

格子を用いない非圧縮性Navier-Stokesソルバーの研究

56211 坂本 真透

(指導教員 鈴木 宏二郎 助教授)

Key Words : Gridless method, Least-square-based FDM, Incompressible flow

1. はじめに

格子点のメトリック情報を使用せずに流れの支配方程式を解く手法として、グリッドレス法が提案された。物理量の空間微係数を最小二乗法で求めるため、格子配列の規則性が不要であり、特に3次元での複雑形状扱いが飛躍的に容易になると考えられる。しかし実際に流れを解析しようとする、細部で様々な工夫が要求され、ロバスト計算法とするにはさらなる開発が必要である。

そこで本研究では、グリッドレス法の基礎となるクラウドの選択や探索などといった部分から検討を加え、ポアソン方程式の緩和法を提案し、移流計算にセミラグランジュ法を導入した。本計算法を2次元線形移流問題および物体周りの非圧縮性流れに適用し、その妥当性を検証した。なお、本研究は非圧縮性流体を対象としているが、圧縮性流体への適用も可能である。

2. グリッドレス法

グリッドレス法とは、流れ場に配置したある点上での物理量分布を、その点の周りの点群(クラウド)の物理量から最小二乗法を用いて多項式で近似することにより、格子情報を必要とせずに流れ場を計算する手法である。以下にその手法について説明する。

2.1 近似多項式

本手法では、一度に2階の微係数まで求まる2次の近似多項式を用いる。ある計算点 i (x_i, y_i) 近傍における物理量 f の分布を次の多項式で表す。

$$f^*(x_j, y_j) = f(x_i, y_i) + a\Delta x_j + b\Delta y_j + c\Delta x_j^2 + d\Delta x_j\Delta y_j + e\Delta y_j^2$$

$$\Delta x_j = x_j - x_i, \Delta y_j = y_j - y_i \quad (1)$$

係数 $a \sim e$ の値を次式の最小二乗法により求める。

$$\begin{pmatrix} \sum \Delta x^2 & \sum \Delta x\Delta y & \sum \Delta x^3 & \sum \Delta x^2\Delta y & \sum \Delta x\Delta y^2 \\ \sum \Delta x\Delta y & \sum \Delta y^2 & \sum \Delta x^2\Delta y & \sum \Delta x\Delta y^2 & \sum \Delta y^3 \\ \sum \Delta x^3 & \sum \Delta x^2\Delta y & \sum \Delta x^4 & \sum \Delta x^3\Delta y & \sum \Delta x^2\Delta y^2 \\ \sum \Delta x^2\Delta y & \sum \Delta x\Delta y^2 & \sum \Delta x^3\Delta y & \sum \Delta x^2\Delta y^2 & \sum \Delta x\Delta y^3 \\ \sum \Delta x\Delta y^2 & \sum \Delta y^3 & \sum \Delta x^2\Delta y^2 & \sum \Delta x\Delta y^3 & \sum \Delta y^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \Delta x\Delta f \\ \sum \Delta y\Delta f \\ \sum \Delta x^2\Delta f \\ \sum \Delta x\Delta y\Delta f \\ \sum \Delta y^2\Delta f \end{pmatrix} \quad (2)$$

基礎方程式中の空間微係数は次式のように求まる。

$$a = \frac{\partial f^*}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial f^*}{\partial y}, \quad c = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^*}{\partial x^2}, \quad d = \frac{\partial^2 f^*}{\partial x\partial y}, \quad e = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^*}{\partial y^2} \quad (3)$$

2.2 重み付け

本研究では森西と同様に、距離に応じて残差へ重み付けを行う重み付き最小二乗法を導入する。これは、注目点 i から遠い位置にある近傍点による残差を小さく見積もる手法であるが、形が決まっていないため、本研究では、注目点 i からの距離に依存す

る6種類(図1参照)の重み関数を用いて2次元線形移流方程式を解き、解析解からの誤差を比較した。速度 $u = v = \text{const.}$ で、 CFL は0.05とした。 f の初期分布としては円錐形状を与えている。ここでは計算点として正方格子上の点を用い、注目点 i の周り20点をクラウドとした。また、格子間隔 Δh によるそれぞれの誤差の変化もあわせて比較した。

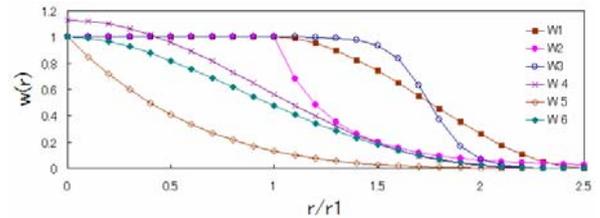


図1: 重み関数

ここで r_1 は基準距離であり、差分法における格子間隔に相当するもので、この問題では格子間隔 Δh を基準距離に取っている。また、クラウド領域半径 r_0 は基準距離の2.5倍としている。グリッドレス法において w_2 の形は多く用いられており、本研究において改めてその妥当性を示すことができた。

2.3 ポアソン方程式

非圧縮性流体に対するグリッドレス法適用の問題に、圧力のポアソン方程式

$$p_{xx} + p_{yy} = -(u_x^2 + 2u_x v_x + v_x^2) + u_{xx} + v_{yy} \quad (4)$$

の解法が挙げられる。本研究では、グリッドレス法においても差分法と同様にSOR法を用いて収束解を得る手法を提案する。

まず、ある注目点 i の近傍点 j の圧力を次のように仮定する。

$$p_j^* = p_i + a_i \Delta x + b_i \Delta y + c_i \Delta x^2 + d_i \Delta x \Delta y + e_i \Delta y^2 \quad (5)$$

全近傍点を上式で仮定し、実際の値との残差の二乗和 Q が最小になるように係数 $a \sim e$ を決定する。具体的には、次の式を解くことになる。

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \\ e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w \Delta x p_j \\ \sum w \Delta y p_j \\ \sum w \Delta x^2 p_j \\ \sum w \Delta x \Delta y p_j \\ \sum w \Delta y^2 p_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum w \Delta x \\ \sum w \Delta y \\ \sum w \Delta x^2 \\ \sum w \Delta x \Delta y \\ \sum w \Delta y^2 \end{pmatrix} p_i \quad (6)$$

ここで、行列 \mathbf{A} は式(2)の係数行列である。ポアソン方程式の解法に必要な圧力の2階の微係数 c と e は

$$c_i = \alpha_c - \beta_c p_i$$

$$e_i = \alpha_e - \beta_e p_i \quad (7)$$

のように、注目点 i での圧力の2階微係数を注目点 i での圧力の項とそれ以外の項に分けることができる。これらを用いてポアソン方程式を P_i で整理すると、

$$P_i = \frac{2(\alpha_c + \alpha_e) - RHS_i}{2(\beta_c + \beta_e)} \quad (8)$$

となり、注目点 i における圧力を緩和係数 ω により次のように更新する。

$$P_i^{new} = (1 - \omega)P_i^{old} + \omega\alpha_i \quad (9)$$

同様に各点において圧力を逐次更新することを繰り返し、ポアソン方程式に対する収束解を得る。

2.4 移流項の評価

グリッドレス法において、最小二乗法による微分係数の評価は中心差分的であり、数値的不安定が生じてしまう。これを解消する方法として人工粘性項を付加することがまず考えられた。一方、小河原らは、クラウド内の上流側を重視する重み関数を提案し、風上化が可能であることを示した。しかし、この手法は重み関数に速度を含んでおり、毎時間ステップの最小二乗計算において係数行列の逆行列を求めなければならない、計算の負担が大きい。

そこで本研究では、セミラグランジュ法に基づき、注目点 p の風上を3次のスプライン関数で3点から補間する。3点の s - t 座標における3次スプライン補間関数は、

$$f(s, t) = C_{30}s^3 + C_{21}s^2t + C_{12}st^2 + C_{03}t^3 + C_{20}s^2 + C_{11}st + C_{02}t^2 + C_{10}s + C_{01}t + C_{00} \quad (10)$$

と表され、係数は3点における値から次のように決まる。

$$\begin{aligned} C_{00} &= f(P), \quad C_{10} = f_s(P), \quad C_{01} = f_t(P), \quad C_{11} = f_{st}(P) \\ C_{21} &= f_i(A) - C_{11} - C_{01} \\ C_{20} &= 3f(A) - f_s(A) - 2C_{10} - 3C_{00} \\ C_{30} &= -2f(A) + f_s(A) + C_{10} + 2C_{00} \\ C_{12} &= f_s(B) - C_{11} - C_{10} \\ C_{02} &= 3f(B) - f_t(B) - 2C_{01} - 3C_{00} \\ C_{03} &= -2f(B) + f_t(B) + C_{01} + 2C_{00} \end{aligned} \quad (11)$$

各点における物理量分布は x - y 座標で与えられており、 s - t 座標へ変換していることに注意さえすればよい。

3. 円柱周り流れの解析による検証

一様流中に円柱がある場合の計算例を示す。2次元非定常非圧縮性Navier-Stokes方程式を速度と圧力について解く。レイノルズ数が10~100で5つの場合に対して行い、計算点は400x200の等間隔格子を背景格子として置き、そこへ、物体表面に寄せた計算点を加えて配置している。また、移流項の評価としては、3次関数で風上点を補間する手法を採用している。

双子渦ができていくレイノルズ数10~40、双子渦が後方に放出されているレイノルズ数70, 100のそれぞれの領域ともに、抵抗係数が実験とよく一致している。また、全抵抗係数に占める摩擦抵抗の割合はレイノルズ数が低いほど大きくなるため、このレイノルズ数領域における実験値との一致から、物体表面での境界層をよく捉えていると言える。双子渦の放出は、実験ではレイノルズ数40~50から観測されており、40まで双子渦が形成され、70ではそれが放出されているこの計算結果は、流れの構造をよく捉えていると言える。双子渦の長さも実験と非常によく一致している。

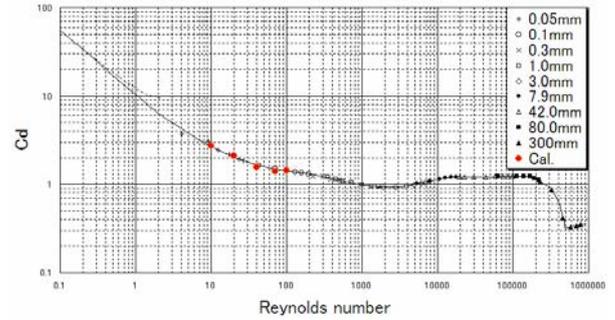


図3: 円柱の抵抗係数

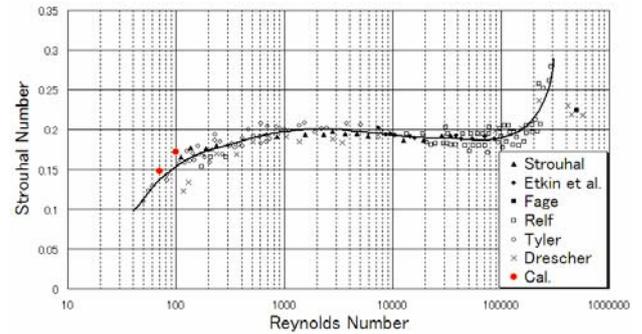


図4: 円柱のストローハル数

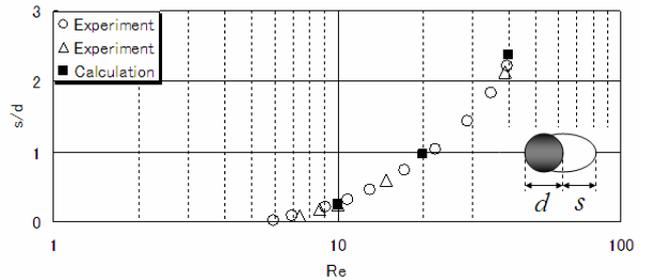


図5: 円柱後方におけるよどみ点の位置

4. 結論

格子を用いない非定常非圧縮性N-Sソルバーを新たに開発した。重み関数として逆べき乗のものが適していることを明らかにした。次に、グリッドレス法におけるポアソン方程式の緩和手法を提案し、差分法で用いたSOR法と同様に収束解を捉えられることを確認した。また、移流項の評価としてセミラグランジュ法を導入し、物体周りの流れに関して検討を行い、実験値とよい一致をみた。

本手法は、格子を用いないという特徴から格子生成を必要としないため、時間をかけず容易に複雑形状・複数物体周りの流れ解析が可能である。図6は複数物体周りの計算例である。

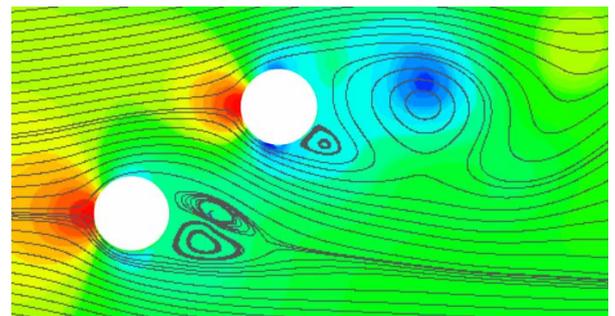


図6: 千鳥配置2円柱周りの流れ (Re=70)