がほ

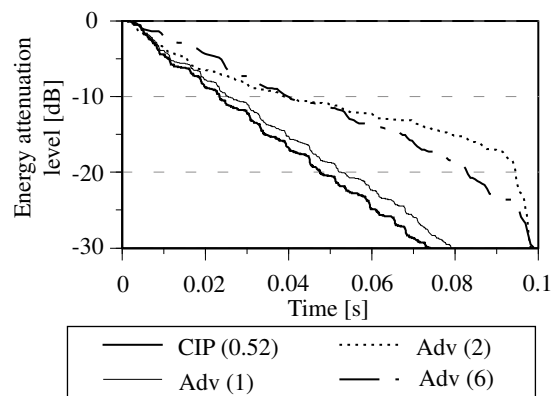
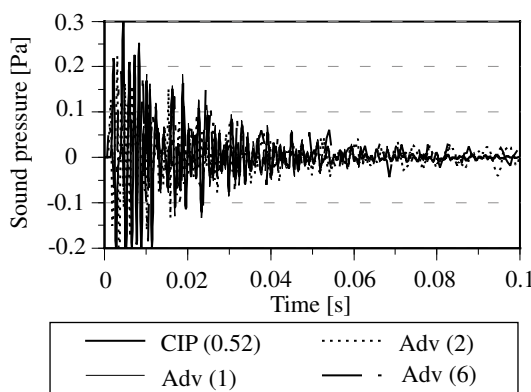


Fig. 4.38 Pseudo impulse responses at R2 Fig. 4.39 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method and the advection method under condition that Δx is 0.033 m.

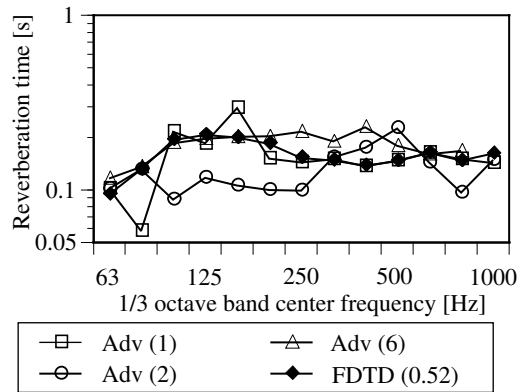


Fig. 4.40 Reverberation time calculated by the advection method (without interpolation, $CFL = 1, 2, 6$) and the FDTD method ($\Delta t = 0.05$ ms) under condition that Δx is 0.033 m.

ば一致している。そこで Fig. 4.40 に示す残響時間で評価を行った。このように $CFL = 2$ の場合を除くと、通常の CIP 法で時間離散化幅を大きくしたものよりは乖離が少ないように思われる。

4.3.9 残響室の解析 吸音率が 0.2 の場合

前節では 1 m^3 の立方体室に関して、 CFL 条件を超えるような時間離散化幅を取った場合について検討を行い、残響時間・波形の崩れの 2 つの観点から CIP 法と FDTD 法の比較を行った。次に現実的な容積を持つ室の残響減衰特性を検討するため、Fig. 4.41 に示す $V = 220 \text{ [m}^3\text{]}$, $S = 227 \text{ [m}^2\text{]}$ 程度の整形残響室を対象に、全面に一律な垂直入射吸音率を 0.2, 0.8 として検討を行った。(解析は吸音率 0.2 から 0.8 まで 4 通り行ったが、同傾向であったため 0.2 と 0.8 のときのみ触れることにする。) 音源は室隅部とした。受音点は R0 (1.5, 1.5, 1.8) とした。ただし座標系は Fig. 4.41 に示す通りとした。空間離散化幅を 0.03 m で変えずに、CIP 法において時間離散化幅を 0.05 ms とその 3 倍の 0.15 ms とした場合の検討を行った。

R0 における 2 つの時間離散化幅の時間波形を Figs. 4.42, 4.43 に示す。 $\Delta t = 0.15 \text{ [ms]}$ にした場合には、波形がドリフトし減衰波形が著しく異なった。時間離散化幅を 0.05 ms にとった場合の R0 の 64 点での短時間フーリエ変換により求めたスペクトログラムを Fig. 4.44 に示す¹。音源がハイパスフィルターになっているため、高周波成分のエネルギーが強いものの、ほぼ均一に減衰していることが分かる。同じく時間離散化幅を 0.15 ms とした場合を Fig. 4.45 に示す。残響初期に

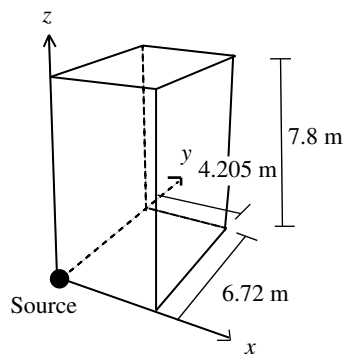


Fig. 4.41 Geometry of a rectangular reverberation room.

¹ wavesurfer 1.8.5 を利用した

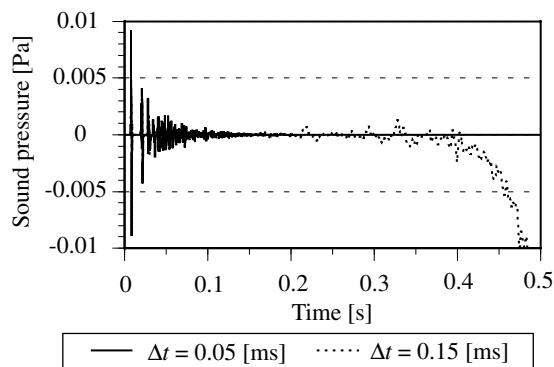


Fig. 4.42 Pseudo impulse responses calculated by the CIP method under condition that Δx is 0.03 m.

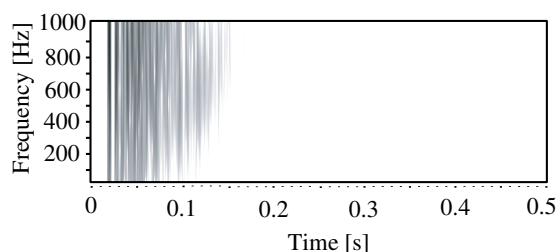


Fig. 4.44 Spectrogram of Impulse Response at R0 ($\Delta t = 0.05$ [ms]).

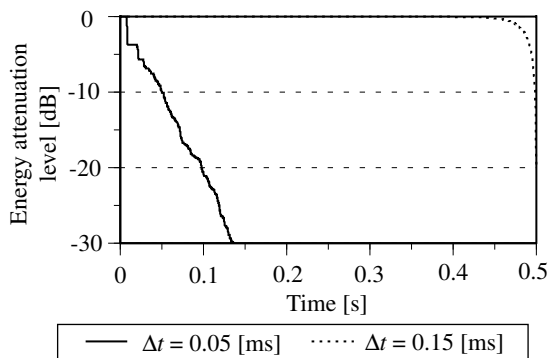


Fig. 4.43 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method under condition that Δx is 0.03 m.

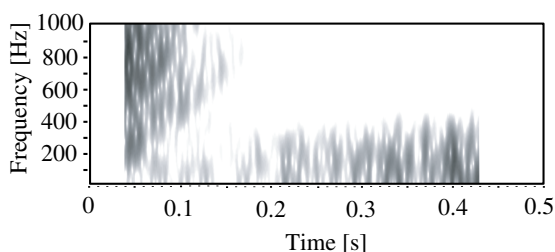


Fig. 4.45 Spectrogram of Impulse Response at R0 ($\Delta t = 0.15$ [ms]).

において高周波成分のエネルギーが大きいことは音源の周波数特性によるもので同じであるが、残響後期において先ほどには見られなかった 400 Hz 以下の低周波数域が残っていることがわかる。

4.3.10 残響室の解析 吸音率が 0.8 の場合

R0 における 2 つの時間離散化幅の時間波形を Figs. 4.46, 4.47 に示す。こちらも残響後期に振動が残り、-5 dB 以降の残響減衰に影響を与えている。時間離散化幅を 0.05 ms にとった場合のスペクトログラムを Fig. 4.48 に示す。ほぼ均一に減衰していることが分かる。同じく時間離散化幅を

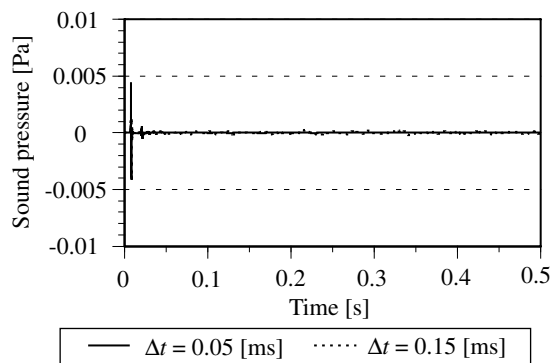


Fig. 4.46 Pseudo impulse responses calculated by the CIP method under condition that Δx is 0.03 m.

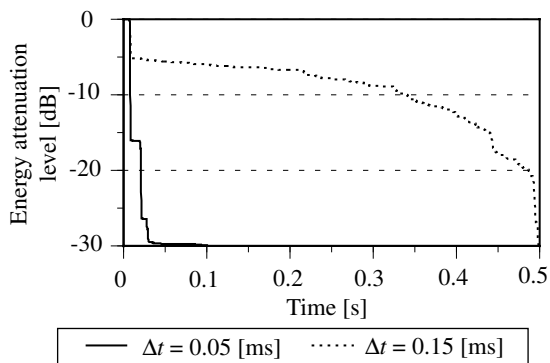
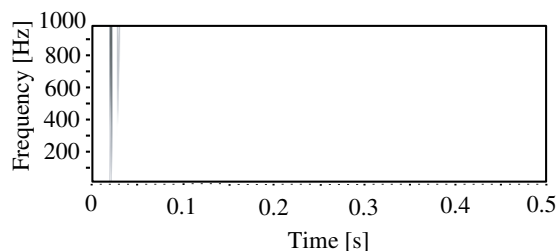
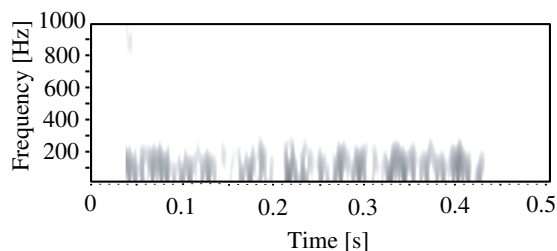


Fig. 4.47 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method under condition that Δx is 0.03 m.

Fig. 4.48 Spectrogram of Impulse Responses at R0 ($\Delta t = 0.05$ [ms]).Fig. 4.49 Spectrogram of Impulse Response at R0 ($\Delta t = 0.15$ [ms]).

0.15 ms に取った場合のスペクトログラムを Fig. 4.49 に示す。200 Hz 以下の低周波数域が残っていることがわかる。

4.4 空間・時間離散化幅を同時に大きくした場合の検討

以上のように時間離散化幅のみを大きくする手法は、残響後期に振動が残り有効でない。そこで CIP 法が空間 3 次精度で一般に用いられる空間 2 次精度の FDTD 法より空間精度が高いことを利用して空間離散化幅を大きくする手法を検討する。CIP 法は高周波数域における数値分散が小さいため、同じ格子を用いても解像度が高いという特長がある。FDTD 法でも計算点を中心に 4 点使うと空間 3 次精度が達成できるものの、多点を用いて高精度化を行うと高周波数域で数値粘性が低くなることによって、数値振動が起こり精度が低下することとなる [72]。よって CIP 法を用いることで FDTD 法の高精度スキームよりも容易に空間離散化幅を大きくできるものと思われる。これによって、CFL 条件の範囲内で時間離散化幅を大きくすることができる。例えば空間離散化幅を 2 倍にすれば、同じ CFL 数でも時間離散化幅を 2 倍にすることができる。時間離散化幅も空間離散化幅とともに大きくすることで、倍率の $1/4$ 乗に比例して計算負荷を減らすことができる。

ここでの検討は前節と同じ 3 次元の立方体室で、空間離散化幅を最小波長 10 分割に対応する 0.033 m から 6.6 分割に対応する 0.05 m、5 分割に対応する 0.066 m まで変化させた。FDTD 法との比較ができるよう 3 次元の CFL 条件 $CFL < 0.58$ を満たす $CFL = 0.52$ に固定し、時間離散化幅も 0.05 ms、0.075 ms、0.1 ms とした。

4.4.1 3 次元音場 (粗い格子) 吸音率が中程度の場合

吸音率を 0.5 としたものである。結果を Figs. 4.50, 4.51 に示す。 $\Delta x = 0.033$ [m] のときは CIP 法と FDTD 法の残響減衰特性はよく一致した。 $\Delta x = 0.05, 0.066$ [m] のときは、CIP 法の解析結果の残響後期に微細な振動が残ったため、-20 dB 以降の残響減衰特性に変化が起こっている。FDTD 法も -25 dB 以降の減衰に変化が起こっているが、CIP 法ほど顕著なものではない。残響時間を Fig. 4.52 に示す。全周波数帯域で見たときには CIP 法の特性が変化していたが、残響時間を T_{30} の意味で評価しても、それぞれよく一致していることが分かる。これはフィルターによって低周波数域の振動が取り除かれたためであると思われる。

次に波形の観点から検討する。CIP 法で $\Delta x = 0.033$ m のときを参照解 p_{ref} として、次式で表される 2 乗誤差を求めた。

$$Error = \frac{\sum_{i=0}^N (p - p_{ref})^2}{\sum_{i=0}^N p_{ref}^2} \quad (4.13)$$

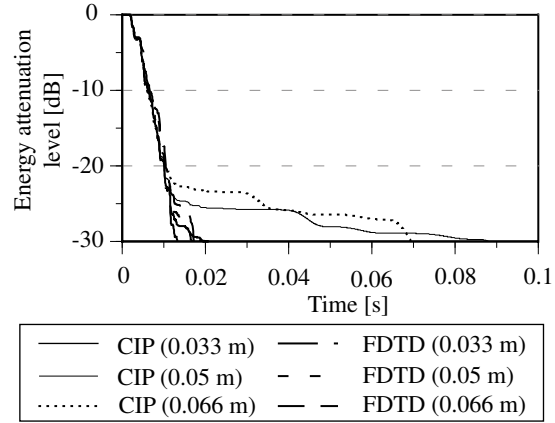
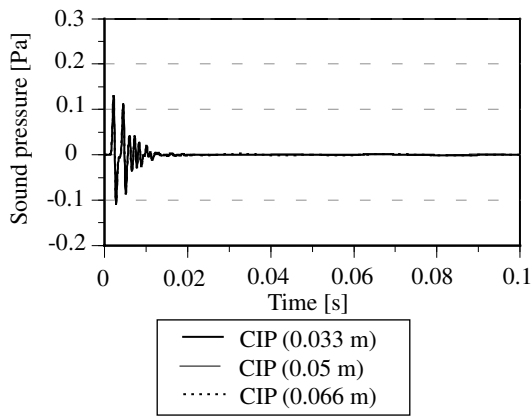


Fig. 4.50 Pseudo impulse responses calculated by the CIP method under condition that CFL is 0.52. Fig. 4.51 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that CFL is 0.52.

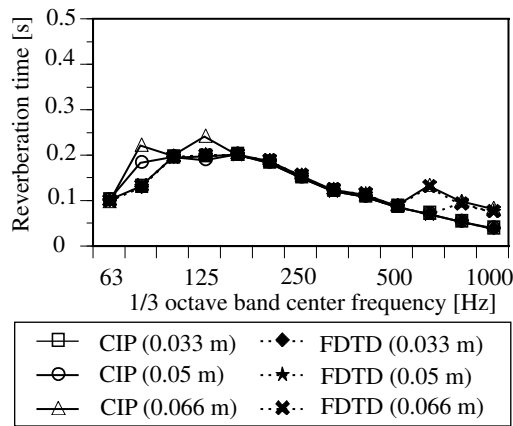


Fig. 4.52 Reverberation time calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that CFL is 0.52.

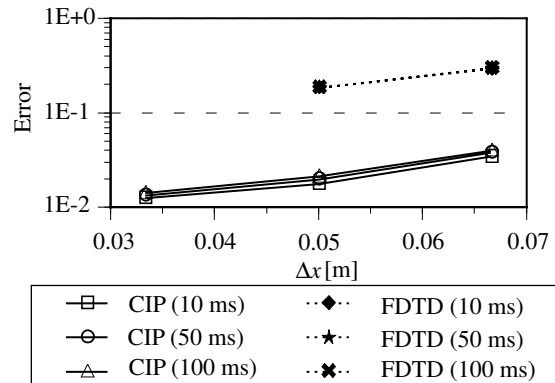
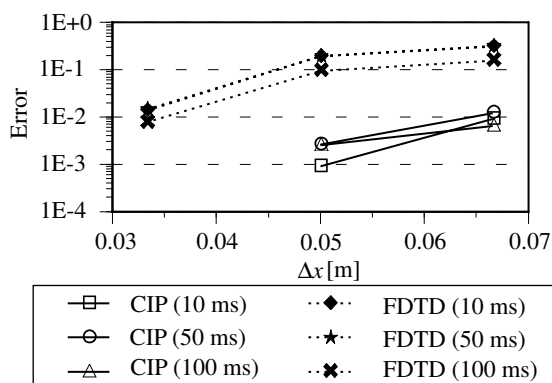


Fig. 4.53 Square errors with Δx and the elapsed time compared to the CIP method ($\Delta x = 0.033$ m). Fig. 4.54 Square errors with Δx and the elapsed time compared to the FDTD method ($\Delta x = 0.033$ m).

すべて $\Delta t = 0.05$ ms でリサンプリングし、0.01 s までの $N = 200$ 点、0.05 s までの $N = 1000$ 点、0.1 s までの $N = 2000$ 点を対象とした。結果を Fig. 4.53 に示す。このように対象とした時間に関わらず、CIP 法の方が空間離散化幅を大きくした場合にも誤差が小さいことがわかる。FDTD 法

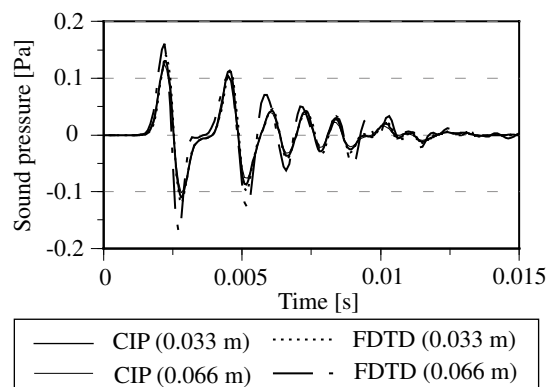


Fig. 4.55 Pseudo impulse responses calculated by the CIP method and the FDTD method.

の $\Delta x = 0.033$ m を参照解とした場合を Fig. 4.54 に示す。このように CIP 法の方が高精度なのは同様であった。Fig. 4.55 に示す初期の波形を見ても、空間離散化幅を大きくすると FDTD 法はオーバーシュート・アンダーシュートが起こっていることがわかる。ただし残響時間の精度はそれほど損なわれない。CIP 法は数値分散性が小さいため空間離散化幅を大きくしたときにも、時間領域での波形を精度よく求めることができる。

4.4.2 3次元音場 (粗い格子) 吸音率が低い場合

同様の検討で吸音率を 0.1 とした。結果を Figs. 4.56, 4.57 に示す。こちらは CIP 法は時間離散化幅を大きくした場合にも残響減衰波形の変化が小さいのに対し、FDTD 法は系統的に変化している。Fig. 4.58 に示す残響時間を見ても、FDTD 法が高周波数域で系統的にずれているのに対し、CIP 法は全域でよく一致していることが分かる。FDTD 法は数値分散の影響で高周波数成分が遅れたため、残響時間が長くなったものと思われる。次に波形の観点から検討する。先ほどと同様に CIP 法で $\Delta x = 0.033$ m のときを参照解 p_{ref} として、2 乗誤差を求めた。結果を Fig. 4.59 に示す。こちらも対象とした時間に関わらず、CIP 法の方が空間離散化幅を大きくした場合にも誤差が小さいことがわかる。FDTD 法の $\Delta x = 0.033$ m を参照解とした場合にも同様であった。

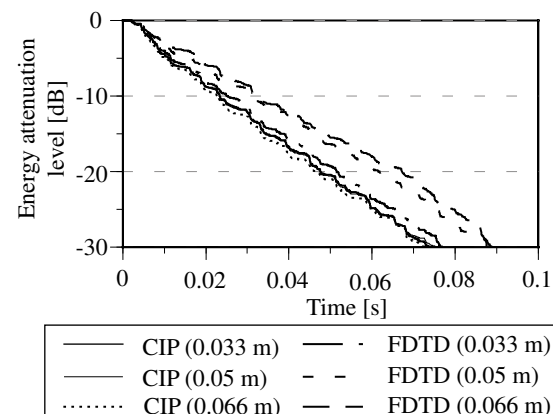
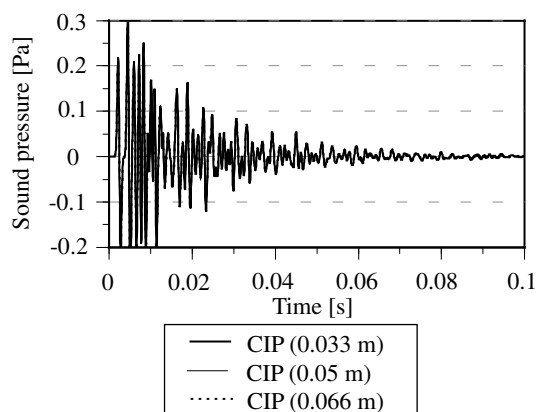


Fig. 4.56 Pseudo impulse responses calculated by the CIP method under condition that CFL is 0.52.

Fig. 4.57 Energy attenuation decay curves calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that CFL is 0.52.

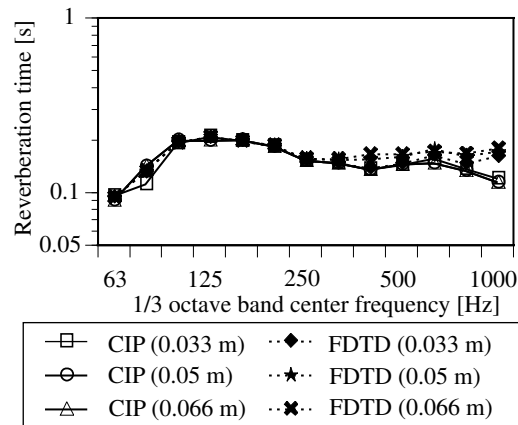


Fig. 4.58 Reverberation time calculated by the CIP method and the FDTD method under condition that CFL is 0.52.

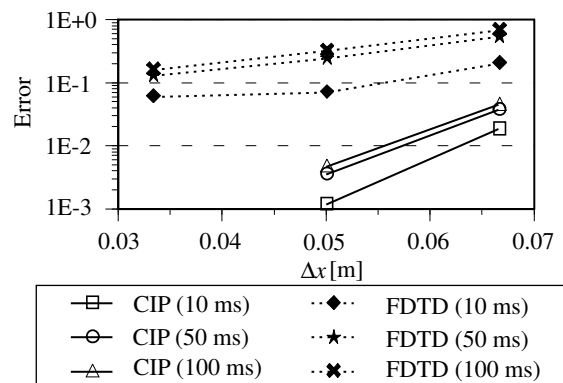


Fig. 4.59 Square errors with Δx and the elapsed time.

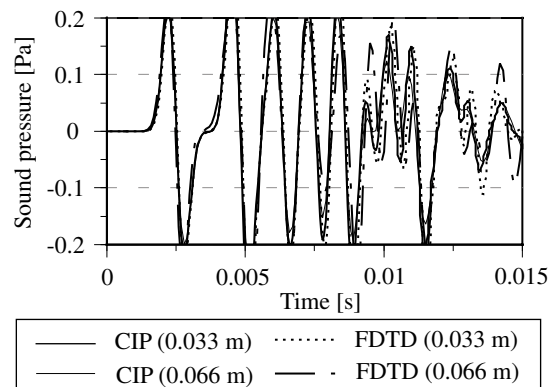


Fig. 4.60 Pseudo impulse responses calculated by the CIP method and the FDTD method.

初期の波形を Fig. 4.60 に示す。CIP 法の 2 つはよく一致しているのに対し、FDTD 法は時間の経過とともにオーバーシュートが起こっている。

4.5 まとめ

$CFL < 1$ での検討

CIP法を室内音場解析に適用し、理論解がある1次元音場や3次元の剛壁室での誤差の検討により、FDTD法に比べて高周波数域まで正確に解析できることが分かった。また直交方向の微分を工夫したスキームを用いることで、通常のM型CIP法に比べて精度を向上させることができたことがわかった。空間・時間離散化幅を同時に変化させた手法により、空間離散化幅を大きくしてもCIP法は精度の低下が小さいこと、同時に時間離散化幅も大きく取った方が精度が向上することが示された。時間離散化幅に関しては、 $CFL < 1$ であればなるべく大きくしたほうが精度が向上することが球面波伝搬問題の検討で示され、補間の誤差が少なくなることから合理的な結果である。ただし方向分離手法を用いる上での条件は時間離散化幅が十分小さいことであつたので、剛壁室の解析例のように $CFL = 0.78$ であるのにも関わらず発散する事例も見られた。

$CFL > 1$ での検討

CIP法の特長の一つである時間離散化幅をCFL条件を超えて大きくする手法を検討した。1次元の場合には時間離散化幅を大きくしても精度の低下は起こらなかったが、多次元の場合には方向分離の影響で精度の低下を招き、特に補間を用いない手法において顕著であることが分かった。流体力学分野での既往研究[12]では時間離散化幅を大きくしても精度が落ちないといわれているが、同文献で扱われているのが定常問題であるためと考えられる。ただし同文献においても「 $CFL = 10$ で安定して計算できることは分かったが、Directional splittingの影響が円柱周りにでてしまい、滑らかな流体の流れを再現するに至らなかった。」と書かれている。移流速度が速く、振幅が大きく変化する時間領域の音場解析においては、方向分離の影響や保存則を満足しないことの影響が顕著に表れ、特に残響後期の振動が減衰曲線の形に大きく影響してくるため、時間離散化幅を大きくすることはできなかった。

空間・時間離散化幅を同時に大きくする手法

CIP法は空間精度が高く、数値分散性の影響を受けにくい手法のため空間・時間離散化幅を同時に大きくした際にも、波形の観点から見ればFDTD法より相当高精度であつた。ただしFDTD法も波形は崩れるものの、残響時間の観点から見ると保存則を満足することもあつて誤差は少なかった。FDTD法の空間離散化幅の基準である波長10分割が残響時間を求めるだけの目的からしても妥当であるのかに関する検討が必要である。

計算効率

時間離散化幅のみを大きくする手法と、空間・時間離散化幅を同時に大きくする手法の計算効率を比較する。Table 4.1に両手法の計算効率のまとめを行った。CIP coarseの左側は空間離散化幅を1.5倍にしたもの、右側は2倍にしたものである。Advection methodとは補間を用いない手法のことである。すべてFDTD法の計算時間で基準化した計算時間を示している。CIP法はFDTD法と比べて、2次元の場合4, 5倍程度の負荷、3次元の場合10倍以上の負荷となっており、その負荷は決して軽くはない。CIP法は2次元の場合にはFDTD法の3倍の変数の数であるのに対して、3次元の場合には6倍の変数の数であり、それぞれループをまわすことになるため等倍ではなく次元の増加とともに飛躍的に計算時間が増加する。しかしながらFig. 4.53などから分か

Table 4.1 Comparison about computational load.

Method		CIP			CIP coarse		Advection method			FDTD
CFL no.		0.52	1.56	5.2	0.52	0.52	1	2	6	0.52
2D	$\alpha = 0.1$	4.3	1.7	0.61	-	-	-	-	-	1
	$\alpha = 0.5$	4.7	1.7	0.67	-	-	-	-	-	1
3D	$\alpha = 0.1$	14	5.1	2.0	2.7	0.85	1.1	0.70	0.30	1
	$\alpha = 0.5$	13	4.7	1.9	2.4	0.8	1.0	0.68	0.30	1

るように、空間離散化幅を2倍にしても波形の誤差がFDTD法より小さいことが示されているため、空間・時間離散化幅を2倍にすることで20%程度の計算時間短縮の可能性がある。

時間離散化幅を大きくすることで計算時間の短縮は可能であるが、多次元問題の場合には直流成分が残ったり、振動が起こったりするためあまり有効な手法ではなかった。しかしながら残響初期の特性はおおむね一致していたため、減衰の少ない問題、例えば騒音伝搬問題に対しては用いることができる可能性がある。より詳細な検討が必要ではあるが、粗い格子を用いるほうが、空間離散化幅の4乗に比例して計算時間を短縮することができるため、精度・計算時間の両面で有利であると思われる。球面波伝搬問題や剛壁室の解析では精度が高かった補間を用いない方法はFDTD法程度の計算負荷で計算できるため有利であるが、減衰系での音場解析においては位相誤差が大きく入ってくるのが分かった。

今後の課題

今後の課題としては保存則を満足するスキームを導入することで、残響後期の振動が解消できるかを検討することにある。保存則を満足するスキームには4次多項式を用いて流束・物理量・微分値を考慮するスキームと3次多項式を用いて流束と物理量を考慮するスキームの2種類があるが、前者は記憶量・計算負荷ともに大きくなるという欠点があり、後者は節点において C_1 連続性を満足しなくなるという欠点がある。これらがどのように影響するかを詳細に検討する必要がある。ただし方向分離の影響があるため保存則を満足するように改善するだけで十分であるかは不明である。文献[12]には、斜め45度方向に関しても方向分離手法で解き、両者の計算結果を時間ステップごとに考慮していくというやり方が提案されている。

第5章 任意形状への対応のためのCIVA法の導入

5.1 概要

直交格子を基本とするFDTD法を用いてホールなど直交格子になじまない複雑な形状を解析するためには、2.5.2で述べた階段近似が用いられる。これは有限要素法(FEM)や境界要素法(BEM)の解析が、任意形状に対応する3角形/4面体などのランダムな要素を基本としているのと大きく異なる点であり、FDTD法による汎用解析ソフトウェアの開発を遅らせている一因となっている。この問題に対する提案として、大嶋らによって汎用プリ・ポストプロセッサを用いた有限体積法(FVM)の音響問題への適用[101–103]が試みられているが、境界条件の設定、直交格子補正の問題、計算時間・記憶容量の点で試行段階である。

CIP法は、移流元の点の値をその周りの点から内挿し移流させる手法であるため、原理的には座標系によらない手法である。すなわちCIP補間が直交座標ではなく、任意の座標系において可能であればよい。そこでこの章では、CIP法を局所的な座標変換によって、3角形/4面体要素を用いることができるように拡張したCIVA法を音響問題に導入し、複雑形状へ対応することを目的とする。

5.2 メッシュフリー型スキームについて

FEM,BEM,FVMといった領域を分割にする手法とは異なる手法として、格子を用いないメッシュフリー型のスキームが近年注目されており、複雑形状への対応として非常に有望である。その代表格が粒子法とグリッドレス法[124]である[159]6章。粒子法に関して、ここで簡単にまとめておく。粒子法とは、流体をミクロな複数の粒子の集まりとしてそれらの相互作用を計算することで、マクロな流れをシミュレーションする手法である。歴史が古い手法であり、Los Alamos国立研究所での計算流体力学の研究開始とともに考え方は提案されているが、計算機パワーの足りなかった当時は粒子数の不足により期待された精度が出せなかったようである。本論文の「はじめに」で触れた幾何音響シミュレーションも音線法を用いる場合粒子法の一つであるといえよう。

FDMやFVMは流れに乗らない固定した座標系で流れを見るオイラー式記述法(Eulerian description)であるのに対し、粒子法は流れとともに移動して固定した座標系を持たないラグランジュ式記述(Lagrangian description)によっている。CIP法はもともと粒子法(Particle method)であるPIC法(Particles-in-Cell法)¹[119]の研究から発展した手法であるので、粒子法の分野に属する手法である。

一方、グリッドレス法はオイラー式記述法によるものである。これは初期状態に計算点を計算領域内にちりばめる。この際計算点間の隣接関係を与えず、近傍の物理量分布を以下の1次式で

¹ 移流項に粒子法、その他の項は格子で計算する手法であり、物理量を粒子から格子、格子から粒子へとタイムステップごとに内挿を行う必要がある。これに低次の補間を用いていたため、粒子数を多くしても精度が出にくく、初期条件としてシャープな空間分布を用いると数値拡散によってすぐに分散してしまうという欠点を持っていた。

近似する。

$$\phi = a_0 + a_1x + a_2y \quad (5.1)$$

近傍の計算点における残差の2乗に、距離に関する重み関数を掛けたものの合計を取る。これを最小2乗近似することで未定係数 a_0, a_1, a_2 を求める。すなわち計算点からの距離を考慮して、近傍の計算点の残差を最小にするような関数を1次式で近似する。重み関数としては、例えば閾値を \bar{r} として以下のようなものを用いる。

$$w(r_i) = \begin{cases} 1 & (r_i \leq \bar{r}) \\ \bar{r}/r_i & (\bar{r} < r_i) \end{cases} \quad (5.2)$$

この方法の問題点は物理量分布に対して低次の補間を行っているため誤差が発生しやすいこと、与える関数を高次になると数値振動が発生し単純に高精度化が実現できないこと、中心差分的手法であるため安定性に問題があることが挙げられている。

CIP法はPIC法の反省から格子の概念を用いず、すべてを粒子法の考えの下に計算を進める。グリッドレス法の考え方とCIP法の考え方を併用するものが、A型CIP法[3]や田中によって提案されたCIVA(Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates)法[7]であり、任意形状の問題への対応という点で非常に魅力的な手法である。本章では1次元のゆがんだ格子を持つ空間に直接CIP法が適用可能であることを示した後で、A型CIP法の問題点を述べ、それを解決するCIVA法を音響問題に適用する。

5.3 不等間隔格子で分割された1次元空間へのCIP法の適用

1次元問題で不等間隔格子を用いた場合のCIP法について検討する。この場合

- (1) 直接不等間隔格子を持つ空間にCIP法を適用する
- (2) 不等間隔格子を持つ空間を座標変換によって直交格子の空間に直して解く

方法の2種類が考えられる。後者の座標変換による方法では移流方程式 $\partial f/\partial t + c\partial f/\partial x = 0$ を以下のように変形する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \quad (5.3)$$

ここで $U = c/(dx/d\xi)$ は反変速度を表す。このような表式では速度が空間分布を持つことになり、上流点 $\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}$ を高精度に予測するのが難しくなる。ここで \mathbf{r} は移流先の座標、 $\Delta\mathbf{r}$ は移流距離である。物理空間の移流距離 $\Delta\mathbf{r}$ は、計算空間の移流距離 $\Delta\xi$ とヤコビアン行列 J を用いて $\Delta\mathbf{r} = [J]\Delta\xi$ の関係にある。

さらに ξ 方向に微分した微分値の移流方程式は

$$\frac{\partial(\partial_\xi f)}{\partial t} + U \frac{\partial(\partial_\xi f)}{\partial \xi} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \partial_\xi f \quad (5.4)$$

のようになり非移流項が出てくるので、これを正しく評価しないと精度を落とす原因となる。この手法の誤差評価が文献[20] pp. 200-202に載せられており、格子の変化率が0.5で空間2次精度以下にまで落ちてしまっている。また境界条件を課するのが難しくなることを考えると[66]この手法のメリットはほとんどなく、直接不等間隔格子を持つ空間にCIP法を適用する手法が有望である。直接不等間隔格子を持つ空間にCIP法を適用するためには定式化自体に変わりはなく、上流点を見つけてきて近傍の2点の格子から3次多項式により補間を行い、その物理量を移流させるだけである。

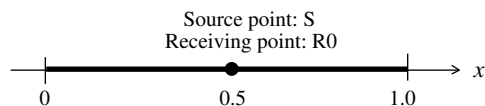


Fig. 5.1 Geometry of 1D sound field.

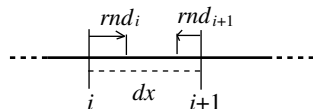


Fig. 5.2 How to generate 1D nonuniform meshes.

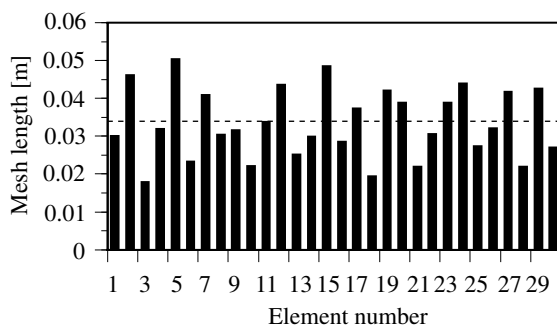


Fig. 5.3 The meshlength of 1D sound field.

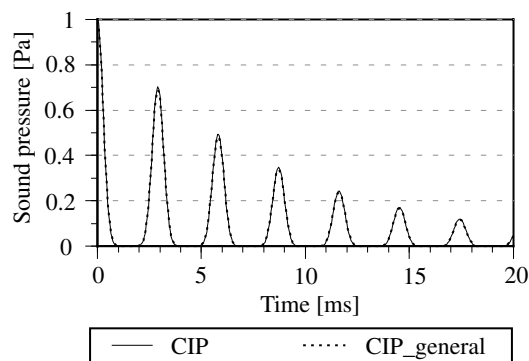


Fig. 5.4 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method using uniform and nonuniform meshes.

Fig. 5.1 に示す 1 次元音場問題で不等間隔格子で分割された空間に直接 CIP 法を適用した。両端の吸音率は 0.5 を与えた。Fig. 5.2 に示すように、30 分割の点を基本点として $-0.1 \leq rnd < 0.1$ (1/3 要素幅程度) の範囲の乱数 rnd を基本点からずらすという手法で不等間隔格子を生成した。すなわち i 番目のメッシュ端点の座標は $(i * dx + rnd_i), ((i + 1) * dx + rnd_{i+1})$ で与えられる。メッシュ長を Fig. 5.3 に示す。メッシュの平均長さは 1/30 m である。均一格子と比較した結果を Fig. 5.4 に示す。図中 CIP 法が均一格子、CIP_general が不等間隔格子のものである。グラフで見るとほぼその差異が分からないほどであり、メッシュ長が 2 倍以上異なる格子が混在する中で CIP 法が精度を保っていることが分かる。

5.4 ソロバン格子と A 型 CIP 法, B 型 CIP 法

1 次元問題で不等間隔格子に直接 CIP 法を適用する手法の有用性を確認したため、多次元化を考える。CIP 法を 2 次元問題に適用する際に、Fig. 5.5 に示す「ソロバン格子」と呼ばれる特殊な格子を用いることが提案されている [18]。これは一方向に垂直な軸を持ち、その中を自由に格

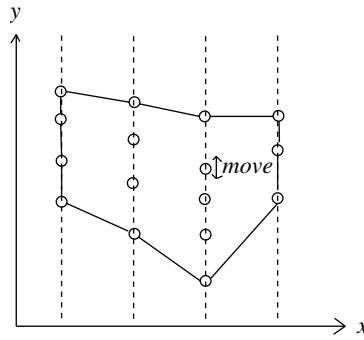


Fig. 5.5 Soroban grid.

子点が動くものである。この格子は図のように一般の形状に対応でき、方向分離手法がそのまま使えるので計算負荷も小さく簡単で有望な手法である。しかしながら空間分割のプリプロセス部分が相当面倒であり、任意の要素に対応することによるプリ・ポストプロセスの簡略化・汎用化を行うことはできない。

そこで本論文では3次多項式を多次元空間に張る手法を採用することにする。3次多項式補間を単純に2次元に拡張した場合、対象となる完全多項式が

$$f(x, y) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5y + a_6y^2 + a_7y^3 + a_8xy + a_9x^2y + a_{10}xy^2 \quad (5.5)$$

となり、未知数が係数の a_1 から a_{10} の10個である。これに対して、既知数が2次元で基本となる3角形要素を用いた場合、CIP法では物理量とその x, y 方向微分が各頂点に規定されているため9個しかないというところに問題がある。よって既知数を1つ増やすか、未知数を1つ減らすかしか方法はない。前者の既知数を増やすアプローチがA型CIP法やB型CIP法であり、後者の未知数を1つ減らすアプローチが次節以降に述べるCIVA法である。

A型CIP法は既知数を1つ増やすため、対角線上の最も遠い点 $(i+1, j+1)$ の物理量を加えている。ただしその点で微分の連続性を満たしていないため、 $c\Delta t/\Delta x < 0.5$ を満足するような時間ステップでしか正確でない。これは3次元のFDTD法より厳しい制限で、任意形状に対応する上で大きな欠点となる。これを解決する手法として青木らによってB型CIP法が提案された[5]。これは未知数と既知数を両方増やして4角形要素に対応するもので、まず補間関数に xy^3, x^3y の2項加えて未知数を12個にする。さらに対角線上の最も遠い点 $(i+1, j+1)$ でも $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ の微分も既知数として用いることでその点でも微分を連続にした以下の関数を内挿に用いる。

$$f(x, y) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5y + a_6y^2 + a_7y^3 + a_8xy + a_9x^2y + a_{10}xy^2 + a_{11}xy^3 + a_{12}x^3y \quad (5.6)$$

ただし境界条件の設定が面倒になることが考えられる。また積分平均値をこれに加え非構造格子に有限体積法を適用した手法も提案されている[27]。3次元の場合にも完全多項式は

$$f(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5y + a_6y^2 + a_7y^3 + a_8z + a_9z^2 + a_{10}z^3 + a_{11}xy + a_{12}xz + a_{13}yz + a_{14}xyz + a_{15}xy^2 + a_{16}xz^2 + a_{17}x^2y + a_{18}x^2z + a_{19}yz^2 + a_{20}y^2z \quad (5.7)$$

で20個未知数があるのにも関わらず、4面体要素では16個の既知数しかないため同様の問題が起こる。

5.5 CIVA 法の定式化

前節で3次多項式補間を2次元に拡張した場合に起こる問題点について整理した。B型CIP法はA型CIP法の欠点がある程度解決したが、内挿関数が複雑で毎回係数に関する連立方程式を解く必要があり、境界条件を課するのが面倒という欠点がある。ここで3次関数を調整すること、すなわち項数を減らすことで未知数を減らすことを考える。ただし単純に項数を減らすと、以下のような問題点を生じる [7],[158] p. 23。

- (1) 関数の対称性が崩れる
- (2) 係数に関する連立一次方程式を解く必要があり、計算時間がかかる
- (3) 三角形の形状により (2) の方程式が特異となる

特に (3) が問題である。見かけ上の対称性を保つためには $a_9 = a_{10}$ などとすることになるがこの場合三角形の2辺が x 軸、 y 軸と平行になっている場合に特異になる。

ところで単体 (Simplex) 要素 (2次元で3角形要素、3次元で4面体要素) とそこから導かれる自然座標 (面積座標・体積座標)(cf. [157] p. 128, pp. 134-136) を用いることで、3次多項式を調整し未知数を減らし、節点の関数値と微係数が連続な補間関数を系統的に求めることができる。これが、田中によって提案された CIVA 法 (Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates 法)[7] である。ただしこの手法は補間関数が不完全3次多項式になっているため計算点間の接線方向には連続であるが法線方向には連続でなく、移流問題の上流化に応用すると、空間2次精度になってしまうという点が指摘されている [17]。同じ文献 [17] で、法線方向に連続にする手法が検討されているがひとまず、本論文では基礎的な CIVA 法を音響問題に適用して精度の確認を行なうことにする。

5.5.1 2次元 3角形要素

面積座標を用いて2次元3次の内挿関数を求める。3角形の面積座標は

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{S_1}{S}, \frac{S_2}{S}, \frac{S_3}{S} \right) \quad (5.8)$$

で表され、形状関数に一致する。ただし S は3角形の面積であり、 S_1 から S_3 は Fig. 5.6 のように取る。面積座標は $S_1 + S_2 + S_3 = S$ より $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ の関係があり、 (x, y) 座標との間に1対1の対応関係

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

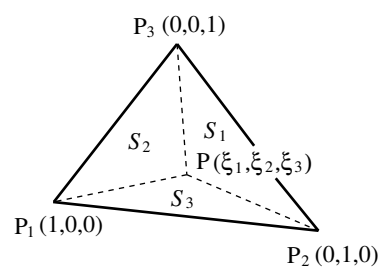


Fig. 5.6 Area coordinates.

が成立する。このとき、3次補間関数は

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \xi_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} [\xi_j^2 \xi_k + c \xi_1 \xi_2 \xi_3] \quad (5.10)$$

で与えられる。ここで d は1次補間関数の調整パラメーターで

$$d = \begin{cases} 0 & \text{1次補間} \\ 1 & \text{3次補間} \end{cases} \quad (5.11)$$

である。このような階層的で C_0 連続な形状関数は、Peano によって提唱された方法によって求めることができる [120]。 $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ は節点の値によって規定することのできない純粋な内部モードを表す関数であるため単独では用いられず、他の関数に付加的に用いられる [158] p.24。完全多項式にするためには10個の未知数が必要であるが、 α_i, β_{jk} の9つの変数に加えて、パラメータ c が10番目の変数となる。そのため節点を持つ値からパラメータ c の値を決定することはできず、別の方法により与える必要がある。パラメータ c の決定方法としては、補間する要素に含まれない節点の情報を条件として用いたり、最小自乗法を用いる方法などがあるが、構造解析の分野でよく用いられる定曲率条件を用いると全ての要素において $c = 0.5$ とすることができる。 $c < 0.5$ とした場合は $c = 0.5$ とした場合に比べ数値粘性が加わることになる [19]。

いまヤコビアン J を

$$J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (5.12)$$

とおく。例えば

$$\xi_1 = \frac{1}{J} \{ (x_2 - x)(y_3 - y) - (x_3 - x)(y_2 - y) \} \quad (5.13)$$

であり、

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 & x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

とかけることから、偏微分作用素はチェーンルール

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad (5.15)$$

の関係を利用して、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

と表される。よって α_i と β_{jk} は

$$\alpha_i = f_i \quad (5.17)$$

$$\beta_{jk} = f_j - f_k + (x_k - x_j) \frac{\partial}{\partial x} f_j + (y_k - y_j) \frac{\partial}{\partial y} f_j \quad (5.18)$$

となる。また

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f &= \frac{y_2 - y_3}{J} \{ \alpha_1 + d(2\beta_{12}\xi_1\xi_2 + 2\beta_{13}\xi_1\xi_3 + \beta_{21}\xi_2^2 + \beta_{31}\xi_3^2) + d\text{csum}\xi_2\xi_3 \} \\ &+ \frac{y_3 - y_1}{J} \{ \alpha_2 + d(\beta_{12}\xi_1^2 + 2\beta_{21}\xi_2\xi_1 + 2\beta_{23}\xi_2\xi_3 + \beta_{32}\xi_3^2) + d\text{csum}\xi_1\xi_3 \} \\ &+ \frac{y_1 - y_2}{J} \{ \alpha_3 + d(\beta_{13}\xi_1^2 + \beta_{23}\xi_2^2 + 2\beta_{31}\xi_3\xi_1 + 2\beta_{32}\xi_3\xi_2) + d\text{csum}\xi_1\xi_2 \} \end{aligned} \quad (5.19)$$

などから微分値を求める。ここで

$$sum = \beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{21} + \beta_{23} + \beta_{31} + \beta_{32} \quad (5.20)$$

とおいた。

5.5.2 3次元 4面体要素

3次元の場合は体積座標を用いる。4面体の体積座標は

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \left(\frac{V_1}{V}, \frac{V_2}{V}, \frac{V_3}{V}, \frac{V_4}{V} \right) \quad (5.21)$$

で表される。ただし V は4面体の体積であり、 V_1 から V_4 は Fig. 5.7 のように取る。体積座標は $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1$ の関係があり、 (x, y, z) 座標との間に1対1の対応関係

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

が成立する。このとき、3次補間関数は

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i \xi_i \\ &+ d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^4 \beta_{jk} \left[\xi_j^2 \xi_k + c(\xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_2 \xi_3 \xi_4 + \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \xi_1 \xi_3 \xi_4) \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

で与えられる。パラメータ d, c に関しては2次元3角形要素の場合と同様である。

ヤコビアン J を

$$\begin{aligned} J &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)(z_4 - z_3) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)(z_4 - z_2) \\ &+ (x_1 y_4 - x_4 y_1)(z_3 - z_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)(z_4 - z_1) \\ &+ (x_4 y_2 - x_2 y_4)(z_3 - z_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3)(z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (5.24)$$

とおくと、2次元の場合と同様にして

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_4} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

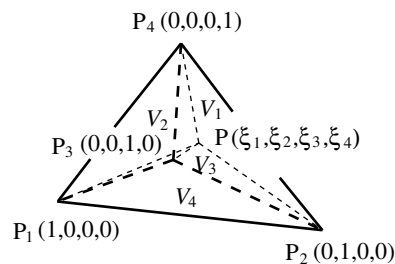


Fig. 5.7 Volume coordinates.

と表される。ただし、

$$a_{11} = -y_2(z_3 - z_4) + y_3(z_2 - z_4) - y_4(z_2 - z_3) \quad (5.26)$$

$$a_{12} = y_1(z_3 - z_4) - y_3(z_1 - z_4) + y_4(z_1 - z_3) \quad (5.27)$$

$$a_{13} = -y_1(z_2 - z_4) + y_2(z_1 - z_4) - y_4(z_1 - z_2) \quad (5.28)$$

$$a_{14} = y_1(z_2 - z_3) - y_2(z_1 - z_3) + y_3(z_1 - z_2) \quad (5.29)$$

$$a_{21} = x_2(z_3 - z_4) - x_3(z_2 - z_4) + x_4(z_2 - z_3) \quad (5.30)$$

$$a_{22} = -x_1(z_3 - z_4) + x_3(z_1 - z_4) - x_4(z_1 - z_3) \quad (5.31)$$

$$a_{23} = x_1(z_2 - z_4) - x_2(z_1 - z_4) + x_4(z_1 - z_2) \quad (5.32)$$

$$a_{24} = -x_1(z_2 - z_3) + x_2(z_1 - z_3) - x_3(z_1 - z_2) \quad (5.33)$$

$$a_{31} = -x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_2 - y_4) - x_4(y_2 - y_3) \quad (5.34)$$

$$a_{32} = x_1(y_3 - y_4) - x_3(y_1 - y_4) + x_4(y_1 - y_3) \quad (5.35)$$

$$a_{33} = -x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_1 - y_4) - x_4(y_1 - y_2) \quad (5.36)$$

$$a_{34} = x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) \quad (5.37)$$

である。 α_i と β_{jk} は

$$\alpha_i = f_i \quad (5.38)$$

$$\beta_{jk} = f_j - f_k + (x_k - x_j) \frac{\partial}{\partial x} f_j + (y_k - y_j) \frac{\partial}{\partial y} f_j + (z_k - z_j) \frac{\partial}{\partial z} f_j \quad (5.39)$$

と表される。また

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \alpha_i + d \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \left(2\beta_{ij} \xi_i \xi_j + \beta_{ji} L_j^2 \right) + dcsum \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \sum_{\substack{k>j \\ k \neq i}}^4 \xi_j \xi_k \quad (5.40)$$

により微分値を求める。ここで

$$sum = \sum_{j=1}^4 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^4 \beta_j \beta_k \quad (5.41)$$

とおいた。ゆえに微分値は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^4 a_{1i} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \quad (5.42)$$

のようになる。

5.6 CIVA 法の音響問題への適用

CIVA 法は多次元の移流方程式にも対応できるが、前述の通り非移流項の扱いが難しいため方向分離手法を用いることにする。すなわち Fig. 5.8 に示すように x 方向への移流を行う。同様に y, z 方向への移流を行うことにする。

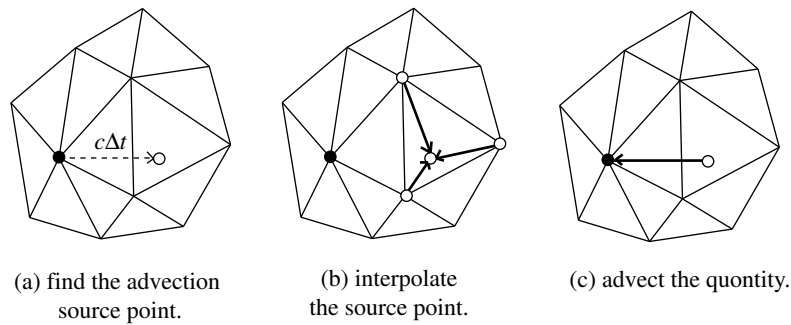


Fig. 5.8 The procedure of the CIVA method.

5.6.1 2次元音場

精度の検証のため1次元音場での検討同様に、 $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ の正方形音場で Fig. 5.9 に示すような不均一な3角形要素を用いて検討を行った。境界上での吸音率は0.5を与えた。時間離散化幅は 0.05 ms とした。不均一な3角形要素は以下の手順で作成した。1辺を30分割して一辺 0.033 m の正方形に分割し、その端点を -0.01 m 以上 0.01 m 以下(1/3要素幅程度)の乱数分移動させた。得られた不整形4角形を半分に分割することで不均一な3角形要素を作成した。要素ごとの面積は Fig. 5.10 のようになる。 0.025 cm^2 毎にデータ区間を区切ってヒストグラムを作成した。端点は左端が含まれるようにした。例えば最も左側のデータ区間は $[2.25, 2.5)\text{ cm}^2$ である。平均は 5.56 cm^2 であるため、最大と最小で要素面積が4倍近く異なる質の悪い要素である。解析結果を Fig. 5.11 に示す。空間離散化幅 0.033 m での直交格子における結果(図中CIP)と以上のようにして生成された不均一な3角形要素(図中CIVA)の結果を比較している。こちらも1次元の場合と同様質のよくない要素を用いているにもかかわらず一致していることが分かる。

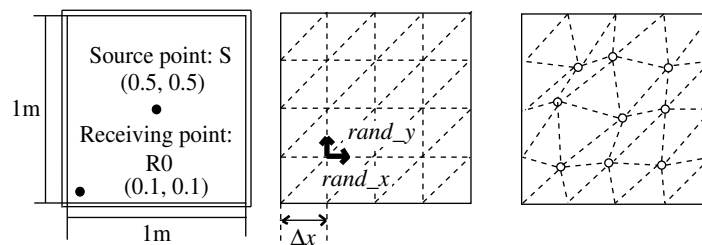


Fig. 5.9 Geometry of 2D sound field and the generated nonuniform meshes.

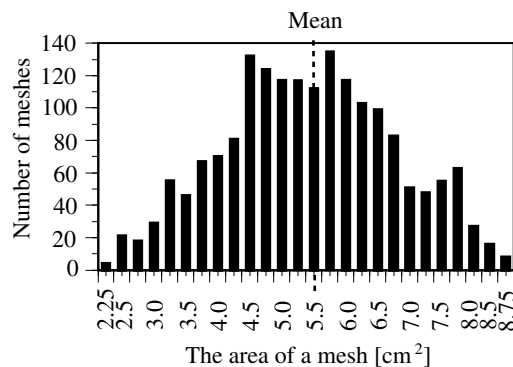


Fig. 5.10 The area of a mesh generated in the way above.

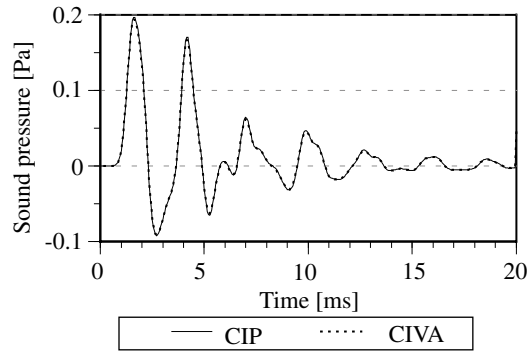


Fig. 5.11 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method using rectangular elements and the CIVA method using nonuniform and non-compatible triangle elements (2D).

5.6.2 3次元音場

3次元の場合にも、4.2.3に示した1mの立方体剛壁室からなるベンチマーク問題を用いて、同様の検討を行った。ランダムな要素での検討の前に、直交分割による立方体要素を等積6分割した四面体要素を用いて検討した²。よってFig. 5.12に示すように分割前の立方体要素の稜線上に必ず移流元が存在することになる。結果はFig. 5.13である。このように振動が起こりすぐに発散してしまっている。これはこの手法は要素界面において、接線方向には微係数が連続であるが法線方向には連続でない[17]ことが原因であると考えられる。2次元の場合にはこの影響は顕著には現れなかったが、3次元の場合にはこの影響で計算が不安定化し、発散してしまうものと思われる。CIVA法を3次元に適用した事例はあまりないが、3次元の場合に数値振動が起こるとい

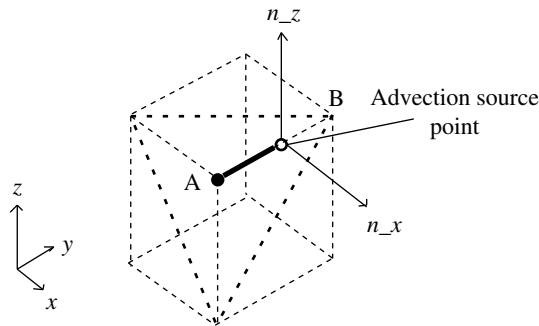


Fig. 5.12 Rectangular-based tetrahedral elements.

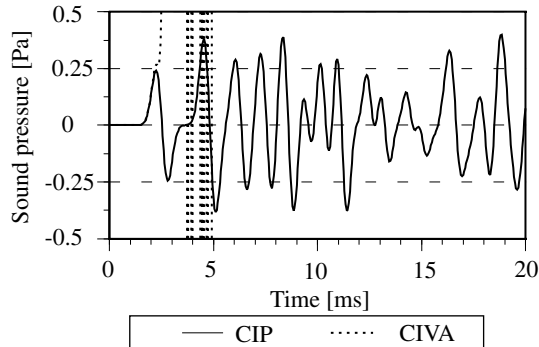


Fig. 5.13 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using non-compatible rectangular-based tetrahedral elements(3D).

² 立方体を4面体に分割する方法は、最小で5分割、等積で6分割である。

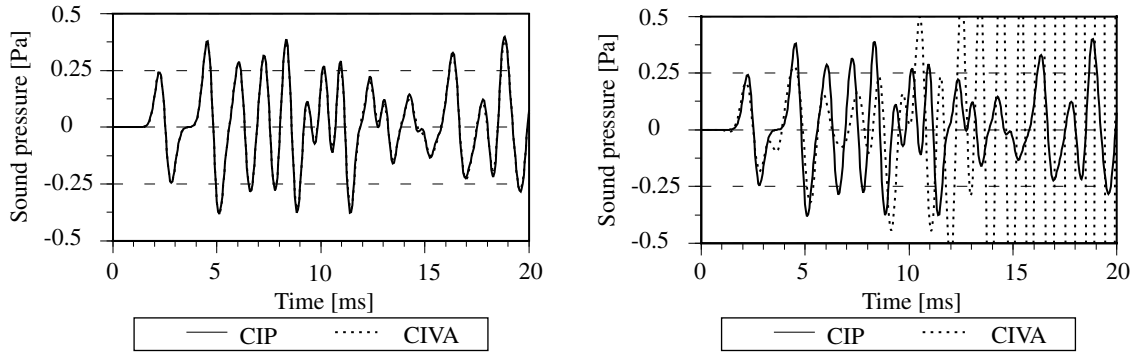


Fig. 5.14 Pseudo impulse responses at R0 Fig. 5.15 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA calculated by the CIP method and the CIVA method using compatible rectangular-based method using tetrahedral elements with normal derivative as a first-order interpolation(3D).

のは文献 [22] でも確認されている。また数値振動については既往研究 [32] でも指摘されており、微係数にのみ人工粘性を加える手法 (DAV: Derivative artificial viscosity) に加えて、補間精度を 1 次まで落とし粘性を上げるために 1 次風上差分法と CIVA 法を遷移的に切り替えて用いている。

これは先に述べたように CIVA 法が非適合要素を用いていることが原因であると考えられるため、これを実験的に検証した。ところで Fig. 5.12 に示すように直交分割であれば、方向分離を用いているため移流元の要素界面は各軸に平行である。そこで直交方向の微分に 1 次補間を用いれば、Fig. 5.12 中の A、B の 2 点から内挿されることになるため要素間で法線方向微分が連続となる。そのため直交格子を等積 6 分割した要素に対して用いれば改善が期待される。つまり M 型 CIP 法に一致する。例えば x 軸方向への移流の際には y, z 軸方向の微分を

$$\frac{\partial}{\partial y} f = L_1 \frac{\partial}{\partial y} f_1 + L_2 \frac{\partial}{\partial y} f_2 + L_3 \frac{\partial}{\partial y} f_3 + L_4 \frac{\partial}{\partial y} f_4 \quad (5.43)$$

などから求める。結果を Fig. 5.14 に示す。このように発散せず CIP 法の結果と一致している。Fig. 5.15 は (直交格子を分割したものではない) メッシャーによって生成したランダム 4 面体要素の場合であるが、これもある程度直交格子を分割して作った要素に近い形であるため、発散が抑えられている。これらのことから考えて、非適合要素を用いていることが発散の原因であると思われる。

5.6.3 パラメータ d, c の調整

以上の検討ではパラメータ $d = 1, c = 0.5$ としていた。先に述べたとおり、 $0 \leq d \leq 1, 0 \leq c \leq 0.5$ の範囲内で自由度があるので、この値を適切なものに変えることで発散を防ぐことができる可能性がある。まずは $d = 0$ とした場合を検討する。なお本節では直交格子を基本として生成された 4 面体要素で検討を行っている。この場合には 1 次補間を行うことになるため適合要素になる。結果を Fig. 5.16 に示す。振幅の減衰が著しいことが分かる。次に $d = 0.5$ とした場合を検討する。これは 1 次補間と 3 次補間の中間である。結果を Fig. 5.17 に示す。 $d = 0$ の場合よりも精度はよいがやはり減衰が大きい。また $c < 0.5$ とすると数値粘性を含ませることになるため発散を抑える働きがある。そこで $d = 1, c = 0$ の場合を検討した。このようにこれまでのものの中では一番よいが、時間の経過とともに減衰によって精度が落ちており、 c の増加とともに発散した。よって

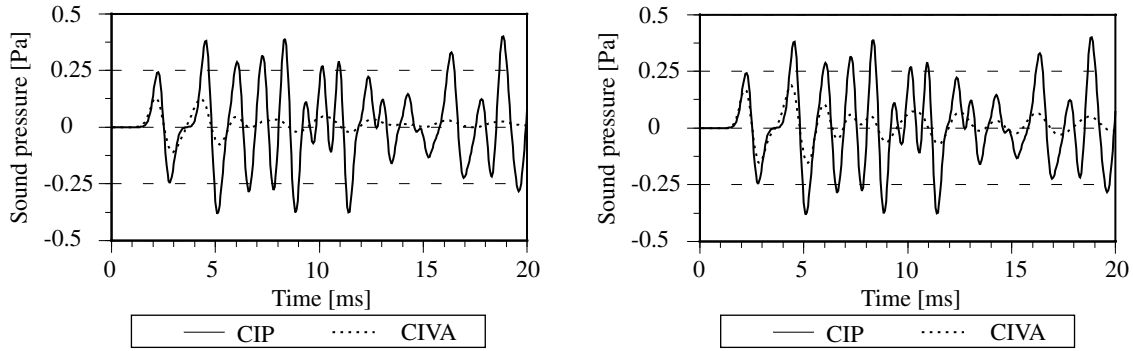


Fig. 5.16 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using rectangular-based tetrahedral elements with $d = 0$. (3D)

Fig. 5.17 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using rectangular-based tetrahedral elements with $d = 0.5$. (3D)

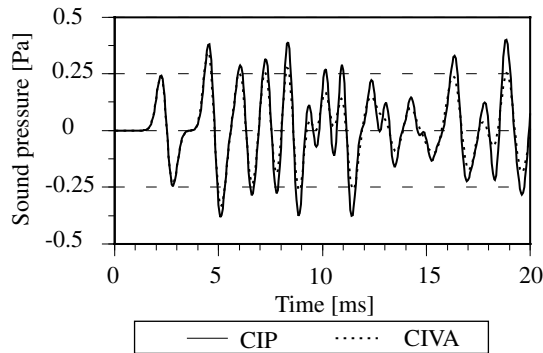


Fig. 5.18 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using rectangular-based tetrahedral elements with $c = 0$. (3D)

$d = 1, c = 0$ の場合が最も精度がよかったが、これも不均一な 4 面体要素に用いるとただちに発散した。 $d = 0.5, c = 0.3$ とすると、発散はしなかったが Fig. 5.16 と同じように全く精度が出なかった。このようにパラメータ d, c を調整することで減衰によって発散を抑えることができたが、精度も低下することが分かった。1 次精度では先に述べたグリッドレス法と変わらないので、高精度解析のためには適合要素化が必要である。

5.6.4 前処理の高速化

CIVA 法を用いる際にひとつ問題になるのはすべての点に対して、移流元がどの要素に含まれているかを事前に知っておかなければならないことである。単純に 0 番目の要素から最後まですべての要素に対して、全ての点と内外判定を行うことにすると、ひとつの点に対して 6 つの移流元があることから単純に考えて $n_e \times 6n_p$ 回の判定が必要である。ここで全ての要素数を n_e 、全ての点の数を n_p とおいた。この計算は 2 次元の場合ではそれほどの負荷にならないが、3 次元計算を行ううえでは大変な問題となり、実用的な計算を行うためには高速化が欠かせない。そこで 2 つのステップに分けて行うこととした。

Step1 あらかじめ領域をブロック数 n_b のブロックに分割しておいてそこに属する要素を抽出しておく。この処理には $n_e \times n_b$ 回の判定が必要である。この処理は要素の内外判定の $N(> 0)$ 倍の計算量であるとする。4 面体とブロックとの交差判定は時間がかかるので、ここでは 4

面体に外接する球³ とブロックとの交差判定を行った。球と平面との交差判定は、平面を球の半径 r 分だけシフトさせることで、平面と点との距離判定に変えることができるため高速に行うことができる⁴ [163] pp. 216-220。

Step2 ブロックであれば、ある点がどのブロックに属しているかはすぐに分かるため、要素の抽出がうまくできたならば、ひとつの要素が複数のブロックに属していることや Step1 での判定の誤りを考えて要素の増幅率を $m(> 1)$ とすると、 $6n_p \times mn_e/n_b$ 回の判定で済むことになる。

全体ではこれらの和である $n_e \times (N \cdot n_b + 6mn_p/n_b)$ 回の判定回数で済むことになり、 $(3n_p - \sqrt{9n_p^2 - 6mNn_p})/N < n_b < (3n_p + \sqrt{9n_p^2 - 6mNn_p})/N$ を満たす範囲のブロック数で後者の手法のほうが計算量を削減できる。最適値は $n_b = 3n_p/N$ であり、増幅率 m によらない。3次元各辺 30 分割を、各辺 10 分割のブロックに分けておいてから、本手法を実装したところ実装前に比べて 30 倍以上の高速化を達成した。本手法は配列の確保、読み込みの速度に関しては考慮に入れない簡略的な検討になっている。実際にはブロックの分割数を増やしすぎると、配列の確保が大変になり、読み込みにも時間がかかるようになりかえって逆効果になることもあるため、適切なブロック分割数の設定が必要である。

5.7 CIVA 法の適合要素化

3次元の場合に発散してしまったので、一般形状に用いる場合は適合要素化をしなければならない。ただし完全性を満足するのに比べて、適合性を満足させるのは困難であることが知られている [150] p. 187。2次元での適合要素化の検討はされているものの [17],[158] pp. 33-45、3次元に関して検討を行った文献はないようであるのでこれを行う。まずは2次元の場合について手法を概説した後、3次元への拡張を行う。1次の微分が連続になるようにするには、原理的には2次の微分の値が各節点に必要である。

5.7.1 2次元での場合

特異形状関数と呼ばれる関数を以下のように定義し、適当な変数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を用いて補間関数に加える。

$$\epsilon_{23} = \frac{\xi_1 \xi_2^2 \xi_3^2}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)} \quad (5.45)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{\xi_1^2 \xi_2 \xi_3^2}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_3)} \quad (5.46)$$

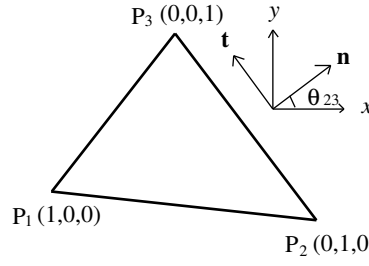
$$\epsilon_{24} = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)} \quad (5.47)$$

³ 外接球の中心 (a, b, c) は、4面体の点の一つが原点 $(0, 0, 0)$ に一致するように移動したとき、その他の点を (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) として以下の連立方程式を解いて得られる。

$$2 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

半径 r は $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ である。これにはじめシフトさせた分を戻すことで中心が求まる。

⁴ 平面の外向き正の法線方向ベクトルを N とすると、平面から任意の点 Q までの符号付距離 $d = N \cdot (Q - P_0)$ で表される。 P_0 は平面が通る任意の点である。法線方向ベクトル側にあるときには $d > 0$ であることから $d > r$ の時には球とブロックは交差していないことが分かる。この判定をすべての面について繰り返すことで、内外判定を行うことができる。

Fig. 5.19 Definition of θ_{23} .

すなわち 3 次補間関数は

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \xi_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} [\xi_j^2 \xi_k + c \xi_1 \xi_2 \xi_3] + \gamma_1 \epsilon_{23} + \gamma_2 \epsilon_{13} + \gamma_3 \epsilon_{24} \quad (5.48)$$

のようになる。法線方向微分は

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \cos \theta_{23} \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta_{23} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (5.49)$$

と表され、角度 θ_{23} は Fig. 5.19 のように取る [147] p. 271。 ϵ_{23} を例に挙げてその関数の挙動を見る。まずこれは 3 角形上では ξ_1, ξ_2, ξ_3 のいずれかが 0 であるためすべての辺で 0 になる。それぞれの微分は

$$\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial \xi_1} = \frac{\xi_2^2 \xi_3^2}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)} \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial \xi_2} = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3^2 (2 - \xi_2)}{(1 - \xi_2)^2 (1 - \xi_3)} \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial \xi_3} = \frac{\xi_1 \xi_2^2 \xi_3 (2 - \xi_3)}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)^2} \quad (5.52)$$

である。辺 P_1P_2 、辺 P_1P_3 に沿ってはそれぞれ $\xi_3 = 0, \xi_2 = 0$ であることから、 $\partial \epsilon_{23}/\partial \xi_1, \partial \epsilon_{23}/\partial \xi_2, \partial \epsilon_{23}/\partial \xi_3$ などはずべて 0 となり、法線方向勾配も 0 である。ところが、辺 P_2P_3 に沿っては $\xi_1 = 0, \xi_2 \neq 0, \xi_3 \neq 0$ であることから、 $\partial \epsilon_{23}/\partial \xi_1$ は 0 でなく 2 次関数で変化する。そのため法線方向勾配は 2 次関数で変化する、端点 P_2, P_3 の値から一意に定めることはできない。そこで辺 P_2P_3 の中点 P_m における法線方向微分を新たな変数として定義する。 P_m は面積座標では、 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 1/2, 1/2)$ で表されるので、そこでの法線方向微分は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{P_m} &= \frac{\cos \theta_{23}}{J} \left[(y_2 - y_3) \left(\alpha_1 + d \left(\frac{\beta_{21} + \beta_{31}}{4} \right) + \frac{dcsum}{4} + \frac{\gamma_1}{4} \right) \right. \\ &\quad + (y_3 - y_1) \left(\alpha_2 + d \left(\frac{2\beta_{23} + \beta_{32}}{4} \right) \right) \\ &\quad \left. + (y_1 - y_2) \left(\alpha_3 + d \left(\frac{\beta_{23} + 2\beta_{32}}{4} \right) \right) \right] \\ &\quad + \frac{\sin \theta_{23}}{J} \left[(x_2 - x_3) \left(\alpha_1 + d \left(\frac{\beta_{21} + \beta_{31}}{4} \right) + \frac{dcsum}{4} + \frac{\gamma_1}{4} \right) \right. \\ &\quad + (x_3 - x_1) \left(\alpha_2 + d \left(\frac{2\beta_{23} + \beta_{32}}{4} \right) \right) \\ &\quad \left. + (x_1 - x_2) \left(\alpha_3 + d \left(\frac{\beta_{23} + 2\beta_{32}}{4} \right) \right) \right] \quad (5.53) \end{aligned}$$

となる。一方 P_2, P_3 の法線方向微分の平均が P_m での法線方向微分に等しいと仮定する。 $P_2 = (0, 1, 0)$ の法線方向微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{P_2} &= \frac{\cos \alpha}{J} \left[(y_2 - y_3)(\alpha_1 + d\frac{\beta_{21}}{4}) + (y_3 - y_1)\alpha_2 + (y_1 - y_2)(\alpha_3 + d\frac{\beta_{23}}{4}) \right] \\ &\quad + \frac{\sin \alpha}{J} \left[(x_2 - x_3)(\alpha_1 + d\frac{\beta_{21}}{4}) + (x_3 - x_1)\alpha_2 + (x_1 - x_2)(\alpha_3 + d\frac{\beta_{23}}{4}) \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

であり、 $P_3 = (0, 0, 1)$ の法線方向微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{P_3} &= \frac{\cos \alpha}{J} \left[(y_2 - y_3)(\alpha_1 + d\frac{\beta_{31}}{4}) + (y_3 - y_1)(\alpha_2 + d\frac{\beta_{32}}{4}) + (y_1 - y_2)\alpha_3 \right] \\ &\quad + \frac{\sin \alpha}{J} \left[(x_2 - x_3)(\alpha_1 + d\frac{\beta_{31}}{4}) + (x_3 - x_1)(\alpha_2 + d\frac{\beta_{32}}{4}) + (x_1 - x_2)\alpha_3 \right] \end{aligned} \quad (5.55)$$

である。これにより、 γ_1 が以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{(y_2 - y_3) \cos \theta_{23} + (x_2 - x_3) \sin \theta_{23}} \\ &\quad \times \left[-\cos \theta_{23} \left[(y_2 - y_3)(4\alpha_1 + d(\beta_{21} + \beta_{31}) + dcs\text{um}) \right. \right. \\ &\quad \quad + (y_3 - y_1)(4\alpha_2 + d(2\beta_{23} + \beta_{32})) + (y_1 - y_2)(4\alpha_3 + d(\beta_{23} + 2\beta_{32})) \\ &\quad \quad \left. \left. - 2J \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 + \frac{\partial}{\partial x} f_3 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta_{23} \left[(x_2 - x_3)(4\alpha_1 + d(\beta_{21} + \beta_{31}) + dcs\text{um}) \right. \right. \\ &\quad \quad + (x_3 - x_1)(4\alpha_2 + d(2\beta_{23} + \beta_{32})) + (x_1 - x_2)(4\alpha_3 + d(\beta_{23} + 2\beta_{32})) \\ &\quad \quad \left. \left. - 2J \left(\frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial y} f_3 \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (5.56)$$

\cos, \sin に関しては、外向きの法線方向ベクトル \mathbf{n} が

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y) = (y_3 - y_2, -(x_3 - x_2)) \quad (5.57)$$

であるため、

$$\cos \theta_{23} = \frac{n_x}{|\mathbf{n}|} \quad (5.58)$$

$$\sin \theta_{23} = \frac{n_y}{|\mathbf{n}|} \quad (5.59)$$

与えられる。 γ_2, γ_3 に関しても同様である。

5.7.2 3次元での場合 稜線上での適合要素化

前節で2次元での適合要素化について述べた。3次元での検討例は見られなかったため、3次元に拡張することにする。3次元の場合には2次元の場合と異なり、稜線上と要素界面の2つで適合要素化を行う必要がある。まずは稜線上での適合要素化を行い、次節で要素界面での適合要素化について述べる。

2次元の場合と同じく、辺上の特異形状関数を補間関数に付加する。2次元での特異形状関数を2つ組み合わせる。例えば辺 P_1P_2 は $\triangle P_1P_2P_3$ と $\triangle P_1P_2P_4$ によって共有されているため特異形状関数

$$\frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)} \quad (5.60)$$

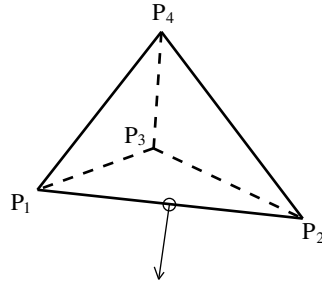


Fig. 5.20 Assumption to be a compatible element on the edges.

と

$$\frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_4}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)} \quad (5.61)$$

を組み合わせた

$$\epsilon_{\bar{1}2} = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_3 + \xi_4)}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)} \quad (5.62)$$

を特異形状関数に取る。辺 P_1P_2 以外では ξ_1, ξ_2 のいずれかが 0 であるため、この関数も 0 となる。微分に関しても同様に

$$\frac{\partial \epsilon_{\bar{1}2}}{\partial \xi_1} = \frac{\xi_1 \xi_2^2 (2 - \xi_1) (\xi_3 + \xi_4)}{(1 - \xi_1)^2 (1 - \xi_2)} \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{\bar{1}2}}{\partial \xi_2} = \frac{\xi_1^2 \xi_2 (2 - \xi_2) (\xi_3 + \xi_4)}{(1 - \xi_1) (1 - \xi_2)^2} \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{\bar{1}2}}{\partial \xi_3} = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2}{(1 - \xi_1) (1 - \xi_2)} \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{\bar{1}2}}{\partial \xi_4} = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2}{(1 - \xi_1) (1 - \xi_2)} \quad (5.66)$$

であるため 0 である。しかしながら辺 P_1P_2 では $\partial \epsilon_{\bar{1}2} / \partial \xi_3, \partial \epsilon_{\bar{1}2} / \partial \xi_4$ は 0 でなく 2 次関数で変化する。そこで対象の辺上の中点の法線方向微分値を用いて一意に定めるのであるが、稜線上では法線方向が求まらないという問題がある。辺 P_1P_2 は $\triangle 123$ と $\triangle 214$ によって共有されているため、その法線方向はそれらの平均で与えられるものとする。すなわち、正規化されたそれぞれの法線方向ベクトル $\mathbf{n}_{123}, \mathbf{n}_{214}$ の平均

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_{123} + \mathbf{n}_{214}) \quad (5.67)$$

を法線方向ベクトルとする。またこの向きの法線方向勾配が端点 P_1, P_2 の法線方向勾配の平均で与えられるものとする。まとめると Fig. 5.20 に示す点に関して、矢印で示す向きに関して適合要素化を図ることにする。すると 3 次補間関数は

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i \xi_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^4 \beta_{jk} \xi_j^2 \xi_k \\ &\quad + d \text{sum}(\xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_2 \xi_3 \xi_4 + \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \xi_1 \xi_3 \xi_4) \\ &\quad + \mu_1 \epsilon_{12} + \mu_2 \epsilon_{13} + \mu_3 \epsilon_{14} + \mu_4 \epsilon_{23} + \mu_5 \epsilon_{24} + \mu_6 \epsilon_{34} \end{aligned} \quad (5.68)$$

となるので、各方向の微分は辺 P_1P_2 の中点 $P_m = (1/2, 1/2, 0, 0)$ において

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \alpha_1 + \frac{d}{4} (2\beta_{12} + \beta_{21}) = \eta_1 \quad (5.69)$$

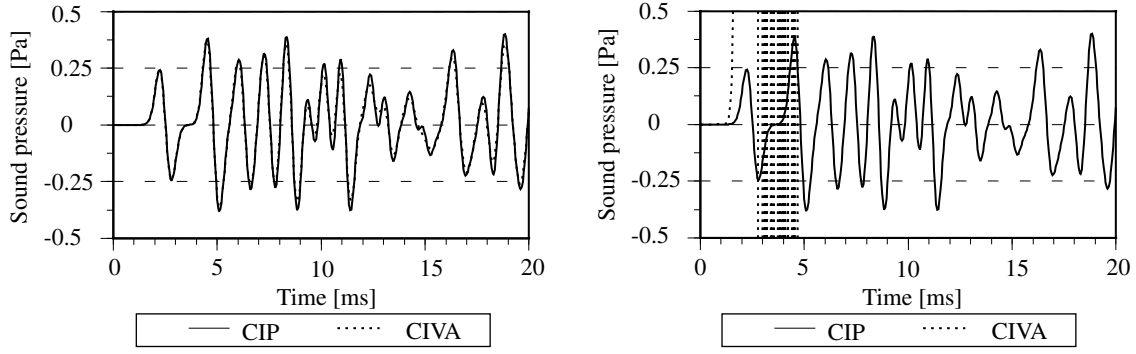


Fig. 5.21 Pseudo impulse responses at R0 Fig. 5.22 Pseudo impulse response at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using rectangular-based tetrahedral method using tetrahedral elements which are compatible on the edges.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_2} = \alpha_2 + \frac{d}{4} (2\beta_{21} + \beta_{12}) = \eta_2 \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_3} = \alpha_3 + \frac{d}{4} (\beta_{13} + \beta_{23} + csum) + \frac{1}{4}\mu_1 = \eta_3 + \frac{1}{4}\mu_1 \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_4} = \alpha_4 + \frac{d}{4} (\beta_{14} + \beta_{24} + csum) + \frac{1}{4}\mu_1 = \eta_4 + \frac{1}{4}\mu_1 \quad (5.72)$$

である。前節と同様に θ, φ を取ると、

$$\begin{aligned} \mu_1 = & \frac{-4}{\sin \varphi \{ (a_{13} + a_{14}) \cos \theta + (a_{23} + a_{24}) \sin \theta \} + (a_{33} + a_{34}) \cos \varphi} \\ & \times \left[\sin \varphi \left\{ \cos \theta \left(\sum_{i=1}^4 a_{1i} \eta_i - J \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{mean} \right) + \sin \theta \left(\sum_{i=1}^4 a_{2i} \eta_i - J \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{mean} \right) \right\} \right. \\ & \left. + \cos \varphi \left(\sum_{i=1}^4 a_{3i} \eta_i - J \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{mean} \right) \right] \quad (5.73) \end{aligned}$$

のように求まる。 $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ についても同様である。これで前節と同じ問題を解析した。直交格子を用いた場合の結果は Fig. 5.21 のようになり、振幅が異なる部分が 10 ms 以降見られるが発散は抑えられていることが分かる。ただし 4 面体要素に用いた結果は Fig. 5.22 のようになり、全く効果がなかった。

5.7.3 3次元での場合 要素界面での適合要素化

稜線上の適合要素化だけでは不十分であるので、次に要素界面での適合要素化を図ることにする。Fig. 5.23 に示す 3 角形の重心位置の点に関して、矢印で示す向きに関して適合要素化を図ることにする。特異形状関数を次のように導入した。

$$\epsilon_{234} = \frac{\xi_1 \xi_2^2 \xi_3^2 \xi_4^2}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 - \xi_4)} \quad (5.74)$$

$$\epsilon_{134} = \frac{\xi_1^2 \xi_2 \xi_3^2 \xi_4^2}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_3)(1 - \xi_4)} \quad (5.75)$$

$$\epsilon_{124} = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3 \xi_4^2}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_4)} \quad (5.76)$$

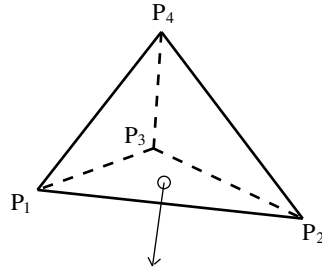


Fig. 5.23 Assumption to be a compatible element on the boundary surface.

$$\epsilon_{123} = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 \xi_4}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)} \quad (5.77)$$

例えば ϵ_{234} を例にとると、微分値は以下ようになる。

$$\frac{\partial \epsilon_{234}}{\partial \xi_1} = \frac{\xi_2^2 \xi_3^2 \xi_4^2}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 - \xi_4)} \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{234}}{\partial \xi_2} = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3^2 \xi_4^2 (2 - \xi_2)}{(1 - \xi_2)^2 (1 - \xi_3)(1 - \xi_4)} \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{234}}{\partial \xi_3} = \frac{\xi_1 \xi_2^2 \xi_3 \xi_4^2 (2 - \xi_3)}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)^2 (1 - \xi_4)} \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{234}}{\partial \xi_4} = \frac{\xi_1 \xi_2^2 \xi_3^2 \xi_4 (2 - \xi_4)}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 - \xi_4)^2} \quad (5.81)$$

これは $\triangle P_2 P_3 P_4$ 以外の境界面では、 ξ_2, ξ_3, ξ_4 のいずれかが 0 のため、関数値、微分値ともに 0 である。 $\triangle P_2 P_3 P_4$ では、法線方向勾配は 3 次関数で変化するため、3 つの端点の値のみから定めることはできず、重心位置 P_G での値も用いて、関数を決定することになる。重心位置での法線方向勾配は 3 角形の 3 つの端点の値の平均で与えられると仮定する。2 次元の場合と同様に 3 次補間関数は

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i \xi_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^4 \beta_{jk} \xi_j^2 \xi_k \\ &\quad + dcsun(\xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_2 \xi_3 \xi_4 + \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \xi_1 \xi_3 \xi_4) \\ &\quad + \gamma_1 \epsilon_{234} + \gamma_2 \epsilon_{134} + \gamma_3 \epsilon_{124} + \gamma_4 \epsilon_{123} \end{aligned} \quad (5.82)$$

のようになる。境界面の法線方向微分は

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \sin \varphi \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial z} \quad (5.83)$$

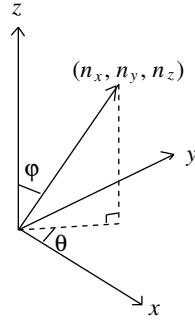
である。 $\theta[0, 2\pi)$ と $\varphi[0, \pi]$ は Fig. 5.24 のように取る。すなわち外向き法線方向ベクトル \mathbf{n} を

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) \quad (5.84)$$

とおいたとき、

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}, \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \right) \quad (5.85)$$

$$(\cos \varphi, \sin \varphi) = \left(\frac{n_z}{|\mathbf{n}|}, \frac{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}{|\mathbf{n}|} \right) \quad (5.86)$$

Fig. 5.24 Definition of θ and φ .

である。また $\triangle P_2 P_3 P_4$ の重心位置 $P_G = (0, 1/3, 1/3, 1/3)$ での各方向の微分値は

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \alpha_1 + \frac{1}{3} d_{csum} + \frac{d}{9} (\beta_{21} + \beta_{31} + \beta_{41}) + \frac{1}{3^3 2^3} \gamma_1 \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_2} = \alpha_2 + \frac{1}{9} d_{csum} + \frac{d}{9} (\beta_{32} + \beta_{42}) + \frac{2d}{9} (\beta_{23} + \beta_{24}) \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_3} = \alpha_3 + \frac{1}{9} d_{csum} + \frac{d}{9} (\beta_{23} + \beta_{43}) + \frac{2d}{9} (\beta_{32} + \beta_{34}) \quad (5.89)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_4} = \alpha_4 + \frac{1}{9} d_{csum} + \frac{d}{9} (\beta_{24} + \beta_{34}) + \frac{2d}{9} (\beta_{42} + \beta_{43}) \quad (5.90)$$

で与えられるため、法線方向微分値は

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{J} \left[\sin \varphi \left(\cos \theta \sum_{i=1}^4 a_{1i} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} + \sin \theta \sum_{i=1}^4 a_{2i} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \right) + \cos \varphi \sum_{i=1}^4 a_{3i} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \right] \quad (5.91)$$

となる。これが端点 P_2, P_3, P_4 の平均で与えられると仮定するため

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & \frac{-3^3 2^3}{\sin \varphi (a_{11} \cos \theta + a_{21} \sin \theta) + a_{31} \cos \varphi} \\ & \times \left[\sin \varphi \left\{ \cos \theta \left(\sum_{i=1}^4 a_{1i} \eta_i - J \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{mean} \right) + \sin \theta \left(\sum_{i=1}^4 a_{2i} \eta_i - J \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{mean} \right) \right\} \right. \\ & \left. + \cos \varphi \left(\sum_{i=1}^4 a_{3i} \eta_i - J \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{mean} \right) \right] \quad (5.92) \end{aligned}$$

のように求まる。ここで

$$\eta_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} - \frac{1}{3^3 2^3} \gamma_1 \quad (5.93)$$

$$\eta_i = \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \quad (i = 2, 3, 4) \quad (5.94)$$

とおいた。 $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ についても同様である。以上のようにして稜線と要素界面上での適合要素化を達成した。しかしながらこれを不均一な四面体格子に適用した場合には、Fig. 5.25 のように発散してしまっている。

5.8 汎用 CFD 解析プログラム OpenFOAM との連携

本論文のために開発したプログラムは付録に示すとおりオブジェクト指向の考え方を取り入れて開発されているため、既存クラスの再利用によってすばやくバグの少ないプログラムを作成す

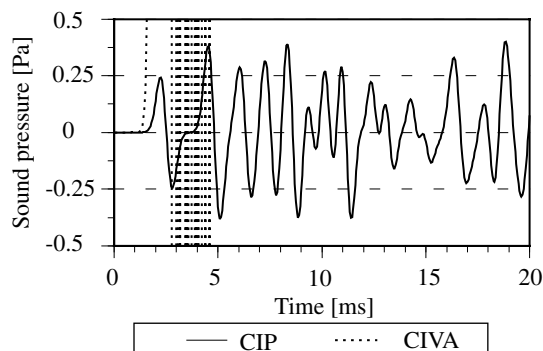


Fig. 5.25 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using tetrahedral elements which are compatible on the edges and the boundary surfaces. (3D)

ることが可能である。しかしながらメッシュの読み込みといったプリ処理、可視化ソフトへのデータの書き出しといったポスト処理には、データ形式の違いによって異なるソフトへの柔軟性が悪くなりがちである。任意形状への対応のために様々なメッシュソフトや CAD ソフトなどとの連携や、可視化のためのフォーマットに対応しなければならないことを考えると、独自のフォーマットで開発してしまうと、開発者間の連携、データの比較、利用するソフトウェアの違いによってコンバータが必要になり非効率的であるが、現段階では統一が取れているとはいいがたく、研究者ごとに異なる形式が存在するといっても過言ではない。このような状況では、汎用化を進めることはできない。

そこで本研究ではオープンソースで高度にオブジェクト指向化された汎用流体解析ソルバーである OpenFOAM に注目し、それを利用することを試みた。しかしながらこのソルバーは有限体積法をベースとしているためデフォルトで 4 面体メッシュが切れない (6 面体による階段近似を基本としている) ことや、境界面において要素端点に値を与えることができないなど直接利用することが難しかった [142] p.34。そこでプリ・ポストプロセッサ部分のみの利用を行うことにした。具体的には Gmsh などのフリーのメッシャーで解析対象を分割し、gmsh2ToFOAM などのコンバーターを用いることで FOAM 形式に変換する。その後それを読み込んで CIVA 法による解析を行い、結果は FOAM 形式で書き出される。Fig. 5.26 に解析の流れを示す。それを paraFOAM などの OpenFOAM 標準の可視化ソフトを用いて可視化を行ったり、foamToVTK などのコンバーターを用いることで paraview などのフリーの可視化ソフトで読み込むことのできる .vtk フォーマットに変換することができる。プリプロセスにおいても CAD データからエクスポート可能な STL フォーマットをサポートしていたり、StarCD, Fluent など様々な流体解析ソフトウェアの形

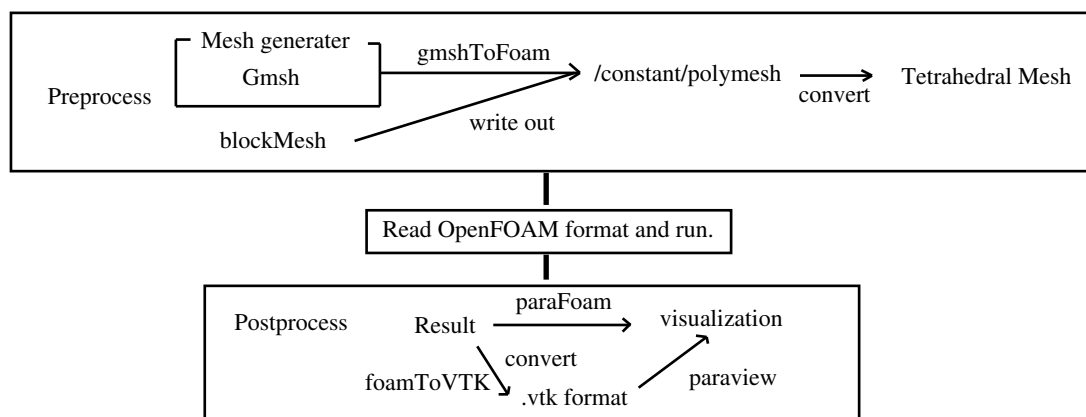


Fig. 5.26 Procedure of analysis using OpenFOAM as a pre- and post- processor.

式に対応してコンバータが開発されているため、様々な開発者との連携が可能になっている。また可視化の際に面倒なフォーマットに対応してそれぞれ出力形式を考える必要がないため、開発期間の大幅な短縮が可能になった。

5.8.1 プリ・ポストプロセッサとして OpenFOAM を用いた解析例 残響室の解析

以上のように OpenFOAM に対応したのであるが、残念ながら不均一な 4 面体要素には対応できなかったため、不均一な 4 面体要素を用いての任意形状の解析が行えるまでは至っていない。しかしながら OpenFOAM には標準でブロック近似を行なうメッシャーが用意されているため、これを用いることで様々な形状を解析することができる。ここに示したのはその一例で、室容積 50 m^3 程度の残響室を解析したものである。主要な室部は奥行き 4.53 m 、幅 3.78 m 、高さ 3 m の直方体形状である。その片側に試料取り付け窓の 0.47 m の張り出しがある。すべての壁の吸音率を 0.01 とし、試料取り付け窓部分は 0.06 としている。Fig. 5.27 に示す座標系にしたがって、音源は $(3.6, 0.2, 2.0)$ 、受信点は $(1, 1, 0.01)$ とした。空間離散化幅は x 方向 $4.53 + 0.47 = 5 \text{ m}$ を 100 分割、 y 方向 3.78 m を 75 分割、 z 方向 3 m を 60 分割しているため、おおむね 0.05 m である。これを OpenFOAM に付属の 6 面体メッシャーの blockMesh を用いることで、 $435,786$ セル、 $1,325,074$ 面、 $453,738$ 点に分割した⁵。ここでは直交格子に対して収束性が確認された CIVA 法で法線方向の微分を 1 次精度の内挿で求めるスキームを用いて解析を行った⁶。そのため blockMesh によって生成されたひとつの立方体を 5 分割して $2,178,930$ 個の 4 面体に行っている。時間離散化幅は 0.0839904 ms として、 0.1 秒まで計算を行った。10 ステップに 1 回すべての点での p, u, v, w を書き出した。解析には移流元の点をすべて探し出す作業に 15 分、時間応答を求めるのに 100 分を要した。

初期の空間音圧分布を Fig. 5.28 に示す。音源には通常用いているのと同じ 1 kHz の $1/3$ オクターブバンド上限までが含まれる $d = 0.13$ のガウス分布を用いているのであるが、このように極狭い範囲の場所に点音源として与えられている様子が可視化によってよく分かる⁷。Fig. 5.29 には 90 ステップ後、つまり 7.56 ms 後 (2.5 m 伝搬) の空間音圧分布を示す⁸。壁に反射して伝搬していく様子がよく分かる。Fig. 5.30 には 200 ステップ後、つまり 16.8 ms 後 (5.7 m 伝搬) の空間音圧分布を示す。このように反対側の壁まで音波が到達した。このときの反対側からみた空間音圧分布を示したのが Fig. 5.31 である。窓面に入射している様子がよく分かる。このように形状も含めて可視化をするプログラムを自分で開発するのは大変難しい。Fig. 5.30 には 400 ステップ後、

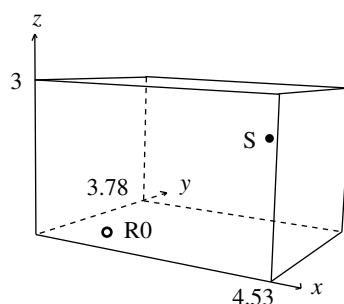


Fig. 5.27 Geometry of a reverberation room.

⁵ 新潟大学建設学科 大嶋拓也助教にデータを提供していただいた。

⁶ M 型 CIP 法に一致する。

⁷ 可視化には VisIt 1.6.1 を利用した。

⁸ paraview3.0.2 を利用した。

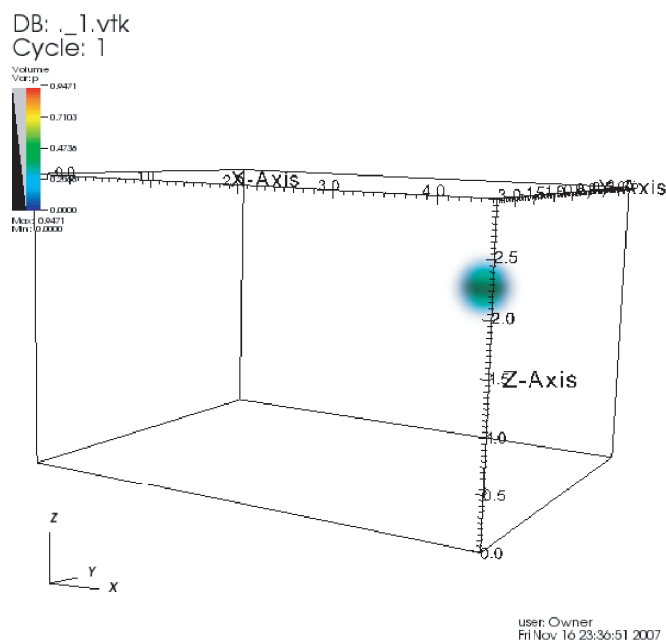


Fig. 5.28 Initial spatial distribution of p in the reverberation room.

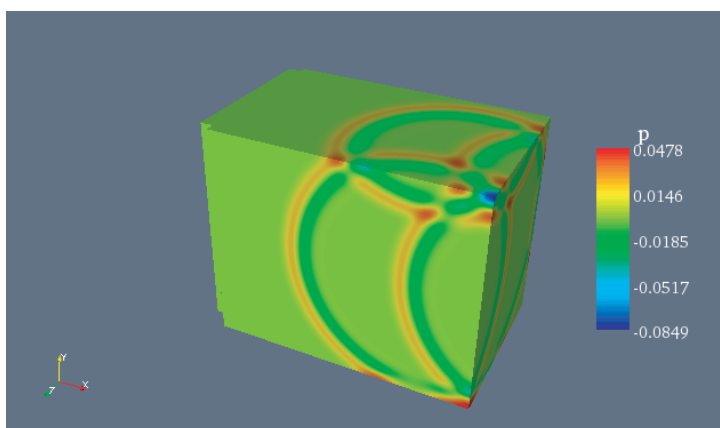


Fig. 5.29 Spatial distribution of p in the reverberation room calculated by the CIVA method (after 90 steps).

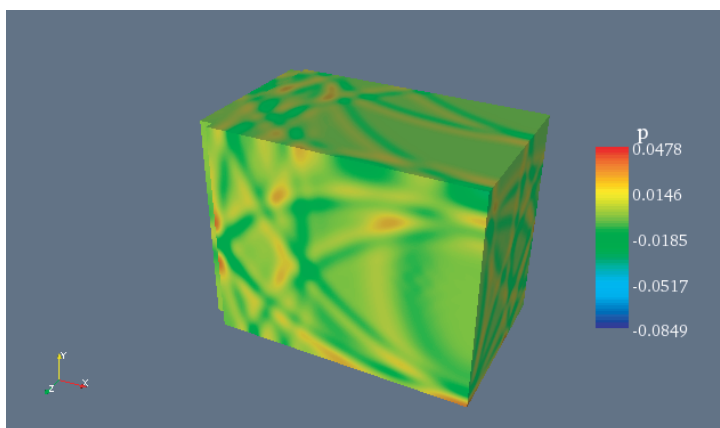


Fig. 5.30 Spatial distribution of p in the reverberation room calculated by the CIVA method (after 200 steps).

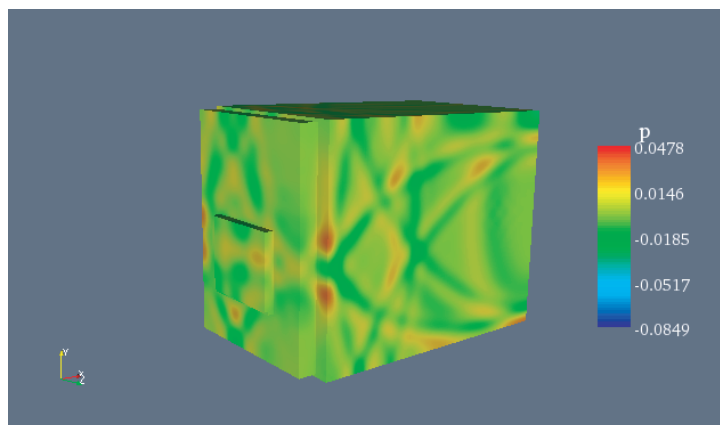


Fig. 5.31 Spatial distribution of p in the reverberation room calculated by the CIVa method from a reverse angle (after 200 steps).

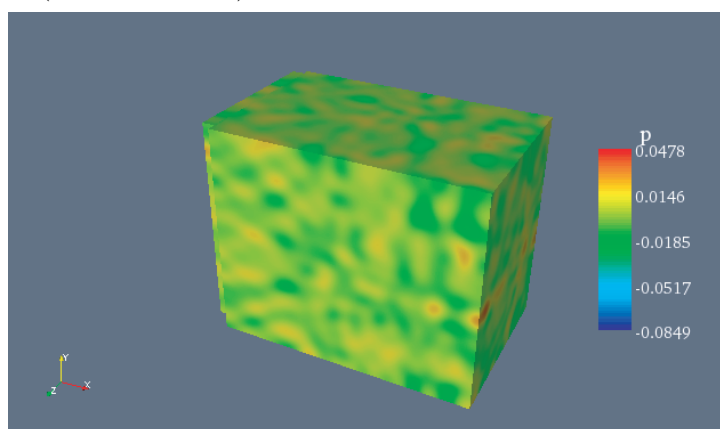


Fig. 5.32 Spatial distribution of p in the reverberation room calculated by the CIVa method (after 400 steps).

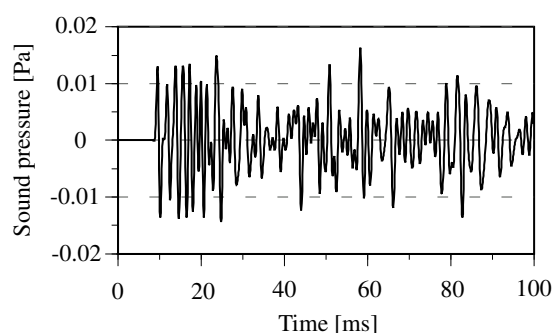


Fig. 5.33 Pseudo impulse response at R0 calculated by the CIVa method .

つまり 33.6 ms 後 (11.4 m 伝搬) の空間音圧分布を示す。この残響室の平均自由行程は 2.5 m 程度なので、4, 5 回程度の反射であるが、音場が均一になってきている様子が分かる。受信点 R0 における音圧波形を Fig. 5.33 に示す。このように OpenFOAM のフォーマットに対応しているため、異なる解析者間でのデータの共有、汎用のポストプロセッサを用いた簡単な可視化、さらにはアニメーションが行えることになる。

5.9 まとめ

CIP 法は原理的には座標系によらない手法であるため、一般の 4 面体要素を用いて任意形状の問題を解析することを目標に検討した。1 次元の場合には不等間隔格子を用いても、全く問題なく計算できることが示された。多次元化にあたって、任意の 3 角形/4 面体要素を用いた解析を行うことを目的として CIVA 法を音響問題の解析に導入した。2 次元 3 角形要素は乱数によって生成した質の悪い要素であるにもかかわらず、解析ができることが示された。3 次元 4 面体要素にも適用したところ、要素界面の節点間の法線方向微分が連続でない非適合要素を用いていることが原因で発散した。流体力学分野などでは発散せず計算ができていることを考えると、音響問題が非定常性が強く、インパルス性の音源を用いることや移流速度が速いことが原因であると考えられる。音響問題では有限体積法を用いても不均一な 4 面体要素を用いた場合には、格子の非直交補正などを行っても発散することが示されており [101]、音響問題においては流体力学の分野の手法をそのまま用いることができないものと思われる。これを改善するため適合要素化を試みた。完全な適合要素化を行うためには 2 階の微係数が必要であるが、記憶量・計算量の飛躍的な向上が予想されるため、特異形状関数と呼ばれる関数を補間関数に追加して法線方向の微分を要素界面の特定の点で特定の方向に対して適合要素化する手法を導入した。しかしながら要素内部で完全な適合要素でないことが原因で、不均一な 4 面体要素を用いた場合に解析を行うことはできなかった。

第6章 周波数特性を持つ境界条件の取扱いに関する検討

6.1 概要

室内音場問題への CIP 法の適用を目指して、実用上重要な周波数特性を持つ境界条件を CIP 法に導入することを目的とする。FDTD 法でよく用いられる実数のインピーダンス境界条件を 3.4.3 で CIP 法に導入した。この境界条件は簡便であるが周波数特性を与えることができない。現実の材料の吸音率の例を Fig. 6.1 に示す。吸音材としてよく用いられる 32K のグラスウールは強い周波数特性を持っており、穴あき板もグラスウールほどではないとしても、周波数特性を持っている。そのため周波数特性を持った境界条件を与えることが、室内音場解析を行う上では必須である。CIP 法においては既往研究でも密度・音速の異なる媒質間の伝搬手法が提案されているのみであり [48]、周波数特性は考慮されていない。本章ではまずは吸音材をモデリングする手法を CIP 法に導入する。次にローカルリアクティブの仮定下で、周波数特性をフィルターによって直接的に与える手法を CIP 法に導入する。

6.2 周波数特性を持った境界条件 吸音材のモデリングによる方法

6.2.1 定式化

多孔質材の吸音メカニズムをモデリングするのに、多孔質材を Fig. 6.2 に示すような多くの毛細管を数多く積み重ねた音響管の集まりと考える Rayleigh モデルがよく用いられる [129]pp. 144-155。このようなモデリングによって多孔質材料だけでなく、グラスウールのような繊維系材料の吸音メカニズムもある程度説明できるものと考えられている [87]。Rayleigh モデルを導入した多孔質材内部の支配方程式は以下ようになる。空気中の伝搬の運動方程式の外力項に速度に比例する抵抗の項を追加しただけである。オリジナルの Rayleigh モデルは 1 次元であるが、それを自

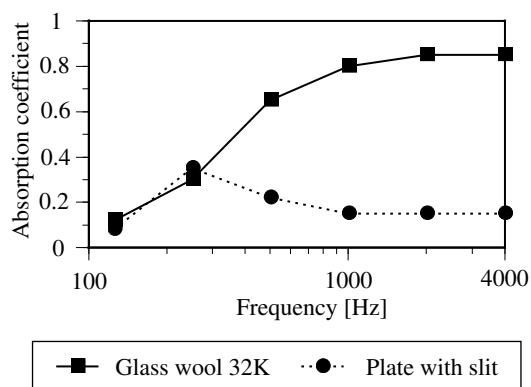


Fig. 6.1 Example of an absorption coefficient.

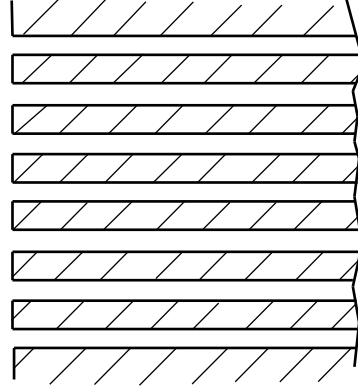


Fig. 6.2 Rayleigh Model.

然に3次元に拡張したものがよく用いられている。

$$\frac{K}{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + Ru + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{K}{\Omega} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + Rv + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{K}{\Omega} \rho \frac{\partial w}{\partial t} + Rw + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho c^2}{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.4)$$

ただし ρ は空気の密度 [kg/m³]、 c は空気中の音速 [m/s]、 Ω は多孔度 (porosity)、 K は空隙のうち流体の流れの方向に寄与する分を表す構造因子 (structure factor)、 R は流動抵抗 [Ns/m⁴] である。訳語は文献によって異なるが、文献 [87] によった。これを方向分離して、空気中の波動伝搬の場合と同じように移流方程式に変形すると x 軸方向は以下のようなになる (y 軸方向に関しても同様である)。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{K}{\Omega} \rho cu + p \right) + c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\Omega} \rho cu + p \right) = -Rcu + \frac{(K-1)\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{K}{\Omega} \rho cu - p \right) - c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\Omega} \rho cu - p \right) = -Rcu - \frac{(K-1)\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.6)$$

$K = 1$ であれば右辺の微分の処理が必要ないため簡単である。特によく仮定される $K = \Omega = 1$ のときは

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho cu + p) + c \frac{\partial}{\partial x} (\rho cu + p) = -Rcu \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho cu - p) - c \frac{\partial}{\partial x} (\rho cu - p) = -Rcu \quad (6.8)$$

のようになる。このような非移流項を持つ移流方程式を CIP 法で解くためには、外力を時間ステップ中一定と仮定した時間分離解法がよく用いられる。手順を Fig. 6.3 に示す。現在の時間ステップの点が黒丸であり、移流先の点が白丸である。これが非移流項すなわち外力の影響を受けて少しずつ曲がりながら (i) のように移流することになる。これを2つのステップに分ける。まずは非移流項を0とおいて、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho cu + p)^n + c \frac{\partial}{\partial x} (\rho cu + p)^n = 0 \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho cu - p)^n + c \frac{\partial}{\partial x} (\rho cu - p)^n = 0 \quad (6.10)$$

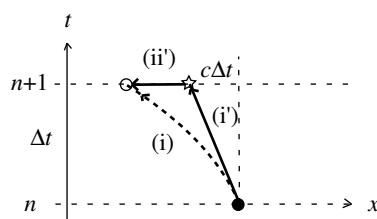


Fig. 6.3 How to solve an advection equation with non-advective terms.

をCIP法で解く。これは(i')のように星印の点までまっすぐ $c\Delta t$ 分だけ移流させることに相当する。星印の点での中間値 $\rho cu^*, p^*$ をそれぞれの和から求める。つぎに(ii')のように外力の影響分だけ星印の点から丸の点まで移動させる。その際は外力を一定として $n+1$ ステップの値を求める。すなわち運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu + p)^* = -\frac{R}{\rho}\rho cu^* \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu - p)^* = -\frac{R}{\rho}\rho cu^* \quad (6.12)$$

を時間積分して以下のように差分で解く。

$$(\rho cu + p)^{n+1} = \rho cu^* + p^* - \Delta t \frac{R}{\rho}\rho cu^* \quad (6.13)$$

$$(\rho cu - p)^{n+1} = \rho cu^* - p^* - \Delta t \frac{R}{\rho}\rho cu^* \quad (6.14)$$

$$(6.15)$$

この手法では、吸音材内部に適切な R を与え、空気中では $R=0$ と与えるだけで両領域が場合分けの必要なく簡便に扱える。 $\Omega \neq 1$ のときは吸音材の層と、空気層の間に境界を設定し、吸音材の密度を $\rho_{abs} = \rho/\Omega$ として、文献[48]の方法に従って密度の異なる媒質間での伝搬として扱えばよい。本研究では $K = \Omega = 1$ とする。

ここで用いた方向分離手法と時間分離手法による精度低下の可能性がある。特に後者の時間分離解法は時間ステップ中で外力が一定と仮定していることになるため、時間離散化幅を十分小さくする必要がある。

6.2.2 音響管での検討 背後が剛壁の場合

材料の垂直入射吸音率の測定には音響管と呼ばれる細長い管が用いられる。円形断面の管の場合その直径を d とすると、対象とする音波の波長 λ に対して $d < 0.58\lambda$ であれば管軸方向に伝搬する平面波のみが存在することになるため、垂直入射吸音率を求めることができる。測定にはJIS A 1405-1:2007(音響管による吸音率及びインピーダンスの測定 第1部:定在波比法)とJIS A 1405-2:2007(音響管による吸音率及びインピーダンスの測定 第2部:伝達関数法)に制定されている2種類の測定法が用いられる。

以上のようにして導入したRayleighモデルのCIP法における妥当性を検証するため、Fig. 6.4に示す音響管を用いて、複素音圧反射率・垂直入射吸音率の理論解との比較を行った。音響管の長さは3 m、管径は5 cmの矩形形状で、管壁はすべて剛とし、2次元で検討を行った。これの右端に密着させる形で、厚さ10 cm、流動抵抗 $R = 15000$ [Ns/m⁴]、 $K = \Omega = 1$ の吸音材を設置した。受音点については試料表面から1 mのところ波形の観察のためにR0を、複素音圧反射率を伝達関数法で求めるために30, 40 cmのところR1, R2を設定した。R0における波形のよう

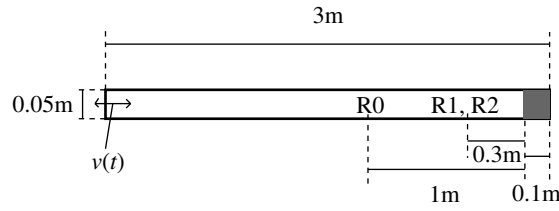


Fig. 6.4 Geometry of a sound tube with a porous material (0.1 m thickness).

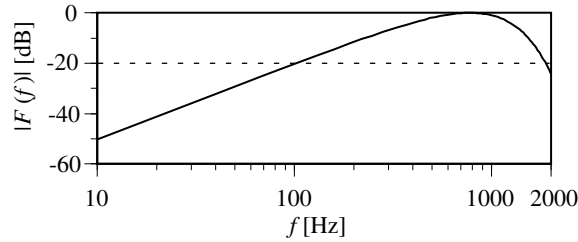


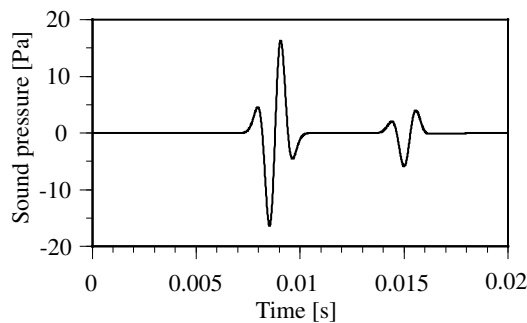
Fig. 6.5 Spectrum of a vibration source.

に、入射波と反射波が明確に分離されていれば、それぞれをフーリエ変換してパワースペクトルを求め、それら比から垂直入射吸音率を求めることができるが [75]、時間長が波の長さ分しか取れないため、十分な周波数離散化幅を得ることができない。また位相を正しく評価することができない。そのため、本研究では伝達関数法を用いることにした。本章では 1500 Hz までを対象とし、その波長の 10 分の 1 程度である 2.5 cm を空間離散化幅とした。時間分離解法を用いるためには、時間離散化幅が小さいことが必要条件であったため、時間離散化幅 Δt は十分小さいと思われる $7.14 \mu\text{s}$ ($CFL = 0.098$) (サンプリング周波数 140 kHz) とした。左端を式 (6.16) で表される振動速度で速度駆動した [128]。3.4.4 に述べた振動速度境界条件を用いている。

$$u(t) = \frac{\beta}{\rho c} \left(12\alpha^2(t - \tau) - 8\alpha^3(t - \tau)^3 \right) \exp(-\alpha(t - \tau)^2) \quad (6.16)$$

各種パラメータは $\tau = 3.57 \text{ [ms]}$, $\alpha = 4 \cdot 10^6$, $\beta = 5.4 \cdot 10^{-10}$ に設定した。各パラメータの意味に関しては、2.6.2 にて述べた。音源のスペクトルを Fig. 6.5 に示す。これはパワースペクトルのピークから -20 dB の点で評価して、100 Hz から 1800 Hz までの周波数が含まれるような音源である。

R0 における入射波と反射波を Fig. 6.6 に示す。全体的に振幅が減衰しているのと同時に、入射波にあった波形前後の小さなディップが、反射波ではなくなっていることが分かる。これは高周波成分の位相が吸音材料の分散性の影響で遅れたためである。ただし高周波成分は吸音による減

Fig. 6.6 The incident and reflected wave at R0 calculated by the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is $7.14 \mu\text{s}$.

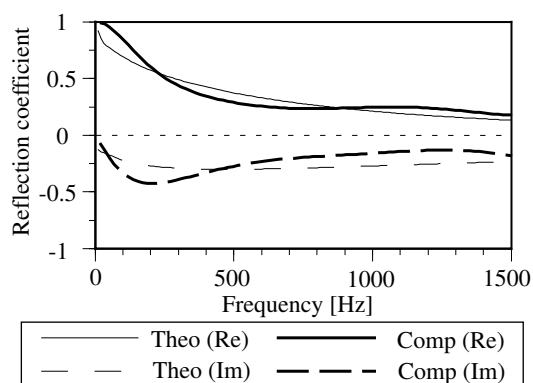


Fig. 6.7 Complex reflection coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is 7.14 [μs].

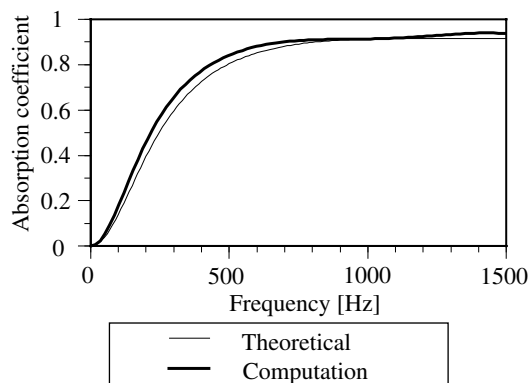


Fig. 6.8 Normal incidence absorption coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is 7.14 [μs].

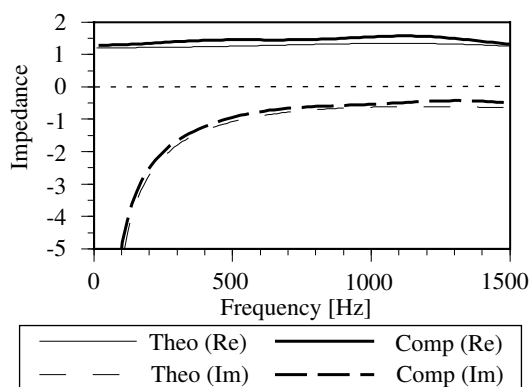


Fig. 6.9 Normal impedances calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is 7.14 [μs].

衰も大きいので、その影響は顕著にはあらわれていない。

伝達関数法によって解析結果から Fig. 6.7 に示す複素音圧反射率を求めた [106]。Theo が理論解、Comp が解析結果を表す。(Re) は実数部、(Im) は虚数部である。実数部に関してはよく一致しているものと考えられ、その差は最大でも 0.1 程度である。虚数部は多少傾向が異なっており、計算結果において 250 Hz 付近に、理論解にはないディップが見られる。同様に Fig. 6.9 に示すインピーダンスを求めた。また、反射率の大きさの 2 乗を 1 から引くことによって、Fig. 6.8 に示す垂直入射吸音率を求めた。500 Hz 付近に最大 0.05 程度の差異がみられるが、実用上は十分な精度であると思われる。

(補足: 理論解について [75, 129])

流動抵抗 $R[\text{Ns}/\text{m}^4]$ の材料の比インピーダンスは以下の式で表される。

$$z_{m0} = \left(1 - \frac{iR}{\rho\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.17)$$

背後に剛壁を持つ場合は、材料の厚さを $d_{mat}[\text{m}]$ として

$$z_{m1} = -iz_{m0} \cot\left[d_{mat}\frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{iR}{\rho\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (6.18)$$

である。背後に厚さ d_{air} [m] の空気層を持つ場合は、空気層の比インピーダンスが

$$z_{a1} = -i \cot\left(d_{air} \frac{\omega}{c}\right) \quad (6.19)$$

であることより、

$$z_{m2} = \frac{-iz_{a1}z_{m1} + z_{m0}^2}{z_{a1} - z_{m1}} \quad (6.20)$$

となる。複素音圧反射率 r は、

$$r = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (6.21)$$

であり、吸音率 α とは

$$\alpha = 1 - |r|^2 \quad (6.22)$$

のような関係にある。

6.2.3 音響管での検討 必要時間離散化幅

時間離散化幅を小さく取ることが、時間分離解法を用いる上での条件である。どの程度の時間離散化幅が必要とされているのかを検討するため、時間幅を 10 倍以上の $71.4 \mu\text{s}$ ($CFL = 0.98$) とした。R0 における入射波と反射波を Fig. 6.10 に示す。同時に先ほどの $\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$ のときの波形を参照解として示す。振幅・波形とも前の検討とは全く異なり、吸音層が十分に効いていないように思われる。複素音圧反射率を Fig. 6.11 に示す。特に実部の差が大きいことが分かる。垂直入射吸音率を Fig. 6.12 に示す。このように、全く一致しないことが分かる。低周波数域だけでなく、高周波数域も一致していない。

次に 3 次元の差分法の安定条件程度である時間離散化幅 $35 \mu\text{s}$ ($CFL = 0.48$) とした。R0 における入射波と反射波を Fig. 6.13 に示す。振幅は時間離散化幅 $7.14 \mu\text{s}$ のものに近づいているものの、差異が見られる。複素音圧反射率を Fig. 6.14 に示す。Fig. 6.11 ほどではないにしても、高周波数域で実数部の乖離が大きい。垂直入射吸音率を Fig. 6.15 に示す。低周波数域・高周波数域ともに改善が見られ、その差は最大 0.1 程度である。

このように Rayleigh モデルを用いて吸音材の内部伝搬を解く際には、必要とする精度に応じて時間離散化幅を通常の空気中の伝搬に比べて小さく取る必要がある。 $CFL = 0.098$ から 0.98 まで変化させると、理論解に漸近したため誤差の影響がなければ時間離散化幅を小さくすればするほど精度がよくなるものと思われる。これは Rayleigh モデルの導入の際に、時間分離解法を用いたためである。差分法においても同様の現象が起こるかは不明であるが、文献 [78] では、1 次元

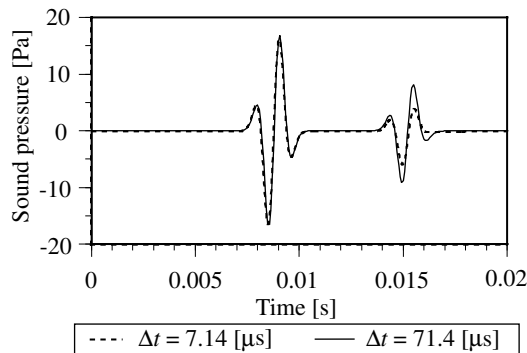


Fig. 6.10 The incident and reflected wave at R0 calculated by the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is $71.4 \mu\text{s}$.

の検討で 1 kHz までの吸音率を求めるのに、空間離散化幅 0.0025 m(波長 130 分割)、時間離散化幅はサンプリング周波数が 388.060 kHz と非常に細かく離散化している。

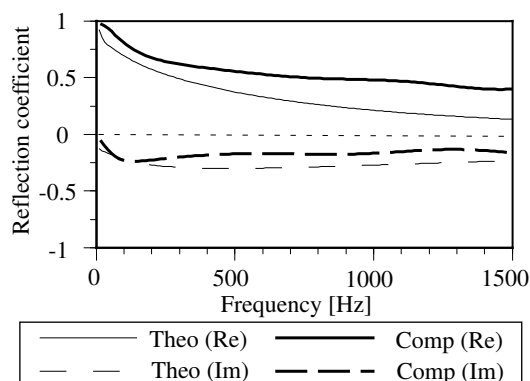


Fig. 6.11 Complex reflection coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is 71.4 $[\mu\text{s}]$.

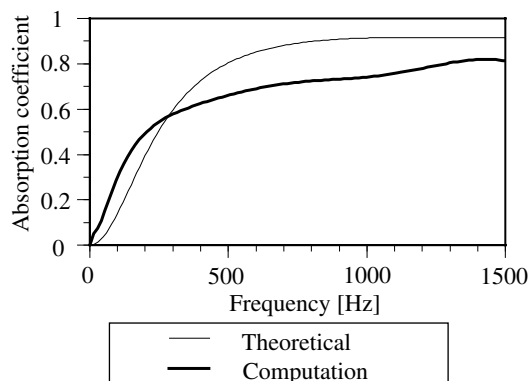


Fig. 6.12 Normal incidence absorption coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is 71.4 $[\mu\text{s}]$.

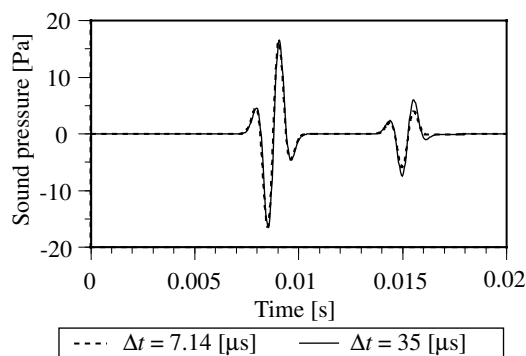


Fig. 6.13 The incident and reflected wave at R0 calculated by the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is 35 $[\mu\text{s}]$.

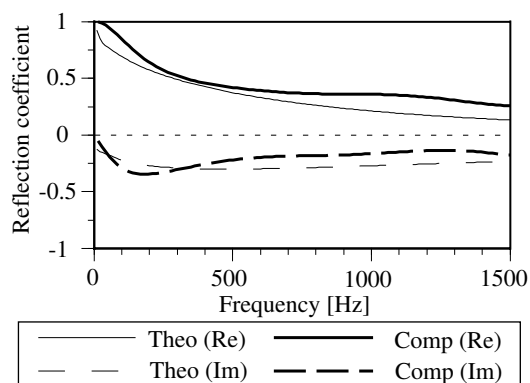


Fig. 6.14 Complex reflection coefficients the theory and the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is 35 $[\mu\text{s}]$.

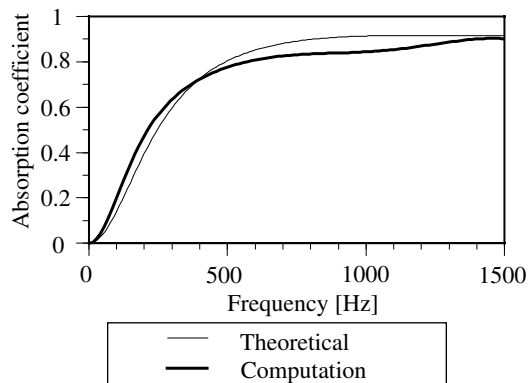


Fig. 6.15 Normal incidence absorption coefficients the theory and the CIP method according to the Rayleigh model under condition that Δt is 35 $[\mu\text{s}]$.

6.2.4 音響管での検討 背後に空気層を持つ場合

Fig. 6.16 のように、右端に厚さ 10 cm の吸音材の背後に空気層 10 cm を取った場合の検討を行った。各種パラメータは同じで、時間離散化幅は $7.14\mu\text{s}$ とした。R0 における入射波と反射波を Fig. 6.17 に示す。背後が剛壁の場合と異なり反射波の波形後部のディップが残っていることが分かる。複素音圧反射率を、Fig. 6.18 に示す。剛壁の場合よりもよく一致している。同様に Fig. 6.20 に示すインピーダンスを求めた。また Fig. 6.19 に垂直入射吸音率を示す。こちらもよく一致している。このように時間離散化幅が小さければ多層である場合にも本手法を用いることができる。

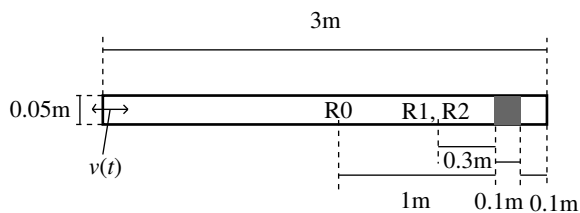


Fig. 6.16 Geometry of a sound tube with a porous materials (thickness 0.1 m) and an air layer (0.1 m thickness).

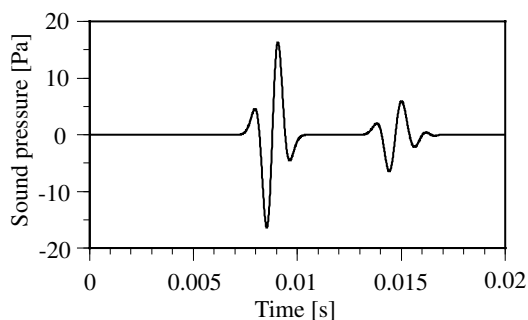


Fig. 6.17 The incident and reflected wave at R0 calculated by the CIP method according to the Rayleigh model with a porous material (0.1 m thickness) and an air layer (0.1 m thickness) under condition that Δt is $7.14 [\mu\text{s}]$.

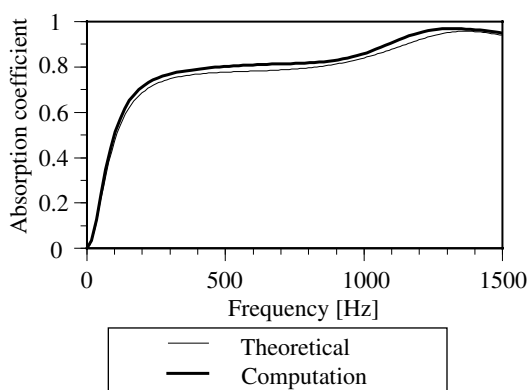
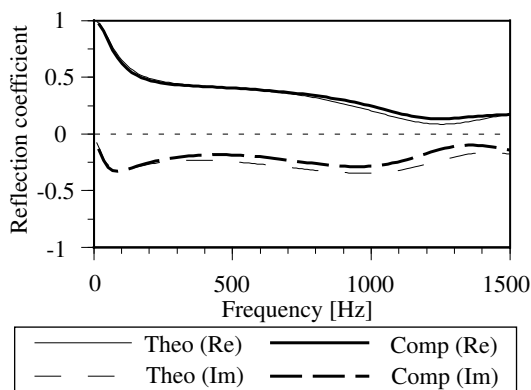


Fig. 6.18 Complex reflection coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model with a porous material (0.1 m thickness) and an air layer (0.1 m thickness) under condition that Δt is $7.14 [\mu\text{s}]$.

Fig. 6.19 Normal incidence absorption coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model with a porous material (0.1 m thickness) and an air layer (0.1 m thickness) under condition that Δt is $7.14 [\mu\text{s}]$.

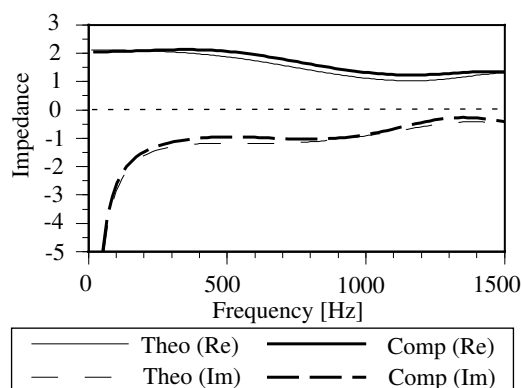


Fig. 6.20 Normal impedances calculated by the theory and the CIP method with a porous material (0.1 m thickness) and an air layer (0.1 m thickness) under condition that Δt is 7.14 [μs].

6.3 周波数特性を持った境界条件 フィルターを用いる方法

前節で吸音材をモデリングする手法を導入した。この手法は物理モデルに基づいているので、斜め方向の入射にも対応できる物理的な境界条件である。しかしながら、このモデルは多孔質材のモデルであるため、材料の種類(吸音のメカニズム)が変わればまた他のモデルを考えなければならない。Rayleigh モデルを改良して、Miki モデル [81, 82] に近似させる手法 [78] が提案されているが、試行錯誤が必要である。

これに対し、Delany-Bazley モデル [80] や Miki モデルなどで実験式が提案されているような位相特性までも含む複素数のインピーダンスを直接与えることができれば、様々な種類の材料に統一に対応することができる。このような複素数の意味でのインピーダンスを与える手法は次の2通りが考えられる。

方法1 まず、Fig. 6.21 に示すようにインピーダンスの周波数特性を一定とみなせるある帯域 (1/3 オクターブバンドや 1/1 オクターブバンド) で分割し、全周波数帯域でインピーダンスを一定として、分割した帯域数分の異なるインピーダンスについて、複数のインパルス応答を求める。これに帯域フィルタリングを施すことで、帯域別の時系列応答を求め、それを合成することでインパルス応答を求めるものである。この手法は帯域中の変化が十分に小さければ正確であるが、フィルタリングの際に、カットオフ周波数付近にオーバーラップが生じるといった問題や、連続的に吸音率が変化する境界には正確でないという問題がある。また時間領域の手法ではインピーダンスは実数で与えることが多く、虚部の与え方に関しては不明確である。またこの手法は計算負荷が大きくなる。すべて同じ空間離散化幅で検討した場合に

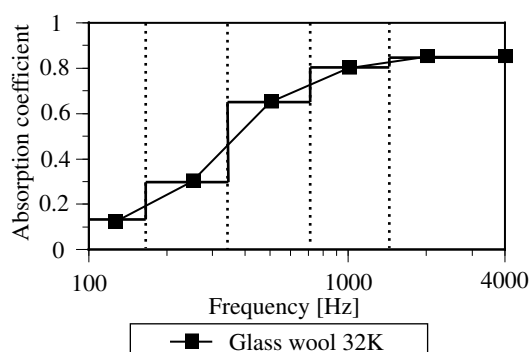


Fig. 6.21 Absorption coefficient by frequency-band divisions.

は分割数分だけ増加する。1/1 オクターブバンドで分割して空間離散化幅をそれに合わせて変化させても、計算負荷の増加は避けられない。

方法2 境界面への入射と反射をそれぞれ入力と出力とするフィルターを畳み込むことで、周波数特性を持つ出力を得るものである。この手法は膨大な理論的蓄積のあるフィルターの設計理論を用いることで、ローカルリアクティブが仮定できるような材料であれば、位相特性も含めてどのような周波数特性を持つ材料もモデリングすることができる。差分法分野で用いられているバネマス系によって周波数特性を持たせる手法は、バネマスシステムがひとつの場合、2次のIIRフィルターであることを後に示す。この手法は、実験とのよい対応を見ている [76]。ただしバネマス系を用いる手法は設計にある程度ノウハウが必要である。

ここでは方法2をCIP法に導入し、周波数特性を持つ境界条件を簡便にモデリングすることを目的とする。

6.3.1 概要

CIP法での境界条件は、例えば1次元音場の正方向に移流する成分に対する境界条件は入力を f_x^- 、出力を f_x^+ とすることで、

$$f_x^+ = \frac{1-z}{1+z} f_x^- = r f_x^- \quad (6.23)$$

となる。ここで r を反射率と考えれば、Fig. 6.22 に示すように境界をひとつのシステムと考えた場合の伝達関数は、境界面の反射率のみで定義することができる。CIP法と同じく反射率で境界条件を規定することのできるデジタルホイヘンスモデルでは、デジタルフィルターによって吸音率の周波数特性を与える手法が提案されている [96]。そこでCIP法でもデジタルフィルターによる方法を導入することにする。これはFDTD法のような粒子速度と音圧の時間方向の位置がずれている手法を用いた場合には直接的な導入は難しいが、CIP法では入射と反射が明確に区別できるため導入は容易である。周波数領域では r は

$$r(\omega) = \frac{1-z(\omega)}{1+z(\omega)} \quad (6.24)$$

であるので、入力列 f_x^- に対する出力 f_x^+ の振幅特性 $|r(\omega)|$ ・位相特性 $\angle r(\omega)$ が伝達関数 r になるようなフィルターを設計し、周波数特性を与えることができる。ここでは述べないが、微係数に関しても適切に畳み込みを行う必要があることに注意されたい。

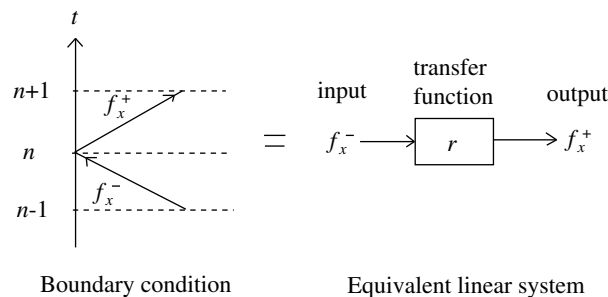


Fig. 6.22 Boundary condition equivalent to the linear system.

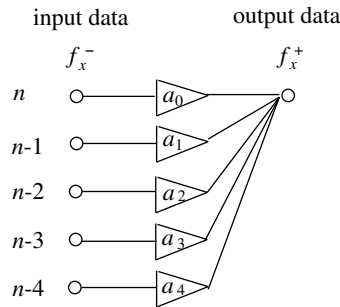


Fig. 6.23 Block diagram of FIR filter.

6.3.2 音響管での検討 直線位相 FIR フィルターの次数

まずは FDTD 法でよく用いられる実数のインピーダンスのように、位相特性を変化させることなく吸音率を与えるための手法として、群遅延特性が一定となる直線位相 FIR (Finite Impulse Response) フィルターを設計する。 $N - 1$ 次の FIR フィルターを導入すると正方向に移流する成分に対する境界条件は、時間ステップ n の出力 $f_x^+(n)$ は入力列 $f_x^-(n)$ に対して

$$f_x^+(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k) f_x^-(n-k) \quad (6.25)$$

となる。ブロック線図は Fig. 6.23 に示すとおりである。位相特性は直線位相特性 $\angle r(\exp(-i\omega)) = -\omega(N-1)/2$ を仮定するため、フィルターの係数列は対称となる。ここで ω は規格化周波数である。そのため群遅延 τ はサンプリング周期を T として

$$\tau(\omega) = \frac{(N-1)T}{2} \quad (6.26)$$

で一定であり、フィルターの次数の増加とともに群遅延が大きくなっていく。また FIR フィルターであるので、安定性が保証されており、直線位相特性を実現することができるため、波形の崩れがないという利点を有する。一方で急峻な周波数特性を与えるためには次数を大きくしなければならないという欠点もある。

ここでは FIR フィルターの設計法の中で最も基礎的な、フーリエ級数展開によって近似誤差の自乗平均値を最小にする「打ち切りフーリエ級数法」を用いて設計する [149]pp. 68-74, [164]pp. 108-109。この手法は単純であるので、FFT のライブラリーさえあれば、ほとんどコードを書くことなく実装が可能である。このようなフィルターは以下のようにして設計する。 $r_d(k)$ を周波数領域での設計仕様として、これを IFFT すると、

$$\alpha(j) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} |r_d(k)| e^{i(2\pi/M)kj} \quad (6.27)$$

のように時間領域での係数が得られる¹。これは対称性により必ず実数となる。しかしながら、このようにして作られたフィルターは零位相フィルターであるため因果的でない²。そこでフィルターの係数 $r(k)$ を、因果性を考慮して $(N-1)/2$ だけ次数をシフトすることにする [139] p. 172-176。すなわち

$$r(0) = r(N-1) = \alpha \left(\frac{N-1}{2} \right)$$

¹ FFT を用いるため、 $r_d(k)$ の次数は 2 のべき乗にすることが多い

² 未来の入力が必要になる

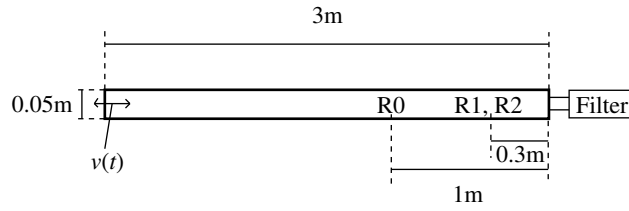
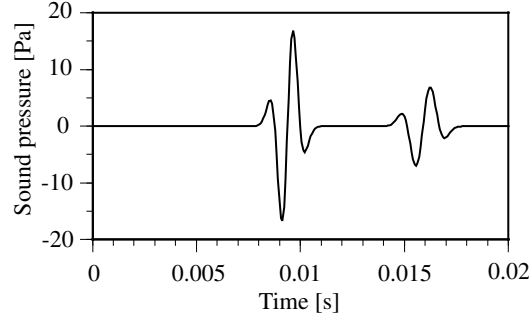


Fig. 6.24 Geometry of sound tube with a boundary using filter.

Fig. 6.25 Incident wave and reflected wave at R0 calculated by the CIP method using 20th order FIR filter under condition that Δt is 71.4 $[\mu\text{s}]$.

$$\begin{aligned}
 r(1) &= r(N-2) = \alpha \left(\frac{N-1}{2} - 1 \right) \\
 &\quad \dots \\
 r\left(\frac{N-1}{2}\right) &= \alpha(0)
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

のようにする。ただしこの手法はある程度滑らかな吸音特性を持つ場合には利用することができたが、急峻な吸音特性を持つ場合には利用することができなかった。そのため次数の検討以外の検討では Remez の交換アルゴリズムによるミニマックス近似の方法を用いている。

Fig. 6.24 に示す音響管で検討を行った。形状・音源・受音点・設定パラメータは前述した通りである。ただし時間離散化幅は 71.4 μs (サンプリング周波数 14 kHz) とした。右端の境界にフィルターを接続した。設計する仕様は、剛壁密着時の多孔質材の吸音特性を理想化して垂直入射吸音率 α が以下のような特性になるように実数のインピーダンスを与えた。

$$\alpha = f \quad (0 \leq f \leq 1) \tag{6.29}$$

$$= 1 \quad \left(1 \leq f \leq \frac{f_s}{2}\right) \tag{6.30}$$

ここで f は周波数 [kHz]、 f_s はサンプリング周波数 [kHz] とした。フィルターの次数は 20 次とした。直線位相であるため、設計する次数は 10 個である。

R0 における入射波と反射波を、Fig. 6.25 に示す。このように直線位相特性であるため波形の崩れはないことが分かる。ここでフィルターの次数に関する検討を行った。特に工夫を用いない CIP 法は対象とする周波数よりもサンプリング周波数を大きく取る必要があるため、広帯域において周波数特性を規定する必要がある³。これに対して、吸音材は 0 - 1 kHz の範囲で吸音率が大きく変化するものが多いため、フィルターとしてはある程度急峻なものが必要である。ここでは設計が簡単であることと、安定性を重視して FIR 型のフィルターを用いたために次数を大きくする必要がある。

³ 例えば最小波長 5 分割とした場合には $CFL = 1$ でもサンプリング周波数を対象周波数の 5 倍にする必要がある

Table 6.1 Designed filter coefficients.

order	6	8	10	12	16	20
a_0	-0.07953	-0.06484	-0.04876	-0.03284	-0.00679	0.006452
a_1	-0.09130	-0.79530	-0.06484	-0.04876	-0.18490	0.001581
a_2	-0.09893	-0.09130	-0.79530	-0.06484	-0.03284	-0.00679
a_3	-0.10156	-0.09893	-0.09130	-0.79530	-0.04876	-0.18490
a_4	-0.09893	-0.10156	-0.09893	-0.09130	-0.06484	-0.03284
a_5	-0.09130	-0.09893	-0.10156	-0.09893	-0.79530	-0.04876
a_6	-0.07953	-0.09130	-0.09893	-0.10156	-0.09130	-0.06484
a_7	-	-0.79530	-0.09130	-0.09893	-0.09893	-0.07953
a_8	-	-0.06484	-0.79530	-0.09130	-0.10156	-0.09130
a_9	-	-	-0.06484	-0.79530	-0.09893	-0.09893
a_{10}	-	-	-0.04876	-0.06484	-0.09130	-0.10156
a_{11}	-	-	-	-0.04876	-0.79530	-0.09893
a_{12}	-	-	-	-0.03284	-0.06484	-0.09130
a_{13}	-	-	-	-	-0.04876	-0.07953
a_{14}	-	-	-	-	-0.03284	-0.06484
a_{15}	-	-	-	-	-0.18490	-0.04876
a_{16}	-	-	-	-	-0.00679	-0.03284
a_{17}	-	-	-	-	-	-0.18490
a_{18}	-	-	-	-	-	-0.00679
a_{19}	-	-	-	-	-	0.001581
a_{20}	-	-	-	-	-	0.006452

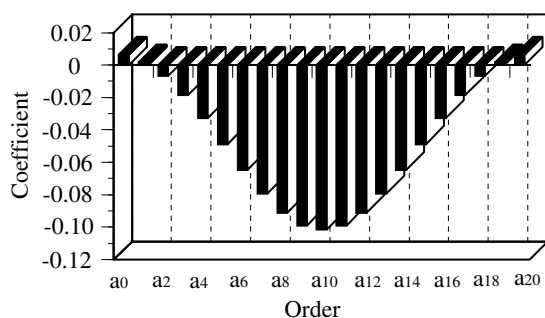


Fig. 6.26 Filter coefficients of 20th order FIR filter.

そこで、どの程度の次数が必要とされているのかに関する検討を行った。ただし、群遅延特性 $\tau(\omega) = (N - 1)\Delta t/2$ が整数となるように、 N が奇数すなわち偶数次数のフィルターを選ぶことが一般的であるため、フィルターの次数は偶数とし、6, 8, 10, 12, 16, 20 次で検討を行った。設計にはサンプリング周波数の半分である 7 kHz までを 128 点で等分割した値を仕様として用いたフィルターの係数は Table 6.1 のようであり、規則性が見て取れる。20 次の場合をグラフで示したものが Fig. 6.26 である。 a_{10} を中心に対称となっている。群遅延特性は、周波数によらず $\tau(\omega) = 10\Delta t$ となる。異なる次数に対する、垂直入射吸音率の比較を Fig. 6.27 に示す。FIR フィルターを用いているため、比較的高い次数 (16 次以上) が必要とされていることが分かる。ただし時間離散化幅は先ほどの Rayleigh モデルで必要とされていたものよりもはるかに大きく取れることに注意され

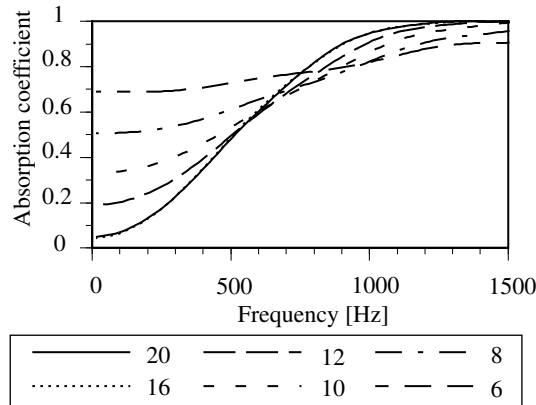


Fig. 6.27 Comparison of absorption coefficients with order of FIR filter.

たい。

6.3.3 音響管での検討 FIR フィルターによる Rayleigh モデル

前節ではある程度理想化した吸音特性に関して検討を行った。その結果ある程度高い次数が必要とされていることが分かった。ここではより具体的な検討を行うため、流動抵抗 $R = 15000$ [Ns/m⁴] で 10 cm の厚みを持つ吸音材の理論解の複素音圧反射率の振幅をフィルターの特性として与えることにする。時間離散化幅 $71.4\mu\text{s}$ (サンプリング周波数は 14 kHz) とする。直線位相の FIR フィルターを用いて振幅特性のみをあわせることにするのであるが、反射率 r が 0 より小さくなると設計が面倒である。今回用いる理論解は $\omega \rightarrow 0$ のときに、 z の実部は有界であるが、虚部は $-\infty$ に発散するため、 $r \rightarrow -1$ となる。そこで位相を $-\pi$ 分回転させて $r' = e^{-i\pi}r = -r$ とおき、

$$f_x^- = -r' f_x^+ \quad (6.31)$$

とすれば $r' > 0$ とすることができる。このようにして設計したフィルターの係数 r' にすべて -1 をかけることで実際の係数 r とする。反射率 r' の振幅特性は Fig. 6.28 のようである。これを 10 Hz 刻みでサンプリングして、フィルターの特性として与えることにする。設計されたフィルターの振幅特性も同時に示している。本検討では吸音率の特性が急峻すぎ、「打ち切りフーリエ級数法」による設計が困難であったので、フリーの行列演算ソフトである Scilab[143] の Signal Processing toolbox にある Minimax 近似で Remez の交換アルゴリズムを用いて、振幅特性を近似する remezb 関数を用いて設計を行った。フィルターの次数は 40 次で、設計された零位相フィルターを次数の半分の 20 次分シフトすることで、因果性を満たす直線位相 FIR フィルターにしている。重み関

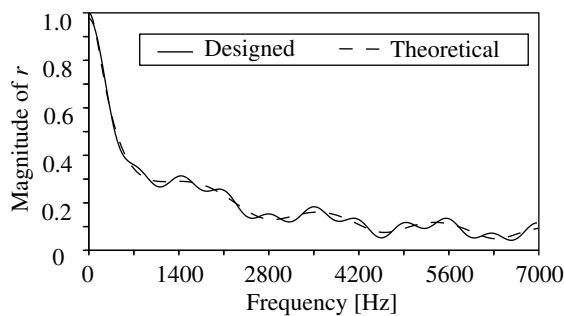
Fig. 6.28 Designed and theoretical magnitude of r' .

Table 6.2 Designed 40th order FIR filter coefficients (0-20th order).

a_0	-0.0132312	a_{11}	-0.0118217
a_1	-0.0034942	a_{12}	-0.0294295
a_2	-0.0039602	a_{13}	-0.0241136
a_3	-0.0049124	a_{14}	-0.0174545
a_4	-0.0053332	a_{15}	-0.0220197
a_5	-0.0054911	a_{16}	-0.0238320
a_6	-0.0079969	a_{17}	-0.0345779
a_7	-0.0080297	a_{18}	-0.0467028
a_8	-0.0106375	a_{19}	-0.0902092
a_9	-0.0106209	a_{20}	-0.1998744
a_{10}	-0.0146135		

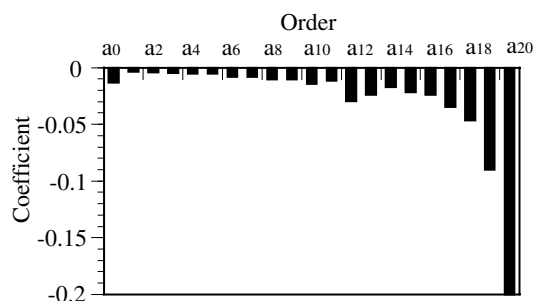
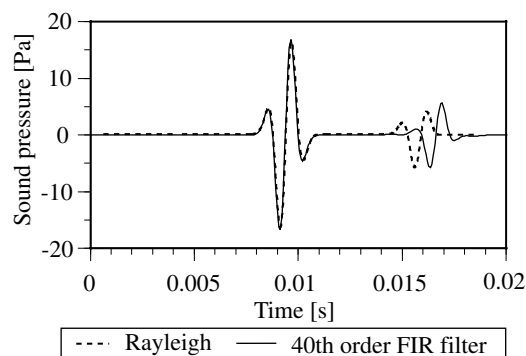


Fig. 6.29 Filter coefficient of 40th order FIR filter (0-20th order).

Fig. 6.30 Incident wave and reflected wave at R0 calculated by the CIP method using 40th order FIR filter under condition that Δt is 71.4 $[\mu\text{s}]$.

数はすべて1としたが、これを適切に設計することで次数を低減できる可能性がある。Table 6.2のような係数を持つフィルターを設計した⁴。Fig. 6.29に係数の図を示す。

R0における入射波と反射波を、Fig. 6.30に示す。こちらも直線位相特性であるため波形の崩れはないことが分かる。同時に $\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$ での Rayleigh モデルの解析解を示しているが、ここでは材料の分散性の影響でなくなっていた反射波の波形後部のディップが出ていることが分かる。また Fig. 6.32に示す垂直入射吸音率を求めた。同じ時間離散化幅で Rayleigh モデルで吸音材をモデリングした場合には Fig. 6.12のように全く合わなかった垂直入射吸音率がよい対応を見せていることが分かる。Fig. 6.31に示す複素音圧反射率には群遅延特性 $20\Delta t$ の 700 Hz に対応する周

⁴ 対称であるので 20 次までの次数を示した。($a_{21} = a_{19} \dots$)

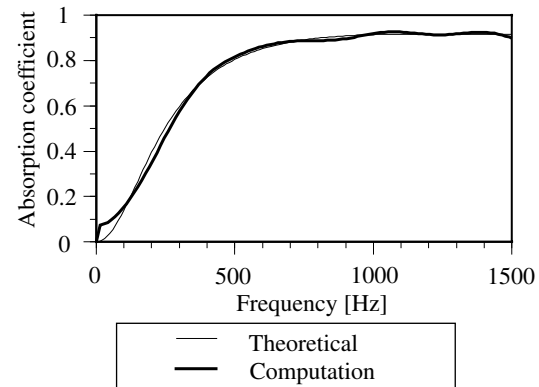
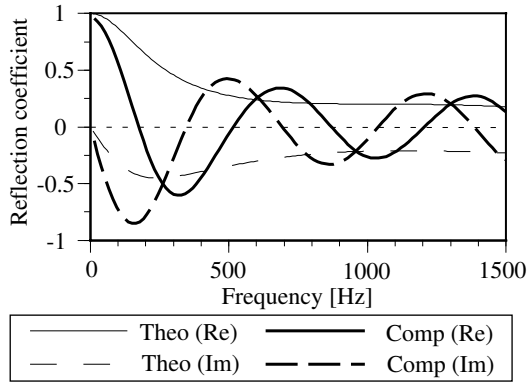


Fig. 6.31 Complex reflection coefficients calculated by the CIP method using 40th order FIR filter under condition that Δt is 71.4 [μs].

Fig. 6.32 Normal incidence absorption coefficients calculated by the CIP method using 40th order FIR filter.

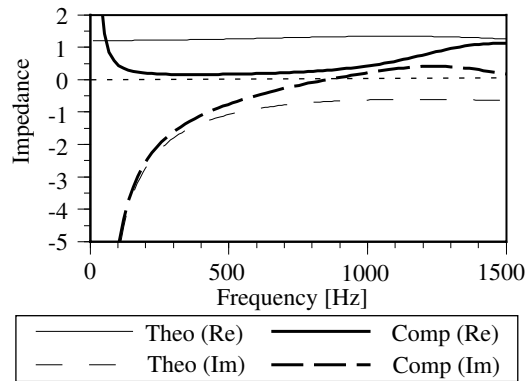


Fig. 6.33 Normal impedance calculated by the CIP method using 40th order FIR filter under condition that Δt is 71.4 [μs].

期が見え、理論解と異なることが分かる。Fig. 6.33 に示すインピーダンスを求めた。実数部は全周波数域で傾向が異なっている。虚数部の低周波数成分は理論解と一致しているものの、500 Hz 以上では大きく異なっている。これは Rayleigh モデルが高周波数成分が遅れる材料の分散性の影響で非線形位相特性となっているのに、線形位相特性を持つ FIR フィルターを用いているためである。

6.3.4 音響管での検討 IIR フィルターによる Rayleigh モデル

次に IIR フィルターを用いて設計を行う。IIR フィルターは FIR フィルターと異なり、過去の入力だけでなく過去の出力も用いて次ステップの出力を算出する。すなわち

$$f_x^+(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k)f_x^-(n-k) + \sum_{k=1}^{N-1} b(k)f_x^+(n-k) \quad (6.32)$$

のように畳み込みを行うことになる。ブロック線図は Fig. 6.34 に示すとおりである。

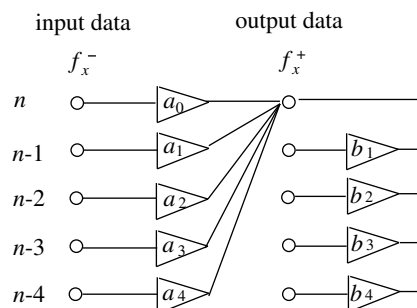


Fig. 6.34 Block diagram of IIR filter.

6.3.4.1 20次IIRフィルター

時間離散化幅は $71.4\mu\text{s}$ (サンプリング周波数 14 kHz) として同様に 10 Hz 刻みで Rayleigh モデルの振幅特性を与えて設計すると、Fig. 6.35 のようになる。Fig. 6.28 に示す FIR フィルターの際の設計特性よりも高周波数域までよく一致している。本検討では、Scilab の Signal Processing toolbox にある最小 2 乗近似で振幅特性を近似する yulewalk 関数を用いて設計を行った。フィルターの次数は 20 次である。Table 6.3 のような係数を持つフィルターを設計した。R0 における入射波と反射波を、Fig. 6.36 に示す。時間離散化幅が 10 倍なのにも関わらず、同時に示す $\Delta t = 7.14\mu\text{s}$ の Rayleigh モデルでの検討の波形とよく一致していることが分かる。また Fig. 6.38 に対応する垂直入射吸音率を示す。このように急峻に変化している 0 Hz 付近で最大 0.08 程度の差異が見られるが、実用上十分な精度である。複素音圧反射率を Fig. 6.37 に示す。Fig. 6.7 に示す Rayleigh モ

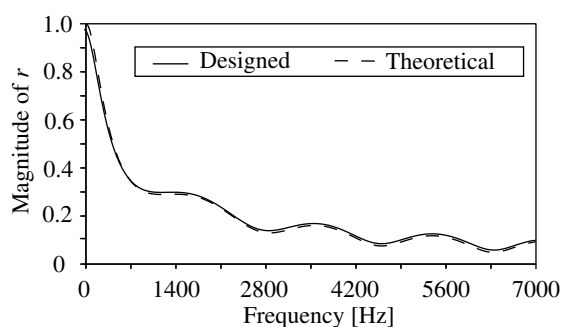
Fig. 6.35 Designed and theoretical magnitude of r' .

Table 6.3 Designed 20th order IIR filter coefficients.

a_0	0.1550594	a_{11}	-0.0475527	b_0	1	b_{11}	0.1182796
a_1	0.0935020	a_{12}	0.0332457	b_1	-0.2603119	b_{12}	0.3600686
a_2	-0.0883529	a_{13}	0.0272808	b_2	-0.8990561	b_{13}	-0.0573298
a_3	-0.1051607	a_{14}	0.0150707	b_3	-0.1941083	b_{14}	-0.0409018
a_4	-0.0619459	a_{15}	0.0002471	b_4	0.0770479	b_{15}	-0.0119976
a_5	0.0029945	a_{16}	-0.0002790	b_5	0.2644269	b_{16}	-0.0075572
a_6	0.0421851	a_{17}	0.0008991	b_6	0.2504112	b_{17}	-0.0025664
a_7	0.0252307	a_{18}	-0.0167224	b_7	-0.0940661	b_{18}	-0.0018740
a_8	0.0307799	a_{19}	0.0001673	b_8	-0.115093	b_{19}	-0.0033532
a_9	0.0117393	a_{20}	0.0075862	b_9	0.1130049	b_{20}	-0.0014956
a_{10}	-0.0800226			b_{10}	-0.4460271		

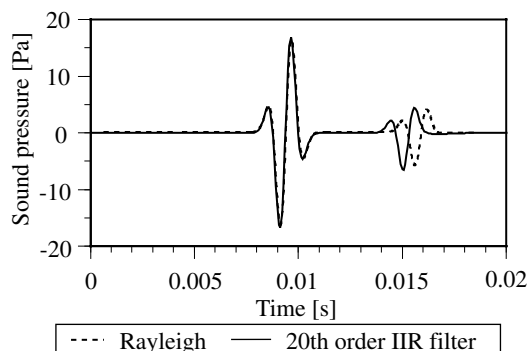


Fig. 6.36 The incident and reflected wave at R0 calculated by the CIP method using 20th order IIR filter compared to the Rayleigh model.

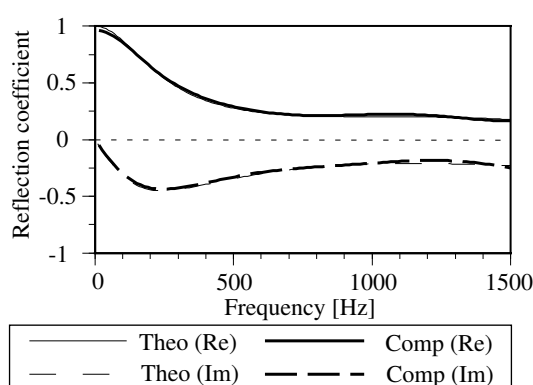


Fig. 6.37 Complex reflection coefficients calculated by the CIP method using 20th order IIR filter.

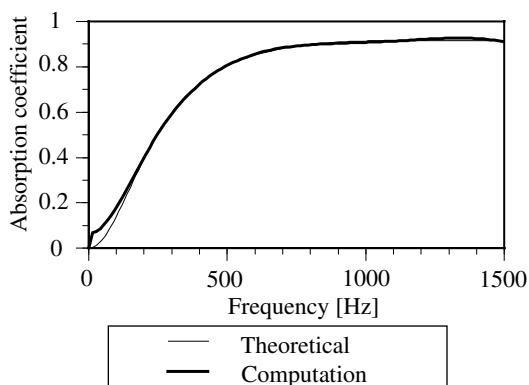


Fig. 6.38 Normal incidence absorption coefficients calculated by the CIP method using 20th order IIR filter.

デルで求めた複素音圧反射率よりもよく一致していることが分かる。

6.3.4.2 8次 IIR フィルター

一般に IIR フィルターを用いることで FIR フィルターを用いた場合に比べて次数が低減できるとされている。ここでは次数に関する検討を行う。前節では 20 次の IIR フィルターを用いて検討を行ったが、8 次の IIR フィルターを設計した。yulewalk により Table 6.4 のような係数を持つフィルターを設計した。R0 における入射波と反射波を、Fig. 6.39 に示す。波形で見ると 20 次の場合の波形 Fig. 6.36 とそれほど差異がないように見える。しかしながら Fig. 6.41 に示す垂直入射吸音率を見ると低域で合っていないことが分かる。複素音圧反射率を Fig. 6.40 に示す。虚数部

Table 6.4 Designed 8th order IIR filter coefficients.

a_0	0.157004	a_5	-0.0076423	b_0	1	b_5	0.0083586
a_1	0.0648136	a_6	-0.0101347	b_1	-0.4500440	b_6	-0.0023681
a_2	-0.0208646	a_7	0.0014524	b_2	-0.3056624	b_7	-0.0069593
a_3	-0.0165949	a_8	0.0337631	b_3	-0.0334524	b_8	0.0393889
a_4	-0.0203572			b_4	-0.0422789		

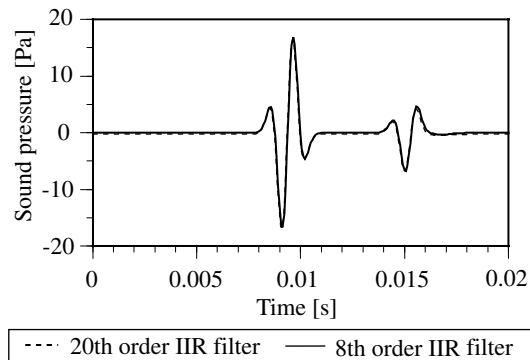


Fig. 6.39 The incident and reflected wave at R0 calculated by the CIP method using 8th order IIR filter.

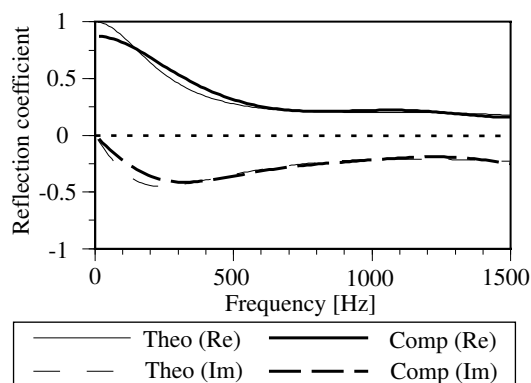


Fig. 6.40 Complex reflection coefficients calculated by the CIP method using 8th order IIR filter.

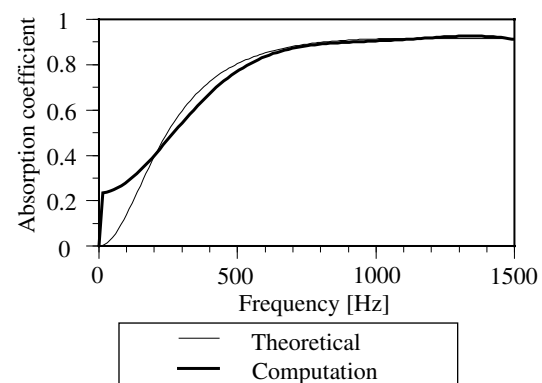


Fig. 6.41 Normal incidence absorption coefficients calculated by the CIP method using 8th order IIR filter.

はおおむね一致しているが、実数部が 0 Hz 付近でずれ、これが垂直入射吸音率のずれに影響しているように思われる。このように IIR フィルターを用いても吸音特性によっては劇的に次数を低減することはできないことがわかる。

6.3.5 音響管での検討 IIR フィルターによる Miki モデル

IIR フィルターを用いることで位相特性まで含めて、Rayleigh モデルに合わせることができたことがわかった。そこで Rayleigh モデルに次いでよく使われる実験的に流動抵抗とインピーダンスの関係を整理した Miki モデル [81, 82] についても検討を行った。時間離散化幅は $71.4\mu\text{s}$ として同様に 10 Hz 刻みで理論特性を与えて設計すると Fig. 6.42 のようになる。フィルターの次数は前節での検討を踏まえて 20 次とした。Rayleigh モデルとは特性が異なるものの、こちらも高周波数域までよく一致していることが分かる。Table 6.5 に係数を示す。R0 における入射波と反射波を、Fig. 6.43 に示す。Rayleigh モデルとは異なっている。また Fig. 6.45 に対応する垂直入射吸音率を示す。0 Hz 付近を除いてよく一致している。Fig. 6.44 に示す複素音圧反射率も全周波数域でよく一致している。

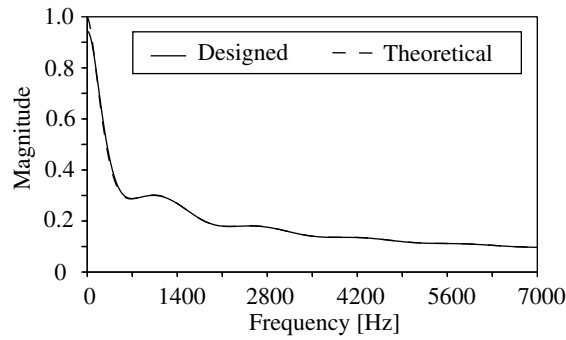
Fig. 6.42 Designed and theoretical magnitude of r' .

Table 6.5 Designed 20th order IIR filter coefficients.

a_0	0.1681531		a_{11}	-0.0270521		b_0	1		b_{11}	-0.3637948
a_1	-0.3948978		a_{12}	0.0073090		b_1	-2.9593879		b_{12}	0.0833839
a_2	0.3714845		a_{13}	-0.0078495		b_2	3.6359700		b_{13}	-0.0089162
a_3	-0.1269014		a_{14}	0.0059503		b_3	-2.1551767		b_{14}	0.0051768
a_4	-0.1265922		a_{15}	-0.0023917		b_4	-0.1521641		b_{15}	-0.0029474
a_5	0.2596532		a_{16}	0.0004727		b_5	1.8434598		b_{16}	0.0017965
a_6	-0.2581878		a_{17}	0.0017206		b_6	-2.3725507		b_{17}	-0.0007942
a_7	0.1916218		a_{18}	-0.0036893		b_7	2.0529609		b_{18}	0.0005359
a_8	-0.0972453		a_{19}	0.0003962		b_8	-1.3143248		b_{19}	-0.000649
a_9	-0.0234993		a_{20}	0.0007859		b_9	0.2368921		b_{20}	0.0001215
a_{10}	0.0662665					b_{10}	0.476241			

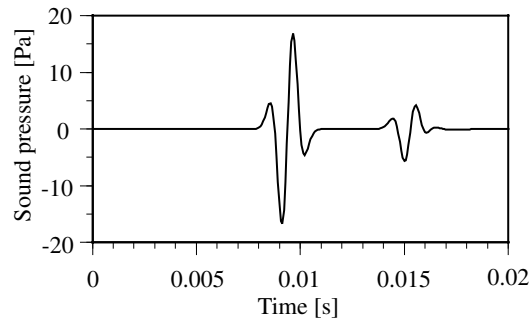


Fig. 6.43 The incident and reflected wave at R0 calculated by the CIP method using 20th order IIR filter (Miki model).

6.3.6 バネマス近似のフィルターとしての解釈

差分法の分野では、Fig. 6.46のようなバネマス系のモデルを、周波数特性を持つ境界条件として用いており [54]、ある程度のノウハウの蓄積がある。これはIIRフィルターであることを導き、CIP法にそのまま導入することができることを示す。

$$p = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} + kx \quad (6.33)$$

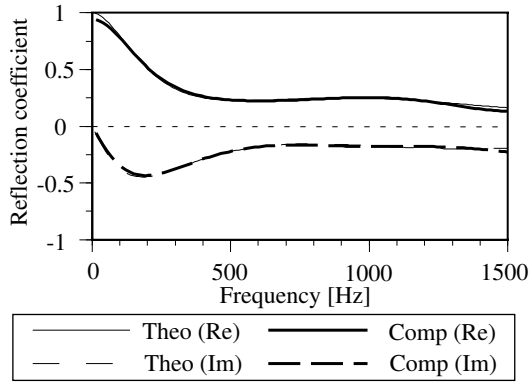


Fig. 6.44 Complex reflection coefficients calculated by the CIP method using 20th order IIR filter (Miki model).

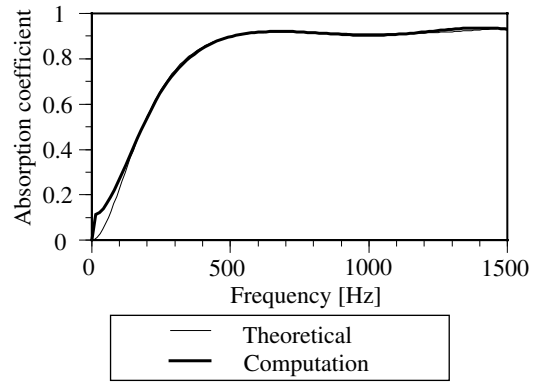


Fig. 6.45 Normal incidence absorption coefficients calculated by the CIP method using 20th order IIR filter (Miki model).

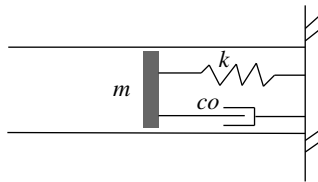


Fig. 6.46 MCK system.

m はマス（質量）、 co は減衰定数、 k はバネ定数である。これは角周波数 ω の定常音場を仮定すると、上の式は時間因子 $\exp(i\omega t)$ を省略して以下のように書くことができる。

$$p = (-m\omega^2 + i\omega co + k)x \tag{6.34}$$

またマスの振動速度が空気の粒子速度に一致することから、以下の式が成り立つ。

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = i\omega x \tag{6.35}$$

ゆえに音響インピーダンス Z は左端の場合

$$Z = \frac{p}{u} = co + i\left(\omega \cdot m - \frac{k}{\omega}\right) \tag{6.36}$$

右端の場合、

$$-Z = \frac{p}{u} = co + i\left(\omega \cdot m - \frac{k}{\omega}\right) \tag{6.37}$$

となり周波数特性を持つことがわかる。マスの方程式を差分近似することで

$$p^n = m \frac{x^{n+\frac{1}{2}} - 2x^{n-\frac{1}{2}} + x^{n-\frac{3}{2}}}{\Delta t^2} + co \frac{x^{n+\frac{1}{2}} - x^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + kx^{n-\frac{1}{2}} \tag{6.38}$$

が得られる。ただし時間のノテーションは文献 [54] とは多少異なる。また粒子速度 u は

$$u^n = \frac{x^{n+\frac{1}{2}} - x^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{6.39}$$

である。 x の初期条件が 0 であることを考慮すると

$$x^{n-\frac{1}{2}} = \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} u^i \tag{6.40}$$

が成り立つ。これらをあわせて上の式は

$$\begin{aligned}
 p^n &= \frac{m}{\Delta t} \frac{x^{n+\frac{1}{2}} - x^{n-\frac{1}{2}} - (x^{n-\frac{1}{2}} - x^{n-\frac{3}{2}})}{\Delta t} + co \frac{x^{n+\frac{1}{2}} - x^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + kx^{n-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{m}{\Delta t} (u^n - u^{n-1}) + cou^n + k\Delta t \sum_{i=0}^{n-1} u^i \\
 &= \left(\frac{m}{\Delta t} + co \right) u^n + \left(k\Delta t - \frac{m}{\Delta t} \right) u^{n-1} + k\Delta t \sum_{i=0}^{n-2} u^i
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

と変形できる。これに

$$p = \frac{f_x^+ - f_x^-}{2} \tag{6.42}$$

$$u = \frac{f_x^+ + f_x^-}{2\rho c} \tag{6.43}$$

を代入して z 変換すると、

$$\frac{F_x^+ - F_x^-}{2} = \left(\frac{m}{\Delta t} + co \right) \frac{F_x^+ + F_x^-}{2\rho c} + \left(k\Delta t - \frac{m}{\Delta t} \right) \frac{F_x^+ + F_x^-}{2\rho c} z^{-1} + k\Delta t \sum_{i=0}^{n-2} \frac{F_x^+ + F_x^-}{2\rho c} z^{-(2+i)} \tag{6.44}$$

となる。ここで F_x^+, F_x^- を f_x^+, f_x^- の z 変換、単位遅延演算子を z^{-1} とした。これを両辺を $2\rho c$ 倍し、適当な変数 A, B, C を用いて以下のように変形しておく。

$$\rho c(F_x^+ - F_x^-) = A(F_x^+ + F_x^-) + B(F_x^+ + F_x^-)z^{-1} + C \sum_{i=0}^{n-2} (F_x^+ + F_x^-)z^{-(2+i)} \tag{6.45}$$

すなわち

$$A = \frac{m + co\Delta t}{\Delta t} \tag{6.46}$$

$$B = \frac{k\Delta t^2 - m}{\Delta t} \tag{6.47}$$

$$C = k\Delta t \tag{6.48}$$

とおく。すると左端では入力が F_x^- 、出力が F_x^+ となるので、伝達関数 $H(z)$ は

$$H(z) = \frac{(\rho c + A) + Bz^{-1} + C \sum_{i=0}^{n-2} z^{-(2+i)}}{(\rho c - A) - Bz^{-1} - C \sum_{i=0}^{n-2} z^{-(2+i)}} \tag{6.49}$$

のようになる。右端では入力が F_x^+ 、出力が F_x^- となるので、

$$H(z) = \frac{(\rho c - A) - Bz^{-1} - C \sum_{i=0}^{n-2} z^{-(2+i)}}{(\rho c + A) + Bz^{-1} + C \sum_{i=0}^{n-2} z^{-(2+i)}} \tag{6.50}$$

のようになる。

$$\sum_{i=0}^{n-2} z^{-(2+i)} = z^{-2} \frac{1 - z^{-(n-1)}}{1 - z^{-1}} \tag{6.51}$$

であることから、伝達関数は左端では、

$$H(z) = \frac{(\rho c + A) - (\rho c + A - B)z^{-1} - (B - C)z^{-2} - Cz^{-(n+1)}}{(\rho c - A) - (\rho c - A - B)z^{-1} + (B - C)z^{-2} + Cz^{-(n+1)}} \tag{6.52}$$

と、右端では

$$H(z) = \frac{(\rho c - A) - (\rho c - A - B)z^{-1} + (B - C)z^{-2} + Cz^{-(n+1)}}{(\rho c + A) - (\rho c + A - B)z^{-1} - (B - C)z^{-2} - Cz^{-(n+1)}} \quad (6.53)$$

とそれぞれ変形でき、 $z^{-(n+1)}$ が時間ステップ n によらず 時間ステップ $= -1$ を指すことを考慮すれば、1つのバネマス系による近似は2次のIIRフィルターであることが分かる。

6.4 吸音境界条件

騒音伝搬問題のような外部問題では、外部問題用の定式化が可能な境界要素法がよく用いられる [99]。道路交通騒音は音源が定常性の音源であるため、遮音壁の挿入損失といった定量的な評価には周波数領域での解析手法が有効である。ところが自動車が行き過ぎた場合⁵ にどう感じるかを実際に聴かせるのには周波数領域の手法では限界があるのは事実であり、時間領域での解析手法も用いられるようになってきている。騒音伝搬問題では A 特性音圧レベルを算出することから、対象となる周波数も人間の聴覚の敏感な範囲である 3 kHz 程度の帯域まで算出しなければならない。遮音壁のような外部問題の解析は、領域を非常に大きくとらなければならないため、空間離散化幅に対して相対的に短い波長を持つ成分 (高周波成分) まで解かなければならない。そのため時間領域で見た場合数値分散が問題となりやすい。例えば文献 [72] において検討されている半地下道路からの騒音放射問題の解析では、高次差分スキームを用いているものの、0.04 m の空間離散化幅で 2.5 kHz の 1/3 オクターブバンドの上限である 3.15 kHz までの応答を求めている。これは最小波長 3 分割程度で、室内音場で標準とされる最小波長 10 分割を大きく下回るものである。ただし周波数領域で応答を見るのであれば、中心差分的手法を用いることでエネルギーが保存されるため、分割数が少ないことによる影響は受けにくい、時間領域での応答を見る際には数値分散の影響を受けるものと考えられる。そのため可聴化を目的とする際には、数値分散による波形変化の影響が問題になる可能性がある。そこで数値分散の小さい CIP 法を用いて少ない分割数で高音域までの応答が正確に計算できれば有用である。

しかしながら、FDTD 法や CIP 法などの領域分割型手法を用いる場合、計算資源の制約上から計算対象領域を有限に打ち切らなくてはならない。この際に設定した人工的な境界上で特別な扱いをしない限り、現実には存在しない反射波を生んでしまい現実的な解は得られない。例えば垂直入射インピーダンス $Z = \rho c$ を境界条件として与えると、斜め入射の場合に反射が起こる。そのため境界上で反射を防ぐ境界条件、無反射境界条件の設定が重要となる。そのような設定を行うための基礎的な検討として、まずは特別な配慮をしないで、吸音境界条件を設定した場合、どのような問題が起こるかを考察した。

6.4.1 1次元音場での完全無反射境界条件

1次元音場では境界に対しては常に平面波入射であるため、ローカルリアクティブを仮定して垂直入射吸音率 1 (垂直入射インピーダンス $Z = \rho c$) を境界条件として与えても反射は起こらないはずである。しかしながら FDTD 法では、音圧と粒子速度の定義点が半グリッドずれているスタガードグリッドを用いていることからローカルリアクティブの仮定が厳密に成立しない。そのため FDTD 法では平面波入射が成立する 1次元音場でも、端部の吸音率を 1 としただけでは無反射にならず、様々な工夫が必要になる [62, 63, 70]。これに対して CIP 法はコロケートグリッドであるため、ローカルリアクティブの仮定が厳密に成立するものと思われる。

⁵ ユニットパターンと呼ぶ

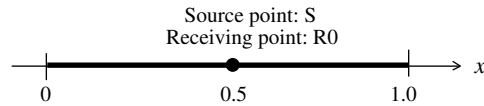
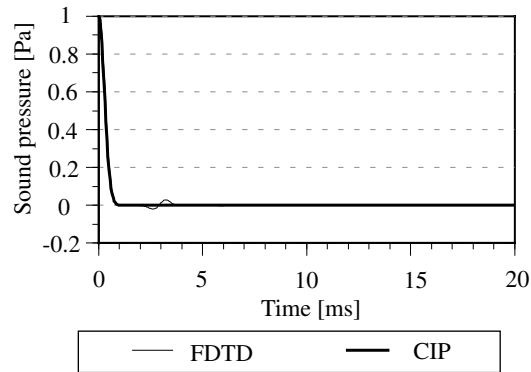


Fig. 6.47 Geometry of a 1D sound field.

Fig. 6.48 Pseudo impulse response calculated by the FDTD method and the CIP method with normal impedance ρc .

そこで4.2.2で検討したのと同じFig. 6.47に示す解析対象・計算条件で、両端の吸音率を1とした場合の結果を示す。Fig. 6.48に示すように、FDTD法では反射が観測されるものの、CIP法では完全無反射境界条件が自然に満足されることになる。

6.4.2 2次元音場の吸音境界条件

1次元の場合には、CIP法は完全無反射境界条件を満足することが示された。2次元の場合にはもちろん平面波入射の仮定は成立しないため、垂直入射インピーダンス $z = \rho c$ とするだけでは、完全無反射境界条件が満足されないのは明らかである。しかしながら、1次元の場合に見たように、コロケートグリッドであることから、特別な配慮を行わなくてもFDTD法よりは高精度である可能性がある。

そこで、Fig.6.49に示す1辺8mの正方形領域の2次元音場について、周縁部の吸音率を1(ノーマルインピーダンス $z = \rho c$)として、特別な配慮を行わずに計算を行った。既報[62]の条件に合わせ、式4.1の $d = 0.5$ [m]と比較的滑らかな音圧分布を仮定し、空間離散化幅を0.05 m、CFL条件を満たす時間離散化幅0.1 msに設定した。Fig.6.50にFDTD法とCIP法による結果を示す。図中FDTD (cut)は、反射の影響がないよう十分大きな領域をFDTD法によって計算したものである。Fig. 6.51はインパルス応答積分法(Schroeder法)によりエネルギー減衰波形を求めたものである。FDTD法とCIP法ではほとんど差異がみられず、端部からの強い反射[62]を示す同

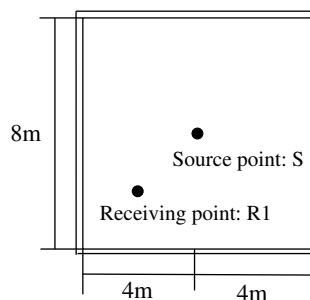


Fig. 6.49 Geometry of a 2D square sound field.

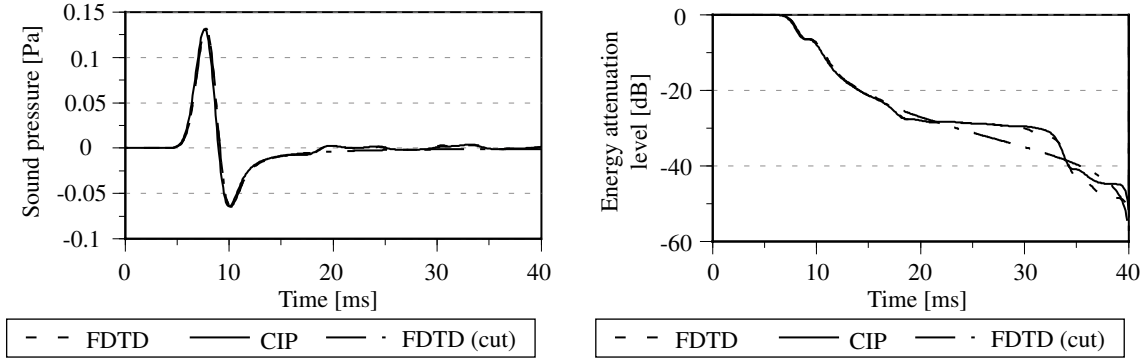


Fig. 6.50 Pseudo impulse response calculated by the FDTD and the CIP method with normal impedance ρc compared to the FDTD method with enough region.

Fig. 6.51 Energy attenuation curve calculated by the FDTD and the CIP method with normal impedance ρc compared to the FDTD method with enough region.

様の傾向を見せている。2次元の場合は平面波の仮定が成立せず境界に垂直に入射しないことが反射の原因であるため、FDTD法とCIP法の性能差はほとんど見られない。これには方向分離を行っていることも影響していると思われる。

6.4.3 PML境界条件の定式化

前節で見たように、多次元の場合には、CIP法を用いても垂直入射インピーダンス $z = \rho c$ とするだけでは、完全無反射境界条件は満足されないことが分かった。斜め方向の入射も効果的に吸収するために、人工的に設定した境界に向かって Perfectly Matched Layer (PML) 吸音層を設定し、徐々にエネルギーを減衰させる PML 境界条件が FDTD 法に導入され、性能向上が確認されている [62, 63, 70]。この他にも特性曲線法の性質を活かして、無反射境界条件を導入しようとする手法 [126] が提案されておりこちらのほうが性能が高いものと思われるが、複雑であるため本研究では FDTD 法で実績があり、単純な PML 境界条件を導入した。このような手法は外部問題や開口がある場合の解析には欠かせないものである。

簡単のため2次元で考えるが、本手法はそのまま3次元にも拡張できる。当然のことながら計算領域の PML 層以外の部分に関しては、支配方程式は全く同じである。これに対して、PML 境界層内部の支配方程式は

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + R_x u + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (6.54)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + R_y v + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{R}{\rho} p + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.56)$$

のように与える手法と [137]、

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + R_x u + \frac{\partial(p_x + p_y)}{\partial x} = 0 \quad (6.57)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + R_y v + \frac{\partial(p_x + p_y)}{\partial y} = 0 \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} + \frac{R_x}{\rho} p_x + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} + \frac{R_y}{\rho} p_y + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.60)$$

のように与える手法がある [60]。ただし p_x, p_y は方向別の音圧で非物理変数である。すなわち

$$p = p_x + p_y \quad (6.61)$$

である。また R_x は空気層と PML 層の境界 (インターフェース) からの距離 x の関数で、

$$R_x = \frac{R_{max}}{(N_{max} \cdot \Delta x)^n} x^n \quad (6.62)$$

のように与える。 R_y についても同様である。これらは Rayleigh モデルに基づく 1 次元的な吸音材を、境界に向かって流動抵抗が徐々に大きくなるように積層したことに相当する。その際、特性インピーダンスが空気と一致するように、連続の式に $R_x/\rho p$ や $R_x/\rho p_x$ の項を加えている。前者の手法に関して方向分離手法を用いて移流方程式に変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu + p) + c \frac{\partial}{\partial x}(\rho cu + p) = -\frac{R_x}{\rho}(\rho cu + p) \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu - p) - c \frac{\partial}{\partial x}(\rho cu - p) = -\frac{R_x}{\rho}(\rho cu - p) \quad (6.64)$$

となる (y 方向関しても同様)。

後者の手法に関して

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu + p_x) + c \frac{\partial}{\partial x}(\rho cu + p_x) = -\frac{R_x}{\rho}(\rho cu + p_x) - c \frac{\partial}{\partial x} p_y \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu - p_x) - c \frac{\partial}{\partial x}(\rho cu - p_x) = -\frac{R_x}{\rho}(\rho cu - p_x) - c \frac{\partial}{\partial x} p_y \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cv + p_y) + c \frac{\partial}{\partial y}(\rho cv + p_y) = -\frac{R_y}{\rho}(\rho cv + p_y) - c \frac{\partial}{\partial y} p_x \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cv - p_y) - c \frac{\partial}{\partial y}(\rho cv - p_y) = -\frac{R_y}{\rho}(\rho cv - p_y) - c \frac{\partial}{\partial y} p_x \quad (6.68)$$

のようになる。これを例えば

$$\frac{D}{Dt}(\rho cu + p_x) = 0 \quad (6.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu + p_x) = -\frac{R_x}{\rho}(\rho cu + p_x) - c \frac{\partial}{\partial x} p_y \quad (6.70)$$

のように 2 つのステップに分ける。 D/Dt はラグランジュ微分を表す。後者は

$$(\rho cu + p_x)^{n+1} = (\rho cu + p_x)^n - \Delta t \left(\frac{R_x}{\rho}(\rho cu + p_x) + c \frac{\partial}{\partial x} p_y \right)^n \quad (6.71)$$

のように差分で解けばよい。肩のノーテーションは時間ステップを表す。 $\partial_x p_y$ の求め方もいろいろ考えられるが、ここでは中心差分で求めることにする。(インターフェースと境界では 1 次片側差分を用いる。) インターフェースで空気層への入射時、PML 層への入射時に方向別音圧の合成 $p_x, p_y \rightarrow p$ は問題ないものの、分解 $p \rightarrow p_x, p_y$ を行うために必要な直交方向の音圧が求まっていないという問題がある。ここでは x 方向の移流の際には p_y は変化しない、 y 方向の移流の際には p_x は変化しないと仮定することで、分解 $p \rightarrow p_x, p_y$ を行った。

6.4.4 2次元音場での完全無反射境界条件の検討

6.4.2と同様に、1辺8 mの正方形領域の2次元音場について式4.1の $d = 0.5$ [m]と比較的滑らかな音圧分布を仮定し、空間離散化幅を0.05 m、時間離散化幅0.1 msに設定した。

前者の境界条件を導入した場合である。文献[62]を参考に $R_{max} = 3000, n = 3$ 、PML層厚み $N_{max} = 10$ とした。インパルス応答を、Fig. 6.52に示す。エネルギー減衰をFig. 6.53に示す。ともにほとんど差は見られず、PML境界条件がほとんど効果がないことが分かる。これはRayleighモデルでの検討にあったように、時間離散化幅が大きいことによって時間分離解法を用いる吸音境界層が十分効いていない可能性がある。そこで時間離散化幅を半分の0.05 msとした場合の検討を行った。インパルス応答を、Fig. 6.54に、エネルギー減衰をFig. 6.55に示す。このように時間離散化幅を小さくしても効果がないことが分かる。よってこのPML境界条件の効果がないことの原因は時間分離解法を用いていることではない可能性がある。

後者の境界条件を補間を用いない手法(図中Adv)に導入した場合である。文献[70]を参考にして $R_{max} = 30000, n = 3$ 、PML層厚み $N_{max} = 10$ とした。前者の手法でこれほど R_{max} を大きく

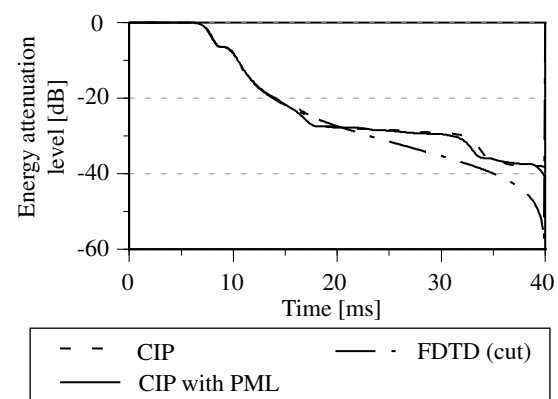
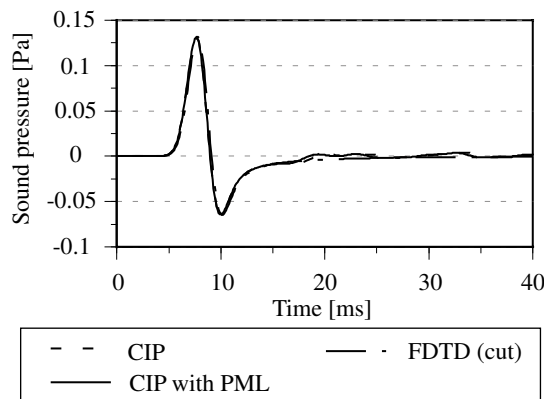


Fig. 6.52 Pseudo impulse response calculated by the CIP method ($Z = \rho c$) and with the former PML boundary under condition that Δt is 0.1 ms.

Fig. 6.53 Energy attenuation curve calculated by the CIP method ($Z = \rho c$) and with the former PML boundary under condition that Δt is 0.1 ms.

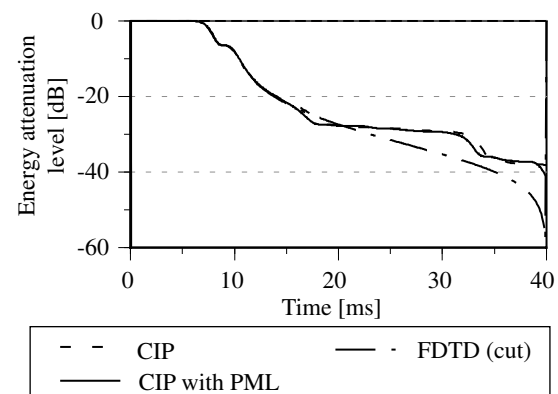
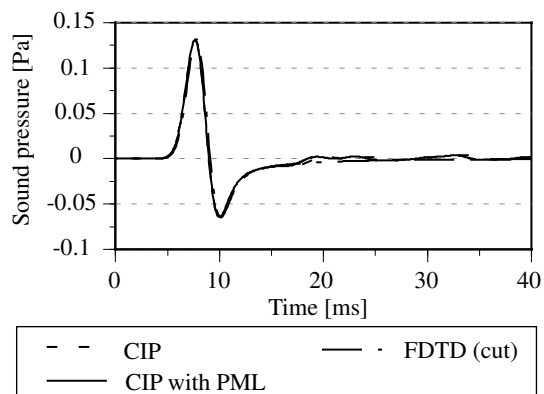


Fig. 6.54 Pseudo impulse response calculated by the CIP method ($Z = \rho c$) and with the former PML boundary under condition that Δt is 0.05 ms.

Fig. 6.55 Energy attenuation curve calculated by the CIP method ($Z = \rho c$) and with the former PML boundary under condition that Δt is 0.05 ms.

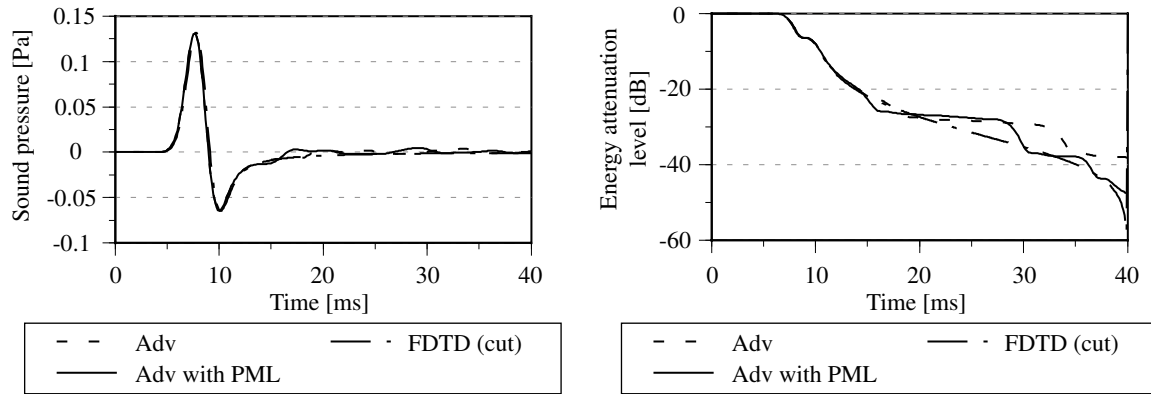


Fig. 6.56 Pseudo impulse response calculated by the advection method with normal impedance ρc ($CFL = 1$, without interpolation) and with the latter PML boundary ($R_{max} = 30000$). Fig. 6.57 Energy attenuation curve calculated by the advection method with normal impedance ρc ($CFL = 1$, without interpolation) and with the latter PML boundary ($R_{max} = 30000$).

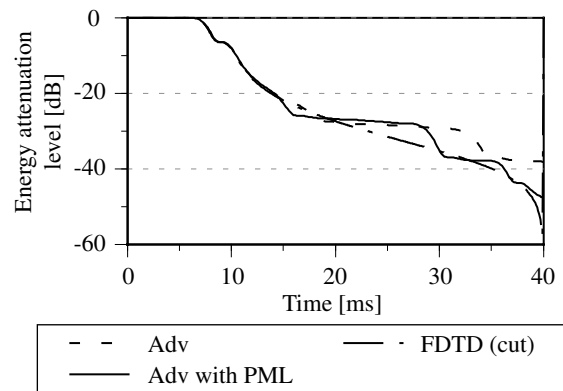


Fig. 6.58 Energy attenuation curve calculated by the advection method with normal impedance ρc and the advection method ($CFL = 1$, without interpolation) with the latter PML boundary ($R_{max} = 0$).

すると発散した。インパルス応答を、Fig. 6.56 に示す。エネルギー減衰を Fig. 6.57 に示す。このように後期域の減衰が、十分な領域を取った FDTD (cut) に近く、PML 境界条件が効果を挙げていることが分かる。 $R_{max} = 0$ とした場合のエネルギー減衰を Fig. 6.58 に示す。このようにほとんど差異は見られない。こちらも前者の定式化と同様に、吸音材による消散の影響はないものと考えられる。減衰後期においてある程度効果を挙げたのは、境界付近で音圧の方向分離を行って 1 次元的な音場としていることによる改善が大きいためと考えられる。

6.5 まとめ

建築音響解析を行ううえで必須となる周波数特性を持った境界条件を導入するために、多孔質材の吸音メカニズムをモデリングした Rayleigh モデルを CIP 法に導入した。時間離散化幅を必要とする精度に合わせて小さくすれば有効であることが示された。またデジタルフィルターを用いることで、試行錯誤によらず設計できる周波数特性を持った境界条件を CIP 法に導入した。これは FDTD 法に導入するのは難しいため、CIP 法のメリットのひとつとなるものと考えられる。

位相特性を変化させずに振幅特性のみを変化させる FIR フィルターを用いる手法と、位相特性も変化させる IIR フィルターを用いる手法を検証した。その結果時間離散化幅を大きくとっても所望の吸音特性が実現されることが分かった。特に IIR フィルターを用いる手法は位相特性も含めて吸音特性を実現できることが示された。Rayleigh モデルの応用として、PML 境界条件を CIP 法に導入したもののほとんど効果はなかった。

第7章 まとめ

本研究の目的は、建築音響の時系列解析においてしばしば用いられる FDTD 法の課題を CIP 法を用いることで解決することにあった。FDTD 法の課題とは、インパルス性の音源を用いているため数値分散性の影響で高周波数域まで正確に解けないこと、複雑な形状には階段近似で対応していること、周波数特性を持つ境界条件を簡便に与えるための手法が確立されていないことなどである。

本研究によって確認された(音響問題における)CIP 法と CIVA 法の利点を、以下に挙げる。第 4 章において、高周波成分まで数値分散が少なく解析できるため、波形の観点での検討が必要な場合には FDTD 法に比べて有利であることを示した。第 5 章において、2 次元であれば任意の 3 角形メッシュを用いて任意形状の問題を解析することができることを示した。第 6 章において、任意の周波数特性を持つ吸音境界条件を設計理論が確立されているデジタルフィルターを用いることで実現可能であることを示した。これらは先にあげた FDTD 法の課題にそれぞれ対応している。

流体力学分野では有用とされていたが、(建築)音響分野への適用を図り改善が必要であることが確認された事例もあった。第 4 章において、時間離散化幅を $CFL > 1$ に大きくとる手法は、(方向分離の影響で多次元問題では)残響後期に振動が残り残響時間の予測に悪影響を与えることが示された。CIP 法は空間精度が高く数値分散も小さいため空間・時間離散化幅を ($CFL < 1$) 同時に大きくする手法が有効であった。第 5 章において、3 次元 4 面体要素で CIP 補間を行う手法は、非適合要素を用いていることが原因で発散することが示された。改善には 2 階の微分を節点に与えて適合要素化を図る必要がある。これらは音響分野に固有の問題として、音源(初期条件)として急峻な波形を用いていることと、問題の非定常性が非常に強く、特に建築音響分野ではエネルギーのダイナミックレンジが 1000 倍以上と大変大きいことが起因していると考えられる。本研究で用いた M 型 CIP 法は方向分離手法を用いていることと、保存則を満足しないことの 2 点が大きな問題であり、これらの改善が必要である。

今後の課題としてはまず精度向上(計算時間短縮)のための課題として直交方向の微分にも CIP 法を用いる C 型 CIP 法と M 型 CIP 法との精度比較、補間なしの特性曲線法と CIP 法との領域分割による高速化・高精度化、CIP 法や CIVA 法で保存則を満足するようなスキーム [11, 32] との比較、計算時間・メモリー量の負荷低減のための並列化(例えば CIVA 法で領域分割を用いて三次元立方キャビティフローを解いた例 [26] がある)などが挙げられる。

また任意形状への対応のための課題として節点に 2 階の微分値を与えることによる適合要素化がある。さらに応用事例としてはメッシュの質にそれほど影響されず CFL 条件にとらわれないので、計算点の再配置を伴うような移動境界問題に対応でき、解適合格子や移動境界格子 [9] と組み合わせると高精度計算(例えば残響室での回転板を組み入れた計算)や FVM など既存の数値解析手法との融合による実装の簡略化および効率化 [9, 32] が挙げられる。

付録A 開発プログラムについて

本研究で開発されたプログラムは現実世界を模倣した抽象的なオブジェクト (物)[156] を用いるオブジェクト指向プログラミングの考え方を取り入れて開発されており、入出力部などのソルバーと直接関係しない部分はユーザーから完全に隠蔽されている。構造体を進化させたクラスという概念を用いることで、プログラムの構造が非常に分かりやすくなるのと同時に、再利用化が促進され、ユーザーに公開されるべきインターフェースを段階に応じて細かく設定することが可能であり、すばやくバグの少ないプログラムを作成することができる。例えば境界条件の課しかたを変更するに当たって、ソルバー部分のを知る必要はまったくないし、ましてIO 関係に関して変更する必要など全くない。また過剰な if 文によるプログラムの可読性の低下を最小限にすることができる。

そのため本研究で用いたプログラムは、数値解析によく用いられるがオブジェクト指向で開発できない Fortran や C といったプログラム言語ではなく、オブジェクト指向を実現しやすい言語である Java によって 1 から開発されている。C++でもオブジェクト指向で開発することはできるが、計算速度のために様々な安全性利便性を犠牲にした言語であるため、初めからバグのないプログラムを書くことは非常に難しい。その点 Java はバグを生む原因となりやすいポインタ演算や、動的に確保したメモリの解放などをプログラマーが行う必要がないので、安全に開発することができる。配列の領域外の参照も実行時のエラーとして捕捉されるようになっている。Java の難点は可搬性を重視して、インタプリタで実行されるため計算速度が遅いことであるが、Hotspot などのさまざまなコンパイラテクノロジーの進歩によって実行時には高速に実行することができる。今後の情報工学の進歩も考えると、計算速度よりもプログラム開発のスピードのほうが問題になってくるであろう。計算速度が問題になる場合には、Java のプログラムを C++に書き換えることはそれほど難しくないので、バグのないことが保証されているプログラムを Java で開発した後に C++に書き換えるほうが結果的には速くプログラムを完成させることができると思われる。

本研究のために開発したプログラムのクラス構造を Fig. A.1 に示す。境界条件と結果の出力のためのメソッド群はユーザーから完全に隠蔽されている。FDTD, CIP, CIVA のそれぞれで境界条件の与え方や音源の与え方がグリッドの違いなどに起因して異なるため、その準備を行うための層が FDTD1D などのクラスでそれぞれ次元数に対応して 6 クラスある。これに対してオイラー陽解法を使うかアダムスバッシュフォース法を使うかといったソルバーレベルのメソッドはさら

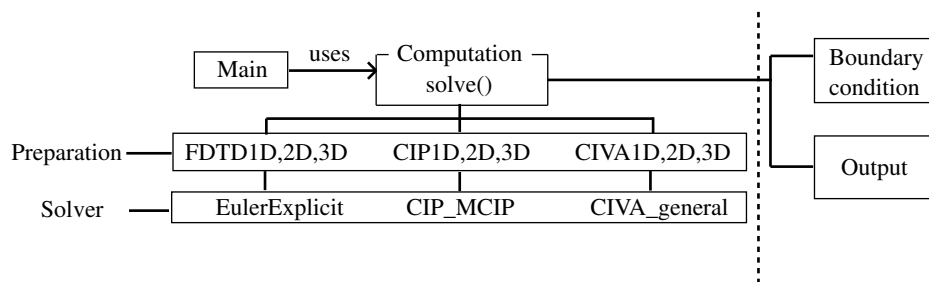


Fig. A.1 Class structure of this program.

にそれを継承した具体的なスキームの名前がつけられたサブクラスがそれを担当する。よってすべてのソルバーはテンプレートである親クラス `Computation` の抽象メソッド `solve()` を継承している。準備を行うための層までは抽象クラスであるため、ソルバーレベルのクラスは `solve()` の実装が義務付けられており、他に手を加える必要がなければ `solve()` を実装するだけで新しいソルバーの開発ができる。

参考文献

[CIP 法関連]

- [1] H.Takewaki, A.Nishiguchi and T.Yabe, “ The Cubic-Interpolated Pseudo-Particle (CIP) Method for Solving Hyperbolic-Type Equations,” Journal of Computational Physics 61, pp. 261-268, 1985.
- [2] H.Takewaki and T.Yabe, “ Cubic-Interpolated Pseudo Particle (CIP) Method? Application to Nonlinear or Multi-Dimensional Problems,” Journal of Computational Physics 70, pp. 355-372, 1987.
- [3] T.Yabe, T.Ishikawa, P.Y.Wang, T.Aoki, Y.Kadota and F.Ikeda, “ A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation II. Two- Three- Dimensional Solvers,” Computational Physics Communications 66, pp. 233-242, 1991.
- [4] T.Utsumi, “ Differential Algebraic Hydrodynamics Solver with Cubic-Polynomial Interpolation,” CFD Journal 4, pp. 225-238, 1995.
- [5] T.Aoki, “ Multi-Dimensional Advection of CIP (Cubic-Interpolated Propagation) Scheme,” CFD Journal 4, pp. 279-291, 1995.
- [6] 高田直樹, 伊藤智義, 佐藤太一, 上崎省吾, “ CIP 法を用いた電磁界数値計算,” 電子情報通信学会エレクトロニクスソサイエティ大会, pp. 3, 1998.
- [7] 田中伸厚, “ 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発,” 日本機械学会論文集 (B 編) 64-620, pp. 103-109, 1998.
- [8] N.Tanaka, “ Development of highly accurate interpolation method for mesh-free flow simulations I. Integration of Gridless, Particle and CIP Methods,” International Journal for Numerical Methods in Fluids 30, pp. 957-976, 1999.
- [9] 田中伸厚, “ CIVA-粒子法の非圧縮性流体解析への応用,” 日本機械学会論文集 (B 編) 65 巻 637 号, pp. 25-32, 1999. 9
- [10] N.Tanaka, “ Development of highly accurate interpolation method for mesh-free flow simulations II. Application of CIVA to incompressible fluid simulations,” International Journal for Numerical Methods in Fluids 34, pp. 403-424, 2000.
- [11] R.Tanaka, T.Nakamura and T.Yabe, “ Constructing Exactly Conservative Scheme in a Non-Conservative Form,” Computational Physics Communications 126, pp. 232-243, 2000.
- [12] 白石崇, 矢部孝, “ CIP 法による特性曲線法を用いた数値計算スキームの開発,” 日本流体学会第 15 回数値流体力学シンポジウム D13-1, pp. 1-6, 2001.
- [13] T.Yabe, F Xiao and T.Utsumi, “ The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis,” Journal of Computational Physics 169, pp. 556-593, 2001.
- [14] F.Xiao and T.Yabe, “ Completely Conservative and Oscillationless Semi-Lagrangian Schemes for Advection Transportation,” Journal of Computational Physics 170, pp. 498-522, 2001.

- [15] T.Nakamura, R.Tanaka, T.Yabe and K.Takizawa, “ Exactly Conservative Semi-Lagrangian Scheme for Multi-dimensional Hyperbolic Equations with Directional Splitting Technique,” *Journal of Computational Physics* 174, pp. 171-207, 2001.
- [16] N.Tanaka, “ Development of highly accurate interpolation method for mesh-free flow simulations III. Analysis of accuracy and stability,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41, pp. 675-694, 2003.
- [17] 田中伸厚, 北山努, 山崎俊輝, “ CIVA 法の高精度化について,” *日本機械学会第 16 回計算力学講演会講演論文集*, pp. 227-228, 2003.
- [18] 矢部孝, 尾形陽一, 滝沢研二, 津川祐美子, 林孝男, “ ソロバン格子によるメッシュフリー CIP 法,” *日本機械学会第 16 回計算力学講演会講演論文集*, pp. 971-972, 2003.
- [19] 土田潤, 矢川元基, 藤澤智光, “ フリーメッシュ法ベースの統一解法によるエッジトーンの直接計算,” *第 17 回数値流体力学シンポジウム F4-1*, pp. 1-6, 2003.
- [20] 矢部孝, 内海隆行, 尾形陽一, CIP 法 原子から宇宙までを解くマルチスケール解法, 森北出版, 2003.
- [21] 正肖鋒, “ CIP 系マルチ・モーメント補間近似及び数値分散について,” *日本機械学会第 17 回計算力学講演会講演論文集*, pp. 683-684, 2004.
- [22] 岩田賢, 田中伸厚, 高野龍雄, 田口鷹矢, “ CIVA 法を用いた混相流の三次元数値シミュレーション,” *日本機械学会第 17 回計算力学講演会講演論文集*, 2004.
- [23] 白石和也, 松岡俊文, “ CIP 法を用いた特性曲線による波動伝播シミュレーション,” *物理探査学会 111 回 (秋)*, 2004.
- [24] T.Yabe, H.Mizoe, K.Takizawa, H.Moriki, H.Im and Y.Ogata, “ Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme,” *Journal of Computational Physics* 194, pp. 57-77, 2004.
- [25] T.Utsumi, T.Yabe, J.Koga, T.Aoki, M.Sekine, Y.Ogata and E.Matsunaga, “ A note on the basis set approach in the constrained interpolation profile method,” *Journal of Computational Physics* 196, pp. 1-7, 2004.
- [26] 岸本悟志, 岩田賢, 田中伸厚, 大島宏之, “ CIVA 法を用いた数値流体解析の並列計算,” *茨城講演会講演論文集*, pp. 1-2, 2004.
- [27] 伊井仁志, 紫牟田将一, 肖鋒, “ Multi-Moment に基づく非構造格子有限体積法 (その 1),” *第 18 回数値流体力学シンポジウム D8-1*, p. 1, 2004.
- [28] 今井陽介, 青木尊之, “ CIP 法および IDO 法の計算精度,” *日本機械学会大会講演論文集*, pp. 101-102, 2005.
- [29] 大久保寛, 竹内伸直, “ CIP 法による線電流源から発生する電磁界の数値解析,” *電子情報通信学会技術研究報告 (アンテナ・伝播 A・P)*, pp. 197-202, 2005. 3.
- [30] 大久保寛, 竹内伸直, “ CIP 法を用いた電磁界解析における異なる媒質の境界の取り扱い,” *電子情報通信学会論文誌*, pp. 1892-1894, 2005. 9.
- [31] 大久保寛, 竹内伸直, “ CIP 法を用いた時間領域電磁界解析法の適用,” *電子情報通信学会技術研究報告 (アンテナ・伝播 A・P)*, pp. 7-12, 2005. 10.
- [32] 田中伸厚, 田口鷹矢, “ CIVA 法による移流項の保存形スキーム,” *日本機械学会第 18 回計算力学講演会講演論文集*, pp. 619-620, 2005. 11.
- [33] 吉田雄一, 大久保寛, 竹内伸直, “ M 型 CIP 法を用いた電磁界解析の精度に関する検討,” *電子情報通信学会技術研究報告 (アンテナ・伝播 A・P)*, pp. 13-18, 2006. 6.

- [34] 吉田雄一, 大久保寛, 竹内伸直, “C型 CIP法を用いた電磁界解析,” 電子情報通信学会技術研究報告(アンテナ・伝播 A・P), pp. 7-12, 2006. 9.
- [35] 棚橋隆彦, 計算流体力学 GSMAC 有限要素法, 共立出版, 2006.
- [36] Y.Imai and T.Aoki, “Accuracy study of the IDO scheme by Fourier analysis,” Journal of Computational Physics 217, pp. 453-472, 2006.
- [37] S.Ii, F.Xiao, “CIP/multi-moment finite volume method for Euler equations: A semi-Lagrangian characteristic formulation,” Journal of Computational Physics 222, pp. 849-871, 2007.

[CIP 法関連 (音響分野)]

- [38] 寺本顕武, “CIP法に基づく3次元弾性波動場数値実験について,” 電子情報通信学会技術研究報告(応用音響 EA), pp. 39-44, 2005. 1.
- [39] 斉藤亮平, 西方敦博, “CIP法による球面音波伝搬解析,” 電子情報通信学会ソサイエティ大会講演論文集 基礎・境界, p. 205, 2005. 9.
- [40] 斉藤亮平, 西方敦博, “CIP法とFDTD法による球面音波伝搬解析の性能比較,” 電子情報通信学会論文誌, pp. 576-580, 2006. 6.
- [41] 大久保寛, 呉星冠, 土屋隆生, 竹内伸直, “CIP法を用いた時間領域音場解析法の精度について,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 443-444, 2006. 9.
- [42] 大久保寛, 呉星冠, 土屋隆生, 竹内伸直, “CIP法を用いた3次元音場解析に関する検討,” 電子情報通信学会技術研究報告(応用音響 EA), pp. 25-30, 2006. 9.
- [43] 土屋隆生, 大久保寛, 竹内伸直, “CIP法による音波伝搬シミュレーション,” 電子情報通信学会技術研究報告(超音波 US), pp. 1-6, 2006. 11.
- [44] 呉星冠, 大久保寛, 土屋隆生, 竹内伸直, “C型 CIP法を用いた音場解析に関する検討,” 電子情報通信学会技術研究報告(応用音響 EA), pp. 17-22, 2007. 1.
- [45] 土屋隆生, 大久保寛, 竹内伸直 “CIP法による非線形音波伝搬シミュレーション,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 981-982, 2007. 3.
- [46] 太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉, “CIP法による音場解析,” 日本音響学会建築音響研究会資料(AA2007-28) 日本音響学会振動・騒音研究会資料(N-2007-31), pp. 1-8, 2007. 7.
- [47] 太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉, “CIP法による時間領域音場解析 - FDTD法との比較 -,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 979-982, 2007. 9.
- [48] 大久保寛, 呉星冠, 土屋隆生, 田川憲男, 竹内伸直, “境界面の取り扱いを考慮したCIP法による音波伝搬数値シミュレーション,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 1329-1330, 2007. 9.

[FDTD 法関連]

- [49] 千葉修, 柏達也, 霜田英麿, 鏡慎, 深井一郎, “リープフロッグアルゴリズムに基づく時間依存差分法による3次元音場解析,” 日本音響学会誌 49, pp. 551-562, 1993. 8.
- [50] J.P.Berenger, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves,” Journal of Computational Physics 114, pp. 185-200, 1994.
- [51] 坂本慎一, 園田有児, 橋秀樹, “2次元音場の波動的解析 その1 差分法によるインパルス応答の推定,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 829-830, 1994. 3.
- [52] 鴫田泰弘, 坂本慎一, 橋秀樹, “波動方程式に基づく直方体閉空間の非定常解析解,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 955-956, 1994. 10-11.

- [53] 坂本慎一, 鴫田泰弘, 橘秀樹, “差分法による音場のインパルス応答の計算(その2. 解析解および実験結果との比較),” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 959-960, 1994. 10-11.
- [54] 坂本慎一, 橘秀樹, “差分法を用いた過渡応答計算における吸音境界条件の検討,” 日本音響学会建築音響研究会資料(AA95-28), pp. 1-8, 1995.
- [55] 坂本慎一, 橘秀樹, “差分法を用いた過渡応答計算における吸音境界条件の検討,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 809-810, 1995. 9.
- [56] 坂本慎一, 荒井毅志, 橘秀樹, “差分法による音場の過渡応答の計算 室の平面形状の違いによるインパルス応答の比較,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 875-876, 1995. 9.
- [57] 坂本慎一, 橘秀樹, “吸音性壁面をもつ音場の差分法による過渡応答計算,” 日本建築学会大会学術講演梗概集(環境工学1), pp. 161-162, 1996. 9.
- [58] 坂本慎一, 荒井毅志, 橘秀樹, “差分法による室内音場の過渡応答計算(吸音性壁面をもつ3次元音場における実験結果との比較),” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 781-782, 1996. 9.
- [59] 鴫田泰弘, 橘秀樹, “多段差分によって求めた非定常数値解に基づく音場の拡散性の評価,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 783-784, 1996. 9.
- [60] Q.Qi and T.L.Geers, “Evaluation of the Perfectly Matched Layer for Computational Acoustics,” *Journal of Computational Physics* 139, pp. 166-183, 1998.
- [61] 宇野亨, FDTD法による電磁界およびアンテナ解析, コロナ社, 1998.
- [62] 内藤洋一, 横田考俊, 坂本慎一, 橘秀樹, “差分法による開領域計算のための完全吸音境界の検討,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 751-752, 2000. 9.
- [63] 内藤洋一, 横田考俊, 坂本慎一, 橘秀樹, “差分法による開領域数値解析のための完全吸音層の検討 音波の進行方向を考慮した方法,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 849-850, 2001. 3.
- [64] 斎木崇, 横田考俊, 坂本慎一, 橘秀樹, “FDTD法による二重窓の遮音特性に関する検討,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 873-874, 2002. 3.
- [65] 湯湧, 津留卓巳, 柴山秀雄, “FDTD法を用いた音響管の欠損部の推定,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 575-576, 2002. 9.
- [66] 大嶋拓也, “反変速度-圧力時間進行による一般曲線座標系FDTD音場解析 基礎式および離散式の導出,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 829-830, 2004. 3.
- [67] 山本航介, 坂本慎一, 橘秀樹, “高次差分を用いたFDTD法の精度向上,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 831-832, 2004. 3.
- [68] 坂本慎一, 山本航介, 橘秀樹, “FDTD法における多点差分スキームの安定性解析,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 953-954, 2004. 3.
- [69] 鈴木久晴, 尾本章, “差分法への境界条件の導入に関する一検討,” 日本音響学会建築音響研究会資料(AA2005-34), pp. 1-7, 2005. 8.
- [70] 坂本慎一, “音波の進行方向に適応したPML無反射境界,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 909-910, 2005. 9.
- [71] 牛山歩, 長友宏, 坂本慎一, 橘秀樹, “3次元FDTD解析による駒場コンベンションホールの音場予測,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 983-984, 2005. 9.
- [72] 坂本慎一, 横田考俊, “FDTD法による音場解析とその応用,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 1233-1236, 2006. 3.

- [73] 鈴木久晴, 尾本章, 藤原恭司, “FDTD法における多孔質材料の簡易モデル,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 1251-1252, 2006. 3.
- [74] 朝倉巧, 坂本慎一, “音響透過を考慮した遮音壁の減音効果に関する数値解析,” 日本音響学会騒音振動研究会資料(N2007-02), pp. 1-8, 2007. 1
- [75] H.Suzuki, A.Omoto and K.Fujiwara, “Treatment of boundary conditions by finite difference time domain method,” *Acoustical Science and Technology* Vol.28, pp. 16-26, 2007. 1.
- [76] 長友宏, 朝倉巧, 安田洋介, 坂本慎一, “室内音場のFDTD解析における吸音境界条件の与え方に関する検討,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 865-866, 2007. 3.
- [77] 太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉, “局所作用を仮定した垂直入射吸音率と残響室吸音率の関係 - FDTD法による残響室の数値解析 -,” 日本建築学会大会学術講演梗概集(環境工学1), pp. 271-272, 2007. 8.
- [78] 鈴木久晴, 尾本章, 藤原恭司, “有限差分法における多孔質材料のモデル化手法に関する研究,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 983-986, 2007. 9.
- [79] S.Sakamoto, “Phase-error analysis of high-order finite difference time domain scheme and its influence on calculation results of impulse response in closed sound field,” *Acoustical Science and Technology* Vol.28, pp. 295-309, 2007. 9.

[音響関連]

- [80] M.E.Delany and E.N.Bazley, “Acoustic properties of fibrous absorbing materials,” *Applied Acoustics* 3, pp. 105-116, 1970.
- [81] Y.Miki, “Acoustical properties of porous materials - Modifications of Delany-Bazley models,” *Journal of Acoustical Society Japan(E)* 11, pp. 19-24, 1990. 1.
- [82] Y.Miki, “Acoustical properties of porous materials - Generalizations of empirical models,” *Journal of Acoustical Society Japan(E)* 11, pp. 25-28, 1990. 1.
- [83] 天野泰, 高根昭一, 鈴木陽一, 曾根敏夫, “境界要素法を用いたインパルス応答推定における壁面の境界条件の取り扱いについて,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 863-864, 1996. 3.
- [84] 天野泰, 櫻井利昭, 鈴木陽一, 曾根敏夫, “壁面の局所作用を仮定しない室内音場の数値解析に関する一考察,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 777-778, 1996. 9
- [85] 竹内正樹, 加川幸雄, 土屋隆生, “伝達線路行列法による室内残響音場シミュレーション,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 779-780, 1996. 9.
- [86] Y.Kagawa, T.Tsuchiya, B.Fujii and K.Fujioka, “Discret Huygens' Model Approach to Sound Wave Propagation,” *Journal of Sound & Vibration* 218 3, pp. 419-444, 1998.
- [87] 岩瀬昭雄, “多孔質材料の吸音構造と吸音諸特性の計測技術,” 日本音響学会誌 54-1, pp. 66-71, 1998. 1.
- [88] Y.Kagawa, T.Tsuchiya, K.Fujioka and M.Takeuchi, “Discret Huygens' Model Approach to Sound Wave Propagation -Reverberation in a Room, Sound Source Identification and Tomography in Time Reversal,” *Journal of Sound & Vibration* 225 1, pp. 61-78, 1999.
- [89] 増山裕之, 永井啓之亮, 水谷孝一, “矩形トランスジューサから放射される音圧波形の近似計算法,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 969-970, 1999. 9-10.
- [90] T.Sakuma and Y.Yasuda, “Fast multipole boundary element method for large-scale steady-state sound field analysis, Part I: Setup and Validation,” *Acustica/acta acustica* Vol.88, pp. 513-525, 2002.

- [91] T.Tsuchiya and Y.Kagawa, “ Digital Equivalent Circuits for Acoustic Field Based on Discrete Hygens’ Modeling,” Japan Journal of Applied Physics 44 No. 6B, pp. 4297-4300, 2005.
- [92] “特集 されど幾何音響シミュレーション,” 音響技術 129, pp. 2-66, 2005. 3.
- [93] 土屋隆生, “離散ホイヘンスモデルによる時間領域問題の解析,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 977-978, 2005.9.
- [94] 土屋隆生, “時間領域音波伝搬シミュレーションにおける吸収の組み入れについて,” 電子情報通信学会技術研究報告(超音波 US), pp. 45-49, 2005. 11.
- [95] 廣澤邦一, 鶴秀生, “密度, 音速, 吸収係数の異なる媒質への波動伝播の数値解析,” 日本音響学会建築音響研究会資料, pp. 1-8, 2006. 5.
- [96] 土屋隆生, 中園隆明, “デジタルホイヘンスモデルへの垂直入射吸収率の組み入れに関する検討,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 541-542, 2006. 9.
- [97] T.Tsuchiya, “ Numerical SIMulation of Sound Wave Propagation with Sound Absorption Using Digital Hygens’ Model,” Japan Journal of Applied Physics 46 7B, pp. 4809-4812, 2007.
- [98] 田原靖彦, 霜田英麿, “建築空間における”響きの質”の評価 1/10 スケール模型による可聴音を用いた心理評価実験,” 日本音響学会建築音響研究会資料(AA2007-04), pp. 1-8, 2007. 1.
- [99] 安田洋介, 坂本慎一, 佐久間哲哉, “高速多重極 BEM の領域分割法への適用 - 掘割道路の解析例 -,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 801-802, 2007. 3
- [100] 岡本則子, 大鶴徹, 奥園健, 末吉俊秀, “有限要素法による大規模ホール内部音場の試行的解析,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(春), pp. 941-942, 2007. 3.
- [101] 大嶋拓也, 今野雅, “時間領域有限体積法による非構造格子汎用音場数値解析コードの開発(1) 定式化およびオープンソース数値計算ツールキット援用による核コードの実装,” 日本音響学会建築音響研究会資料(AA2007-17), 2007. 5.
- [102] 大嶋拓也, 今野雅, “時間領域有限体積法による非構造格子汎用音場数値解析コードの開発(2) 非直交格子補正および実数音響インピーダンス境界条件に関する検討,” 日本音響学会建築音響研究会資料(AA2007-27) 日本音響学会振動・騒音研究会資料(N-2007-30), 2007. 7.
- [103] 大嶋拓也, 今野雅, “時間領域有限体積法による非構造格子波動音場解析 オープンソース数値計算ツールキット援用による核コードの実装,” 日本建築学会学術講演梗概集, pp. 273-274, 2007. 8.
- [104] 榎本貴之, 大嶋拓也, 安田洋介, 佐久間哲哉, “記憶容量制限下における高速多重極 BEM による全可聴域 HRTF の計算,” 日本音響学会研究発表会講演論文集(秋), pp. 703-706, 2007. 9.
- [105] 小口恵司, “ホール室内音響設計における模型実験,” 日本音響学会誌 63-9, pp. 531- 536, 2007. 9.
- [106] 寺尾道仁, “インピーダンス管を用いた材料の音響特性の計測技術,” 日本音響学会誌 63-10, pp. 606-611
- [107] 土屋隆生, 世古口久史, “GPU-DHM による音場の高速シミュレーション,” 日本音響学会アコースティック・イメージング研究会資料(AI2007-3-2), 日本音響学会建築音響研究会資料(AA2007-39), 日本音響学会振動・騒音研究会資料(N-2007-42), 2007. 10.

[拡散係数関連]

- [108] E.Mommertz, "Angle-dependent in-situ measurements of reflection coefficients using a subtraction technique," *Applied Acoustics* Vol. 46, pp. 251-263, 1995.
- [109] M.Vorländer and E.Mommertz, "Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients," *Applied Acoustics* Vol. 60, pp. 187-199, 2000.
- [110] E.Mommertz, "Determination of scattering coefficients from the reflection directivity architectural surfaces," *Applied Acoustics* Vol. 60, pp. 201-203, 2000.
- [111] ISO 17497-1: Acoustics Sound-scattering properties of surfaces Part 1, 2004.
- [112] Y.Kosaka and T.Sakuma, "Numerical examination on the scattering coefficients of architectural surfaces using the boundary element method," *Acoustical Science and Technology* Vol. 26, pp. 136-144, 2005.
- [113] X.Zeng, C.L.Christensen, J.H.Rindel, "Practical methods to define scattering coefficients in a room acoustics computer model," *Applied Acoustics* 67, pp. 771-786, 2006.
- [114] 太刀岡勇氣, 小坂慶之, 佐久間哲哉, "拡散係数を導入した幾何音響シミュレーションに関する検討 非拡散音場の残響時間の予測," *日本音響学会研究発表会講演論文集 (春)*, pp. 823-824, 2006. 3.
- [115] 佐久間哲哉, 小坂慶之, 太刀岡勇氣, "壁面音響反射の拡散性と室内音響特性," *日本音響学会研究発表会講演論文集 (秋)*, pp. 765-768, 2006. 9.
- [116] 太刀岡勇氣, 佐久間哲哉, "拡散係数を導入した幾何音響シミュレーションに関する検討 シューボックス型ホールにおける拡散壁の影響," *日本音響学会研究発表会講演論文集 (秋)*, pp. 769-770, 2006. 9.
- [117] T.Sakuma, Y.Kosaka and Y.Tachioka, "Numerical determination of scattering coefficients of wall surfaces for geometrical room acoustic simulation," 4th Joint Meet. ASA/ASJ (Honolulu), *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 120, pp. 2998, 2006.

[その他]

- [118] P.Lax and R.Richtmyer, "Survey of stability of linear finite difference equations," *Comm. Pure Applied Mathematics* 9, pp. 267-293, 1956.
- [119] M.W.Evans and F.H.Harlow, "The Particle-in-Cell Method for Hydrodynamic Calculations," Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-2139, 1957.
- [120] A.Peano, "Hierarchies of conforming finite elements for plate elasticity and plate bending," *Comp. & Maths. with Appls.* Vol. 2, pp. 211-224, 1976.
- [121] 菅原一孔, "線形計画法による IIR 形デジタル位相回路の設計," *電子通信学会論文誌* Vol. J68-A No.5, 1985.
- [122] 尾知博, 山根大作, " L_p ノルム評価によるデジタル全域通過回路の設計と構成の最適化," *電子通信学会論文誌* Vol. J69-A No.12, 1986.
- [123] 村上周三, 加藤信介, 須山喜美, "移流項差分における一次精度風上, QUICK, 中心差分スキームなどの比較検討," *日本建築学会計画系論文報告集* 390, p. 8, 1988.
- [124] J.T.Batina, "A Gridless Euler/Navier-Stokes Solution Algorithm for Complex-Aircraft Applications," AIAA Paper-93-0333. 1993.
- [125] 加藤信介, "数値流体力学 CFD の室内環境への応用 (4) CFD 解析の基礎 (その 3) 精度と誤差," *空気調和・衛生工学* 71-9, pp. 805-815, 1997. 9.
- [126] 谷口隆晴, 杉原厚吉, "特性曲線法に基づく無反射境界条件の提案とその実装法," *日本流体力学会第 18 回数値流体力学シンポジウム B2-3*, pp. 1-7, 2004.

[音響分野の文献]

- [127] J.W.S.Rayleigh, The Theory of Sound, Cambridge, 1896.
- [128] P.M.Morse, K.U.Ingard, Theoretical Acoustics, Princeton University Press, 1968.
- [129] Heinrich Kuttruff, Room Acoustics 2nd edition, Applied Science Publishers, 1979.
- [130] 早坂寿雄, 技術者のための音響工学, 丸善, 1986.
- [131] 前川純一, 森本政之, 阪上公博, 建築・環境音響学, 共立出版, 1990.
- [132] M.Barron, Auditorium Acoustics and Architectural Design, E & FN Spon, 1993.
- [133] J.F.Allard, Propagation of Sound in Porous Media : Modeling Sound Absorbing Materials, Elsevier Applied Science, 1993.
- [134] F.J.Fahy, サウンドインテンシティ, オーム社, 1998.
- [135] L.E.Kinsler, A.R.Frey, A.B.Coppens and J.V.Sanders, Fundamentals of Acoustics, Wiley, 1999.
- [136] 樋口龍雄, 川又政征, Matlab 対応 デジタル信号処理, 昭晃堂, 2000.
- [137] 横田考俊, 室内における音響拡散・反射体の効果に関する研究, 東京大学博士論文, 2001.
- [138] 日本建築学会, 室内音場予測手法 理論と応用, 日本建築学会, 2001.
- [139] 眞溪歩, デジタル信号処理工学, 昭晃堂, 2004.
- [140] <http://gacoust.hwe.oita-u.ac.jp/AIJ-BPCA/B0-1T/>
- [141] <http://www.openefd.co.uk/openfoam/>
- [142] OpenFOAM Programmer's Guide, ver.1.4.1, 2007.
- [143] <http://www.scilab.org/>

[音響分野以外の文献]

- [144] O.C.Zienkiewicz, マトリックス有限要素法, 培風館, 1975.
- [145] 加川幸雄, アナログ/デジタルフィルタ, 科学技術出版社, 1981.
- [146] 高木貞治, 解析概論, 岩波書店, 1983.
- [147] 鷲津久一郎, 有限要素法ハンドブック II, 培風館, 1983.
- [148] 竹之内脩, 西白保敏彦, 近似理論, 培風館, 1986.
- [149] 三谷政昭, デジタルフィルタデザイン, 昭晃堂, 1987.
- [150] 岡野道治, 機械系 CAD のための有限要素法, 理工図書, 1989.
- [151] 富士総合研究所編, 汎用流体解析システム FUJI-RIC/ α -FLOW, 丸善, 1993.
- [152] J.F.Thompson, Z.U.A.Warsi, C.W.Mastin, 数値格子生成の基礎と応用, 丸善, 1994.
- [153] 荒川忠一, 数値流体工学, 東京大学出版会, 1994.
- [154] 数値流体力学編集委員会編, 非圧縮性流体解析, 東京大学出版会, 1995.
- [155] 数値流体力学編集委員会編, 圧縮性流体解析, 東京大学出版会, 1995.
- [156] フィル・サリー, オブジェクト指向モデリング, 日経 BP 出版センター, 1995.
- [157] O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor, マトリックス有限要素法 I, 科学技術出版社, 1996.
- [158] O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor, マトリックス有限要素法 II, 科学技術出版社, 1996.
- [159] 越塚誠一, “数値流体力学”, 培風館, 1997.
- [160] 杉原厚吉, Fortran 計算幾何プログラミング, 岩波書店, 1998.
- [161] 谷萩隆嗣, デジタルフィルタと信号処理, コロナ社, 2001.

- [162] J.H. ファーティガー, M. ペリッチ, コンピューターによる流体力学, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003.
- [163] E. Lengyel, ゲームプログラミングのための3Dグラフィクス数学, ボーンデジタル, 2003.
- [164] 杉山久佳, デジタル信号処理 解析と設計の基礎, 森北出版, 2005.

謝辞

本論文は筆者が東京大学新領域創成科学研究科佐久間研究室修士課程に在学中に行った研究をまとめたものです。指導教官の佐久間哲哉准教授には卒論のときから3年間ゼミを通して研究の進め方から梗概の書き方に至るまで様々なことを教えていただきました。またリサーチフェローの安田洋介氏にも研究の進め方から細かい内容まで何度も相談に乗っていただきました。佐久間先生・安田氏の研究に対する姿勢は大変勉強になりました。研究テーマも含めて自由に研究をさせていただき、研究を楽しむことができました。心より感謝しております。

副指導教官の黄光偉准教授、副査の神田順教授にも主に論文のまとめ方・発表の仕方などについてアドバイスをいただきました。新潟大学工学部建設学科 大嶋拓也助教、東京大学工学部建築学科 今野雅助教、坂本雄三研究室のCFDゼミの皆様(大西直紀君)には、汎用流体解析ソフトウェア OpenFOAM の使い方や研究の方法について有用な助言をたくさんいただきました。漢陽大学全・佐藤先生には拡散係数に関する共同研究と、漢陽大学で行われた研究会の際に大変お世話になりました。

佐久間研究室の皆様にも大変お世話になるのと同時に、楽しい日々を過ごすことができました。特に先輩の上杉崇さんと金沢大学まで車で行き音響学会に参加したことや、石上英輔さんと東北大学での音響学会に参加したこと、同期の江川健一君と新潟大学での建築音響研究会に参加することがよい思い出です。博士課程を修了された西沢啓子さんには測定の方法などを丁寧に教えていただきました。卒論のときの同期の徳光健治君、先輩の矢納史子さん、後輩の上猶優美さん、三浦啓祐君、萬木智子さん、李孝振さん、卒論生の武田大輔君、野口晋平君、福村任生君とも楽しい研究生活を過ごすことができました。

東京大学工学部・工学系研究科で行われた数々の素晴らしい授業無しでは本研究を進めることはできませんでした。特に建築学科の環境系・構造系・材料系の授業はもちろんとして、環境海洋工学専攻の「流体数値シミュレーション」、機械工学専攻の「振動音響論」、計数工学科の「数理手法2」「数学演習」「応用音響学」、航空宇宙工学科の「空気力学第一」、情報理工学系研究科の「音響システム特論」の各授業で教わった内容は修論を書くのに直接的に役立ちました。文学部日本史学科の五味文彦先生と村井章介先生の「日本史学特講」では、研究というものに関して大きな感銘を受けました。

研究を進めるための理論やノウハウを得るのに、東京大学生産技術研究所 橘・坂本研究室の論文をたくさん参考にさせていただきました。参考文献に掲げると同時に感謝申し上げます。CIP法の開発者の方々にも感謝申し上げます。また素晴らしいフリーソフトの数々も本研究を進める上で役立たせていただきました。特に Java, gnuplot, Giam, OpenFOAM, Scilab, wxMaxima, wavesurfer はとても役に立ちました。

最後になりましたが、本研究を暖かく見守ってくれた両親・祖父母・親戚に感謝したいと思います。

発表論文一覧

修士論文梗概

本研究に関する発表論文

- [1] 太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉, “ CIP 法による音場解析,” 日本音響学会建築音響研究会資料 (AA2007-28) 日本音響学会振動・騒音研究会資料 (N-2007-31), pp. 1-8, 2007. 7.
- [2] 太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉, “ 局所作用を仮定した垂直入射吸音率と残響室吸音率の関係 - FDTD 法による残響室の数値解析 - ,” 日本建築学会大会学術講演梗概集 (環境工学 1), pp. 271-272, 2007. 8.
- [3] 太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉, “ CIP 法による時間領域音場解析 - FDTD 法との比較 - ,” 日本音響学会研究発表会講演論文集 (秋), pp. 979-982, 2007. 9.
- [4] 太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉, “ CIP 法による時間領域音場解析 - 多孔質材の吸音境界条件の検討 - ,” 日本音響学会研究発表会講演論文集 (春), pp. -, 2008. 3.
- [5] 太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉, “ CIP 法による時間領域音場解析 - 空間離散化幅の検討および任意形状への対応 - ,” 日本音響学会研究発表会講演論文集 (春), pp. -, 2008. 3.

本研究以外の発表論文

- [1] 太刀岡勇氣, 小坂慶之, 佐久間哲哉, “ 拡散係数を導入した幾何音響シミュレーションに関する検討 非拡散音場の残響時間の予測 ,” 日本音響学会研究発表会講演論文集 (春), pp. 823-824, 2006. 3.
- [2] 佐久間哲哉, 小坂慶之, 太刀岡勇氣, “ 壁面音響反射の拡散性と室内音響特性,” 日本音響学会研究発表会講演論文集 (秋), pp. 765-768, 2006. 9. (省略)
- [3] 太刀岡勇氣, 佐久間哲哉, “ 拡散係数を導入した幾何音響シミュレーションに関する検討 シューボックス型ホールにおける拡散壁の影響 ,” 日本音響学会研究発表会講演論文集 (秋), pp. 769-770, 2006. 9.

CIP法による時間領域音場解析に関する研究 Study on the time domain sound field analysis by the CIP method

学籍番号 66841
氏名 太刀岡 勇気 (Tachioka, Yuuki)
指導教員 佐久間 哲哉 准教授

1 はじめに

近年のCAEの普及によりホールなどの音響的な配慮が必要な空間を設計する際には、数値解析による検討が用いられるようになってきた。全周波数の情報を含むインパルス応答が直接求められる時系列解析の中では、時間領域差分法(FDTD法)がよく用いられる。FDTD法の課題としては、高周波数域で数値分散が大きく時間の経過とともに波形が崩れることと、CFL条件($CFL = c\Delta t / \Delta x < 1/\sqrt{N}$: c : 音速, Δt , Δx : 時間・空間離散化幅, N : 次元数)を満たす Δt でしか計算できないことが挙げられる。一方、流体力学分野では同じ時間領域の解法でありながら、数値分散が小さくCFL条件を超える大きな時間離散化幅で計算が可能なConstrained Interpolation Profile (CIP)法が提案されている。そこで本研究ではCIP法を室内音場解析にはじめて適用し、当分野に特徴的な問題を整理・検討した。

2 音響問題のためのCIP法の定式化

2.1 CIP法の原理

CIP法は特性曲線に沿って値を移流させる移流方程式の高精度解法である。移流元の物理量を求める際に、CIP補間と呼ばれる補間を行う。

2.2 特性曲線法

空気中の波動伝搬は運動方程式(1)と連続の式(2)で表され、1次元の場合は以下ようになる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

(p : 音圧 [Pa], u : 粒子速度 [m/s], ρ : 空気の密度 [kg/m³])

式(1)に c を掛け、式(2)と和と差を作ると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u + p) + c \frac{\partial}{\partial x}(\rho c u + p) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u - p) - c \frac{\partial}{\partial x}(\rho c u - p) = 0 \quad (4)$$

のようになる。 $\partial_t f + c \partial_x f = 0$ を移流方程式と呼び(微分演算子 $\partial_x = \partial/\partial x$)、一般解は一般の関数 f を用いて $f(x-ct)$ で表されるため、特性曲線 $x-ct=k$ 上で常に $f(k)$ となる。 $f_x^+ = \rho c u + p$, $f_x^- = \rho c u - p$ とおくと、式(3),(4)は、 f_x^+ が正方向に、 f_x^- が負方向に速さ c で伝搬する移流方程式である。Fig. 1のように、 f_x^+ , f_x^- を特性曲線に沿って移流させ次ステップの値を求める。この際2.3のCIP補間により移流元の値を求める。このように移流させるだけなので、FDTD法と異なり高精度でかつCFL条件を超える大きな時間離散化幅での計算が可能である。

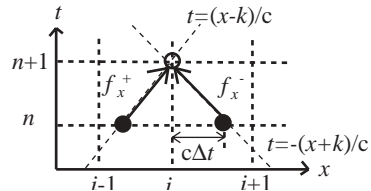


Fig. 1 The method to solve advection equation.

2.3 CIP補間

FDTD法では格子点の p と u の値を用いる。これに加えてCIP法では p と u の微分値も用いる。格子点での値・微分値から3次多項式を構成して移流元の値を内挿する。式(3),(4)を x で微分したのもも移流方程式を満たすため、3次多項式の未知数決定には、格子点における f_x^+ , f_x^- に加えて、 $\partial_x f_x^+$, $\partial_x f_x^-$ を用いる。

2.4 多次元への適用

多次元問題は1次元問題に方向分離する。2次元の場合Fig. 2の(a)の星印が白丸に移流するのを、式(3),(4)に加え、 y 方向の移流方程式(5),(6)を解くことで、これを実現する。

$$\partial_t(\rho cv + p) + c\partial_y(\rho cv + p) = 0 \quad (5)$$

$$\partial_t(\rho cv - p) - c\partial_y(\rho cv - p) = 0 \quad (6)$$

ここで、 v は y 方向の粒子速度である。また $f_y^+ = \rho cv + p, f_y^- = \rho cv - p$ とおく。

具体的な手順を示す。

- (i) x 方向に式 (3), (4) によって f_x^+, f_x^- と $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ の移流を行う (Fig. 2 の (b) で星印を黒丸に移流)。 $\partial_y f_x^+, \partial_y f_x^-$ を 1 次の上流差分により求める (最も基礎的かつ必要メモリー量が少ない M 型 CIP 法)。
- (ii) 全格子点に対して $p, \partial_x p, \partial_y p$ の更新を行い、 f_y^+, f_y^- とその微分を再構成する。
- (iii) y 方向も (5), (6) を用いて移流させる。

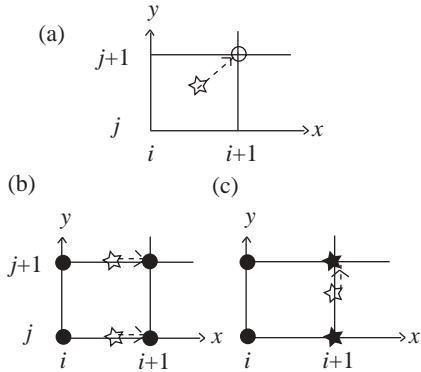


Fig. 2 Procedures of the M-type CIP method.

3 時間・空間離散化に関する検討

本節では初期空間音圧分布をガウス分布の形とし、音源に含まれる最大周波数が 1 kHz の 1/3 オクターブバンド上限となるように設定した。 Δx は最小波長の 10 分の 1 程度の 0.033 m、 Δt は 0.05 ms ($CFL = 0.52$) に設定した。

3.1 インピーダンス境界条件の導入

吸音率と 1 対 1 に対応する実数のインピーダンス ($Z = p/u$) 境界条件を導入することで室内音場解析が可能になる。導入法を Fig. 3 に示す。現ステップの点が黒丸である。図のように境界を仮定すると、(a) のように負方向に移流する f_x^- と、(b) のように正方向に移流する f_x^+ で格子番号 1 以上のものはそのまま移流させる。境界 (格子番号 0) では、次ステップの $p^{n+1} = \{(f_x^+)^{n+1} - (f_x^-)^{n+1}\}/2$, $u^{n+1} = \{(f_x^+)^{n+1} + (f_x^-)^{n+1}\}/2\rho c$ であることより、

$$(f_x^+)^{n+1} = \frac{\rho c - Z}{\rho c + Z} (f_x^-)^{n+1} = r (f_x^-)^{n+1} \quad (7)$$

となる。剛壁 ($Z \rightarrow \infty$) の場合 $(f_x^+)^{n+1} = -(f_x^-)^{n+1}$ で、吸音境界 ($Z = \rho c$) の場合 $(f_x^+)^{n+1} = 0$ となる。

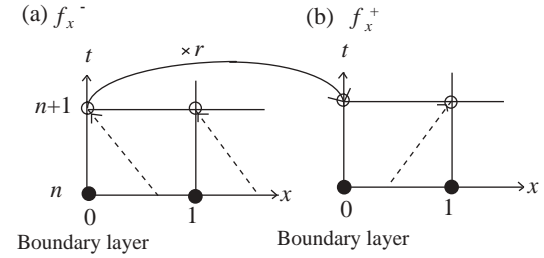


Fig. 3 How to assign boundary condition.

3.2 1次元音場での検討

インピーダンス境界条件の検証のため、Fig. 4 に示す 1 m の 1 次元音場で両端の吸音率 0.5 として検討する。結果を Fig. 5 に示す。CIP 法は理論解との比較により誤差が少ないことが分かっている。FDTD 法は時間の経過とともに数値分散によって波形が崩れている。また FDTD 法は CFL 条件により Δt を 0.096 ms 以上にできないが、CIP 法では音源の最大周波数に対応する 0.5 ms まで精度を保ったまま Δt を大きくすることができる。

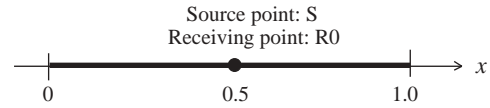


Fig. 4 Geometry of a 1D sound field.

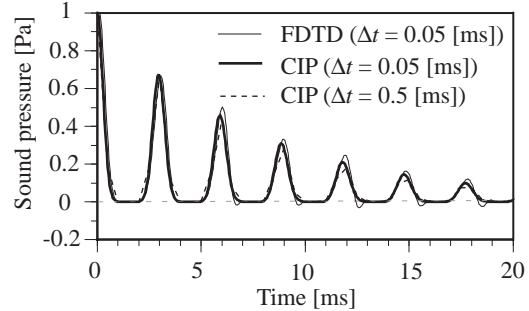


Fig. 5 Pseudo impulse responses calculated by the CIP method ($\Delta t = 0.05, 0.5$ [ms]) and the FDTD method ($\Delta t = 0.05$ [ms]) ($\Delta x = 0.033$ [m]).

3.3 3次元音場での検討

Fig. 6 に示す 1 辺 1 m の立方体剛壁室を対象に理論解と比較した。結果を Fig. 7 に示す。20 ms までの波形は FDTD 法・CIP 法ともに理論解とよく一致している。これに対して 80 ms 以降では FDTD 法の位相誤差や波形の崩れが大きい。

次に空間離散化幅に関する検討を行う。同形状で全面の吸音率を 0.1 とした。CFL を 0.52 で

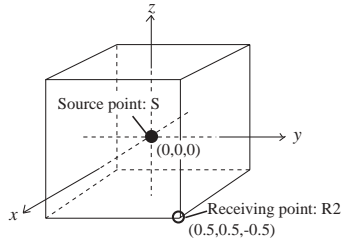


Fig. 6 Geometry of a cubic cavity.

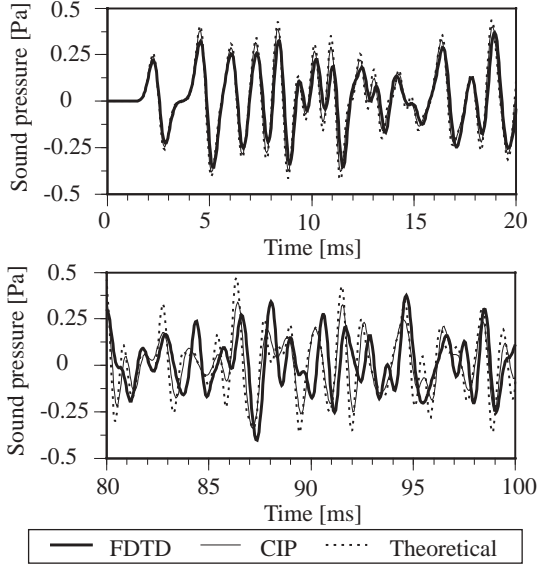


Fig. 7 Pseudo impulse responses calculated by the FDTD method and the CIP method compared to the theory ($\Delta t = 0.05$ [ms], $\Delta x = 0.033$ [m]).

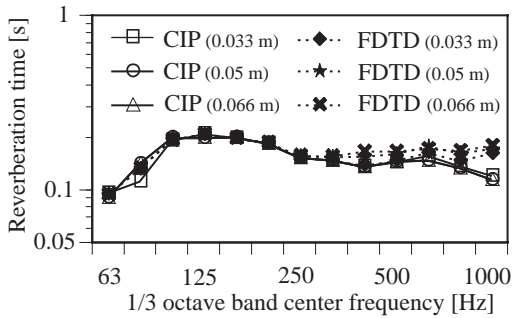


Fig. 8 Reverberation time calculated by the CIP and FDTD method under condition that CFL is 0.52.

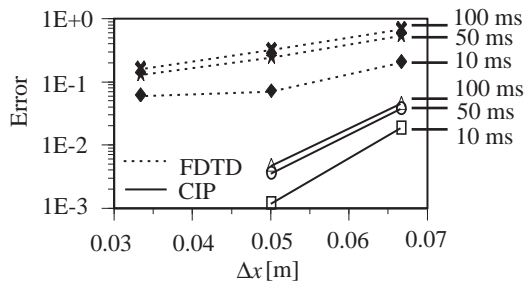


Fig. 9 Square error with Δx and elapsed time.

そろえ、 Δx を波長 10 分割から 5 分割程度まで $\Delta x = 0.033, 0.05, 0.066$ [m] と変化させた。残響時間を Fig. 8 に示す。 Δx の増大とともに FDTD 法では高周波数域での精度が低下している。また波形の崩れの程度を検討するため CIP 法での $\Delta x = 0.033$ [m] の場合を参照解 p_{ref} に、音圧 p の誤差 $\sum_{i=0}^N (p - p_{ref})^2 / \sum_{i=0}^N p_{ref}^2$ を検討した。0 ms から 10, 50, 100 ms までの経過時間に応じてそれぞれ誤差を算出した。結果を Fig. 9 に示す。経過時間に関わらず、全体的に CIP 法は FDTD 法に比べて精度が高く 2 倍の Δx でも精度が高い。

4 CIVA 法による任意形状への対応

4.1 CIVA 法について

CIP 補間を直交でない格子に対して行うためには多次元の完全 3 次多項式を構成する必要がある。2 次元の完全 3 次多項式の未知数は 10 個であるのに対して、既知数は 3 角形要素を用いた場合、各節点の物理量と微分値の 9 個しかないことが問題である。そこで Fig. 10 に示す面積座標を用いて補間を行う CIVA (Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates) 法を音場解析に導入した。

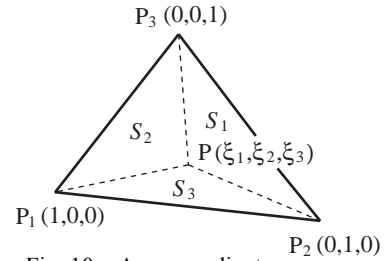


Fig. 10 Area coordinates.

このとき 3 次補関数は

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \xi_i + d \sum_{j,k=1, j \neq k}^3 \beta_{jk} [\xi_j^2 \xi_k + c \xi_1 \xi_2 \xi_3]$$

で与えられる。 $d = 0$ で 1 次補間、1 で 3 次補間である。 $c = 0.5$ とし、 α, β は以下の通りである。

$$\alpha_i = f_i$$

$$\beta_{jk} = f_j - f_k + (x_k - x_j) \frac{\partial}{\partial x} f_j + (y_k - y_j) \frac{\partial}{\partial y} f_k$$

4.2 2 次元音場での検討

Fig. 11 に示す $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ の 2 次元音場で $\Delta x = 0.033$ [m] を基本に乱数を用いて生成した不均一な 3 角形メッシュに CIVA 法を適用した。周縁部の吸音率は 0.5 とした。Fig. 12 に示す要素

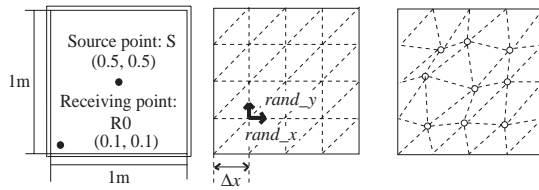


Fig. 11 Geometry of a 2D sound field and generated meshes using random numbers.

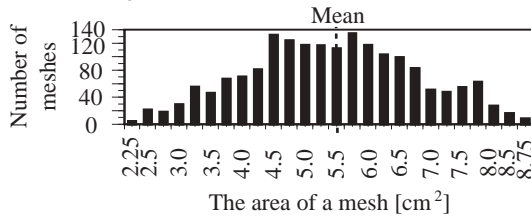


Fig. 12 The area of a mesh generated in the way above.

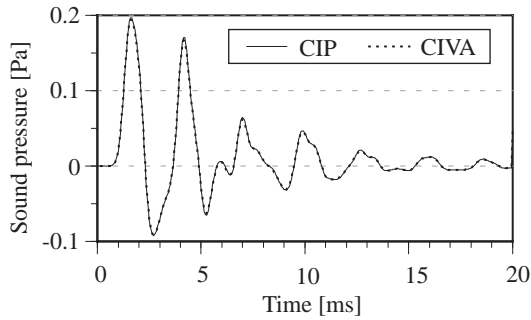


Fig. 13 Pseudo impulse responses calculated by the CIP method (using rectangular meshes) and the CIVA method (using triangular meshes).

毎の面積をみると、最大で 4 倍以上面積が異なる。音圧波形を Fig. 13 に示す。CIP 法と CIVA 法で結果は一致しており、質の悪いメッシュを用いているのにも関わらず、音響問題でも 3 角形要素を用いた解析ができることが示された。

5 周波数特性を持つ境界条件の検討

5.1 概要

FDTD 法では実数のインピーダンスを用いることが多く、任意の周波数特性を持つ境界条件の実現は難しい。CIP 法は 3.1 に示したとおり反射率 r のみで境界条件を定義できるため、入力列 f_x^- に対する出力列 f_x^+ の伝達関数 r が境界面の複素数の反射率になるフィルターを設計すれば、境界条件に周波数特性を持たせることができる。

5.2 音響管での検討

Fig. 14 に示す音響管の解析を行った。 $\Delta x = 0.025$ [m]、 $\Delta t = 71.4$ [μ s] とし、左端を速度駆動した。流動抵抗 15000 Ns/m^4 の吸音材(厚さ 0.1 m)

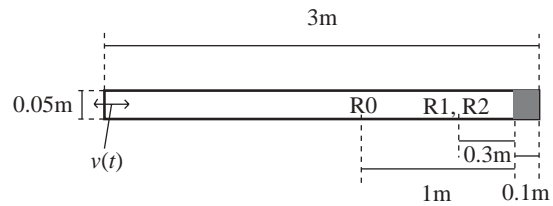


Fig. 14 Geometry of a sound tube with a porous material (0.1 m thickness).

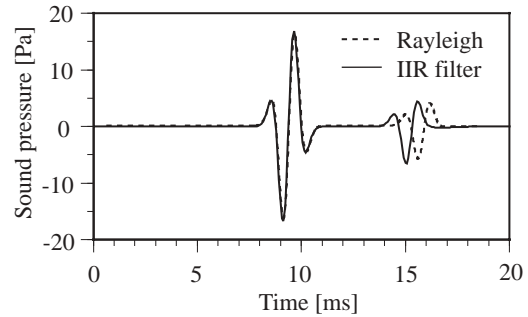


Fig. 15 The incident and reflected waves calculated by the CIP method with the Rayleigh model and the CIP method with boundary condition using IIR filter.

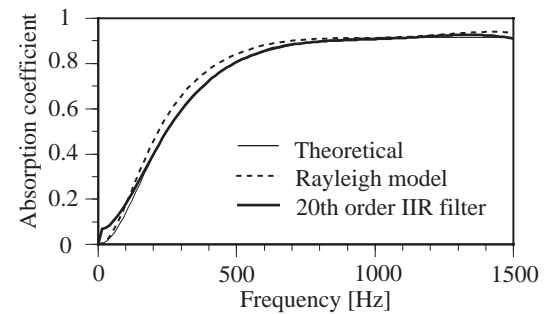


Fig. 16 Normal incidence absorption coefficients.

を右壁に密着させたものを仮定して、理論解 (Rayleigh モデル) より 20 次の IIR フィルターを設計した。波形を Fig. 15 に示す。同時に筆者が CIP 法に導入した、吸音材の内部を Rayleigh モデルによりモデリングして内部伝搬を解析する手法による解析解を示している。このように両者の解析結果はよく一致している。伝達関数法により求めた垂直入射吸音率を Fig. 16 に示す。両者ともに理論解とよい対応が見られる。

6 まとめ

CIP 法を室内音場解析に適用し残響時間・波形の両面で FDTD 法よりも高精度であることを示した。また不均一な 3 角形要素による解析が行えた。さらに境界条件としてフィルターを用いて任意の周波数特性を持つ境界条件を実現した。

CIP 法による音場解析 Sound field analysis using the CIP method

太刀岡勇気、安田洋介、佐久間哲哉
Yuuki Tachioka, Yosuke Yasuda and Tetsuya Sakuma

東京大学大学院新領域創成科学研究科社会文化環境学専攻
Department of Socio-Cultural Environmental Studies, Graduate School of Frontier Sciences,
The University of Tokyo

内容概要 時間領域の音場解析には、FDTD 法がよく用いられるが、精度・安定性の点で様々な課題のある手法である。一方、近年電磁界・波動解析で用いられてきた CIP 法が音場解析に適用されてきており、伝搬問題における精度が検討されている。しかしながら、室内音場に対して適用された事例はない。本報では原理・手法の概説、伝搬問題における精度の確認を行うのと同時に、室内音場への適用を目指し、インピーダンス境界条件を導入した場合の検討を行う。また計算量低減のため、CFL 条件を大きく超えるような大きな時間刻みを採用した場合の検討も行う。

1. はじめに

時系列の室内音場解析には、時間領域差分法 (FDTD 法) がよく用いられる [1]。しかしながら、主として陽解法が用いられることにより、空間離散化幅 Δx に対する時間離散化幅 Δt の最大値を定める CFL 条件により、時間離散化幅に厳しい制限が課せられる。具体的には式 (1) で表されるクーラン数 CFL が 1 より小さくなくてはならない。また陰解法化も大規模な非対角優位の疎行列を解かなければならないため難しい。

$$CFL = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad (1)$$

ここで、 c : 音速 [m/s] である。

一方、従来 FDTD 法がよく用いられていた電磁界・波動解析の分野では、1980 年代から特性曲線法と 3 次多項式による補間を組み合わせた Constrained Interpolation Profile 法 (CIP 法) [2, 3] が提案され、広く用いられている。この手法は移流方程式を特性曲線にそって解くだけなので、CFL 条件にとらわれない計算が可能である。近年、CIP 法は音場解析にも適用が進みつつあり [4-8]、主として伝搬問題に関して、理論解や FDTD 法との比較が行われている。一方で、室内音場解析で必須となるインピーダンス境界条件の適用に関する検討や、CFL 条件を超えるような大きな時間ステップを採用した場合の検討は

なされていない。

そこで本報では、室内音場解析に CIP 法を適用し、インピーダンス境界条件を適用した場合の精度の分析や、CFL 条件を超えるような大きな時間ステップを採用した場合の手法・精度の分析およびその課題について考察する。

2. CIP 法による音響伝搬解析の原理

2.1 CIP 法の原理

CIP 法は、基礎方程式を移流方程式の形に変形し、特性曲線に沿って値を移流させる特性曲線法の一つである。移流させる物理量を求める際にその微分値も用いて、CIP 補間と呼ばれる補間を行う。

2.2 特性曲線法

空気中の波動伝搬は運動方程式と連続の式で表され、1 次元の場合はそれぞれ以下ようになる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

ここで p : 音圧 [Pa], u : 粒子速度 [m/s], ρ : 空気の密度 [kg/m^3] である。

式 (2) を ρ で割り、式 (3) を ρc で割ってそれぞれ和と差を作ると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{p}{\rho c} \right) + c \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{p}{\rho c} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{p}{\rho c} \right) - c \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{p}{\rho c} \right) = 0 \quad (5)$$

のようになる。

一般に $\frac{\partial}{\partial t} f + c \frac{\partial}{\partial x} f = 0$ の形をした方程式を移流方程式と呼ぶ。この方程式の一般解は、一般の関数 f を用いて $f(x-ct)$ の形で表され、直線 $x-ct=k$ 上で常に同じ値 $f(k)$ となる。この直線上で解が一定となる直線のことを特性曲線と呼ぶ。

ここで $sum_x = u + p/\rho c$, $sub_x = u - p/\rho c$ とおくと、式 (4), (5) は、 sum_x が正方向に、 sub_x が負方向にそれぞれ速度 c で伝搬する移流方程式の形をしている。Fig. 1 のように、 sum_x, sub_x の値を特性曲線に沿って移動させることで値が求まる。この際 $c\Delta t \neq n\Delta x$ (n は整数) の時には格子点以外の場所の値を参照するため、2.3 で述べる CIP 補間によって値を求める。 p や u の値を求めたいときには、それぞれの値の和と差より求めればよい。

このように移流させるだけなので、FDTD 法と異なり CFL 条件にとらわれない大きな時間ステップを用いた計算が可能である。ただしその場合、境界付近では工夫が必要である。(cf. 第 6 節)

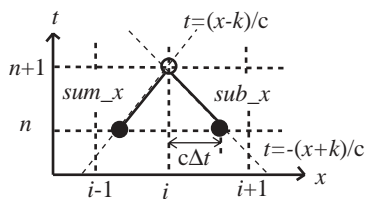


Fig. 1 The up-wind method of solving advection equation.

2.3 CIP 補間

FDTD 法では格子点における音圧と粒子速度の値のみが与えられている。また一般的に用いられる空間 2 次精度の FDTD 法は、中心差分を用いているため数値拡散が起こりやすい。例えば Fig. 2 のような急峻な波形が伝搬するときに問題が起こる。ここで

黒丸が現ステップの波形、白丸がひとつ先のステップの波形である。厳密解のプロフィールは実線で表される。(a) の空間 2 次精度の FDTD 法では、格子点における値のみしか保持していないため点線のように補間することになる。これを続けることで波形が崩れ、伝搬とともに波の形が広がる。

これに対し、(b) の CIP 法では格子点での微分値も保持しているため、滑らかに内挿することが可能である。結果として厳密解のプロフィールを比較的よく維持できることになる。これを行うため、CIP 法では 3 次多項式を格子点間に内挿する。その際未知数決定のため 4 つの値を用いる必要がある。2 つは格子点における sum_x と sub_x から求め、残りの 2 つは、式 (4), (5) の両辺を x で微分して得られる (4'), (5') も移流方程式を満たすため、 $\partial_x sum_x$, $\partial_x sub_x$ から求める。ここで微分演算子 $\partial_x = \partial/\partial x$ を定義した。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{p}{\rho c} \right) + c \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{p}{\rho c} \right) = 0 \quad (4')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{p}{\rho c} \right) - c \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{p}{\rho c} \right) = 0 \quad (5')$$

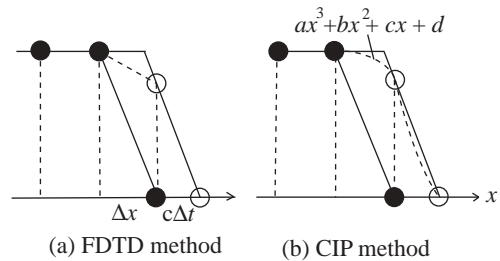


Fig. 2 The FDTD method and the CIP method.

2.4 多次元への適用

多次元化については様々な検討がなされており [9]、多次元空間に 3 次多項式を作成する A 型 CIP 法などがある。本研究ではそれらの中で最も基礎的かつ必要メモリー量の少ない M 型 CIP 法 [10] による検討を行った。これは Fig. 3 のように多次元を 1 次元に方向分離するものである。2 次元の場合、例えば Fig. 3 の (a) の星印の点が白丸の点に移動することになる。式 (4), (5) に加えて、 y 方向の移流方程式 (6), (7) を解くことで、これを実現する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(v + \frac{p}{\rho c} \right) + c \frac{\partial}{\partial y} \left(v + \frac{p}{\rho c} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(v - \frac{p}{\rho c} \right) - c \frac{\partial}{\partial y} \left(v - \frac{p}{\rho c} \right) = 0 \quad (7)$$

ここで、 v は y 方向の粒子速度である。また $sum_y = v + p/\rho c$, $sub_y = v - p/\rho c$ とおく。

手順は以下の通りである。

- (i) x 方向に式 (4), (5) によって sum_x , sub_x とその微分値の移流を行う。Fig. 3 の (b) で黒丸の点が現ステップの点である。まず x 方向に移流を行う。つまり星印の点を黒丸の点に移流させる。その際、 $\partial_y sum_x$, $\partial_y sub_x$ を 1 次の上流差分により求める。(x 方向に sum_x , sub_x が伝搬する場合には、その x 方向の勾配 $\partial_x sum_x$, $\partial_x sub_x$ が最も重要であり、それと垂直な y 方向の $\partial_y sum_x$, $\partial_y sub_x$ の x 方向への移流に伴う変化はあまり正確である必要がない ([3] p. 71 参照) という仮定に基づき、メモリー量・計算時間の点で有利な 1 次の上流差分を採用している。)
- (ii) 全格子点に対して p , $\partial_x p$, $\partial_y p$ の更新を行い、 sum_y , sub_y とその微分を再構成する。
- (iii) 式 (6), (7) に従い sum_y , sub_y とその微分値の移流を行う。Fig. 3 の (b) で (ii) の手順により更新された点が、黒い星印の点である。

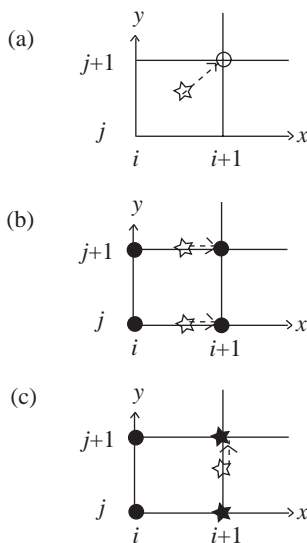


Fig. 3 Procedures of the M-type CIP method.

これらの点から、白星印の点を内挿し移流させる。その際 $\partial_x sum_y$, $\partial_x sub_y$ を 1 次の上流差分によって求める。

(iv) (ii) を行う。

これを繰り返す。3 次元に関しても同様である。

2.5 インピーダンス境界条件の導入法

インピーダンス境界条件の導入は以下のように行う。Fig. 4 において現ステップの点が黒丸である。図のような境界層を仮定した場合、負方向に伝搬する sub_x は (a) のようにそのまま移流させればよい。これに対し (b) のように正方向に移流する sum_x の場合、格子番号 1 以上は移流させるだけでよい。境界層では現ステップの sum_x^n , sub_x^n とその微分値より p^n , $\partial_x p^n$ を求め、次ステップの境界層での sum_x^{n+1} とその微分値を再構成する。例えば剛壁の場合 $u^n = u^{n+1} = 0$ であるため、次ステップの $sum_x^{n+1} = p^n / \rho c$ となる。吸音境界 (ノーマルインピーダンス ρc) の場合、 sum_x^n と sub_x^n の差より求まる p^n に対して境界条件より $u^{n+1} = -p^n / \rho c$ であるため、 $sum_x^{n+1} = u^{n+1} + p^n / \rho c = 0$ となる。

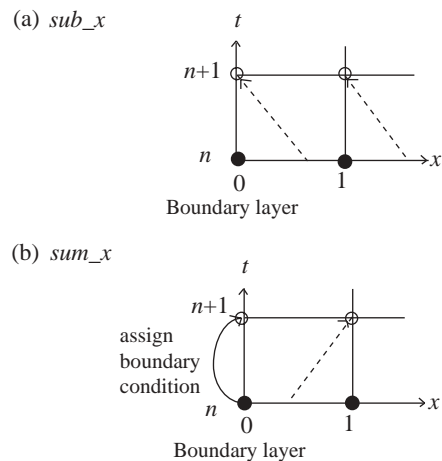


Fig. 4 How to assign boundary condition.

3. 伝搬問題における精度の確認

伝搬問題に関しては基礎的な検討はすでになされているが、確認の意味も含めて文献 [5] とほぼ同条件の検討を行った。計算領域は、Fig. 5 に示す 1 辺 0.4 m の立方体領域で、格子間隔を 4 mm、時間間隔

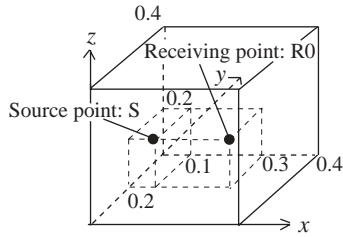


Fig. 5 Geometry of a propagation simulation model.

を CFL 条件を満たす 0.0026 ms、音源点 S を (0.1, 0.2, 0.2)、受信点 R0 を (0.3, 0.2, 0.2) に取ったものである。境界からの反射の影響が受信点にあらわれない 0.78 ms までを解析対象にした。初期空間音圧分布を、式 (8) の形のガウス分布に仮定し、音源の幅を与える定数を $d = 0.01$ [m] とした。

$$p(r) = \exp(-r/d)^2 \quad (8)$$

これは数格子でガウス分布を与え 15 kHz までの成分が含まれる非常に急峻な波形である。

結果を Fig. 6 に示す。上述の通り、高周波成分まで含まれる急峻なガウス分布を音源として与えているため、FDTD 法では高周波成分の位相速度が遅れる分散が起こっている。CIP 法でも分散は起こっているが、おおむね伝搬を捕捉していることがわかる。これは既往研究とおおむね同様の結果である。最大振幅の誤差は CIP 法で 14%、FDTD 法で 43%であった。

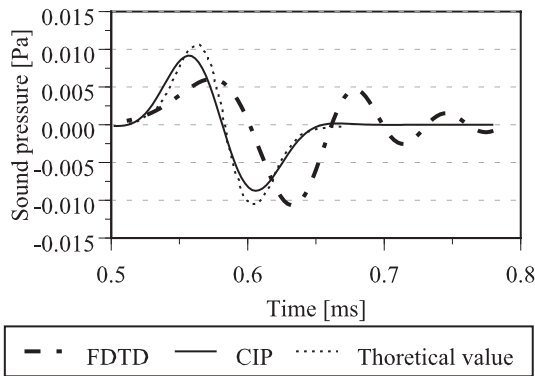


Fig. 6 Pseudo impulse response at R0.

4. 室内音場への適用のための検討

本節では、一般に伝搬問題解析に比べ複雑となる室内音場解析への CIP 法の適用性について、インピーダンス境界条件を導入して検討する。本節では初期空間音圧分布を、式 (8) の形に仮定し、4.3.2 を除

いて、音源の幅を $d = 0.13$ [m] に統一した。これは音源に含まれる最大周波数が、1 kHz の 1/3 オクターブバンド上限周波数となるような音源である。FDTD 法の場合、空間離散化幅は通常最小波長の 10 分の 1 程度に設定するため、1/30 m とした。時間離散化幅は、空間離散化幅に対する 3 次元の CFL 条件を満足する 0.05 ms で検討した。音源特性・空間離散化幅・時間離散化幅は以後これを用い、FDTD 法・CIP 法ともに同じものを用いる。

4.1 1次元音場での検討

4.1.1 解析対象

Fig. 7 に示すように、長さ 1 m の 1 次元音場を考えた。両端部に吸音率 0.5 相当のノーマルインピーダンスを実数で与えた。音源・受信点を $x = 0.5$ [m] に設置した。

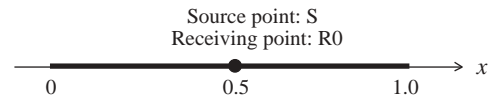


Fig. 7 Geometry of 1D sound field.

4.1.2 結果と考察

結果を Fig. 8 に示す。FDTD 法に対して、CIP 法はオーバーシュート・アンダーシュートが少なくシャープなプロフィールを保つことができることがわかる。

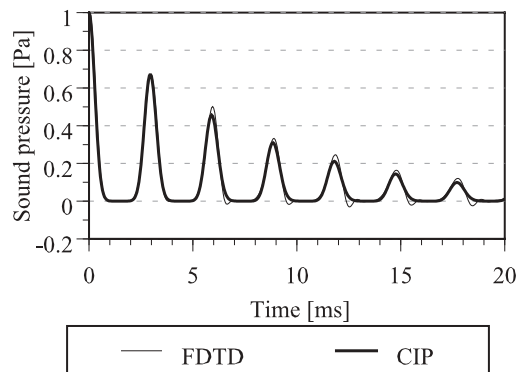


Fig. 8 Pseudo impulse response at R0 calculated by the FDTD method and the CIP method.

また、R0 における CIP 法・FDTD 法の空間離散化幅と精度との関係を Fig. 9 に示す。両者で最小波長 4, 6, 8, 10 分割とした音圧波形を p_i を、FDTD 法で最小波長 20 分割として計算した参照解 $p_{i,ref}$ と比較したものである。誤差評価には、平均二乗誤差 $Err = \sum_{i=0}^{N-1} (p_i - p_{i,ref})^2 / \sum_{i=0}^{N-1} p_{i,ref}^2$ を用いた。ここで時間の観測点数を N とした。FDTD 法と比べて CIP 法は、空間離散化幅を大きくしたときにも誤差が小さいことがわかる。

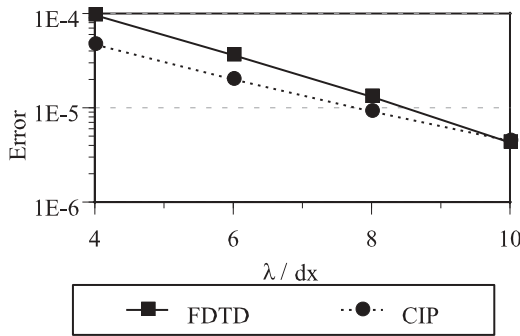


Fig. 9 Average square error with λ/dx .

4.2 3次元音場での検討

4.2.1 解析対象

日本建築学会 環境工学委員会 音環境運営委員会 音響数値解析小委員会では、音響数値解析におけるいくつかのベンチマーク問題を提供している。Fig. 10 はそのベンチマーク問題の1つで、1辺 1 m の立方体室であり、全面が剛壁によって構成されている [11]。

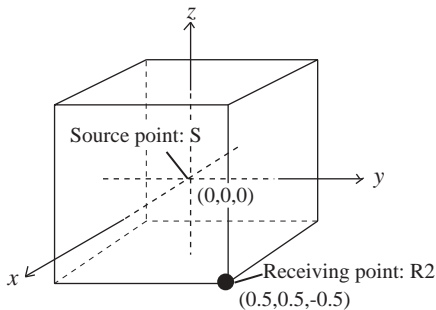


Fig. 10 Geometry of cubic cavity.

4.2.2 結果と考察

受音点 R2 における音圧の波形を Figs. 11, 12 に示す。Fig. 11 に示す 0 ms から 20 ms までの領域では、FDTD 法・CIP 法ともにおおむねピークの位置は一致しているものの、主として 10 ms 以降、CIP 法のピークの数が少なくなっていることが分かる。Fig. 12 に示す 80 ms から 100 ms までの領域では、CIP 法は FDTD 法と比べて振幅が小さくなり、波の数も少なくなっているのが顕著である。第 3 節の伝搬問題においては、既往研究と同様 CIP 法の精度が高かったが、時間の経過に伴う虚音源の増加を考えると、こちらは FDTD 法に妥当性があるように思われる。これは 2.4 で述べたように、直交方向の補間に 1 次精度の上流差分を用いていることが原因と考えられる。伝搬問題では、直交方向の勾配があまり問題にならないため、この補間は妥当であった。しかし、拡散音場のようにあらゆる方向に伝搬が起き、直交方向の勾配も重要であるような音場では、上流

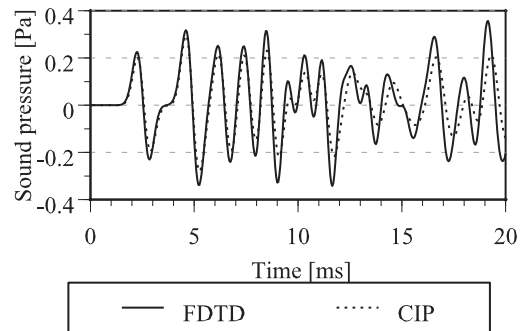


Fig. 11 Pseudo impulse response at R2 calculated by the FDTD method and the CIP method (0-20 ms).

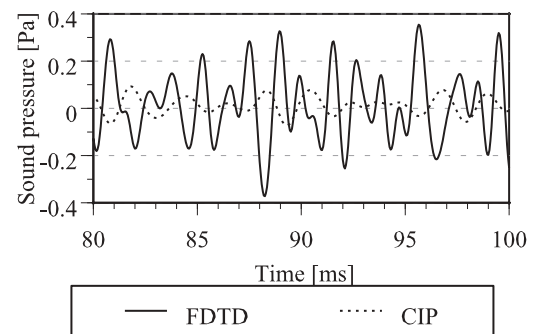


Fig. 12 Pseudo impulse response at R2 calculated by the FDTD method and the CIP method (80-100 ms).

差分による数値拡散によって精度が落ちてしまうものと思われる。

4.3 無反射境界条件の検討

4.3.1 1次元音場の場合

4.1.1の解析対象・計算条件で両端を吸音率1とした場合の結果を示す。Fig. 13に示すように、1次元の場合には完全無反射境界条件が自然に満足されることになる。

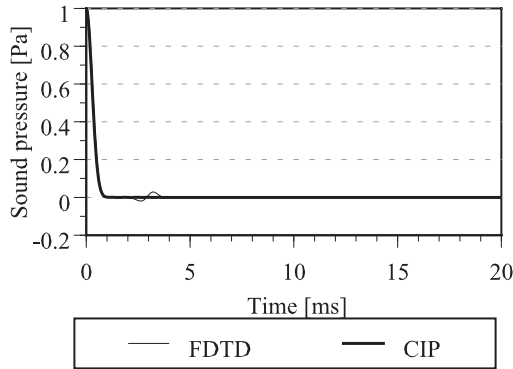


Fig. 13 Pseudo impulse response at R0.

4.3.2 2次元音場の場合

Fig. 14に示す1辺8mの正方形内部の2次元音場について、既報 [12] の条件に合わせ、式 (8) の $d=0.5$ [m] と比較的滑らかな音圧分布を仮定した。空間離散化幅 0.05 m、CFL 条件を満たす時間離散化幅 0.1 ms で、周縁部の吸音率を1 (ノーマルインピーダンス pc) として、PML などの配慮を行わずに計算を行った。

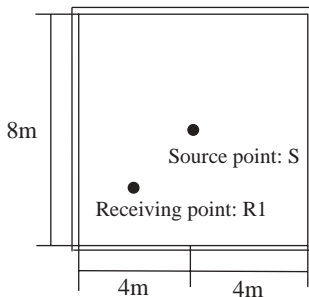


Fig. 14 Geometry of a 2D square sound field.

Fig. 15にFDTD法とCIP法による結果を示す。図中FDTD (cut) は、反射の影響がないよう十分大きな領域をFDTD法によって計算したものである。Fig. 16はインパルス応答積分法 (Schroeder法) によりエネルギー減衰波形を求めたものである。FDTD法とCIP法ではほとんど差異がみられず、端部からの強い反射 [12] を示す同様の傾向を見せている。2次元の場合は平面波の仮定が成立しないため、無反射にはならないことが分かる。

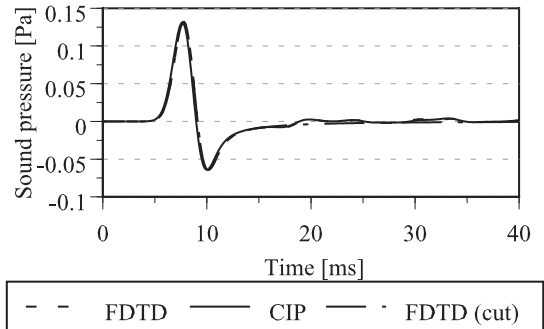


Fig. 15 Pseudo impulse response at R1 calculated by the FDTD method, the CIP method and the FDTD method with enough region.

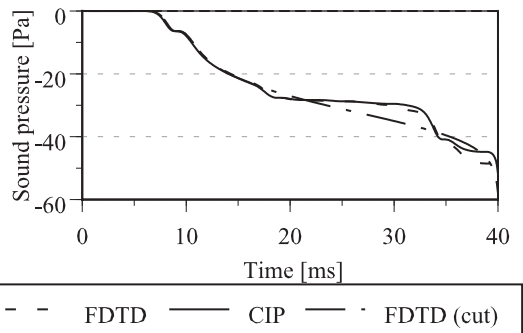


Fig. 16 Energy attenuation level at R1 .

5. CFL条件を超える時間幅での検討

5.1 境界付近での工夫

CIP法において、式 (1) に示したクーラン数 CFL が1を超えるような条件で計算を行う場合には、境界付近での境界条件の取扱いに工夫が必要である。

$1 < CFL < 2$ の場合の例を Fig. 17 に示す。求めたい点・与えられている点は、黒丸で示した点である。格子番号が $CFL + 1$ より大きい点であれば、(i) の

ように移流させるだけで自然に求まる。しかしながら境界付近 (この場合格子番号 1) では、移流させる点が n ステップの段階では直接的に求まらない。まず $CFL < 1$ となるように時間分割幅を細かくして (i) のように移流させ、境界条件を課して白丸の点を求めてから、内挿して求めた星印の点を (ii) のように移流させる必要がある。

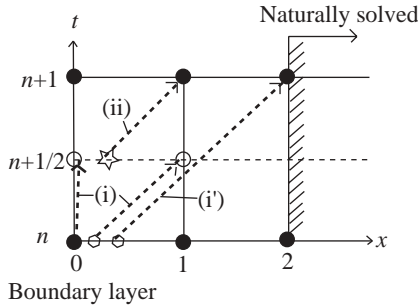


Fig. 17 The region which is naturally solved and the one which is specially dealt with.

5.2 1次元音場での検討

4.1.1 と同条件のモデルで、時間ステップを CFL 条件を満足する 0.05 ms と、音源に含まれる最大周波数のサンプリング周波数におおむね対応する 0.5 ms とした場合を比較したものを Fig. 18 に示す。5.1 に述べた工夫を行うことで、高い精度を維持できていることが分かる。他にも n ステップの段階で 3 次多項式を外挿して、移流先の点を求める方法も試したが、精度は出なかった。

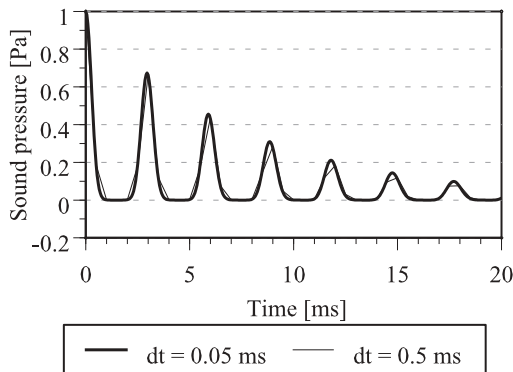


Fig. 18 Pseudo impulse response at R0 calculated by the CIP method with time step 0.05 ms or 0.5 ms.

6. 計算効率の比較

CIP 法は FDTD 法同様、メモリー量・計算量ともに総格子点数に比例する手法である。しかしながら CIP 法は、内挿を行ったり微分値を保持したりする必要性から、同じ格子・時間ステップで行えば FDTD 法に比べて、計算量・メモリー量ともに負荷の大きな手法である。

6.1 メモリー量

FDTD 法では p, u_i の変数が必要である。これに対し CIP 法では、 p, u_i に加えて $\partial p / \partial x_i, \partial u_i / \partial x_j$ が必要である。1次元で 2 倍 ($i=j=1$)、2次元で 3 倍 ($i=1, 2; j=1, 2$)、3次元で 4 倍 ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$) のメモリー量が最低でも必要である。また効率的な計算のために計算用のワークスペースが必要であるため、同じ格子点数の場合、3次元の計算では 10 倍程度のメモリー量が必要である。

6.2 計算量

CIP 法では多次元問題を 1次元に還元して解くため、3次元問題になると直交 3 軸方向の粒子速度 u, v, w それぞれについて 3次元のループが必要である。また 2.4(ii) のプロセスでも 3次元ループが必要である。それぞれ 1 回ずつが FDTD 法以上の計算量である。このため CIP 法の計算量は 6 倍以下にはならない。その他にも内挿や境界条件の適用、変数のコピーなどの手間がかかるため、同じ時間ステップ・格子点数で計算した場合、3次元で 20 倍程度の計算時間がかかっているのが現状である。筆者らのソースコードにおける 1 ステップ当たりの主要な演算量を Table 1 にまとめた。

Table 1 Repetition numbers of main calculations at a time step.

	read array element	write array element	multiply
FDTD	10	4	6
CIP	99	87	114

6.3 考察

このように、一見すると FDTD 法に比べてメリットがないように思われるが、粗い格子でも高精度を

維持できるため、そうとばかりもいえない。例えば同じ精度を2倍の空間離散化幅で実現できるとすれば、メモリー量は1/8になるためFDTD法に匹敵する。計算時間に関しても1回のループあたり1/8、さらに時間ステップを、CFL条件を満たすようにしても2倍にできるため、1/16の計算量に抑えることができ、同様にFDTD法に匹敵する。

さらにCFL条件を超えるような時間ステップで計算できるアルゴリズムを3次元に実装すれば、FDTD法以上の高速化が可能であると考えられる。室内音場の問題で、波長に対してどの程度まで空間離散化幅を粗くすることができるかに関する詳細な検討が必要であろう。

7. まとめと今後の課題

CIP法を音場解析に適用した場合に起こる問題点・課題について検討した。伝搬問題では既往研究と同じように高い精度を保つことが示されたが、室内音場のような長い時間にわたってあらゆる方向から音波が到来する音場を解く問題では、直交方向の補間を1次精度で行っているためか精度が出ないこともありうることを示された。今後そのような問題点をもつM型CIP法を改良する必要性がある。

今後の課題としては、これを改善するため直交方向の微分にQUICKスキームを使うことが考えられる。また2,3次元の場合にCFL条件を超えるような大きな時間ステップとした場合でも計算できるようなアルゴリズムの実装も考えられる。さらにCFL条件を超えるような時間ステップで計算できることは、計算量を減らすことのみならず、任意形状に対応する格子を用いる手法(有限体積法、有限要素法)との相性もよいため、このような手法との連携も考えられる。

参考文献

- [1] 坂本慎一, 横田考俊, 「FDTD法による音場解析とその応用」, pp. 1233-1236, 2006. 3, 日本音響学会講演論文集(春).
- [2] H. Takewaki, A. Nishiguchi and T. Yabe, “The Cubic-Interpolated Pseudo-Particle (CIP) Method for

Solving Hyperbolic-Type Equations”, pp. 261-268, 1985, Journal of Computational Physics, 61.

- [3] 矢部孝, 内海隆行, 尾形陽一, 「CIP法」, 2003, 森北出版.

- [4] 寺本顕武, 「CIP法に基づく3次元弾性波動場数値実験について」, pp. 39-44, 2005. 1, 電子情報通信学会技術研究報告(応用音響 EA).

- [5] 斉藤亮平, 西方敦博, 「CIP法とFDTD法による球面音波伝搬解析の性能比較」, pp. 576-580, 2006. 6, 電子情報通信学会論文誌.

- [6] 大久保寛, 呉星冠, 土屋隆生, 竹内伸直, 「CIP法を用いた3次元音場解析に関する検討」, pp. 25-30, 2006. 9, 電子情報通信学会技術研究報告(応用音響 EA).

- [7] 土屋隆生, 大久保寛, 竹内伸直, 「CIP法による音波伝搬シミュレーション」, pp. 1-6, 2006. 11, 電子情報通信学会技術研究報告(超音波 US).

- [8] 呉星冠, 大久保寛, 土屋隆生, 竹内伸直, 「C型CIP法を用いた音場解析に関する検討」, pp. 17-22, 2007. 1, 電子情報通信学会技術研究報告(応用音響 EA).

- [9] T. Yabe, T. Ishikawa, P. Y. Wang, T. Aoki, Y. Kadota and F. Ikeda, “A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation II. Two-Three-Dimensional Solvers”, pp. 233-242, 1991, Computational Physics Communications, 66.

- [10] H. Takewaki and T. Yabe, “Cubic-Interpolated Pseudo Particle (CIP) Method? Application to Nonlinear or Multi-Dimensional Problems”, pp. 355-372, 1987, Journal of Computational Physics, 70.

- [11] <http://gacoust.hwe.oita-u.ac.jp/AIJ-BPCA/B0-1T/>

- [12] 内藤洋一, 横田考俊, 坂本慎一, 橘秀樹, 「差分法による開領域計算のための完全吸音境界の検討」, pp. 751-752, 2000. 9, 日本音響学会講演論文集(秋).

局所作用を仮定した垂直入射吸音率と残響室法吸音率の関係
FDTD 法による残響室の数値解析

正会員 太刀岡勇氣*
同 安田洋介**
同 佐久間哲哉***

垂直入射吸音率 残響室法吸音率 FDTD 法

1. はじめに

差分法などの数値解析を行う場合、境界条件としては局所作用を仮定し、その垂直入射吸音率相当の実音響インピーダンスを与える場合が多い。局所作用を仮定した解析結果と材料をモデリングした解析結果の比較は行われているものの[1]、残響室法吸音率との関係を数値解析によって明らかにした事例は見られない。そこで、時間領域差分法 (FDTD 法) を用いて残響室をモデリングし、局所作用の仮定のもと残響時間より求めた残響室法吸音率と、理論式[2]より求まる統計入射吸音率を比較し、それらの関係を比較した。

2. 手法

連続の式と運動方程式を連立し、空間 2 次、時間 1 次精度の FDTD 法による検討を行った。離散幅はそれぞれ 0.03m, 5e-5s とした。境界条件に関しては垂直入射吸音率相当の実音響インピーダンスを与えた。音源は室隅部に配置し、得られた時間応答波形から Shroeder 法で 100Hz から 1kHz の 1/3 octave band 毎の残響時間を-5~-35dB の回帰区間で評価した。

3. 解析対象

解析対象としては Fig. 1 に示す(i)直方体残響室 ($V = 220 [m^3]$, $S = 227 [m^2]$) (ii)不整形残響室 ($V = 168 [m^3]$, $S = 180 [m^2]$) とした。それぞれ(A)室全面に垂直入射吸音率 $\alpha_n = \{0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ を与えた場合、(B)床面に一边が 3.3m の正方形試料 ($\alpha_n = \{0.2, 0.6, 0.9\}$) を置いた場合、(C)床面全体(i)28.3m²,(ii) 34.2m²)に試料($\alpha_n = \{0.2, 0.6, 0.9\}$) を置いた場合の 3 ケースについて検討した。受音点は JIS A 1409:1998 に適合させて 5 点設定した。音源には 1kHz の 1/3 octave band 上限までがほぼ平坦な周波数特性となる

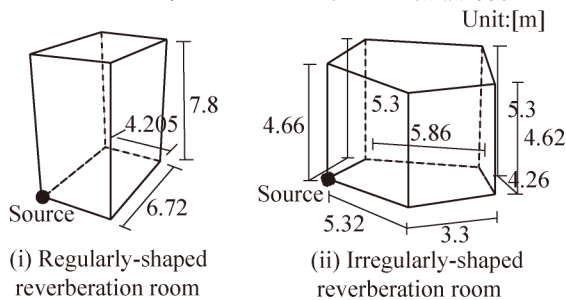


Fig. 1 Geometry of reverberation rooms.

よう Gauss 分布を空間波形として与えた。

4. 結果と考察

検討 A (全面吸音) 残響時間(RT)を Fig. 2 に、これより導かれる残響室法吸音率 α_r を Fig. 3 に示す。 α_n が小さい場合 ($\alpha_n = 0.01, 0.2$) や高周波数域では、 α_r は比較的統計入射吸音率に近い値となっているが、低周波数域では吸音率によらず同じ上限値を持っている。これには吸音面への入射角の偏りが影響している可能性がある。これらのケースにおいて、残響曲線の折れ曲がりは見られなかった。

検討 B (床面の一部のみ吸音) RT を Fig. 4 に、これより導かれる α_r を Fig. 5 に示す。対応する残響曲線を Fig. 8 に示す。検討 A 同様、 α_n が小さい場合は $RT \cdot \alpha_r$ は理論値に近い。一方吸音率が高い場合は周波数によらず RT が理論値より著しく長く、 α_r は小さい。この傾向は直方体室(i)の方が顕著であった。室の拡散性が低く、何らかのモードが残りやすいことが原因と考えられる。

検討 C (床全面吸音) RT を Fig. 6 に、これより導かれる α_r を Fig. 7 に示す。直方体室(i)では水平方向のモードが残りやすいことから[3]、 α_n によらずほぼ同様の $RT \cdot \alpha_r$ となっている。不整形室(ii)では α_r はより理論値に近いが、吸音率が高い場合は検討 B 同様 α_r が小さく、直方体室(i)同様何らかのモードが残りやすくなっていることが示唆される。

5.まとめ

FDTD 法により、局所作用の仮定のもと残響室法吸音率と統計入射吸音率を比較した。吸音率が低い場合には一致するケースも見られたが、吸音率が高くなると拡散音場が成立しないことによる乖離が見られた。全面吸音の場合に低周波数域で見られた残響時間の増加については今後の課題である。

参考文献

[1] 天野 他, 境界要素法を用いたインパルス応答推定における壁面の境界条件の取り扱いについて, 音講論集(春) pp. 863-64, (1996. 3).
[2] Morse and Ingard, "Theoretical Acoustics", p. 580, Princeton University Press, (1968).
[3] 安田 他, 吸音面が偏在した非拡散室における残響減衰特性, 音講論集(秋) pp. 755-58, (2006. 9).

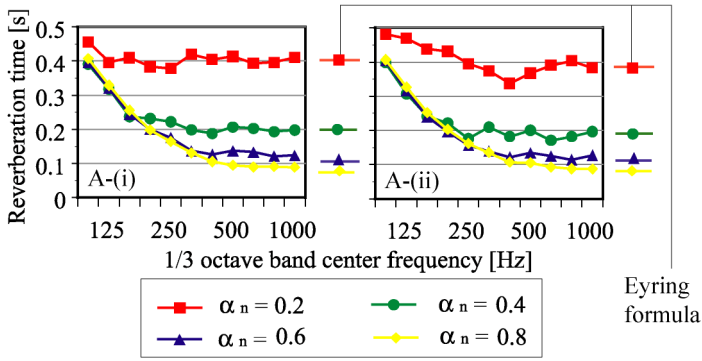


Fig. 2 Reverberation time: all surfaces are absorptive.

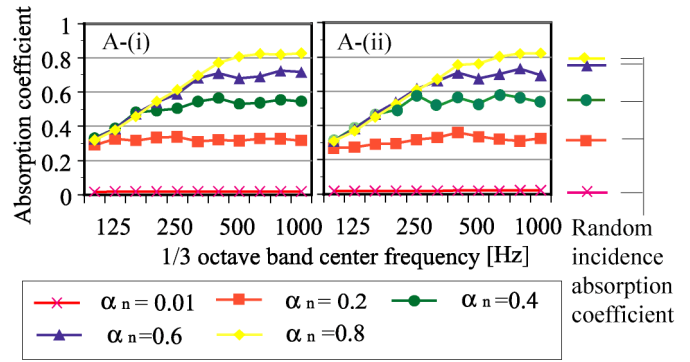


Fig. 3 Absorption coefficients in reverberation rooms: all surfaces are absorptive.

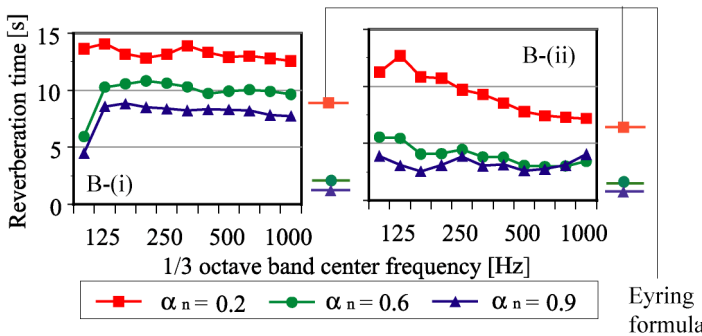


Fig. 4 Reverberation time: sample area on the floor is absorptive.

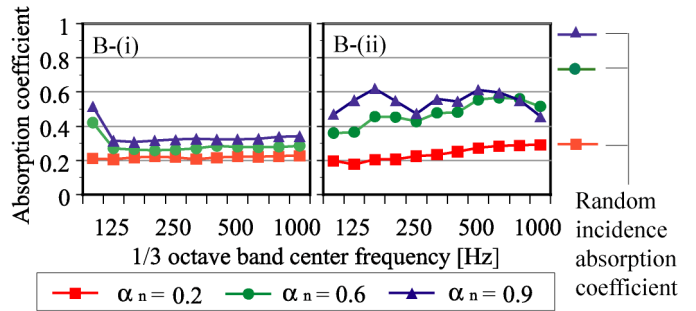


Fig. 5 Absorption coefficients in reverberation rooms: sample area on the floor is absorptive.

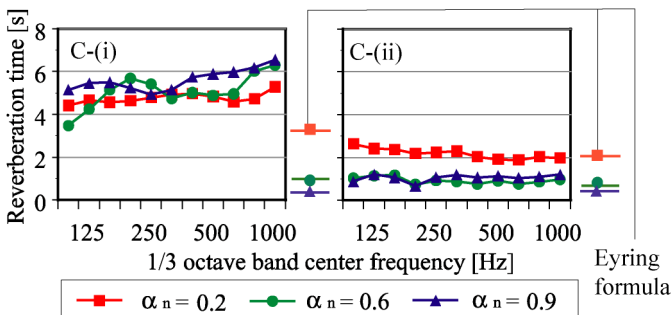


Fig. 6 Reverberation time: all surface of the floor is absorptive.

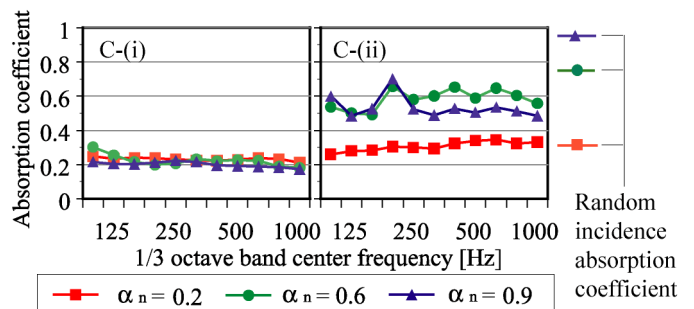


Fig. 7 Absorption coefficients in reverberation rooms: all of the floor is absorptive.

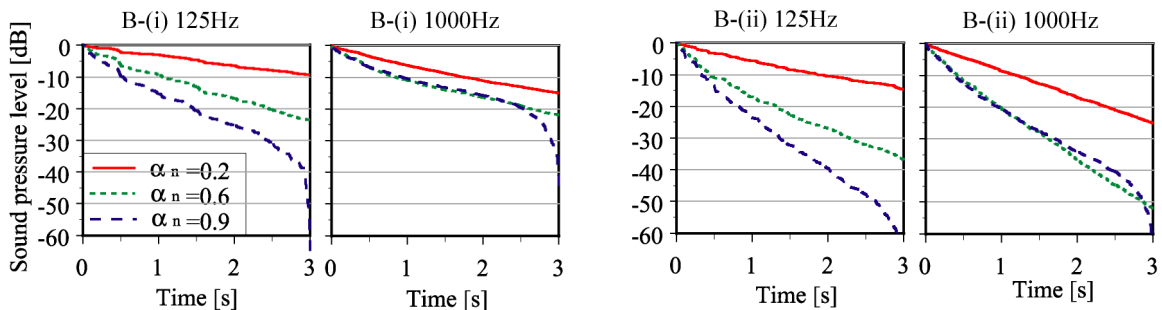


Fig. 8 Reverberation decay curves.

*東京大学大学院新領域創成科学研究科社会文化環境学専攻 修士課程
 **東京大学大学院新領域創成科学研究科社会文化環境学専攻 リサーチフェロー 博(環境)
 ***東京大学大学院新領域創成科学研究科社会文化環境学専攻 准教授 博(工)

*Inst. of Environ. Studies, Grad. Sch. of Frontier Sci., Univ. of Tokyo
 ** Research Fellow, Inst. of Environ. Studies, Grad. Sch. of Frontier Sci., Univ. of Tokyo, Ph.D.
 *** Assoc. Prof., Inst. of Environ. Studies, Grad. Sch. of Frontier Sci., Univ. of Tokyo, Dr.Eng.

CIP法による時間領域音場解析 FDTD法との比較*

太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉 (東大・新領域)

1 はじめに

時間領域での室内音場解析には、陽解法の時間領域差分法 (FDTD 法) がよく用いられるが、CFL 条件 (式(1)) により、時間離散化幅 Δt に厳しい制限が課せられる (c : 音速、 Δx : 空間離散化幅)。

$$CFL = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (1)$$

一方電磁界・波動解析の分野では 80 年代に特性曲線法と 3 次多項式による補間を組み合わせ、CFL 条件にとらわれない計算を可能にした Constrained Interpolation Profile 法 (CIP 法) [1] が提案されている。近年、音場解析にも適用が進みつつあり [2,3]、伝搬問題に関して、理論解や FDTD 法との比較が行われているが、インピーダンス境界条件導入の検討や、CFL 条件を超える大きな時間ステップを採用した場合の検討はなされていない。本報はそれらについての検討を行う。

2 CIP 法による音響伝搬解析の原理

2.1 CIP 法の原理

CIP 法は、基礎方程式を移流方程式の形に変形し、特性曲線に沿って値を移流させる特性曲線法の一つである。移流元の物理量を求める際にその微分値も用いて、CIP 補間と呼ばれる補間を行う。

2.2 特性曲線法

空気中の波動伝搬は運動方程式と連続の式で表され、1 次元の場合は以下ようになる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

(p : 音圧 [Pa], u : 粒子速度 [m/s], ρ : 空気の密度 [kg/m^3])

式 (2) に c を掛け、式 (3) との和と差を作ると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u + p) + c \frac{\partial}{\partial x}(\rho c u + p) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u - p) - c \frac{\partial}{\partial x}(\rho c u - p) = 0 \quad (5)$$

のようになる。

一般に $\partial_t f + c \partial_x f = 0$ の形の方程式を移流方程式と呼ぶ (微分演算子 $\partial_x = \partial/\partial x$)。この方程式の一般解は、一般の関数 f を用いて $f(x - ct)$ で表され、特性曲線 $x - ct = k$ 上で常に同じ値 $f(k)$ となる。ここで $f_x^+ = \rho c u + p$, $f_x^- = \rho c u - p$ とおくと、式 (4), (5) は、 f_x^+ が正方向に、 f_x^- が負方向にそれぞれ速さ c で伝搬する移流方程式である。そこで Fig. 1 のように、 f_x^+ , f_x^- を特性曲線に沿って移流させることで次ステップの値が求まる。この際 $c\Delta t \neq N\Delta x$ (N は自然数) の場合、格子点以外の場所の値を参照するため、2.3 で述べる CIP 補間によって移流元の値を求める。 $c\Delta t = N\Delta x$ の場合、補間が不要になる。 $N=1$ の場合について後ほど議論する。 p や u の値は、それぞれの和と差より求める。このように移流させるだけなので、FDTD 法と異なり CFL 条件を超える大きな時間ステップでの計算が可能である。

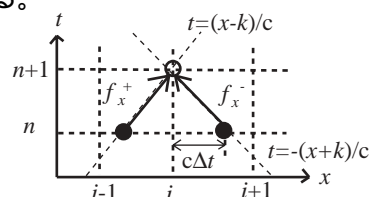


Fig. 1 The up-wind method of solving advection equation.

2.3 CIP 補間

FDTD 法では格子点の p と u の値が与えられている。CIP 法ではこれに加えて p と u の直交方向の微分値も与えられている。これによって数値拡散を小さくできる。例えば Fig. 2 のような急峻な波形が伝搬する問題を考える。ここで黒丸が現ステップの波形、白丸が次のステップの波形である。厳密解のプロフィールは実線で表される。空間 2 次精度の FDTD 法では、(a) の点線のように補間することになり、伝搬とともに波の形が崩れる。

一方 (b) の CIP 法では格子点での値・微分値から 3 次多項式を用いて滑らかに内挿することにより、厳密解のプロフィールを比較的良好に維持できる。式 (4), (5) の両辺を x で微分したのもも移流方程式を満たすことから、3 次多項式の未知数決

* Time domain sound field simulation by the CIP method: comparison to the FDTD method, by TACHIOKA Yuuki, YASUDA Yosuke and SAKUMA Tetsuya (The University of Tokyo).

定には、格子点における f_x^+, f_x^- に加えて、 $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ を用いる。

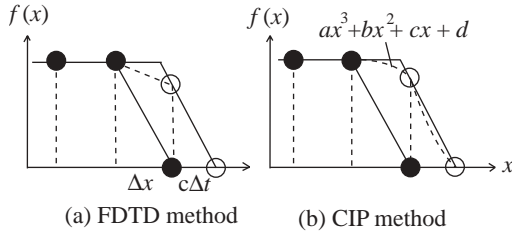


Fig. 2 The FDTD method and the CIP method.

2.4 多次元への適用

多次元化については、多次元空間に3次多項式を作成するA型CIP法などの手法が提案されている。本報では最も基礎的かつ必要メモリー量が少ないため一般的によく用いられるM型CIP法 [1] を採用した。これは Fig. 3 のように多次元を1次元に方向分離するものである。例えば2次元の場合、Fig. 3 の (a) の星印の点が白丸の点に移動することになるが、式 (4), (5) に加え、 y 方向の移流方程式 (6), (7) を解くことで、これを実現する。

$$\partial_t(\rho cv + p) + c\partial_y(\rho cv + p) = 0 \quad (6)$$

$$\partial_t(\rho cv - p) - c\partial_y(\rho cv - p) = 0 \quad (7)$$

ここで、 v は y 方向の粒子速度である。また $f_y^+ = \rho cv + p, f_y^- = \rho cv - p$ とおく。

具体的な手順を示す。

- (i) x 方向に式 (4), (5) によって f_x^+, f_x^- と $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ の移流を行う (Fig. 3 の (b) で星印の点を黒丸の点に移流)。その際、 $\partial_y f_x^+, \partial_y f_x^-$ を1次の上流差分により求める。(x 方向に f_x^+, f_x^- が伝搬する場合には、 x 方向の勾配 $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ が最も重要で、それと垂直な方向の $\partial_y f_x^+, \partial_y f_x^-$ の x 方向への移流に伴う変化はあまり正確である必要がない ([1] p. 71 参照) と仮定したため、メモリー量・計算時間の面で1次上流差分が有利である。)
- (ii) 全格子点に対して $p, \partial_x p, \partial_y p$ の更新を行い、 f_y^+, f_y^- とその微分を再構成する。
- (iii) 式 (6), (7) に従い f_y^+, f_y^- と $\partial_y f_y^+, \partial_y f_y^-$

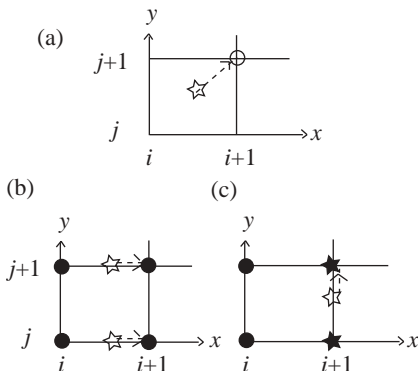


Fig. 3 Procedures of the M-type CIP method.

の移流を行う。(ii)の手順で更新された Fig. 3 (c)の黒星印点から、白星印の点を内挿し移流させる。その際 $\partial_x f_y^+, \partial_x f_y^-$ を1次の上流差分によって求める。

(iv) (ii) を行う。

これを繰り返す。3次元も同様である。

3 伝搬問題

伝搬問題に関して、文献 [2] とほぼ同条件の検討を行った。計算領域は、Fig. 4 に示す1辺0.4 mの立方体領域で、空間離散化幅を4 mm、時間離散化幅を0.0026 ms ($CFL = 0.23$)、音源点Sを(0.1, 0.2, 0.2)、受信点R0を(0.3, 0.2, 0.2)に設定したものである。境界からの反射の影響が受信点にあらわれない0.78 msまでを解析した。初期空間音圧分布を、式 (8) のガウス分布と仮定し、音源の幅を与える定数 d を0.01 mとした。これは数格子でガウス分布を与え15 kHzまでの成分が含まれる非常に急峻な波形である。

$$p(r) = \exp(-r/d)^2 \quad (8)$$

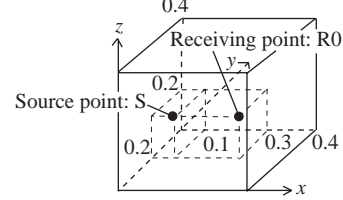


Fig. 4 Geometry of a propagation simulation model.

結果を Fig. 5 に示す。FDTD法では高周波成分の位相速度が遅れる分散が起こっている。CIP法はおおむね伝搬を捕捉しており、既往研究とおおむね同様の結果である。また2.2で述べた $c\Delta t = \Delta x$ となる $\Delta t = 0.012$ [ms] で計算を行い、リサンプリングしたものをCIP法(補間なし)(図中CIP without IP)として示す。補間に伴う誤差がないためCIP法と比べても精度が高い。最大振幅の誤差はCIP法で-14%、FDTD法で-43%、CIP法(補間なし)で+7%であった。

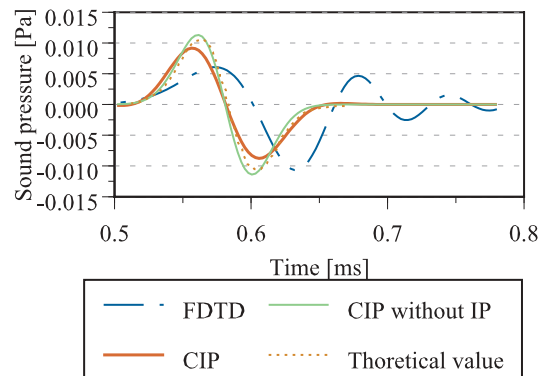


Fig. 6 Pseudo impulse response at R0.

4 室内音場への適用のための検討

伝搬問題解析に比べ複雑な室内音場解析への CIP 法の適用性について、インピーダンス境界条件を導入し検討する。本節では初期空間音圧分布を式 (8) の形に仮定し、音源の幅 d を 0.13 m に統一した。これは音源に含まれる最大周波数が、1 kHz の 1/3 オクターブバンド上限となる音源である。空間離散化幅は最小波長の 10 分の 1 程度の 1/30 m、時間離散化幅は 0.05 ms ($CFL = 0.52$) と設定した。FDTD 法・CIP 法ともに、音源特性・空間離散化幅・時間離散化幅は以後これを用いる。

4.1 インピーダンス境界条件の導入法

インピーダンス境界条件の導入法を Fig. 7 に具体的に示す。現ステップの点が黒丸である。図のような境界層を仮定した場合、負方向に伝搬する f_x^- は (a) のようにそのまま移流させる。 (b) のように正方向に移流する f_x^+ も、格子番号 1 以上はそのまま移流させる。境界層では現ステップの $(f_x^+)^n, (f_x^-)^n$ と $\partial_x (f_x^+)^n, \partial_x (f_x^-)^n$ より $p^n, \partial_x p$ を求め、次ステップの境界層での $(f_x^+)^{n+1}$ と $\partial_x (f_x^+)^{n+1}$ を再構成する。例えば剛壁の場合 $u^{n+1} = 0$ であるため、 $(f_x^+)^{n+1} = \rho c u^{n+1} + p^n = p^n$ となる。吸音境界 (ノーマルインピーダンス ρc) の場合、 $(f_x^+)^n, (f_x^-)^n$ の差より求まる p^n に対して境界条件より $u^{n+1} = -p^n / \rho c$ であるため、 $(f_x^+)^{n+1} = \rho c u^{n+1} + p^n = 0$ となる。

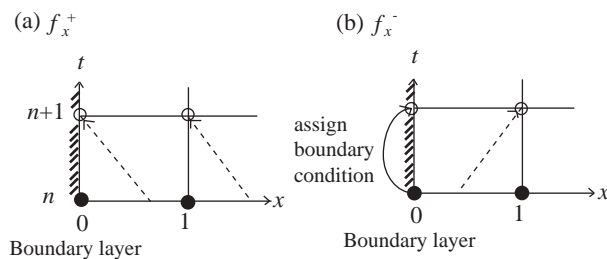


Fig. 7 How to assign boundary condition.

4.2 3次元音場での検討

Fig. 8 は、日本建築学会 音響数値解析小委員会提供のベンチマーク問題の 1 つで、1 辺 1 m の立方体室で、全面が剛壁により構成されている [4]。

受音点 R2 における音圧の時間波形を Figs. 9, 10 に示す。Fig. 9 に示す 0 ms から 20 ms までの範囲

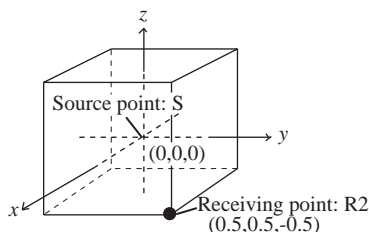


Fig. 8 Geometry of cubic cavity.

では、FDTD 法・CIP 法ともにおおむねピーク的位置は一致しているものの、主として 10 ms 以降、CIP 法のピークの数が少なくなっている。CIP 法 (補間なし) は、先ほどの伝搬問題では精度が最も高かったが、こちらでは分散が起きている。

Fig. 10 に示す 80 ms から 100 ms までの範囲では、CIP 法は FDTD 法と比べて振幅が小さくなり、波の数も少なくなっているのが顕著である。第 3 節の伝搬問題においては、既往研究と同様 CIP 法の精度が高かったが、時間の経過に伴う虚音源の増加を考えると、こちらは FDTD 法に妥当性があるように思われる。本来厳密解を与えるはずの CIP 法 (補間なし) の精度が低かったことから、CIP 法の方向分離の妥当性の検証が必要である。また M 型 CIP 法においては、2.4 で述べた直交方向の補間のための 1 次精度の上流差分も精度に影響を与えていると考えられる。伝搬問題では、直交方向の勾配があまり問題にならないため、この補間は妥当であった。しかし、拡散音場のようにあらゆる方向に伝搬が起き、直交方向の勾配も重要であるような音場では、上流差分による数値拡散によって精度が落ちてしまうものと思われる。

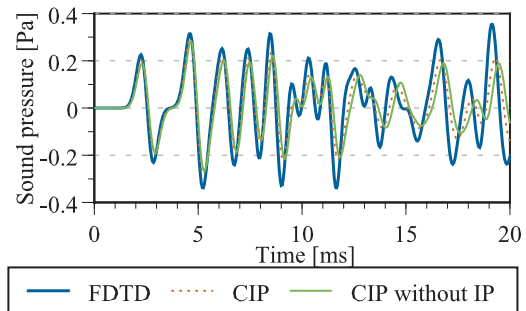


Fig. 9 Pseudo impulse response at R2 calculated by the FDTD method and the CIP method (0-20 ms).

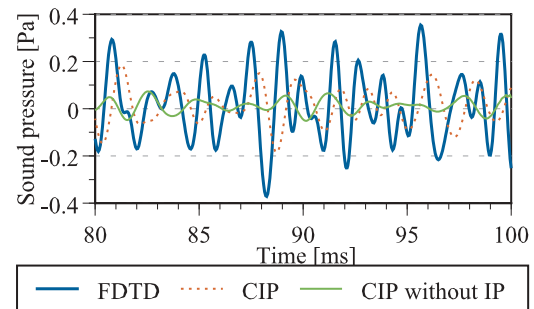


Fig. 10 Pseudo impulse response at R2 calculated by the FDTD method and the CIP method (80-100 ms).

5 CFL 条件を超える時間幅での検討

5.1 境界付近での工夫

CIP 法において、式 (1) に示したクーラン数 CFL が 1 を超える条件で計算を行う場合、境界付近で境界条件の取扱いに工夫が必要である。

$1 < CFL < 2$ の場合の例を Fig. 11 に示す。求めたい点・与えられている点は、黒丸で示してある。格子番号が $[CFL] + 1$ 以上の点であれば、(i') のように移流させるだけで求まる。しかしながら境界付近 (この場合格子番号 1) では、移流させる点が n ステップの段階から直接的には求まらない。まず $CFL < 1$ となるよう時間分割幅を細かくし $n + 1/2$ ステップに (i) のように移流させ、境界条件を課して白丸の点を求めてから、内挿した星印の点を (ii) のように移流させる。

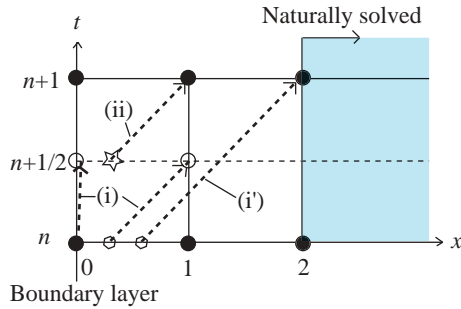


Fig. 11 The region which is naturally solved and the one which is specially dealt with.

5.2 2次元音場での検討

既報[5]では、1次元音場で $CFL = 5.2$ での計算を行った。本報では Fig. 12 に示す $1\text{m} \times 1\text{m}$ の2次元音場を対象にした。周縁部に吸音率 0.5 相当の実インピーダンスを与え、時間離散化幅は FDTD 法で 0.05 ms ($CFL = 0.52$)、CIP 法で 0.05 ms、0.15 ms ($CFL = 1.58$)、0.5 ms ($CFL = 5.2$) で検討した。

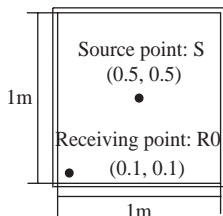


Fig.12 Geometry of a 2D sound field.

結果を Fig. 13 に示す。FDTD 法と CIP 法でおおむね傾向は一致しているものの、時間離散化幅を大きくすると振幅が小さくなっている。ただし

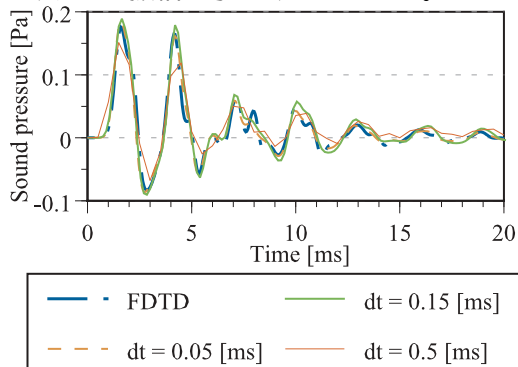


Fig. 13 Pseudo impulse response at R0.

FDTD 法では、2次元の CFL 条件 $CFL \leq 0.71$ を満たす範囲でしか計算できない。

6 計算効率の FDTD 法との比較

6.1 メモリー量

FDTD 法では格子点における p, u_i が必要である。一方 CIP 法ではこれに加えて $\partial_{xj} p, \partial_{xj} u_i$ が必要であるため、FDTD 法と比べて M 次元で $M+1$ 倍は最低でも必要である ($i, j \in \{1 \text{ 以上 } M \text{ 以下の自然数}\}$)。ただし $\Delta t = N\Delta x/c$ であれば、補間は必要なく FDTD 法と同様 p, u_i のみのメモリー量でよい。

6.2 計算量

M 型 CIP 法は移流・内挿プロセス、2.4 (ii) の更新プロセスにおいて計算量が大きい。3次元で単位ステップ当たり 20 倍程度である。 $\Delta t = N\Delta x/c$ であれば内挿が必要ないため、 $N=1$ の場合、FDTD 法の数倍程度で計算できる。

6.3 考察

同じ空間・時間離散化幅では FDTD 法に対する利点はないが、CIP 法は粗い格子でも高精度を維持できる。例えば同じ精度を 2 倍の空間離散化幅で実現できれば、メモリー量は 1/8、計算量は 1/16 に抑えることができ、FDTD 法に匹敵する。

さらに CFL 条件を超える時間幅で計算できれば、FDTD 法以上の高速化が可能である。必要な空間・時間離散化幅に関する検討が必要である。

7 まとめと今後の課題

CIP 法を音場解析に適用した。伝搬問題では高い精度が保たれたが、室内音場問題では、精度が出ない場合もあった。また 2次元において CFL 条件を超える大きな時間ステップで計算を行った。

今後の課題は、室内音場における精度の向上、任意境界形状への対応である。

参考文献

- [1] 矢部 他 「CIP 法」, 森北出版, 2003.
- [2] 斉藤 他 「CIP 法と FDTD 法による球面音波伝搬解析の性能比較」, 信学論, pp. 576-580, 2006. 6.
- [3] 土屋 他 「CIP 法による音波伝搬シミュレーション」, 信学技報 (超音波 US), pp. 1-6, 2006. 11.
- [4] <http://gacoust.hwe.oita-u.ac.jp/AIJ-BPCA/B0-1T/>
- [5] 太刀岡 他 「CIP 法による音場解析」, 建音研資料 AA2007-28, 2007. 7.

CIP 法による時間領域音場解析 多孔質材の吸音境界条件の検討 *

太刀岡勇気, 安田洋介, 佐久間哲哉 (東大・新領域)

1 はじめに

時間領域の音場解析手法としてしばしば用いられる時間領域差分法 (FDTD 法) は、数値分散が大きいことと時間離散化幅に厳しい制限が課せられるという欠点を持つ。一方流体力学の分野では、特性曲線法と 3 次多項式による補間を組み合わせた Constrained Interpolation Profile (CIP) 法が提案されている [1]。この手法は数値分散が小さいことや、CFL 条件にとらわれない計算を可能であるという利点を持つため音場解析にも適用が進みつつあり [2]、筆者らは室内音場解析へ適用を行っている [3]。同報においては周波数特性を持たない実数のインピーダンス境界条件を導入したが、実際の室内音場問題への適用にあたっては、様々な吸音材の特性を有する境界条件を実現する必要がある。既往研究においても密度・音速の異なる媒質間の伝搬手法が提案されているのみであり [4]、周波数特性は考慮されていない。本報では、Rayleigh モデルによって吸音材をモデリングする手法と、任意の周波数特性を持つ吸音境界条件を実現するためにデジタルフィルターを用いる手法を CIP 法に導入しその有効性を検証した。

2 Rayleigh モデルの CIP 法への導入

多孔質材の吸音機構のモデリングには Rayleigh モデルがよく用いられ [5]、FDTD 法において有用性が確認されている [6]。CIP 法に Rayleigh モデルを導入し、音響管を用いてその妥当性の検証を行う。

2.1 定式化

Rayleigh モデルを導入した多孔質材内部の 2 次元での支配方程式は以下ようになる。

$$\frac{K}{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + Ru + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{K}{\Omega} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + Rv + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho c^2}{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

ただし ρ は空気の密度 [kg/m^3]、 c は空気中の音速 [m/s]、 Ω は多孔度、 K は構造因子、 R は流動抵抗 [Ns/m^4] である。これを方向分離して、空気中の波動伝搬の場合と同じように移流方程式に変形すると、 x 軸方向に関しては以下ようになる (負方向、 y 軸方向についても同様)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{K}{\Omega} \rho cu + p \right) + c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\Omega} \rho cu + p \right) \\ = -Rcu + \frac{(K-1)\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

特によく仮定される $K = \Omega = 1$ のときは

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho cu + p) + c \frac{\partial}{\partial x} (\rho cu + p) = -Rcu \quad (5)$$

のようになる。このような非移流項 (外力項) を持つ移流方程式を CIP 法で解くためには、外力を時間ステップ中一定と仮定した時間分離解法がよく用いられる。手順は以下の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho cu + p)^n + c \frac{\partial}{\partial x} (\rho cu + p)^n = 0 \quad (6)$$

を CIP 法で解いて中間値 $\rho cu^*, p^*$ を求める。その後外力項を差分で解き $n+1$ ステップの値を求める。

$$(\rho cu + p)^{n+1} = \rho cu^* + p^* - \Delta t \frac{R}{\rho} \rho cu^* \quad (7)$$

この手法では吸音材内部には適当な R を、空気中には $R = 0$ と与えるだけで両領域が簡便に扱える。 $\Omega \neq 1$ のときは、吸音材の密度を $\rho_{abs} = \rho/\Omega$ として、文献 [4] の方法に従って密度の異なる媒質間での伝搬として扱えばよい。本報では $K = \Omega = 1$ とする。

ここで用いた方向分離手法と時間分離手法により、精度が低下する可能性がある。特に後者の時間分離解法は時間ステップ中で外力が一定と仮定しているため、時間離散化幅を十分小さくする必要がある。

2.2 音響管での検討 背後が剛壁の場合

以上のようにして導入した Rayleigh モデルの CIP 法における妥当性を検証するため、Fig. 1 に示す音響管を用いて、複素音圧反射率・垂直入射吸音率の理論解との比較を行った。音響管の長さは 3 m、管径は 5 cm の矩形形状で、管壁はすべて剛とし、2 次元で検討を行った。これの右端に密着させる形で、厚さ 10 cm、流動抵抗 $R = 15000$ [Ns/m^4] の吸音材を設置した。受音点については試料表面から 1 m のところに R0 を、複素音圧反射率を伝達関数法で求めるために 30, 40 cm のところに R1, R2 を設定した。本報では 1500 Hz までを対象とし、その波長の 10 分の 1 程度である 2.5 cm を空間離散化幅とした。時間分離解法を用いるためには、時間離散化幅が小さいこ

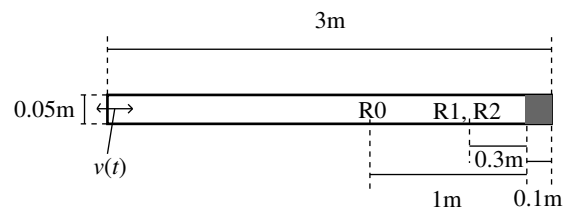


Fig. 1 Geometry of a sound tube with a porous material (0.1 m thickness).

*Time domain sound field analysis by the CIP method: Study on the boundary condition of porous materials, by TACHIOKA Yuuki, YASUDA Yosuke and SAKUMA Tetsuya (The University of Tokyo).

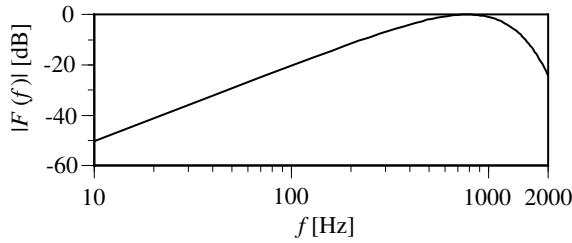


Fig. 2 Spectrum of a vibration source.

とが必要条件であるため、時間離散化幅 Δt に関しては十分小さいと思われる $7.14 \mu\text{s}$ ($CFL = 0.098$)、特に工夫を用いない CIP 法の適用限界程度の $71.4 \mu\text{s}$ ($CFL = 0.98$)、3 次元の FDTD 法の安定条件程度の $35 \mu\text{s}$ ($CFL = 0.48$) の 3 段階で検討した。左端を式 (8) で表される振動速度で速度駆動した [7]。

$$u(t) = \frac{\beta}{\rho c} (12\alpha^2(t - \tau) - 8\alpha^3(t - \tau)^3) \cdot \exp(-\alpha(t - \tau)^2) \quad (8)$$

各種パラメータは $\tau = 3.57 \text{ [ms]}$, $\alpha = 4 \cdot 10^6$, $\beta = 5.4 \cdot 10^{-10}$ に設定した。これは Fig. 2 に示すようにパワースペクトルのピークから -20 dB の点で評価して、 100 Hz から 1800 Hz までの周波数が含まれるような音源である。 β はスペクトルの強度に関する変数であり、 α はスペクトルのピーク周波数に関する変数である。R0 における入射波と反射波を Fig. 3 に示す。全体的に振幅が減衰しているのと同時に、入射波にあった波形後部のディップが、反射波ではなくなっている。伝達関数法によって解析結果から Fig. 4

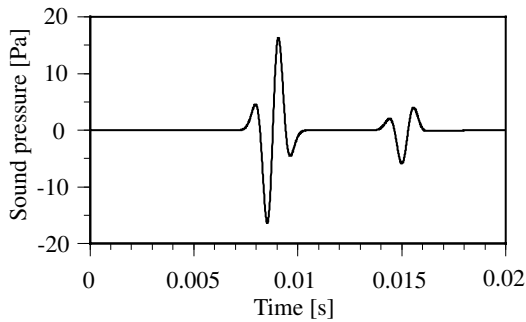


Fig. 3 The incident and reflected wave at R0 calculated by the CIP method according to the Rayleigh model ($\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$).

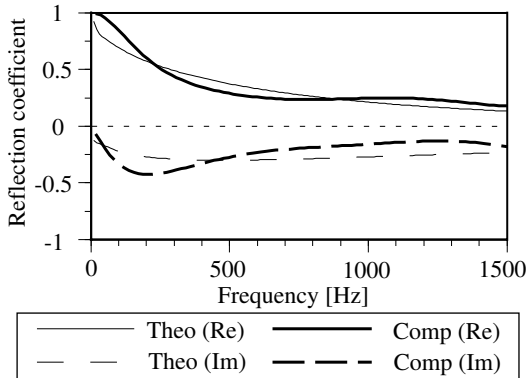


Fig. 4 Complex reflection coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model ($\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$).

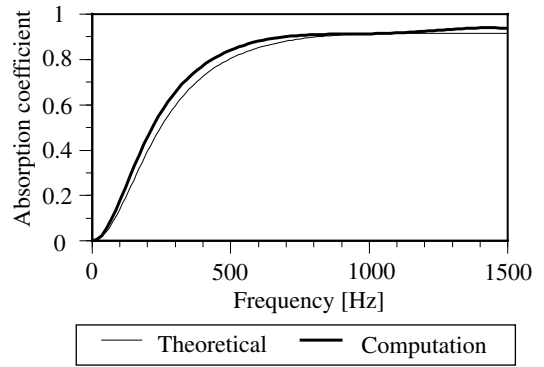


Fig. 5 Normal incidence absorption coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model ($\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$).

に示す複素音圧反射率を求めた。実数部に関してはよく一致しており、その差は最大 0.1 程度である。虚数部は多少傾向が異なっており、計算結果では 250 Hz 付近に、理論解にないディップが見られる。対応する垂直入射吸音率を Fig. 5 に示す。 500 Hz 付近に最大 0.05 程度の差異がみられる。次に、 Δt を 10 倍の $71.4 \mu\text{s}$ ($CFL = 0.98$) とした場合の R0 における入射波と反射波を Fig. 6 に示す。同時に $\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$ の場合を参照解として示している。振幅・波形とも前の検討とは全く異なり、吸音層が十分に効いていない。垂直入射吸音率を Fig. 7 に示す。このように、低周波数域だけでなく高周波数域も一致しないことが分かる。同時に 3 次元の差分法の安定条件程度の $\Delta t = 35 \mu\text{s}$ ($CFL = 0.48$) とした場合の垂直入射吸音率を示す。高周波数域においては改善が見られ、

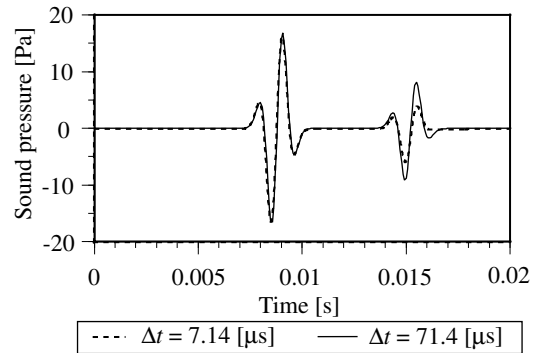


Fig. 6 The incident and reflected wave at R0 (Rayleigh model, $\Delta t = 7.14, 71.4 \mu\text{s}$).

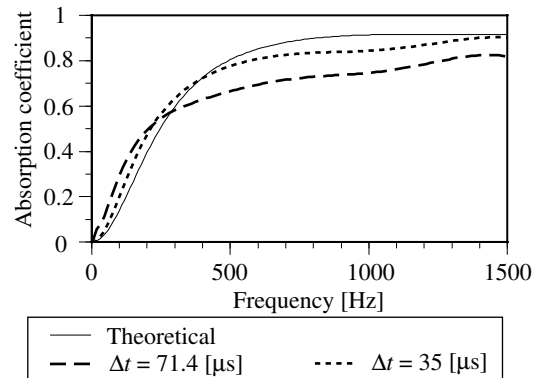


Fig. 7 Normal incidence absorption coefficients (Rayleigh model, $\Delta t = 71.4, 35 \mu\text{s}$).

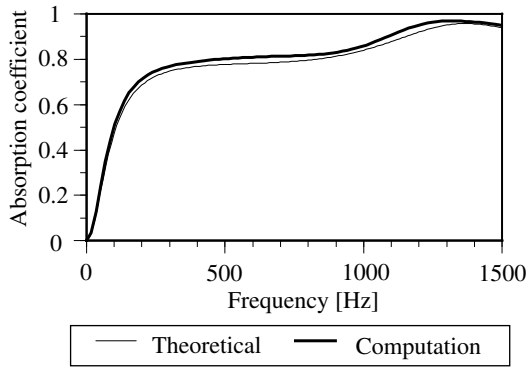


Fig. 8 Normal incidence absorption coefficients calculated with a porous material (0.1 m thickness) and an air layer (0.1 m thickness) ($\Delta t = 7.14$ [μs]).

その差は最大 0.1 程度である。このように時間分離手法を用いて Rayleigh モデルによる吸音材の内部伝搬を解く際には、吸音材中の時間分散化幅を通常の空気中の伝搬に比べて小さく取る必要がある。

2.3 音響管での検討 背後に空気層を持つ場合

2.2 と同様の形状で厚さ 10 cm の吸音材の背後に空気層 10 cm とした場合を検討した。各パラメータは同じで、時間分散化幅は十分小さいと思われる $7.14\mu\text{s}$ とした。垂直入射吸音率を Fig. 8 に示す。よく一致しており、多層である場合にも本手法が適用可能である。複素音圧反射率についても一致した。

3 フィルターを用いる方法

FDTD 法では周波数特性を持たない実数のインピーダンスを境界条件として与えることが多い。バネマス系を用いる手法も提案されているものの [6]、任意の吸音特性の設計は難しい。これに対し、境界面への入射・反射をそれぞれ入・出力とするフィルターを積み込むことで複素数のインピーダンスを与え、周波数特性を持つ出力を得ることができる。この手法をスタガード格子を用いる FDTD 法に導入するのは難しいが、CIP 法に導入するのは簡単で周波数特性を持つ境界条件を簡便にモデリングすることができる。

CIP 法の境界条件は、負方向に移流する成分 $f_x^- = \rho c u - p$ が境界で反射して正方向に移流する際には

$$f_x^+ = \frac{1-z}{1+z} f_x^- = r f_x^- \quad (9)$$

のようになる。正方向に移流する成分を $f_x^+ = \rho c u + p$ とした。ここで入力を f_x^- 、出力を f_x^+ 、 r を反射率と考えれば、境界をひとつのシステムと考えた場合の伝達関数は境界面の反射率のみで定義できる。CIP 法と同じく反射率で境界条件を規定できる伝達線路網法での手法 [8] と同様に、デジタルフィルターによる方法を導入する。つまり、伝達関数の特性が境界面の複素数の反射率に一致するフィルターを設計する。

3.1 音響管での検討 FIR フィルター

ここでは 2.2 と同じ、流動抵抗 $R = 15000$ [Ns/m^4] で 10 cm の厚みを持つ吸音材を剛壁に密着させた場合の理論解のインピーダンスをフィルターの特性として与えることにする。時間分散化幅は $71.4\mu\text{s}$ とす

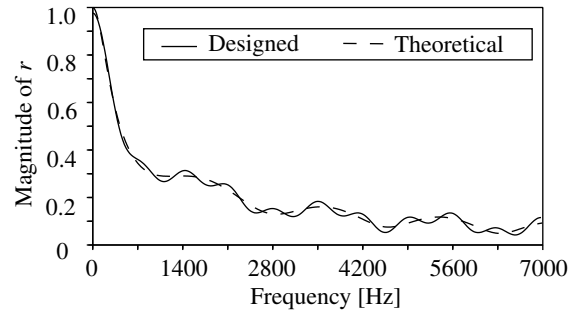


Fig. 9 Designed and theoretical magnitude of r (40th order FIR filter, $\Delta t = 71.4$ [μs]).

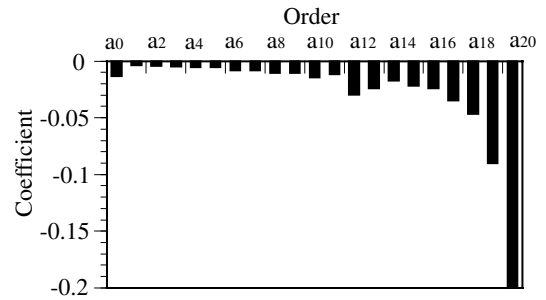


Fig. 10 FIR filter coefficients (0-20th order).

る。ここでは位相特性を変化させることなく吸音率を与えるための手法として、群遅延特性が一定となる直線位相フィルターを設計する。直線位相の FIR フィルターを用いて、振幅特性のみをあわせることにする。反射率 r の振幅特性・設計されたフィルターの振幅特性は Fig. 9 のようである。Fig. 10 にフィルターの係数の図を示す (対象であるので半分だけ示している)。理論特性を 10 Hz 刻みでサンプリングして、フィルターの設計特性として与える。本検討では、Scilab の Signal Processing toolbox にある Minimax 近似で Remez のアルゴリズムを用いて振幅特性を近似する remezb 関数を用いて設計を行った (重み関数はすべて 1)。フィルターの次数は 40 次で、設計された零位相フィルターを次数の半分の 20 次分シフトすることで、直線位相 FIR フィルターにしている。R0 における入射波と反射波を、Fig. 11 に示す。比較のために Rayleigh モデルの波形を載せているが、フィルターを用いたものは直線位相特性であるため波形の崩れはないことが分かる。また Fig. 12 に対応する垂直入射吸音率を求めた。同じ時間分散化幅で、Rayleigh モデルで吸音材をモデリングした場合には、全く合わ

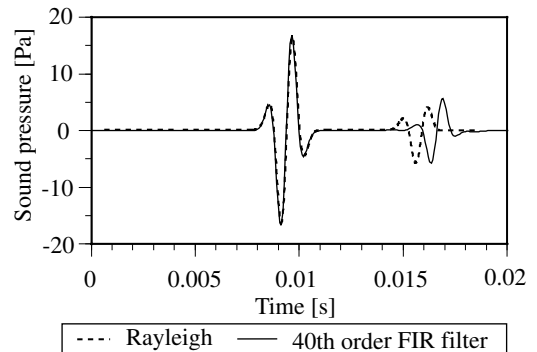


Fig. 11 The incident and reflected wave at R0 (40th order FIR filter, $\Delta t = 71.4$ [μs]).

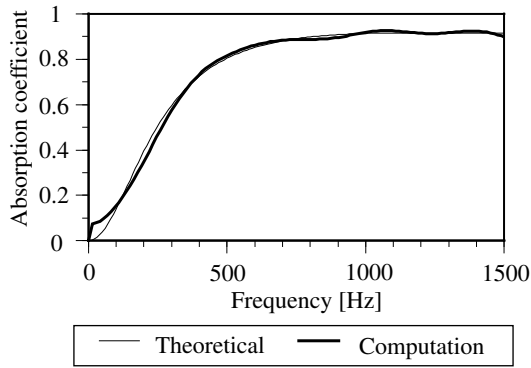


Fig. 12 Normal incidence absorption coefficients (40th order FIR filter, $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$).

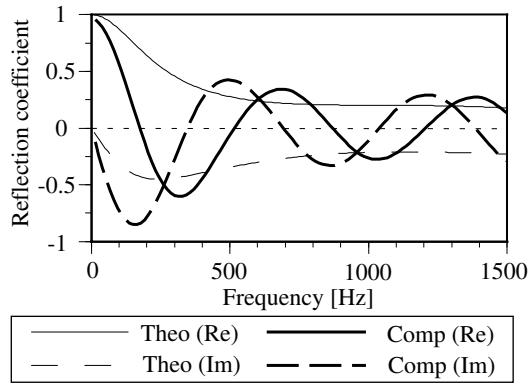


Fig. 13 Complex reflection coefficients (40th order FIR filter, $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$).

なかった垂直入射吸音率がよい対応を見せていることが分かる。Fig. 13 に複素音圧反射率を示す。群遅延特性 $20\Delta t$ に対応する 700 Hz の周期が見える。

3.2 音響管での検討 IIR フィルター

次に 20 次の IIR フィルターの設計を行った。時間分散化幅は $71.4 \mu\text{s}$ として同様に設計すると Fig. 14 のようになる。本検討では、同 toolbox にある最小 2 乗近似で振幅特性を近似する yulewalk 関数を用いて設計を行った。R0 における入射波と反射波を、Fig. 15 に示す。Rayleigh モデルとよく対応している。また Fig. 16 に対応する垂直入射吸音率を示す。こちらは Fig. 17 に示す複素音圧反射率も理論解とよく一致した。これは Miki モデルでもよく一致した。

4 まとめと今後の課題

多孔質材の吸音特性をモデリングする手法として Rayleigh モデルを導入し、時間分散化幅が小さい場

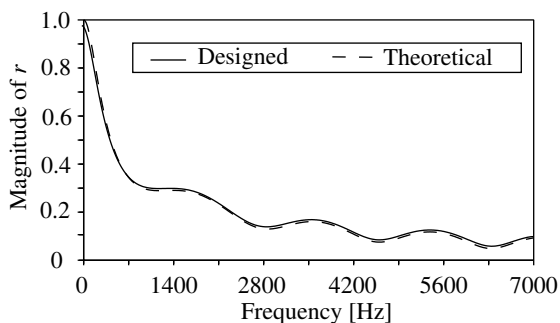


Fig. 14 Designed and theoretical magnitude of r (20th order IIR filter).

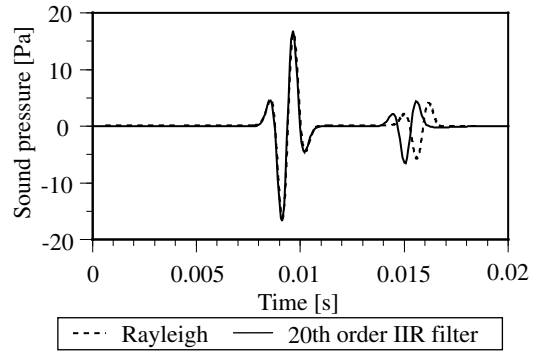


Fig. 15 The incident and reflected wave at R0 (20th order IIR filter, $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$).

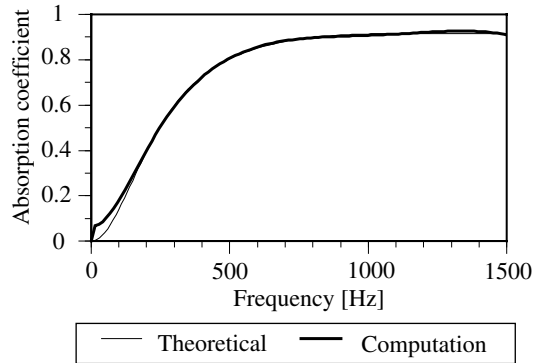


Fig. 16 Normal incidence absorption coefficients (20th order IIR filter, $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$).

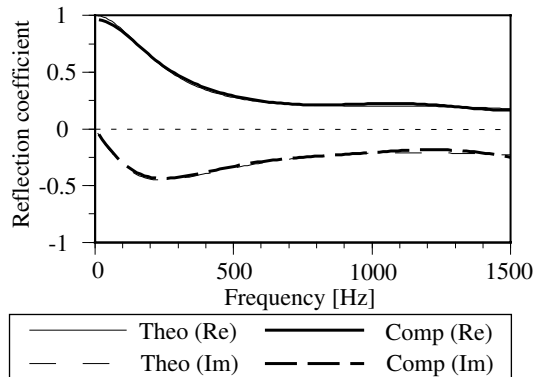


Fig. 17 Complex reflection coefficients (20th order IIR filter, $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$).

合には有効であった。時間ステップ中の外力を一定とした時間分散化手法の改善は課題である。またフィルターを用いる簡便な方法を検討し、設計も簡単で時間分散化幅も大きくできた。IIR フィルターを用いることで位相特性もあわせることができた。

参考文献

- [1] 矢部 他, 「CIP 法」, 森北出版, 2003.
- [2] 斉藤 他, 信学論, pp. 576-580, 2006. 6.
- [3] 太刀岡 他, 建音研資 AA2007-28, 2007. 7.
- [4] 大久保 他, 音講論 (秋), pp. 1329-1330, 2007. 9.
- [5] H.Kuttruff, "Room Acoustics 2nd edition", pp. 144-155, Applied Science Publishers, 1979.
- [6] 坂本 他, 音講論 (秋), pp. 781-782, 1996. 9.
- [7] 大久保 他, 信学技報 (EA), pp. 25-30, 2006. 9.
- [8] 土屋 他, 音講論 (秋), pp. 541-542, 2006. 9.

CIP 法による時間領域音場解析

空間離散化幅の検討および任意形状への対応

*

太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉 (東大・新領域)

1 はじめに

時間領域の音場解析手法としてしばしば用いられる時間領域差分法 (FDTD 法) は、数値分散が大きく空間精度を向上させるためには空間離散化幅を小さく取らなければならない。そのため CFL 条件により時間離散化幅に厳しい制限が課せられる。

一方流体力学分野では、特性曲線法と 3 次多項式による補間を組み合わせた Constrained Interpolation Profile (CIP) 法が提案されており [1]、音場解析にも適用が進みつつある [2]。筆者らは室内音場解析へ適用を行い [3, 4]、CFL 条件にとらわれない計算が可能であり、空間精度が高く数値分散が小さいという一般的な特長を確認した。CIP 法は同じ空間・時間離散化幅では FDTD 法より計算負荷が大きくなることが知られているが、これらの特長を考慮すれば、時間離散化幅のみを大きくする、空間・時間離散化幅をともに大きくするということによって計算負荷の低減が考えられる。本報ではその可能性を検討する。なお本報では多次元化に際して方向分離を行う M 型 CIP 法を対象としている。

また FDTD 法は任意形状に対応する際に階段近似を用いることが多いが、精度が低下するため空間離散化幅を小さくする必要がある。さらにプリ・ポストプロセスの汎用化が難しいことの原因ともなっている。これを解決するため任意の 3 角形/4 面体要素において CIP 補間を行う CIVA (Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates) 法が流体力学分野で提唱されている。本報ではその適用可能性を検討する。

2 時間離散化幅の検討

1 辺 1 m の立方体で全面吸音率 0.1 とした場合に、CFL 条件を超えるような時間離散化幅での検討を行った。音源・受音点は Fig. 1 に示した。音源として 1 kHz の 1/3 オクターブバンド上限までが含まれるようなガウス分布を初期空間分布として与えた。空

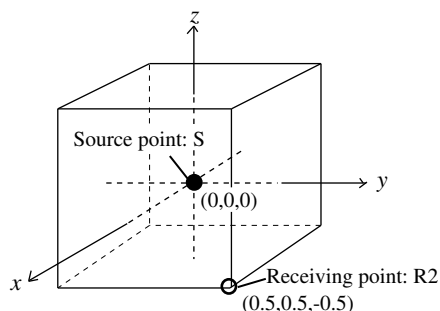


Fig. 1 Geometry of a cubic cavity.

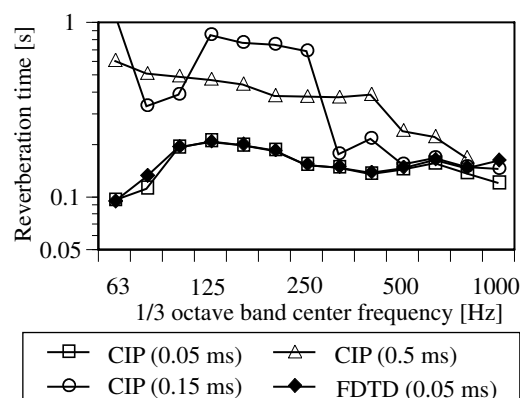


Fig. 2 Reverberation time at R2 calculated by the CIP method ($\Delta t = 0.05, 0.15, 0.5$ ms) and the FDTD method ($\Delta t = 0.05$ ms) under conditions such that Δx is 0.033 m.

間離散化幅 Δx は FDTD 法において一般的に推奨されている最短波長の 10 分の 1 程度 ($\lambda/\Delta x = 10$) の 0.033 m とした。時間離散化幅 Δt は標準程度の 0.05 ms ($CFL = 0.52$)、0.15 ms ($CFL = 1.56$)、0.5 ms ($CFL = 5.2$) の 3 通りで検討した。インパルス応答積分法により求めた残響曲線の -5dB から -35dB までの減衰で評価した残響時間を Fig. 2 に示す。時間離散化幅を大きくすると、残響後期に振動が残り精度が低下した。1 次元音場での本手法の有効性は検証されているため [3]、方向分離手法を用いていることが原因であると考えられる。

3 空間離散化幅の検討

以上のように空間離散化幅を変えずに時間離散化幅のみを大きくする手法は有効でない。そこで $CFL = 0.52$ とし、空間・時間離散化幅をともに変化させる手法を検討した。 Δx は 0.033 m ($\lambda/\Delta x = 10$)、0.05 m ($\lambda/\Delta x = 7.5$)、0.066 m ($\lambda/\Delta x = 5$) の 3 通りとした。 Δt もそれぞれ 0.05 ms、0.075 ms、0.1 ms とした。残響時間を Fig. 3 に示す。このように CIP 法・FDTD 法ともにおおむね一致しているものの、FDTD 法は高周波数域で精度が低下している。Fig. 4 に示す全周波数域での残響曲線でも FDTD 法の乖離が大きい。次に波形の観点から検討する。CIP 法で $\Delta x = 0.033$ m のときを参照解 p_{ref} として、次式で表される 2 乗誤差を求めた。

$$Error = \frac{\sum_{i=0}^N (p - p_{ref})^2}{\sum_{i=0}^N p_{ref}^2} \quad (1)$$

*Time domain sound field analysis by the CIP method: Study on the spatial discretization and the use of triangle / tetrahedral meshes, by TACHIOKA Yuuki, YASUDA Yosuke and SAKUMA Tetsuya (The University of Tokyo).

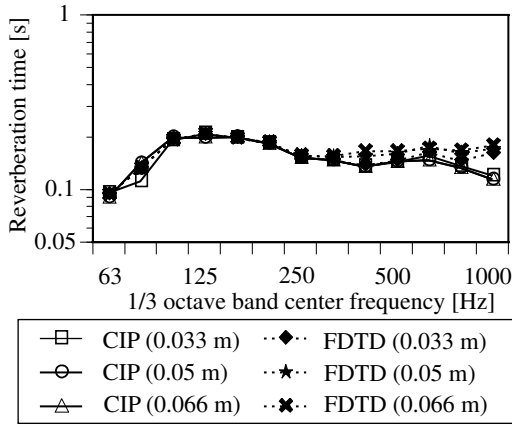


Fig. 3 Reverberation time at R2 calculated by the CIP method and the FDTD method ($\Delta x = 0.033, 0.05, 0.066$ m) under conditions such that CFL is 0.52.

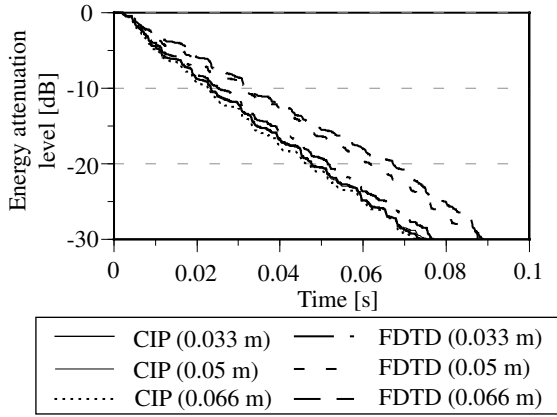


Fig. 4 Energy attenuation decay curves.

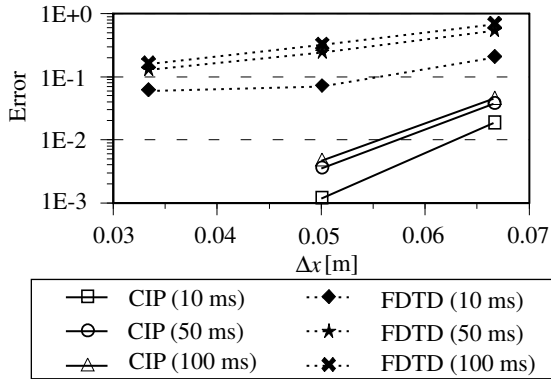


Fig. 5 Square errors with Δx and the elapsed time.

すべて $\Delta t = 0.05$ ms でリサンプリングし、0.01 s までの $N = 200$ 点、0.05 s までの $N = 1000$ 点、0.1 s までの $N = 2000$ 点を対象とした。結果を Fig. 5 に示す。このように対象とした時間に関わらず、CIP 法の方が空間離散化幅を大きくした場合にも誤差が小さいことがわかる。FDTD 法の $\Delta x = 0.033$ m を参照解とした場合にも同様であった。まとめると、FDTD 法は空間離散化幅を大きくすると Fig. 6 に示すように波形の崩れ方は大きくなるものの、残響時間の精度はそれほど損なわれない。CIP 法は数値分散性が小さいため空間離散化幅を大きくしたときにも、時間領域での波形を精度よく求めることができる。

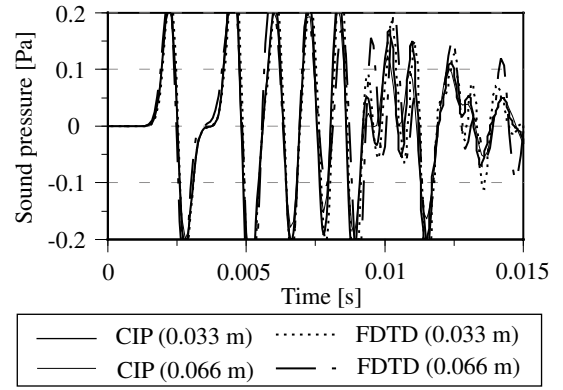


Fig. 6 Pseudo impulse responses at R2 calculated by the CIP method and the FDTD method.

4 CIV A 法について

任意形状への対応には、基礎方程式を座標変換によって一般座標系から直交座標系に写像する方法が考えられるが、この方法を CIP 法に適用すると精度が悪くなるということが知られているため [1]、本報では 3 次多項式を多次元空間に張る手法を採用する。ところが多次元での完全 3 次多項式の未知数の数と既知数の数が一致しないため問題がある。単体要素 (3 角形/4 面体要素) と自然座標 (面積/体積座標) を用いることで、節点の関数値と微係数が連続な補間関数を系統的に求められることが示されており、CIVA 法と呼ばれる [5]。ただし CIV A 法は補間関数が要素境界上の節点間の接線方向には連続であるが法線方向には連続でない非適合要素であるため、空間 2 次精度になってしまうという点が指摘されている [6]。

4.1 2 次元 3 角形要素

面積座標を用いて 2 次元 3 次の補間関数を求める。3 角形の面積座標は

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{S_1}{S}, \frac{S_2}{S}, \frac{S_3}{S} \right) \quad (2)$$

で表され、形状関数に一致する。ただし S は 3 角形の面積であり、 S_1 から S_3 は Fig. 7 のように取る。面積座標は $S_1 + S_2 + S_3 = S$ より $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ の関係があり、 (x, y) 座標との間に 1 対 1 の対応関係

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

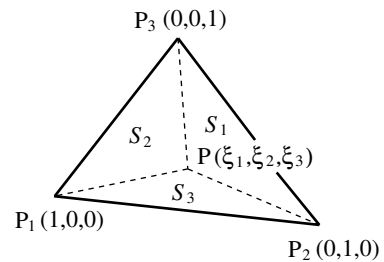


Fig. 7 Area coordinates.

が成立する。このとき、3次補間関数は

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \xi_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} [\xi_j^2 \xi_k + c \xi_1 \xi_2 \xi_3] \quad (4)$$

で与えられる。 d は補間関数の調整変数で $d=0$ のとき1次補間、1のとき3次補間である。 α_i と β_{jk} は

$$\alpha_i = f_i \quad (5)$$

$$\beta_{jk} = f_j - f_k + (x_k - x_j) \frac{\partial}{\partial x} f_j + (y_k - y_j) \frac{\partial}{\partial y} f_j \quad (6)$$

となる。 $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ は節点の値によって規定することができないため節点を持つ値から変数 c の値を決定することはできないが、構造解析の分野でよく用いられる定曲率条件を用いると全ての要素において $c=0.5$ とすることができる。 $c < 0.5$ とした場合は数値粘性が加わることになる[7]。

4.2 3次元 4面体要素

3次元の場合は体積座標を用いる。体積座標は

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \left(\frac{V_1}{V}, \frac{V_2}{V}, \frac{V_3}{V}, \frac{V_4}{V} \right) \quad (7)$$

で表される。 V は4面体の体積であり、 V_1 から V_4 はFig. 8のように取る。このとき3次補間関数は

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \xi_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^4 \beta_{jk} \left[\xi_j^2 \xi_k + c(\xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_2 \xi_3 \xi_4 + \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \xi_1 \xi_3 \xi_4) \right] \quad (8)$$

で与えられる。 α_i と β_{jk} は以下のである。

$$\alpha_i = f_i \quad (9)$$

$$\beta_{jk} = f_j - f_k + (x_k - x_j) \frac{\partial}{\partial x} f_j + (y_k - y_j) \frac{\partial}{\partial y} f_j + (z_k - z_j) \frac{\partial}{\partial z} f_j \quad (10)$$

d, c に関しては2次元の場合と同様である。

CIVA法は多次元の移流方程式にも対応できるが、非移流項の扱いが難しいため方向分離手法を用いる。すなわちFig. 9のように x 軸方向への移流を行いその後 y, z 軸方向への移流を行うことにする。

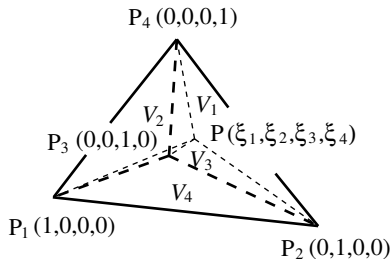


Fig. 8 Volume coordinates.

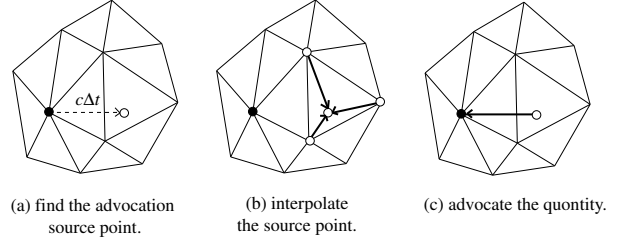


Fig. 9 The procedure of the CIVA method.

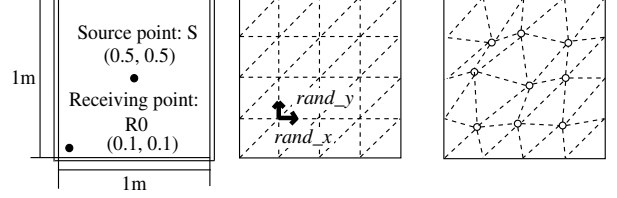


Fig. 10 Geometry of a 2D sound field and generated nonuniform meshes.

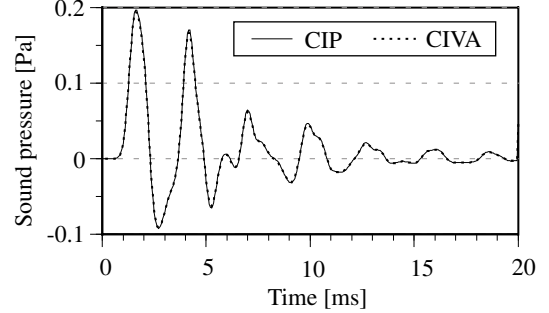


Fig. 11 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method using rectangular elements and the CIVA method using nonuniform and non-compatible triangle elements (2D).

5 CIVA法の音響問題への適用

5.1 2次元音場

Fig. 10に示す1辺1mの正方形音場で、不均一な3角形要素を用いて精度を検証した。境界の吸音率は0.5とした。不均一な3角形要素は以下の手順で作成した。全体を $\Delta x = 0.033$ [m]の正方形に分割し、その端点を-0.01以上0.01 m以下(1/3要素幅程度)の乱数分 x, y それぞれの方向に移動させた。得られた不整形4角形要素を半分に分割することで不均一な3角形要素とした。 $\Delta t = 0.05$ [ms]とした。計算結果を直交格子でのM型CIP法の結果[4]と比較したものを、Fig. 11に示す。一致していることが分かる。

5.2 3次元音場

3次元の場合にも、Fig. 1に示した全面剛の1辺1mの立方体で検討を行った。まずは直交分割による立方体を等積6分割した4面体要素を用いて検討した。 $\Delta x = 0.033$ m, $\Delta t = 0.05$ msとした。よって分割前の立方体の稜線上に必ず移流元が存在することになる。結果はFig. 12であるが、振動が起りすぐに発散している。これは先に述べたようにCIVA法が非適合要素を用いていることが原因であると考えられるため、これを実験的に検証した。直交分割であれば、方向分離を用いているため移流元の要素界面は各軸に平行である。そこで直交方向の微分に1次補間を用いれば、要素間で連続になるため改善が期

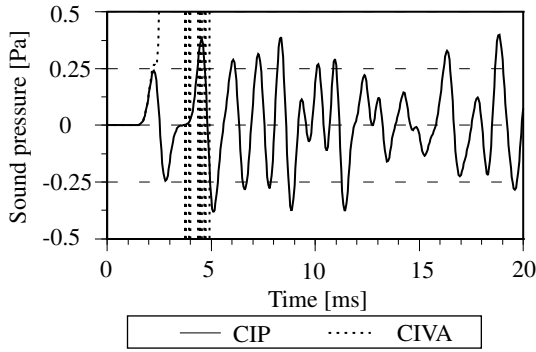


Fig. 12 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using non-compatible rectangular-based elements. (3D)

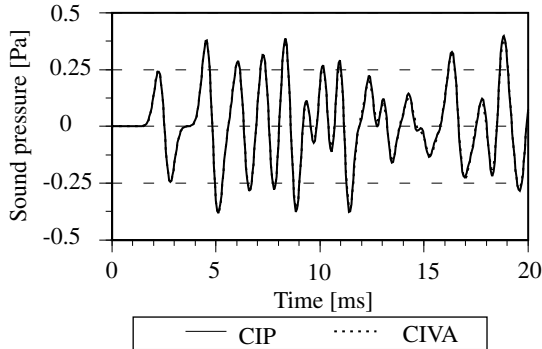


Fig. 13 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using compatible rectangular-based elements with normal derivative as a first-order interpolation. (3D)

待される。例えば x 軸方向への移流の際には y, z 軸方向の微分を

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \xi_1 \frac{\partial}{\partial y} f_1 + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \xi_3 \frac{\partial}{\partial y} f_3 + \xi_4 \frac{\partial}{\partial y} f_4 \quad (11)$$

などから求める。結果を Fig. 13 に示す。このように発散せず CIP 法の結果と一致している。

5.3 3次元における CIVA 法の適合要素化

5.3.1 稜線上での適合要素化

非適合要素が発散の一因であるため、一般の4面体要素では適合要素化する必要がある。2次元で検討はされているが[6]、3次元で検討を行った文献は見られないためその拡張を行う。3次元では稜線上と要素界面の両方で適合要素化する必要があり、まずは前者を行う。そのためには、対象とする辺上で式(12)で表されるような特異形状関数に適当な変数 μ をかけたものを式(8)の3次補間関数に加え補間関数とする。つまり6辺について $\mu_1\epsilon_{12} + \mu_2\epsilon_{13} + \mu_3\epsilon_{14} + \mu_4\epsilon_{23} + \mu_5\epsilon_{24} + \mu_6\epsilon_{34}$ を加える。例えば辺 P_1P_2 では

$$\epsilon_{12} = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_3 + \xi_4)}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)} \quad (12)$$

とする。辺 P_1P_2 以外の辺では関数値と法線方向微分値は0になる。辺 P_1P_2 では $\xi_3 = \xi_4 = 0$ であるため、関数値は0であるが法線方向微分値は2次関数で変化した端点の値からは一意に定めることができない。そこで対象の辺上の midpoint の法線方向微分値を用いて一意

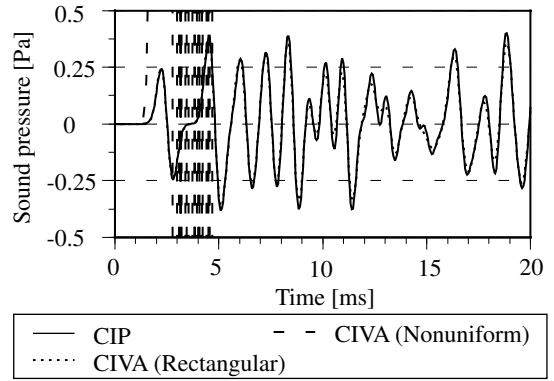


Fig. 14 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using rectangular-based elements and nonuniform elements which are compatible on the edges(3D).

に定める。ただし辺 P_1P_2 の法線方向は、 $\Delta P_1P_2P_3$ と $\Delta P_2P_1P_4$ の法線方向 $\mathbf{n}_{\Delta P_1P_2P_3}$, $\mathbf{n}_{\Delta P_2P_1P_4}$ の平均

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{n}_{\Delta P_1P_2P_3}}{|\mathbf{n}_{\Delta P_1P_2P_3}|} + \frac{\mathbf{n}_{\Delta P_2P_1P_4}}{|\mathbf{n}_{\Delta P_2P_1P_4}|} \right) \quad (13)$$

で与えられるとし、中点での法線方向微分値は端点 P_1, P_2 の法線方向微分値の平均で与えられると仮定した。Fig. 14 に直交分割の等積6分割による4面体要素による場合と不均一な4面体要素による場合を示す。前者は収束したものの、後者は発散している。

5.3.2 要素界面での適合要素化

要素界面、例えば $\Delta P_2P_3P_4$ 上で

$$\epsilon_{234} = \frac{\xi_1 \xi_2^2 \xi_3^2 \xi_4^2}{(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 - \xi_4)} \quad (14)$$

を特異形状関数として稜線上でのものと組み合わせた。しかしながら収束性の改善は見られなかった。

6 まとめと今後の課題

時間離散化幅のみを大きくする手法と時間・空間離散化幅を同時に大きくする手法を比較し、後者の優位性を示した。残響時間はFDTD法も大差がなかったが、CIP法は波形の崩れが小さい。また任意形状への対応を目的としてCIVA法の音響問題への適用を行い、2次元では不均一な3角形要素で解析ができることが確認された。3次元では発散し、適合要素化で収束性は改善したが完全な適合要素化は難しいため不均一なメッシュには対応できなかった。今後の課題は、各点に2階微分を持たせる手法が考えられる。

参考文献

- [1] 矢部 他, 「CIP法」, 森北出版, 2003.
- [2] 斉藤 他, 信学論, pp. 576-580, 2006. 6.
- [3] 太刀岡 他, 建音研資 AA2007-28, 2007. 7.
- [4] 太刀岡 他, 音講論(秋), pp. 979-982, 2007. 9.
- [5] 田中, 機械学会論文集(B編) 64-620, pp. 103-109, 1998.
- [6] 田中 他, 機講論, pp. 227-228, 2003.
- [7] 土田 他, 第17回数値流体力学シンポジウム F4-1, pp. 1-6, 2003.

拡散係数を導入した幾何音響シミュレーションに関する検討 非拡散音場の残響時間の予測*

太刀岡勇気（東大・工）、小坂慶之、佐久間哲哉（東大・環境）

1.はじめに

近年商用ベースの幾何音響シミュレーションソフトウェアに壁面条件として拡散係数[1]を導入したものが多く見られる。拡散係数の同定については測定法[2]や数値解析手法[3]が整いつつあるが、幾何音響解析における拡散係数の取り扱いや有効性については十分な検討がなされていない。本報では、従来残響時間予測が難しい非拡散音場を対象として、幾何音響解析における拡散係数の導入に関する検討を行う。

2.研究方法

(1) 解析アルゴリズム

幾何音響解析には cone tracing 手法を採用した CATT-Acoustic v8.0 を用いる。本プログラムは壁面の拡散係数に応じて、1 次反射では鏡面反射と拡散反射の各成分を与え、2 次反射以降では確率的にいずれかの反射成分を与えている。

(2) 解析対象

図 1 に示す直方体室（天井高 3 水準）を基本室形として、図 2 に示す 3 種類の壁面形状を設定する。壁面は全て反射性($\alpha = 0.05$)、天井・床面は反射性($\alpha = 0.05$)または吸音性($\alpha = 0.5$)とし、周波数に依らないものとする。図中の無指向性点音源と受音点の配置により、残響時間（100~1kHz 帯域）を算出する。以上は文献[4]の FDTD 解析結果と比較するために同条件とした。

(3) 拡散係数の取り扱い

壁面の拡散係数については表面形状による散乱に加えて周辺部による回折を考慮し、次式の等価拡散係数として与えるものとする。

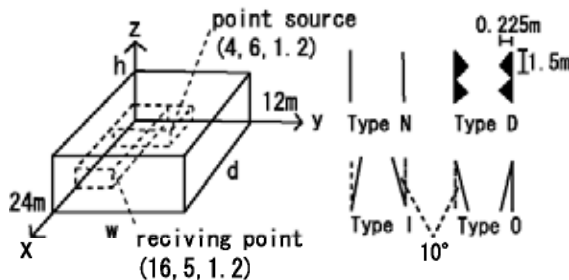


Fig.1 Geometry of rooms.

Fig. 2 Types of wall shapes.

$$\bar{s} = \frac{(S_0 - S_p) s_s + S_p s_s}{S_0} \quad (1)$$

ただし、 S_0 , S_p は対象壁面の全面積および周辺部面積（図 2）、 s_s は壁面表面の拡散係数、 s_p は周辺部の拡散係数であり、 $s_p = 1$ とする。周辺部は波長に比例する幅 $x = n\lambda$ の領域と仮定し、その領域が全面に達した場合は $S_p = S_0$ とする。なお、予備的検討では吸音面の拡散係数は残響時間への影響が小さかったため、以降の検討では反射面のみ拡散係数を与えることとした。

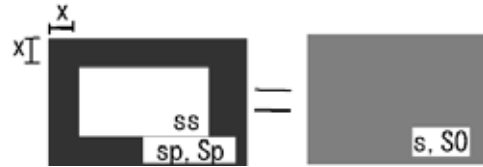


Fig. 3 Scheme of equivalent scattering coefficient.

3.結果と考察

(1) 天井高の影響

基本形 Type N で天井・床が吸音面の場合の残響時間の解析結果を図 4 に示す。幾何音響解析では周辺幅に関する係数を $n = 0.25, 0.5, 0.75$ の 3 水準に設定した。FDTD の結果と良い対応を示す n が存在し、その値は概ね天井高に反比例する傾向が見られる。なお、 $n = 0.25, 0.75$ における壁面($w = 12m$)の等価拡散係数を図 5 に示す。

(2) 壁面傾斜の影響

天井高 $h = 6m$ で床のみが吸音面として Type N, I, O の残響時間の解析結果を図 6 に示す。内転形 Type I では n に依らず FDTD の結果と良く対応しているが、外転形 Type O では FDTD の結果に比べて小さい値となっており、特に低音域でその差が顕著である。

(3) 拡散体の影響

天井高 $h = 6m$ で床のみが吸音面として三角波形 Type D の残響時間の解析結果を図 7 に示す。幾何音響解析では壁面詳細形状を入力し、その全面に等価拡散係数 $s = 0, 1$ を試行的に与えた。拡散係数の影響はほとんど見られないが、高音域側では FDTD の結果と良く対応している。図 8 は残響時

* Geometrical acoustic simulation using scattering coefficients to predict the reverberation time of non-diffuse sound fields, by TACHIOKA Yuuki, KOSAKA Yoshiyuki and SAKUMA Tetsuya (The University of Tokyo)

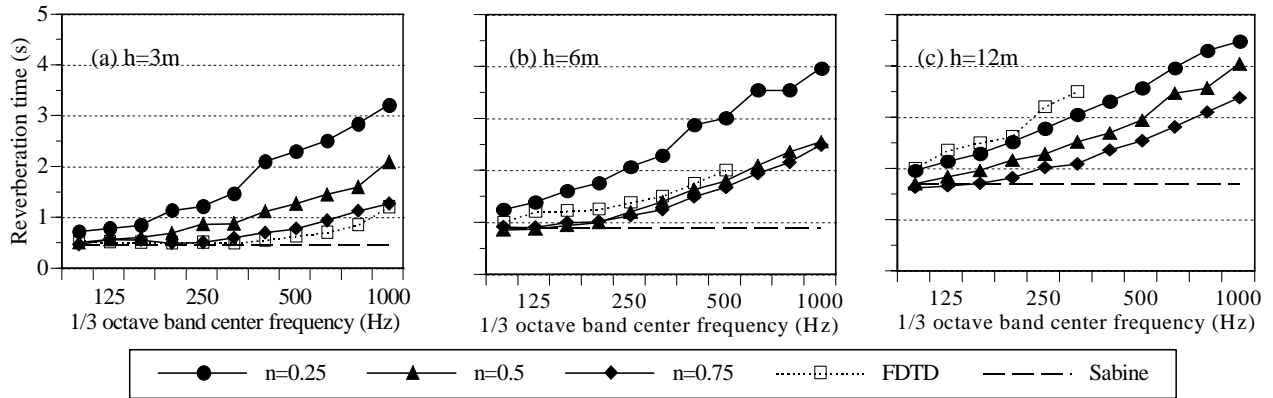


Fig.4 Reverberation time for Type N with absorptive floor and ceiling ($h = 3, 6, 12$ m), calculated with $n = 0.25, 0.5, 0.75$.

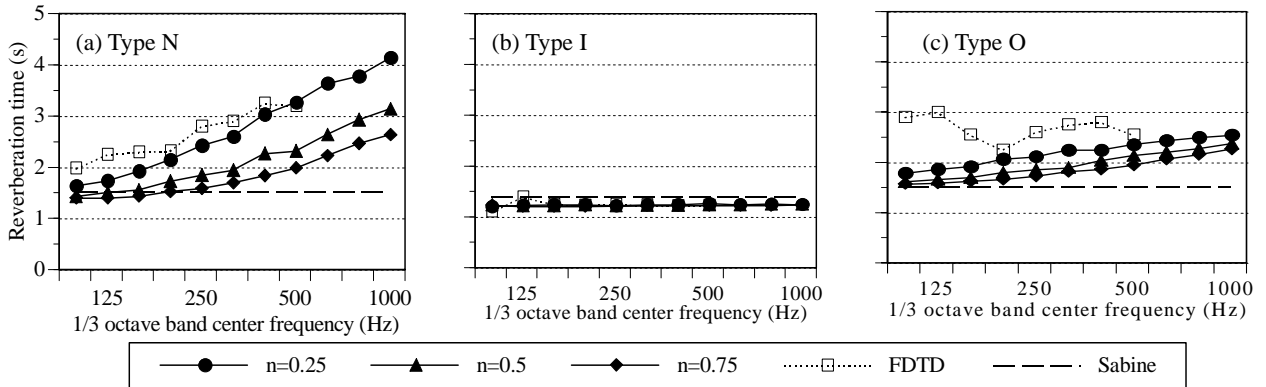


Fig.6 Reverberation time for Types N, I, O with absorptive floor ($h = 6$ m), calculated with $n = 0.25, 0.5, 0.75$.

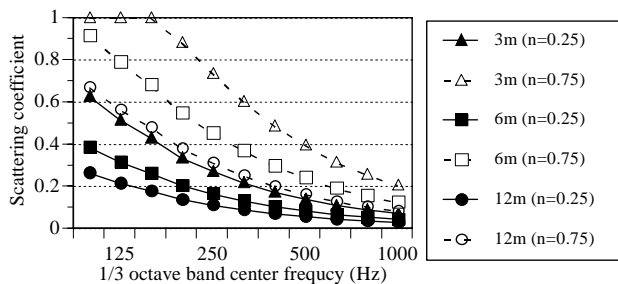


Fig.5 Equivalent scattering coefficients of the wall ($w = 12$ m and $h = 3, 6, 12$ m), under the condition $n = 0.25, 0.75$.

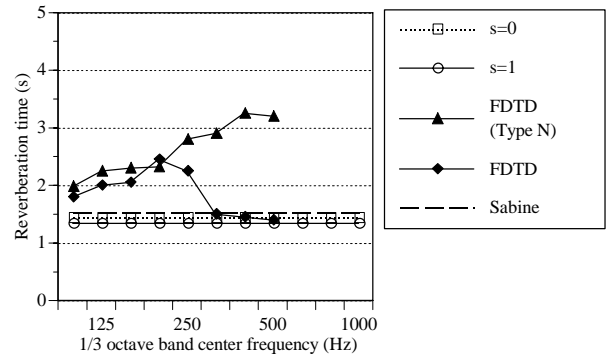


Fig.7 Reverberation time for Type D with absorptive floor ($h = 6$ m), calculated with $s = 0, 1$.

間の解析結果の対応から推定した壁面全体としての等価拡散係数であり、315Hz 帯域以上で Type D の値が上昇する傾向は壁面形状の周期 1.5m ともおおむね整合する。

4.まとめ

壁面周辺部による回折を考慮した等価拡散係数を幾何音響解析に導入することにより、吸音面が偏在する直方体室の残響時間予測がある程度可能であることを示した。しかし、壁面傾斜によっては適用が困難であり、周辺部の何らかの詳細な取り扱いが必要なものと考えられる。

参考文献

[1] ISO 17497-1: Acoustics - Measurement of sound scattering properties of surfaces - Part 1, 2004
 [2] M. Vorländer *et al.*, Acta Acustica / Acustica **90**, pp.

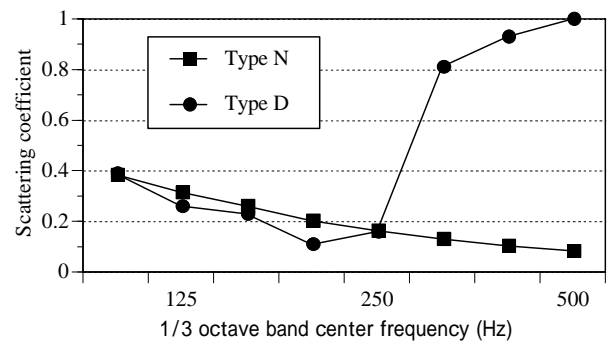


Fig.8 Equivalent scattering coefficients estimated for the walls of Types N and D.

[3] Y. Kosaka *et al.*, J. Acoust. Sci. & Tech., **26**, pp. 136-144, 2005
 [4] 安田, 坂本, 牛山, 橋, 音講論(秋), pp. 963-964, 2004

拡散係数を導入した幾何音響シミュレーションに関する検討 シューボックス型ホールにおける拡散壁の影響 *

太刀岡勇氣, 佐久間哲哉 (東大・新領域)

1 はじめに

近年商用ベースの幾何音響シミュレーションソフトウェアに壁面条件として拡散係数 [1] を導入したものが多く見られる。拡散係数の同定については測定法 [2] や数値解析手法 [3] が整いつつあるが、幾何音響解析における拡散係数の取り扱いや有効性については十分な検討がなされていない。本報では、シューボックス型コンサートホールを対象として様々な部位の拡散係数を変化させることで、拡散壁の設置部位による各種聴感指標への影響をケーススタディーを通して定量的に評価した。

2 研究方法

2.1 解析アルゴリズム

幾何音響解析には cone tracing 手法を採用した CATT-Acoustic v8.0 を用いる。本プログラムは壁面の拡散係数に応じて、1 次反射では鏡面反射と拡散反射の各成分を与え、2 次反射以降では確率的にいずれかの反射成分を与えている。

2.2 解析対象

Fig. 1 に示すシューボックス型ホールを基本とする。周波数によらず、客席床・客席後方壁は吸音性 ($\alpha = 0.86$)、その他の面は反射性 ($\alpha = 0$) とする。 $\bar{\alpha} = 0.22$ 、Eyring による残響時間が 2.54 秒に設定した。舞台中央の無指向性点音源と受音点列 (2m 間隔で 85 点) の配置により、 $C_{80}, L_f, G, EDT, T_{30}$ を算出する。以上は文献 [4] と同条件とした。

2.3 拡散係数の取扱い

吸音面の拡散係数については音場への影響が小さいため $s = 0$ とし、反射面の拡散係数を変化させることにする。反射面については (a) 全面、(b) 側壁、(c) ステージ周りの壁、(d) 天井のみ変化の 4 パターンについて検討した。

3 結果と考察

3.1 拡散係数の変化に伴う特徴的な傾向

拡散係数の変化による聴感指標の影響を示すために、条件 (a) で $s = 0.1$ と $s = 1$ での場合の C_{80} と G の空間分布の違いを Fig. 2 に示す。また音源 - 受音点間の距離との関係を Fig. 3 に示す。図中には残響時間 2.54 秒から導かれる Barron's Revised Theory [5] による理論式を併記している。

C_{80} については、拡散係数が大きくなると全体的に低下し、Barron の理論式との乖離が後方ほど大きい。

G については理論式と平均値はおおむね一致するものの、ホールの後方で値が小さいことがわかる。こ

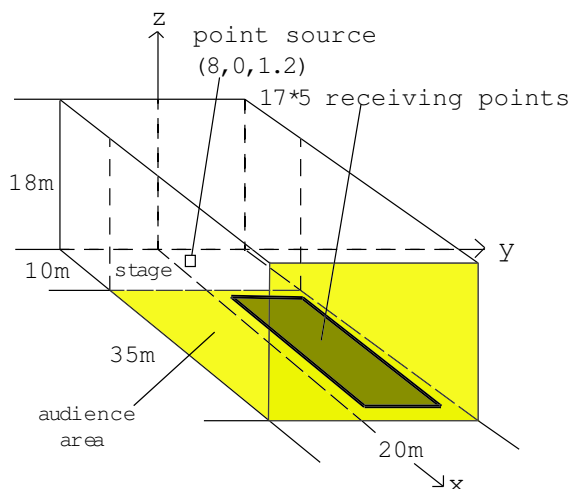


Fig. 1 Geometry of a shoebox concert hall

の傾向は拡散係数が大きいほど顕著である。

L_f については、距離との相関はそれほど見られないが、前後で比較的低く、中央で高いといえる。

3.2 部位の違いによる影響

2.3 に示した 4 パターンについて検討した結果を Fig. 4, 5 に示す。ここでは検討する面以外の反射面の $s = 0.3$ とした。

C_{80} に関してはステージ周りの壁を変化させても、平均値はほとんど変化していないが、ばらつきは大きくなっている。これに対し側壁、天井を変化させた場合には全体的に低下する。

L_f に関しては側壁の拡散係数を大きくしたときに、全体的に値が下がる傾向にあるが、そのほかの部位を変化させてもあまり変化しない。

G に関してはあまり大きな変化は見られないが、側壁の拡散係数を変えることでばらつきが増す。また前述の通り特に後方で値が小さくなる。

残響時間に関しては場所ごとのばらつきは少なく、拡散係数にある程度依存しており、EDT と T_{30} の傾向はおおむね一致している。ステージの周りの壁の拡散係数を大きくすることで残響時間が短くなり、側壁の拡散係数を大きくすると残響時間が長くなることが示される。天井面の拡散性は残響時間にあまり影響しない。

4 まとめ

シューボックス型ホールを対象に様々な部位の拡散係数を変化させることで聴感指標に与える特徴的な傾向をある程度示すことができた。しかしながら、吸音面の配置の影響も大きく影響すると思われるため様々なパターンについての検討が必要と思われる。

* Geometrical acoustic simulation using scattering coefficients to predict the influence of diffuse walls in the shoebox concert hall by TACHIOKA Yuuki and SAKUMA Tetsuya (The University of Tokyo)

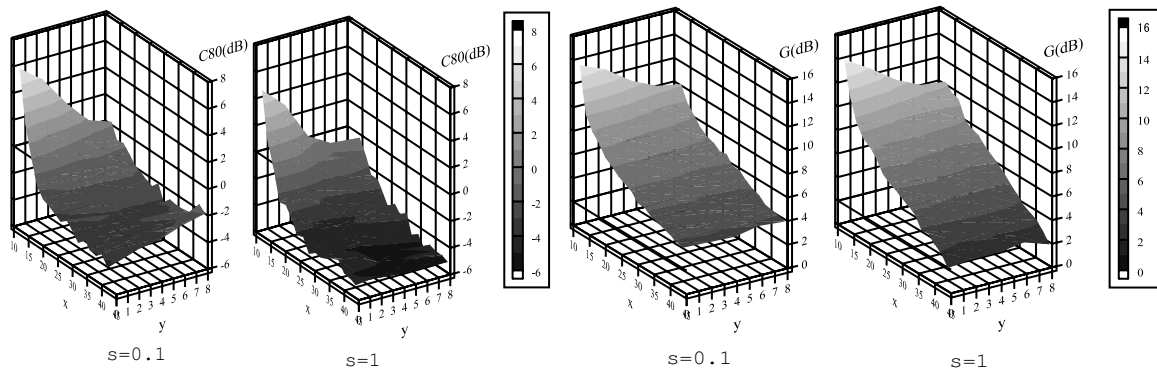


Fig. 2 Distribution of C_{80} and G calculated with scattering coefficient on the all reflective surfaces given 0.1 or 1 (only in the region of $y \geq 0$)

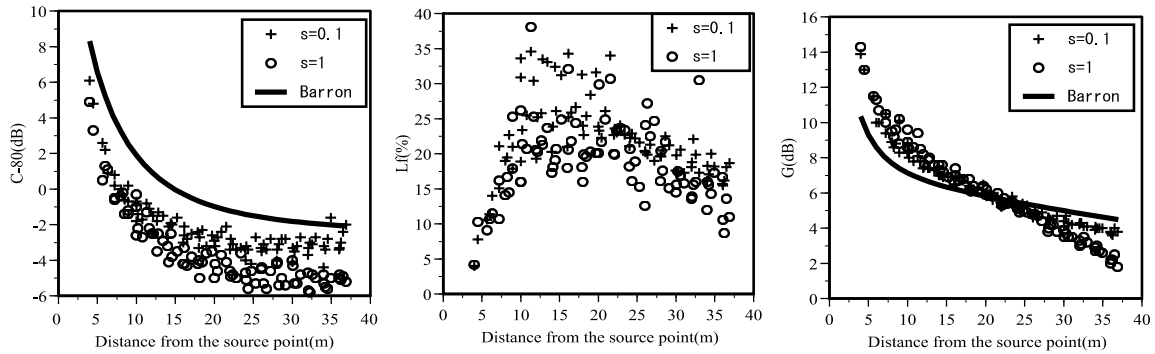


Fig. 3 C_{80} , L_f , and G calculated with scattering coefficient on the all reflective surfaces given 0.1 or 1 (Compared to the Barron's Revised Theory)

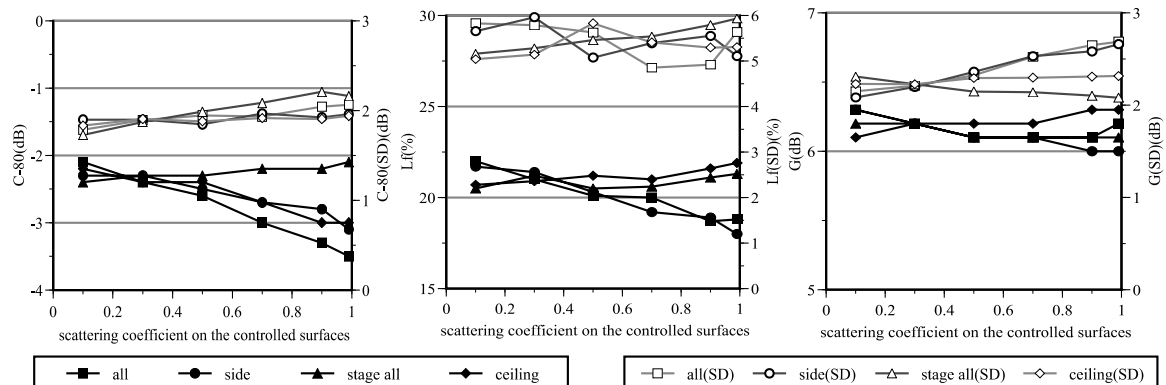


Fig. 4 Mean and Standard Deviative of C_{80} , L_f and G calculated with scattering coefficient on the controlled reflective surfaces given 0.1,0.3,0.5,0.7,0.9,1 (Others are given 0.3)

参考文献

- [1] ISO 17497-1: Acoustics - Sound-scattering properties of surfaces - Part 1, 2004.
- [2] M. Vorländer *et al.*, Acta Acustica / Acustica 90, pp. 858-867, 2004.
- [3] Y. Kosaka *et al.*, J.Acoust.Sci. & Tech.26, pp. 136-144, 2005.
- [4] 安藤, 古屋, 音講論 (秋), pp. 1093-94, 2004.
- [5] M. Barron, Auditorium Acoustics and Architectural Design, pp418-419,E & FN Spon, 1993.

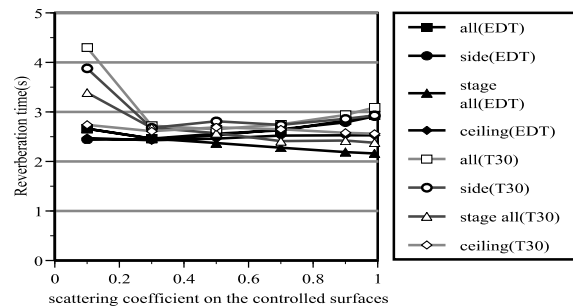


Fig. 5 Mean of EDT and T_{30} calculated with scattering coefficient on the controlled reflective surfaces given 0.1,0.3,0.5,0.7,0.9,1 (Others are given 0.3)