

東京大学 大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系物質系専攻

平成19年度
修士論文

重力波検出器用注入同期型100Wレーザー
の広帯域周波数安定化に関する研究

平成20年1月29日提出

指導教員：三尾 典克 准教授



66109：大前 宣昭

目次

第1章 序	3
第2章 重力波検出	4
2.1 重力波	4
2.2 重力波検出器	4
2.2.1 共振型重力波検出器	6
2.2.2 レーザー干渉計型重力波検出器	6
2.3 世界の重力波検出器	8
2.3.1 現在稼働中の重力波検出器	8
2.3.2 次世代型重力波検出器	10
第3章 LCGT 計画	11
3.1 LCGT 計画の全体像	11
3.2 LCGT 用光源の開発	13
3.2.1 LCGT 用光源の開発構想	13
3.2.2 LCGT 用光源の開発の現状	14
3.3 LCGT の多段式周波数安定化	15
3.3.1 フィードバック制御の一般論	19
3.3.2 光共振器を用いたレーザー周波数安定化の原理	23
3.3.3 多段式周波数安定化において各段に要求されるもの	31
第4章 注入同期レーザーの周波数安定化	37
4.1 注入同期レーザーの周波数特性	37
4.1.1 注入同期 (Injection Locking)	37
4.1.2 注入同期の基礎方程式の導出	38
4.1.3 注入同期レーザーの周波数特性	43
4.2 注入同期レーザーのモードクリーナーを用いた周波数安定化	45
4.2.1 レーザー周波数アクチュエータ	46
4.2.2 外部 EOM の配置	48
第5章 高出力光用 EOM の評価	51
5.1 EOM による位相変調の原理	51
5.1.1 結晶中の電磁波の伝播	51
5.1.2 ポッケルス効果	52
5.1.3 EOM による位相変調の原理	52

5.2	フォトリラクティブ効果	53
5.3	実験	54
5.3.1	LCGTで必要なEOM	54
5.3.2	ストイキオメトリック LiNbO ₃ (SLN)	55
5.3.3	耐パワー性能の評価	56
5.3.4	熱レンズ効果の評価	57
5.3.5	波面の乱れの評価	58
5.3.6	位相 (周波数) 変調度の測定	60
5.4	高出力光用 EOM の評価のまとめ	63
第 6 章	注入同期レーザーの広帯域周波数安定化	65
6.1	実験装置	65
6.1.1	各アクチュエータの役割	67
6.1.2	モードクリーナー	67
6.1.3	EOM 用高出力アンプ	69
6.2	外部 EOM を用いた広帯域制御結果	69
6.2.1	周波数雑音の見積もり	70
6.3	注入同期型 100 W レーザーの広帯域制御実験のまとめ	70
第 7 章	まとめ	75
7.1	高出力光用 EOM の評価	75
7.2	広帯域周波数安定化	75
付 録 A	注入同期レーザーの水流による位相雑音への影響	77
A.1	実験装置	77
A.2	実験結果	77
A.3	まとめ	81

第1章 序

1915年にA. Einsteinが一般相対性理論を発表して以来、重力波と呼ばれる現象の存在が予言された¹⁾。重力波の検出実験は1960年代にJ. Weberによって始められたが、重力波の効果は非常に小さいものと考えられており、直接重力波を捉えたという報告はない。しかし、重力波の存在は天体の観測により確かめられている。それは1974年に発見されたPSR1913+16と呼ばれる中性子星連星系の軌道パラメーターの変化が、一般相対性理論で予測された結果と非常によく一致するというものであった²⁾。この功績が称えられ、1993年度のノーベル物理学賞はこの中性子星連星の発見者であるR. A. HulseとJ. H. Taylorに与えられた。

重力波による宇宙観測は、従来の電磁波の観測では見ることのできなかつた宇宙の姿が見えるようになるという意味でとても期待されている³⁾。そのため、現在、世界各地に重力波検出器が建設され、検出器の感度向上のための技術開発が行われている。日本においても、地上に建設予定の次世代型重力波検出器LCGT(Large-scale Cryogenic Gravitational-wave Telescope)計画⁴⁻⁶⁾が進められており、当研究室ではLCGT計画で用いる光源の開発に取り組んでいる。重力波検出器用の光源には、非常に安定なレーザー光が必要とされる。さらに、次世代型重力波検出器は、散射雑音によって制限される感度の向上のために、高出力レーザー光を必要とする。つまり、「高出力」かつ「高安定」なレーザー光を作ることが、本研究の目的である。

高出力レーザーにおいて、重力波検出器に搭載するレベルの非常に安定なレーザーの需要はこれまでなかった。それは、高出力レーザーは加工用途が主な目的だったからである。しかも、レーザー光の高出力化に伴い、熱による問題、特に変形や耐久性の観点から安定化は非常に難しくなると予想される。したがって、本研究は、レーザー開発関連分野において非常に意味のあるものであるといえる。さらに非常に品質の良い高電場を作り出すことのできる装置であるので、今後非線形光学の分野等での需要が伸びるものでも考えられる。

本論文は、まず第2章で重力波検出について簡単に紹介する。第3章で日本の次世代重力波検出器計画LCGTについて、さらに光源の開発状況について述べる。第4章で本論文の研究の背景となるレーザーの多段式周波数安定化について考え、本研究で行った高出力光用EOMの評価および広帯域制御の必要性を述べる。第5章で高出力光用EOMの評価実験について、第6章では第5章で評価したEOMを用いた広帯域制御の実験結果について報告する。第7章で実験結果をまとめる。また、付録Aでは、オーストラリアのアデレード大学のProf. Jesper Munchとともに行った開発中の光源についての実験について紹介する。

第2章 重力波検出

ここでは、本研究の背景である重力波検出について概説する。詳細は文献^{1,3,5,7)}にあるのでここでは簡単な説明にとどめる。

2.1 重力波

重力波は、A. Einstein の一般相対性理論 (1915 年) によって存在が予言された重力の波動現象である。その検出実験は 1960 年代になって始められたが、未だ直接検出には至っていない。しかし、重力波の存在は、中性子星連星系 PSR1913+16 の観察から証明されている²⁾。重力波検出実験が始まって 50 年近く経つが、未だに重力波の直接検出に至っていないのは、重力波の相互作用が非常に小さいためである。しかし、重力波は非常に透過性に優れ、電磁波とは異なり、質量をもつ物体の相互作用そのものであるから、重力波検出が実現すると、電磁波とは違った情報をもたらす、すなわち新しい物理を提供するものであると期待されている。検出実験が始まった当初は、検出器の感度が期待される重力波に比べて非常に低く、重力波の直接検出は不可能だと思われていたが、実験・計測技術の向上により、近いうちに直接検出、そして重力波による天文学がスタートするといわれている。

重力波は、空間の歪みとして伝播する。重力波の偏波成分には+モードと×モードとがある。それぞれのモードに対する空間の歪みの様子を図 2.1 に示す。 z 方向から重力波がやってくる時、その垂直な面 ($x-y$ 面) の空間に歪みが生じる。このとき、直交する 2 方向 (例えば x 方向と y 方向) で伸縮が逆位相で起こる。しかし、先ほども述べたが重力波の効果は非常に小さい。巨大な質量をもつ物体の激しい運動 (超新星爆発、連星の合体、パルサーなど) で、空間の歪みの大きさ (重力波の振幅) は $10^{-20} \sim 10^{-23}$ 程度であると考えられている。これは、1 m の距離が $10^{-20} \sim 10^{-23}$ m 歪むことを表している。身近なもので例えると、地球と太陽間の距離 (約 10^{11} m) が水素原子 1 つ分 (約 10^{-10} m) 歪むくらいであるといえる。このような微小な効果を検出するために行われている実験について次に説明する。

2.2 重力波検出器

重力波検出器は大きく分けて 2 つに分類される。それは共振型重力波検出器とレーザー干渉計型重力波検出器である。これらについて簡単に紹介する。

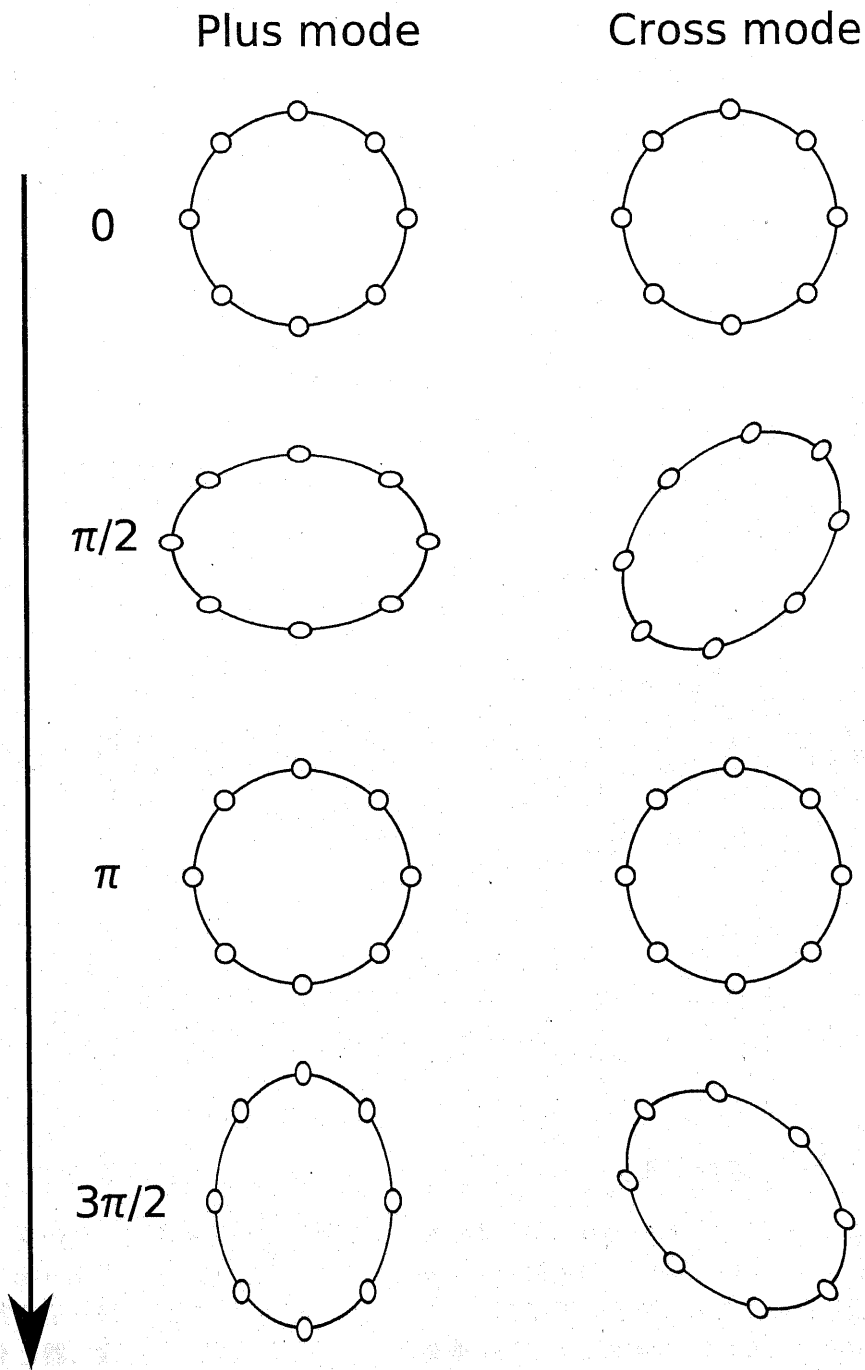


図 2.1: 重力波による空間の歪み. 重力波には2つの偏波モードがある (左図: +モード, 右図: ×モード). 重力波が紙面に垂直に入射した際の空間の歪みを表しており, 直交方向で逆位相で伸縮する.

2.2.1 共振型重力波検出器

重力波検出実験を最初に始めた J. Weber は、図 2.2 (左図) に示すような弾性体の円柱の構造をした重力波検出器を考案した。これは、2つの質点間をばねでつないだモデル図 2.2 (右図) で描くと理解しやすい。この方法は重力波によって励起される弾性体の振動を捉えるというものである。弾性体の共振周波数と同じ周波数の重力波が飛来すると、重力波振幅 h_+ に対して、弾性体の振動振幅は、

$$\zeta = -iQ \frac{h_+ L}{2} \quad (2.1)$$

となり、振動子の Q 値に比例して重力波の振幅は増幅されることから、 Q 値の大きな弾性体を用いればよいということになる。したがって Q 値を向上させるために巨大な質量をもつ物体を冷却するなどの工夫がなされている。しかし、観測帯域が非常に狭帯域であること、さらに重力波検出に必要な十分な感度を持つほどではないため、現在はレーザー干渉計型重力波検出器が主流となっている。

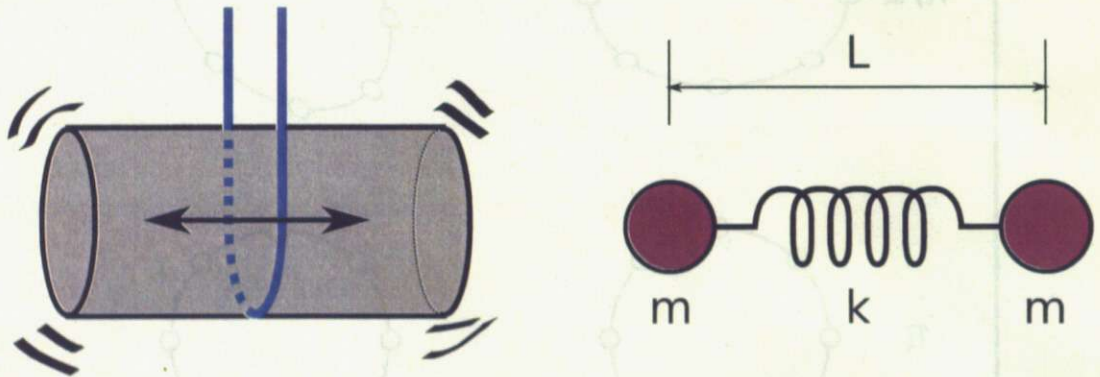


図 2.2: 共振型重力波検出器の模式図。左図：円柱の弾性体型検出器。右図：ばねと質点を用いたモデル。

2.2.2 レーザー干渉計型重力波検出器

重力波によって生じる空間の歪みをマイケルソン干渉計によって観測するという方法である (図 2.3)。マイケルソン干渉計の直交した腕を利用し、重力波による直交方向で逆位相の空間の歪みを捉えるのである。干渉計内の振り子で吊るされた鏡は、振り子の共振周波数より十分高い周波数では自由質量として振舞うため自由質量型重力波検出器とも呼ばれる。

原理について考える。重力波が存在しないとき、 x 方向の腕の長さ (基線長) を L_x 、 y 方向の腕の長さを L_y とすると、2つの光路を通して帰ってきた光の位相差は、

$$\phi_x - \phi_y = \frac{4\pi\nu}{c} (L_x - L_y) \quad (2.2)$$

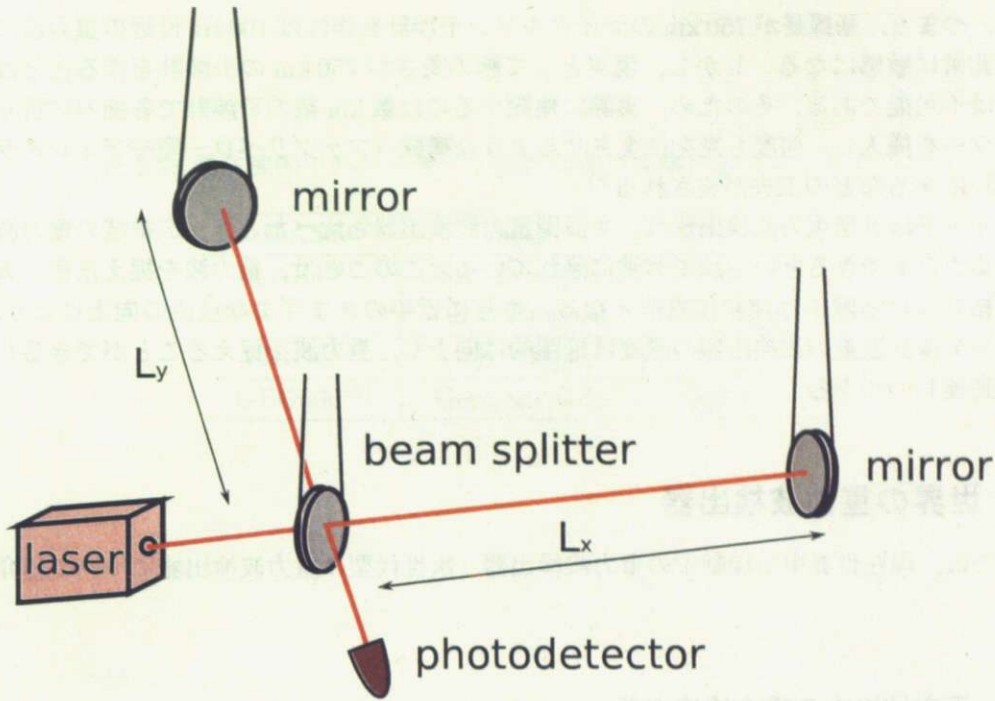


図 2.3: レーザー干渉計型重力波検出器の模式図. マイケルソン干渉計の直交した腕を利用して, 重力波による直交方向で逆位相の空間の伸縮を検出する.

と表される. ここで, ν はレーザーの周波数, c は光速である. 次に重力波が飛来したときを考える. z 方向から+モードの重力波 h_+ が飛来したとすると, 重力波によって式 (2.2) の位相差が,

$$\phi_x - \phi_y = \frac{4\pi\nu}{c}(L_x - L_y) + \phi_{\text{GW}} \quad (2.3)$$

$$\phi_{\text{GW}} = 2\pi\nu \int_{t-2L/c}^t h_+(t') dt' \quad (2.4)$$

と変化する. ここで, $L_x \sim L_y \sim L$ を仮定している. 重力波の角振動数を ω_{GW} とし, $h_+(t) = h_0 e^{i\omega_{\text{GW}} t}$ とすると, 重力波による位相差の効果は,

$$\phi_{\text{GW}} = \frac{4\pi\nu h_0}{\omega_{\text{GW}}} \sin\left(\frac{\omega_{\text{GW}} L}{c}\right) \exp\left[i\omega_{\text{GW}}\left(t - \frac{L}{c}\right)\right] \quad (2.5)$$

と書ける. さらに, $\omega_{\text{GW}} L/c \ll 1$ のとき,

$$\phi_{\text{GW}} = \frac{4\pi\nu L}{c} h_+(t) \quad (2.6)$$

となる. これは, x 方向に $hL/2$, y 方向に $-hL/2$ だけ鏡が移動したときの位相差に等しく, 重力波の周波数が十分小さいときの解釈として用いられる. また, 式 (2.5) より, $\omega_{\text{GW}} L/c = \pi/2$ のとき, 位相変化は最大となる. 100 Hz の重力波に対しては,

$$L = \frac{\pi c}{2\omega_{\text{GW}}} = \frac{\pi \times 3 \times 10^8}{2 \times 2\pi \times 100} = 750 \text{ km} \quad (2.7)$$

となる。つまり、基線長が 750 km のマイケルソン干渉計を作れば 100 Hz 付近の重力波に対して非常に敏感になる。しかし、現実として腕の長さが 750 km の干渉計を作ることは地上では不可能である。そのため、実際に建設するのは数 km 級の干渉計で各腕内に折り返しミラーを挿入し、何度も光を往復させるような構成（ファブリペロー型やディレイライン型）にするなどの工夫が施される⁸⁾。

レーザー干渉計型重力波検出器は、共振型重力波検出器と比べたとき、広帯域の重力波を捉えることができるという点で非常に優れている。このことは、重力波を捉えた後、天文学に結びつける際には非常に重要となる。さらに近年のさまざまな技術の向上により、レーザー干渉計型重力波検出器の感度は飛躍的に向上し、重力波を捉えることができるレベルに到達しつつある。

2.3 世界の重力波検出器

ここでは、現在世界中で稼働中の重力波検出器、次世代型の重力波検出器について紹介する。

2.3.1 現在稼働中の重力波検出器

共振型重力波検出器

現在稼働中の共振型重力波検出器を表 2.1 に示す。ALLEGRO⁹⁾ はシャットダウンすることが決まっている。

表 2.1: 共振型重力波検出器プロジェクト。

AURIGA ¹⁰⁾	Legnaro, Italy	$l=3$ m, $r=0.3$ m, 2.3 t, A15056
ALLEGRO ⁹⁾	Louisiana, USA	
EXPLORER ¹¹⁾	CERN, Switzerland	$l=3$ m, $r=0.3$ m, 2.3 t, A15056
NAUTILUS ¹²⁾	Rome, Italy	$l=3$ m, $r=0.3$ m, 2.3 t, A15056

レーザー干渉計型重力波検出器

現在稼働中の主なレーザー干渉計型重力波検出器を表 2.2 に示す。日本の重力波検出器 TAMA300¹³⁾ (国立天文台, 三鷹) は、大型干渉計を世界で最初に連続運転させることに成功し、当時の世界最高感度を実現したが、現在はより大きな検出器が世界中に建設され、現在は LIGO¹⁴⁾ の干渉計が最も感度が良い (図 2.4)。もし太陽質量の 1.4 倍の質量をもつ中性子星連星が合体したとすると、LIGO の感度では 15 Mpc (1 pc=3.26 光年) の距離で検出できることになる。

表 2.2: 現在稼働中のレーザー干渉計型重力波検出器プロジェクト.

TAMA300 ¹³⁾	Japan	300 m
LIGO ¹⁴⁾	USA, Livingston	4 km
	USA, Hanford	4 km, 2 km
VIRGO ¹⁵⁾	Italy, France	3 km
GEO600 ¹⁶⁾	Germany, UK	600 m

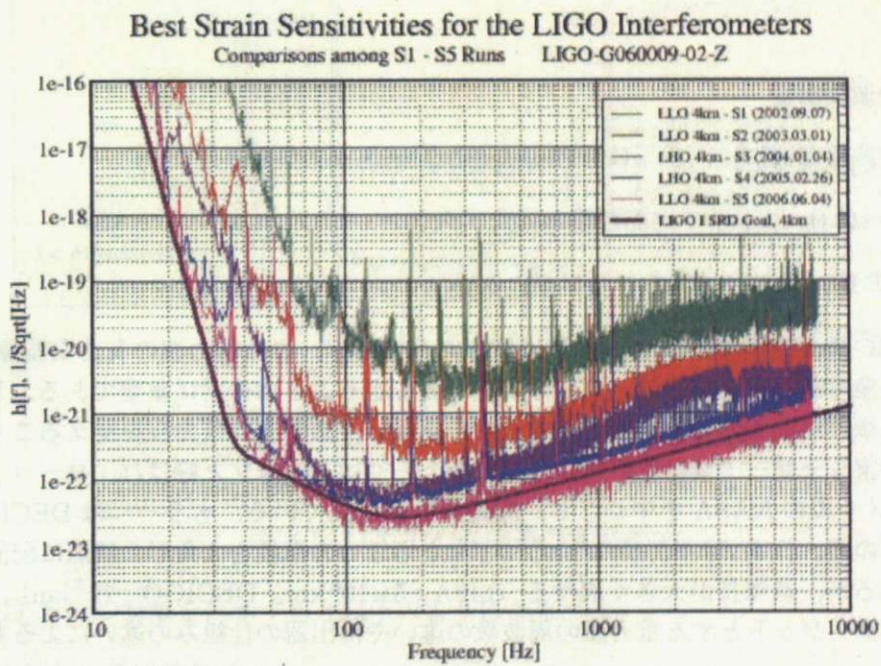


図 2.4: LIGO の感度. LIGO の Web ページ¹⁴⁾ より.

2.3.2 次世代型重力波検出器

地上の干渉計の高感度化

現在計画されている次世代型のレーザー干渉型重力波検出器を表 2.3 に示す。表 2.3 以外に実現にはまだほど遠いが、さらに Einstein Telescope (EU) という 30 km くらいの長さの干渉計も計画されている。すでに数 km の基線長の干渉計をもつ LIGO や VIRGO は、さらなる高感度化に向けて、防振装置や光源の改良、信号取得法の改善が行われることになっている。日本にも数 km クラスの干渉計の建設計画 Large-scale Cryogenic Gravitational wave Telescope (LCGT)⁴⁻⁶⁾ が計画されている。

表 2.3: 次世代型レーザー干渉計型重力波検出器プロジェクト。

LCGT ⁴⁻⁶⁾	Japan	3 km×2
Advanced LIGO ¹⁴⁾	USA, Livingston	4 km
	USA, Hanford	4 km×2
Advanced VIRGO ¹⁵⁾	Italy, France	3 km
AIGO ¹⁷⁾	Australia	5 km

宇宙空間重力波検出器

地上の重力波検出器には、以下に挙げるようなデメリットがある。

- 低周波 (10 Hz 以下) で地面振動の効果が大きい。
- 基線長の長い干渉計を作ることができない。

そのため、低い周波数の重力波を捉えるには不向きである。また重力波の有力な波源が、巨大な天体現象であることから低い周波数の重力波を狙うことは非常に重要である。したがって、上に挙げた地上の検出器のデメリットを克服し、低周波の重力波を捉えることを目的とした宇宙レーザー干渉計も計画されている。一つは LISA¹⁸⁾ と呼ばれ、ヨーロッパの ESA とアメリカの NASA を中心とし、開発が計画されている。もう一つは DECIGO と呼ばれるもので、日本で計画されている。どちらも 3 つの衛星を 3 角形の頂点に配置する仕組みであるが、基線長が大きく異なる (LISA : 5×10^6 km, DECIGO : 10^3 km)。しかし、それはターゲットとする重力波の周波数の違いや検出器の仕組みの違いによるものである。

第3章 LCGT計画

ここでは、本論文に直接関係する日本の次世代型重力波検出器 LCGT 計画⁴⁻⁶⁾について概説し、光源の周波数安定化について考える。

3.1 LCGT 計画の全体像

LCGT は、Large-scale Cryogenic Gravitational-wave Telescope の略で、その名の通り大型低温干渉計である。光学系のデザインを図 3.1 に示す。

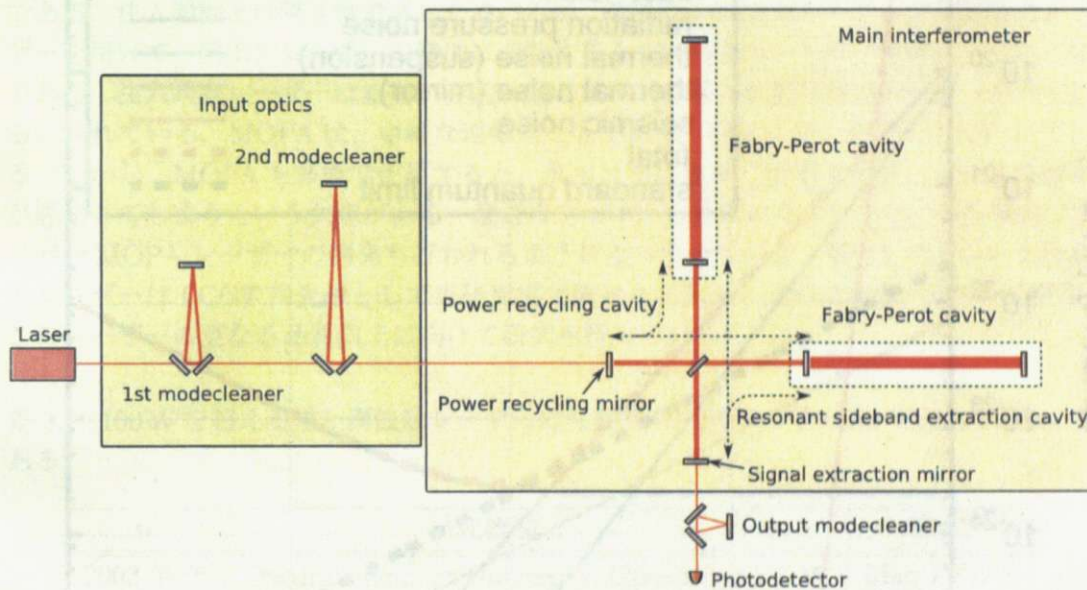


図 3.1: LCGT の光学系のデザイン。

LCGT 計画の特徴を列挙すると以下のようなになる。

- 大型化：基線長 3 km.
- 地面振動による雑音の低減：神岡鉱山の地下に建設予定。
- 低周波での感度向上：Seismic Attenuation System (SAS) の導入。
- 熱雑音の低減：鏡やその懸架系の冷却。

これらが実現した際には、干渉計の感度は量子雑音に起因するもので制限されるという究極の干渉計ができることになる。ここで量子雑音と呼んでいるのは、輻射圧雑音と散射雑音のことである。さらに、量子雑音の最適化を行うためには、干渉計に入射させる光のパワーが75 W 必要であり、高安定な高出力レーザーが必要とされる。高出力レーザーも含め、LCGT 計画の予定通りの感度が実現した場合、

- 200 Mpc 離れた $1.4M_{\odot}$ 連星中性子星合体から発生した重力波を信号雑音比 (S/N) > 10 で捉える。

ことができる。このためには、100 Hz で $3 \times 10^{-24} / \sqrt{\text{Hz}}$ の干渉計の感度を達成する必要がある。図 3.2 に LCGT の目標感度曲線を示す。目標感度に到達するために、さまざまな技術の開発が進められている。その中で本論文は高安定・高出力レーザーの開発に関する研究である。

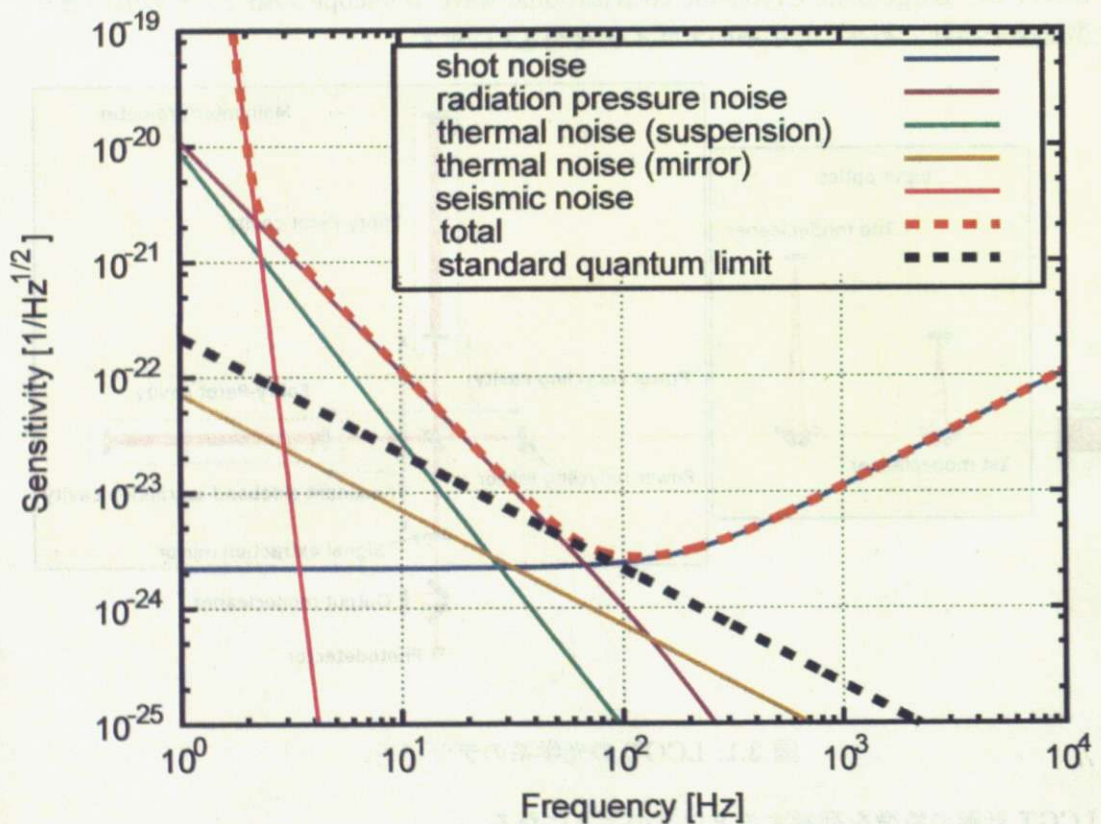


図 3.2: LCGT の目標感度曲線。計算は文献⁵⁾を参照。低い周波数 (3 Hz 以下) では地面振動, 中間の周波数 (3 Hz - 100 Hz) では輻射圧雑音, 高い周波数 (100 Hz 以上) では散射雑音でリミットされる。

3.2 LCGT 用光源の開発

重力波検出器で必要とされる光源は、単一周波数発振で、非常に品質の良いレーザーである。さらに量子雑音の最適化のために光源の高出力化が求められている。LCGT 計画で必要とされる光源のパワーは 150 W である（その後入射光学系を通過することで最終的に干渉計に入る光のパワーは 75 W が要求される）。Advanced LIGO では 180 W のレーザー光源を用いることになっている¹⁴⁾。ちなみに、現在稼働中の重力波検出器の光源のパワーは、10 W クラスである^{13,19,20)}。

レーザー出力が 100 W を超えるレーザーというのは、これまでは産業加工用途が主な目的であったため、重力波検出器で用いるような非常に品質の良いレーザーという観点での研究例は少ない。とくに、100 W を超える単一周波数発振の高出力レーザーはここ数年の間に開発されたものである。最近になって開発された 100 W を超える単一周波数発振レーザーを表 3.1 に示す。高出力の単一周波数発振レーザーは基本的に単一周波数発振する低出力レーザーを増幅することによって得られる。高出力化の方法は主に 2 種類で、注入同期 (injection locking)^{21,22)} と MOPA (master oscillator power amplifier)²³⁻²⁵⁾ である。注入同期とは第 4 章で詳しく述べるが、高品質の低出力レーザーと、高出力レーザーを用いて、低出力レーザーの特性に追随するように高出力レーザーを発振させる方法である。注入同期レーザーは制御が非常に難しいが、非常に品質の良いレーザーが得られるとされている。MOPA は、単純な増幅のことであり、非常に扱いやすいといわれている。しかし、MOPA を多段で使用すると、高出力化は簡単に実現するが、ビームの品質が悪化してしまうという欠点がある。最近ファイバー技術の向上により、高品質のファイバー MOPA レーザーの開発も行われるようになってきている。表 3.1 の上から 2 つ目のレーザーは LCGT 用光源として当研究室で開発されたレーザーである^{21,26,27)}。現在、このレーザーの更なる品質向上に向けて研究を行っている。

表 3.1: 100 W を超える単一周波数レーザーの開発状況。PCF: Photonic Crystal Fiber である。

年	研究機関	出力	増幅法
2003 年 ²³⁾	Friedrich-Schiller University, Germany	100 W	fiber-MOPA
2005 年 ²¹⁾	Univ. of Tokyo, Japan	101 W	1 段注入同期
2005 年 ²²⁾	Laser Zentrum Hannover, Germany	195 W	2 段注入同期
2005 年 ²⁴⁾	Univ. of Southampton, UK	264 W	fiber-MOPA
2006 年 ²⁵⁾	Laser Zentrum Hannover, Germany	148 W	PCF-MOPA

3.2.1 LCGT 用光源の開発構想

LCGT 用の光源に必要な特性は以下の通りである。

- 出力 : 150 W

- Nd:YAG レーザー (波長 : 1064 nm)
- 単一周波数発振
- 単一横モード (TEM₀₀ 発振)
- 直線偏光
- 低周波数雑音 : $\delta\nu \sim 10^{-8} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$ (100 Hz - 1 kHz) (これは干渉計に入る光に対する要求値)
- 低強度雑音 : $\delta P/P \sim 10^{-8} / \sqrt{\text{Hz}}$ (100 Hz - 1 kHz) (これは干渉計に入る光に対する要求値)

これらの要求を達成するための LCGT 用光源の開発構想を図 3.3 に示す。高出力化には、100 W までを注入同期、150 W までの増幅には MOPA を用いる。図 3.3 には注入同期における制御の流れも示している。周波数安定化にはマスターレーザーの周波数アクチュエータと外部 EOM を用いる。強度安定化には増幅器の励起強度の制御を行う。周波数安定化のための誤差信号は、図 3.1 の干渉計全体から得る。強度安定化に関しても、干渉計に入射する光をもとに誤差信号が得られ、制御に使われる。

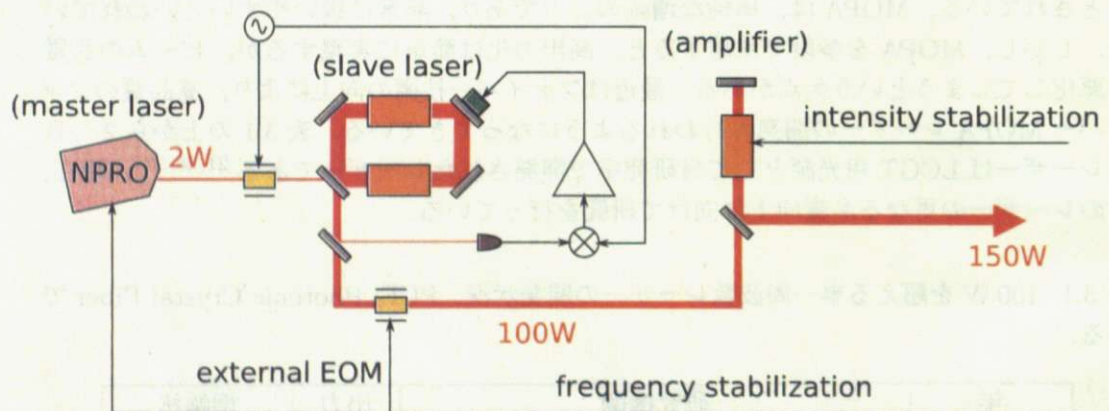


図 3.3: LCGT 用光源の開発構想。注入同期によって 100 W 出力、MOPA によって 150 W 出力を達成する予定である。また、強度安定化には増幅器の励起強度の制御、周波数安定化には、マスターレーザー (NPRO) の周波数アクチュエータと外部 EOM を用いる。それぞれの誤差信号の取得は、干渉計すなわち図 3.1 全体を含めて考える必要がある。

3.2.2 LCGT 用光源の開発の現状

現在までに、注入同期による 100 W 単一周波数発振を成し遂げている (詳細は文献^{21,27}) を参照)。注入同期レーザーのマスターレーザーは Non-Planar Ring Oscillator (NPRO)²⁸) (出力 : 2 W) である。スレーブレーザーは、三菱電機製のレーザーモジュール²⁹) を組み合わせたもので構成したリングレーザーである。このレーザーモジュールは、2 本のレー

ザーロッドとその間に置かれた回転子でできている (図 3.4)。この構成により、熱複屈折の補償ができる仕組みになっている³⁰⁾。このレーザーモジュールは LD による側面励起である。また、Pound-Drever-Hall (PDH) 法³¹⁾ (後述) を用いたスレーブレーザーの共振器長制御により安定な注入同期動作を実現している。共振器長制御に用いているピエゾ素子付き鏡を図 3.6 に示す。小型高速なタイプのものを 3 本使用し、共振による帯域の制限を避けるためになるべく小さい鏡 (直径 10 mm) を使用し、エポキシ系接着剤で接着している。それにより一番低い共振周波数は約 45 kHz である。このことによりスレーブレーザーの共振器長制御のオープンループ伝達関数 T_{il} のユニティーゲイン周波数 10 kHz を実現している²⁷⁾。

この注入同期型 100 W レーザーの特性は以下の通りである²⁷⁾。

- 出力 : 100 W
- 単一周波数発振
- 偏光比 1:35 以上
- 強度雑音 : $10^{-4} / \sqrt{\text{Hz}}$ (100 Hz)
- 周波数雑音 : $200 \text{ Hz} / \sqrt{\text{Hz}}$ (100 Hz)

また、後段の増幅器に関する知見も得られている (詳細は文献³²⁻³⁴⁾ 参照)。強度安定化に関する研究で、増幅器の励起電流の制御によって強度安定度の向上ができるという知見が得られている。また、そのときに位相雑音の増加は起きていないことも確かめられている。

3.3 LCGT の多段式周波数安定化

本論文は、前節で紹介した注入同期型 100 W レーザーの周波数安定化に関する研究である。この節では LCGT で用いられる多段式周波数安定化について考え、周波数安定化に関してどのような要求が課されるかについて述べる。

LCGT の多段式周波数安定化の模式図を図 3.7 に示す。1 段目は第 1 モードクリーナーを周波数基準として用いて誤差信号を取得し、レーザーの周波数にフィードバックする構成になっている。2 段目は第 2 モードクリーナーを周波数基準に用いて誤差信号を取得し、第 1 モードクリーナーのエンドミラーについているマグネットコイルアクチュエータに信号を返す。これに加えて、さらに第 1 モードクリーナーの誤差点にも信号を返すことになっている。これはフィードアラウンドと呼ばれている^{20,35)}。フィードアラウンドの利点については、後で述べる。3 段目は干渉計の腕の長さを基準にして安定化を図る。誤差信号は、第 2 モードクリーナーのエンドミラーについたマグネットコイルアクチュエータと、第 2 モードクリーナーの誤差点へ返される。このようにして、最終的には干渉計の腕の長さを基準にした周波数の安定化が行われる。ここで注意すべき点は、絶対周波数の安定化ではなく、あくまで干渉計の腕の長さに対して周波数の安定化ができていれば良いということである。

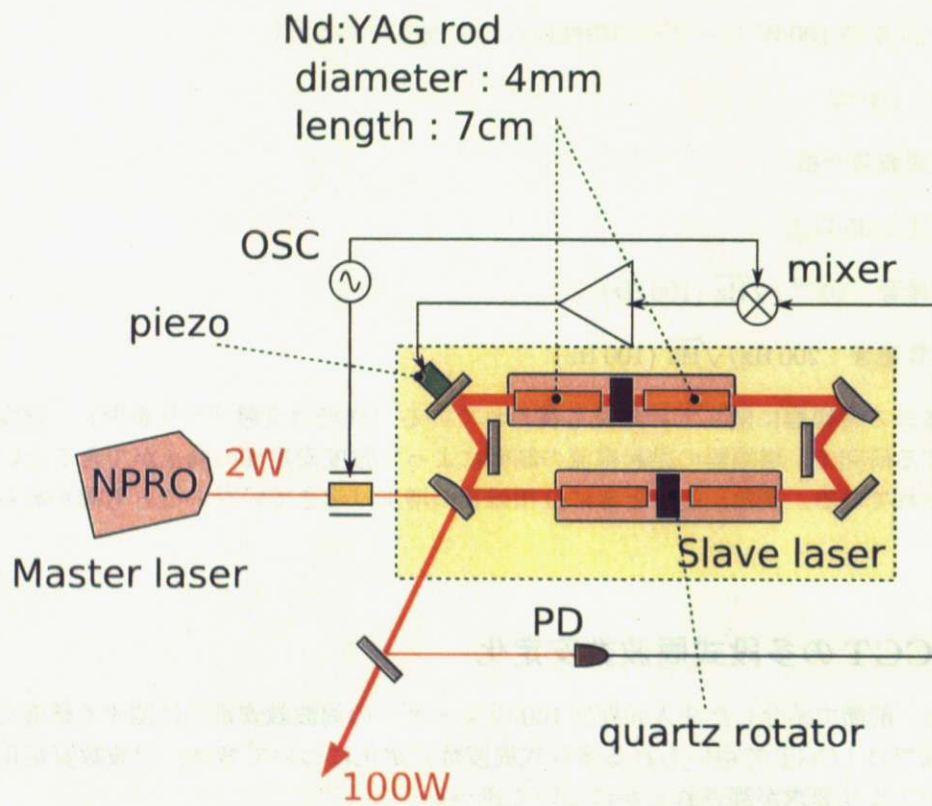


図 3.4: 注入同期型 100 W レーザーの構成. マスターレーザー (NPRO) の光をスレーブレーザーに注入している. 安定な動作のために, スレーブレーザーの共振器長の制御を行っている. ロッド間の回転子の効果により熱複屈折の補償を行っている.

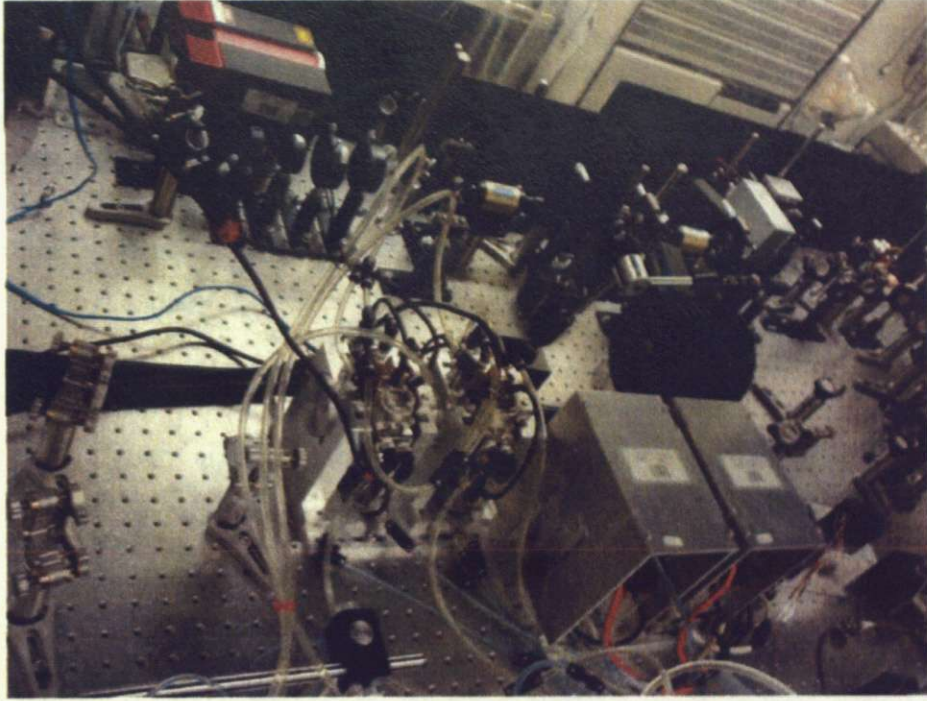


図 3.5: 注入同期レーザーの写真。左上がマスターレーザーに用いている NPRO。下半分がスレーブレーザーとして用いているリングレーザーである。

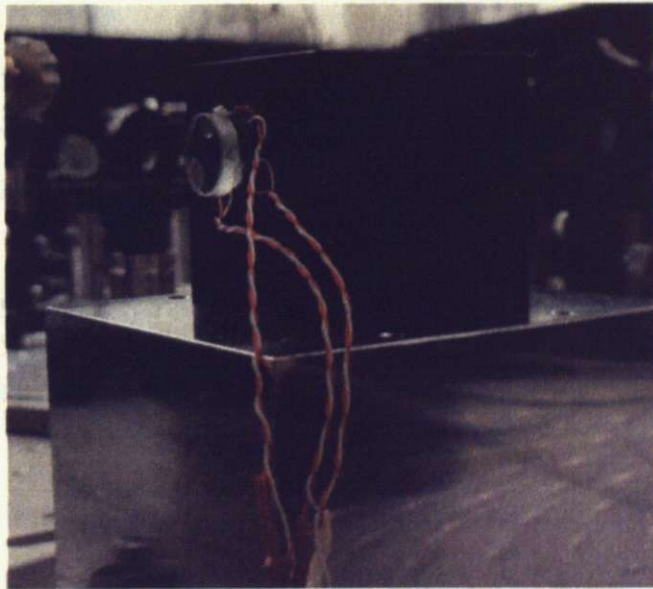


図 3.6: スレーブレーザーの共振器長制御用のピエゾ付きミラー。直径 10 mm の鏡に小型のピエゾ素子を 3 本つけている。

図 3.8 に図 3.7 のブロックダイアグラムを示す (図中の変数などの詳しい説明は後述) .
 これは、線形システムを仮定してブロックダイアグラムを用いて表現している. このブロッ
 クダイアグラムを用いて、多段式周波数安定化において周波数安定度がどのようなもの
 かの議論を行う. その前に、フィードバック制御の基本的事項について述べたあと、モー
 ドクリーナーのような光共振器を用いた周波数安定化について、そして多段式周波数安定
 化と順に述べる.

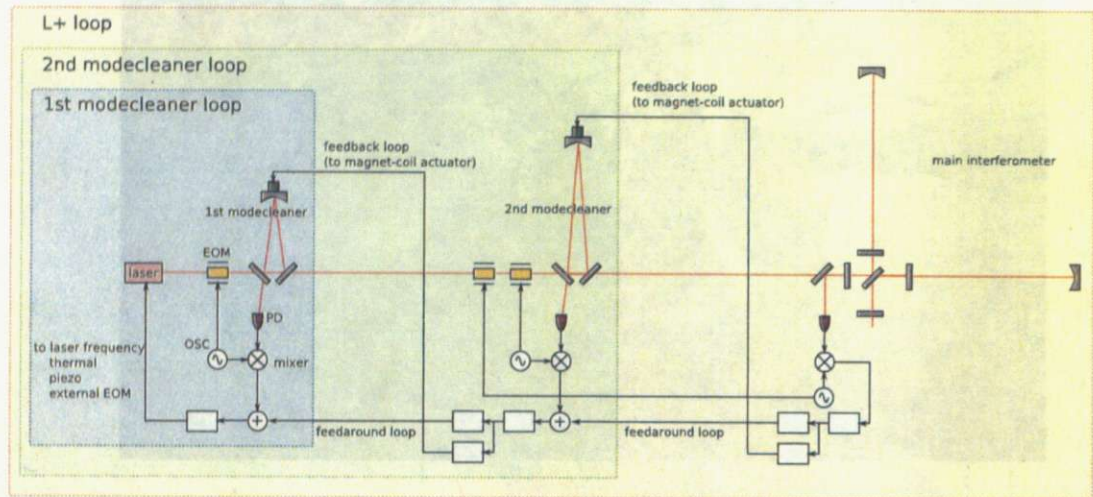


図 3.7: LCGT の多段式周波数安定化システムの構造図.

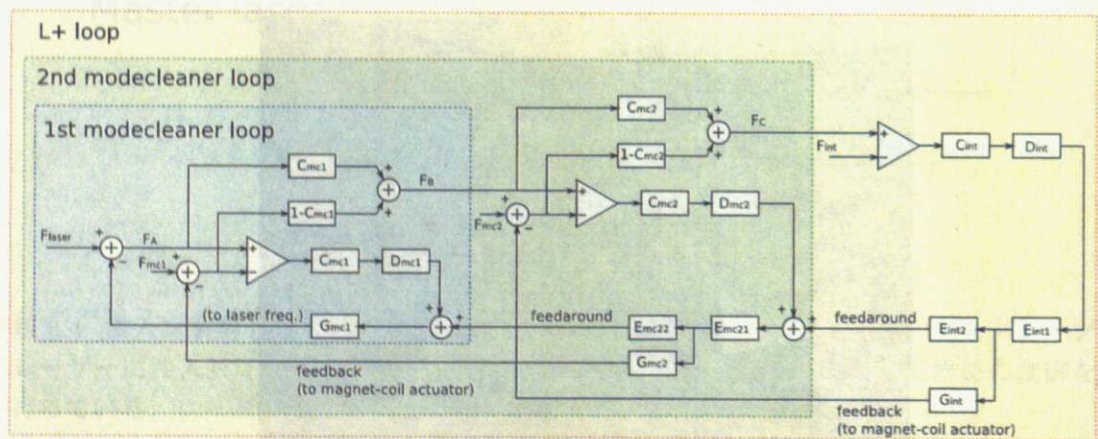


図 3.8: LCGT の多段式周波数安定化ダイアグラム.

3.3.1 フィードバック制御の一般論

システムの入出力表現

制御系の解析・設計を行うには、実システムの数理モデルを必要とする³⁶⁾。電気回路であればキルヒホッフの法則やオームの法則、力学系ではニュートンの運動の法則などの基礎方程式で記述できる。このような基礎方程式を用いると、1入力1出力動的システムの入出力関係は、一般に常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\ = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

で表される。ここで、 $u(t)$ 、 $y(t)$ はそれぞれシステムの入力、出力である。また初期条件は

$$\left. \frac{d^i y(t)}{dt^i} \right|_{t=0-} = y_0^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right|_{t=0-} = u_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.3)$$

で与えられる。式(3.1)において、 a_i 、 b_k はシステムパラメータである。パラメータが入出力 $u(t)$ 、 $y(t)$ およびその導関数に依存しないとき、式(3.1) は線形システムであるという。そうでないとき非線形システムであるという。また、 a_i 、 b_k が時間 t に依存しない定数の場合、定常システムであるという。以下は、線形定常システムを仮定する。

インパルス応答と伝達関数

式(3.1)の定係数の線形システムに、インパルスすなわち $u(t) = \delta(t)$ を入力したときの出力 $y(t) = g(t)$ をインパルス応答という。インパルス応答は $g(t < 0) = 0$ であり、 $t > 0$ に対してのみ値をもつ。一般に $g(t < 0) = 0$ であるようなシステムを因果的であるという。さて、 $g(t)$ がラプラス変換可能であるとき、

$$G(s) = L[g(t)](s) = \int_{0-}^{\infty} g(t)e^{-st} dt \quad (3.4)$$

を線形システムの伝達関数 (transfer function) という。伝達関数 $G(s)$ を用いると、入出力のラプラス変換をそれぞれ $U(s)$ 、 $Y(s)$ としたとき、

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3.5)$$

という関係が成立する。これを用いて式(3.1)について考える。両辺をラプラス変換すると、

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m)U(s) \quad (3.6)$$

となる。ここで、両辺の s の多項式について、

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (3.7)$$

$$N(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m \quad (3.8)$$

と定義すると、入出力のラプラス変換の間には、

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s) \quad (3.9)$$

という関係が成り立つ。式(3.5)と比較すると $G(s)$ に一致する。すなわち伝達関数は入出力のラプラス変換の比

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (3.10)$$

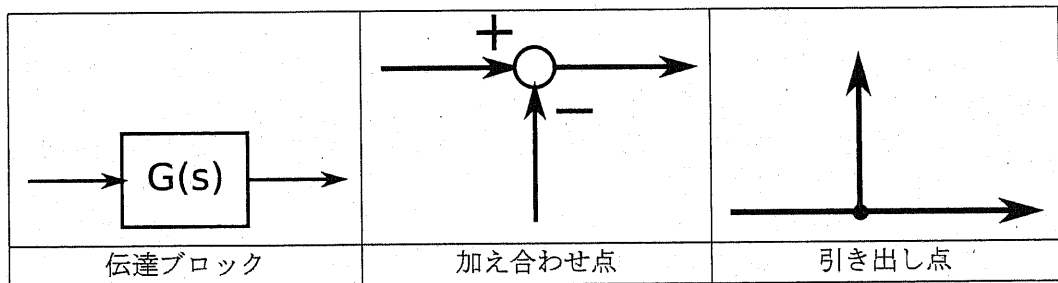
で与えられる。

ブロックダイアグラム

一般に、制御系はいくつかの要素から構成される。このような制御系の構造、信号の流れを図示的に見やすく表現するブロックダイアグラムについて述べる。

ブロックダイアグラムは、各ブロックの中に制御要素の伝達関数や入出力特性を示す記号を書き込み、信号の流れを表す矢印をつけた線分で各ブロックを結んだものである。表3.2のような伝達ブロック、加え合わせ点、引き出し点の3つの基本単位が用いられる。伝達ブロックは信号の変換を表す。加え合わせ点では、複数の信号の代数和を表し、引き出し点は同一の信号を2つ以上のブロックあるいは加え合わせ点に供給するための分岐点である。

表 3.2: ブロックダイアグラムの基本単位.



以上の基本単位を組み合わせることにより、制御系のブロックダイアグラムが構成される。また、伝達ブロックの結合方式には、(1) 直列結合、(2) 並列結合、(3) フィードバック結合の3種類がある(表3.3)。伝達関数 $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$ を直列結合した場合、結合系の伝達関数は、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} \frac{X(s)}{U(s)} = G_2(s)G_1(s) \quad (3.11)$$

となる。並列結合の場合は、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) \quad (3.12)$$

となる。またフィードバック結合の場合には、

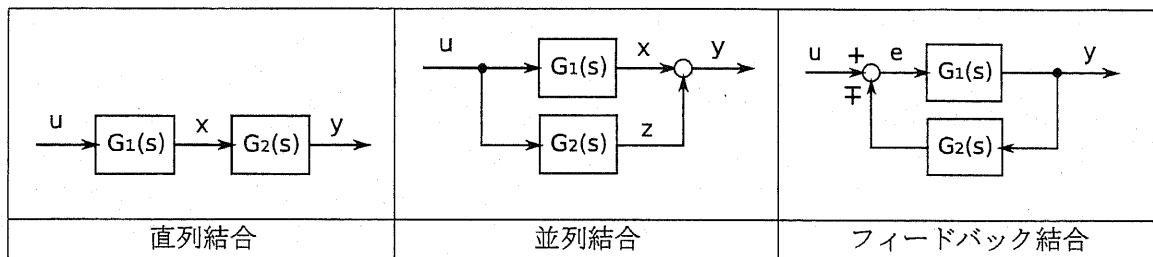
$$E(s) = U(s) \mp G_2(s)Y(s), \quad Y(s) = G_1(s)E(s) \quad (3.13)$$

より、 $E(s)$ を消去すると、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)} \quad (3.14)$$

を得る。これがフィードバック結合の基礎となる式である。

表 3.3: 伝達ブロックの結合.



極 (ポール) と零点 (ゼロ) と安定性

式 (3.10) を、

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}, \quad n > m \quad (3.15)$$

と変形し、 $D(s)$ と $N(s)$ は共通因子をもたないとする。 p_i, z_i をそれぞれ伝達関数 $G(s)$ の極 (ポール), 零点 (ゼロ) という。このとき、 $G(s)$ が安定であるための必要十分条件は、 $G(s)$ のすべての極の実部が負となることである。

周波数応答関数

周波数応答は正弦波入力に対する出力の定常応答の比として定義される。周波数応答関数は、 $g(t)$ のフーリエ変換、

$$G(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt = [G(s)]_{s=i\omega} \quad (3.16)$$

のように、ラプラス変換 $G(s)$ において $s = i\omega$ とおくことで得られる。

周波数応答関数は、 ω の複素関数であり

$$G(i\omega) = \int_{0-}^{\infty} g(t) \cos \omega t dt - i \int_{0-}^{\infty} g(t) \sin \omega t dt \quad (3.17)$$

$$= X(\omega) + iY(\omega) \quad (3.18)$$

と表せる。ただし、 $g(t)$ を実関数だと仮定している。また、

$$|G(i\omega)| = \sqrt{X(\omega)^2 + Y(\omega)^2} \quad (3.19)$$

$$\arg G(\omega) = \arctan\left(\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\right) \quad (3.20)$$

とおくと、極座標形式で

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|e^{i\theta(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \arg G(\omega) \quad (3.21)$$

となる。ここで、 $|G(i\omega)|$ をゲイン特性、 $\arg G(\omega)$ を位相特性という。

ボデー線図を用いたフィードバック制御系の安定性の評価

周波数応答関数は、ナイキスト線図やボデー線図などを用いて図示的に表現される。本実験ではボデー線図を用いている。そこでボデー線図について説明し、フィードバック制御の安定性の評価法について述べる。

周波数応答関数 $G(i\omega)$ のゲイン特性 $|G(i\omega)|$ と位相特性 $\arg G(\omega)$ を縦軸にとり、周波数の対数を横軸にして表した曲線をボデー線図という。通常ゲインはデシベル (dB)、位相は角度 (degree) で表す。デシベル値とは、 $N(> 0)$ に対して $20 \log_{10} N$ である。

ボデー線図を用いて、図 3.9 のシステムの安定性について考える。図 3.9 の入出力の関係は、

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}U(s) \quad (3.22)$$

$$= \frac{G_1(s)}{1 + G_{op}(s)}U(s) \quad (3.23)$$

と表される。このとき、 $G_{op}(s) = G_1(s)G_2(s)$ をオープンループ伝達関数という。

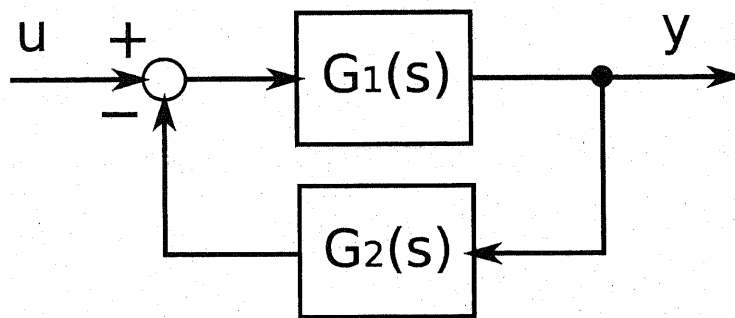


図 3.9: フィードバック制御システム例。

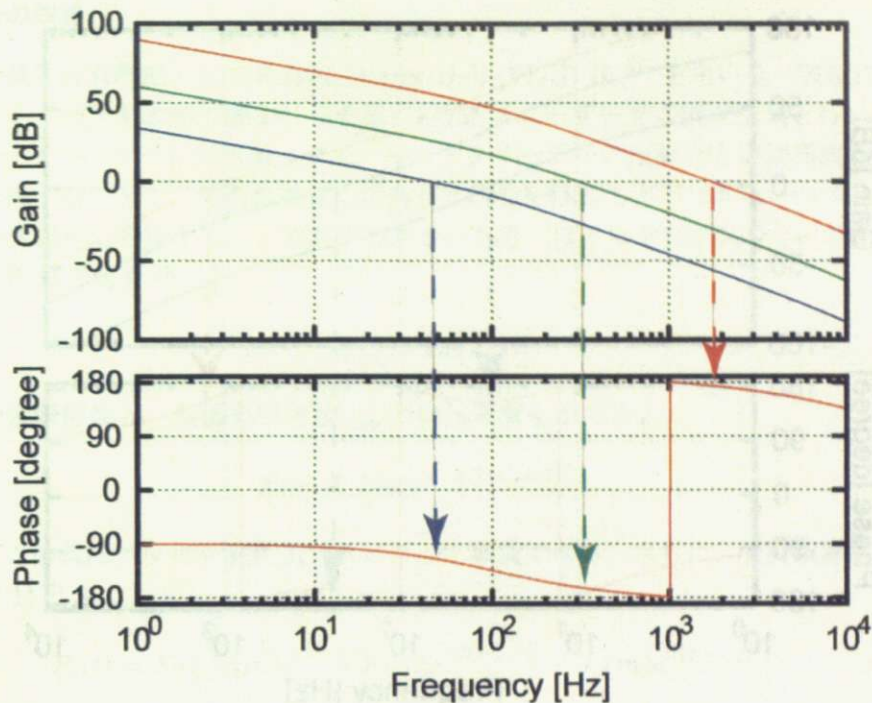


図 3.10: 安定判別の例 1. 青 : 安定, 緑 : 安定, 赤 : 不安定.

フィードバック制御の安定性をボード線図を用いて評価することができる。安定判別の詳細は省き、結論のみ述べるとオープンループ伝達関数のゲイン特性が $|G_{op}(f_0)| = 1$ となる周波数 f_0 (ユニティーゲイン周波数という) で、位相特性が $\arg(G_{op}(f_0)) > -\pi$ であればよい。このとき $\arg(G_{op}(f_0)) + \pi$ を位相余裕という。

図 3.10 に安定判別の例を示す。これはあるシステムのオープンループ伝達関数をボード線図で表現したもので、3つは位相特性は同じだが、ゲイン特性を定数倍変えたものである。ゲインの最も大きな線(赤)を見ると、ユニティーゲイン周波数で位相が $-\pi$ より小さくなっている。すなわちこのシステムは不安定だと判別できる。残りの2つの線(青, 緑)はどちらもユニティーゲイン周波数で位相が $-\pi$ より大きいので安定なシステムだと判別できる。ちなみに、青線の位相余裕は約 70 deg, 緑線の位相余裕は約 20 deg である。

もう1つ例を挙げる(図 3.11)。先ほどと同じく、3つともゲイン特性が異なるだけで、位相特性は等しい。この場合だと、安定なシステムは緑だけである。

このようにして、本論文で行った制御の安定度の評価は行われている。

3.3.2 光共振器を用いたレーザー周波数安定化の原理

ここまで、LCGT の多段式周波数安定化システムを考えるためのフィードバック制御の基本的事項について述べた。ここでは、いきなり多段式周波数安定化に取り組むのではなく、まずは1段の周波数安定化について考える(図 3.12)。

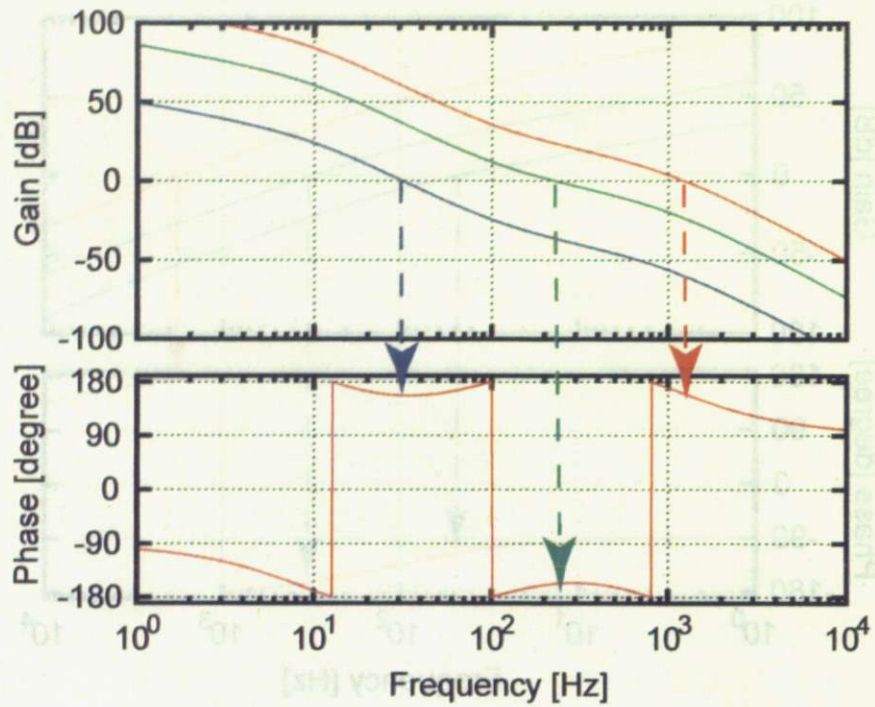


図 3.11: 安定判別の例 2. 青: 不安定, 緑: 安定, 赤: 不安定.

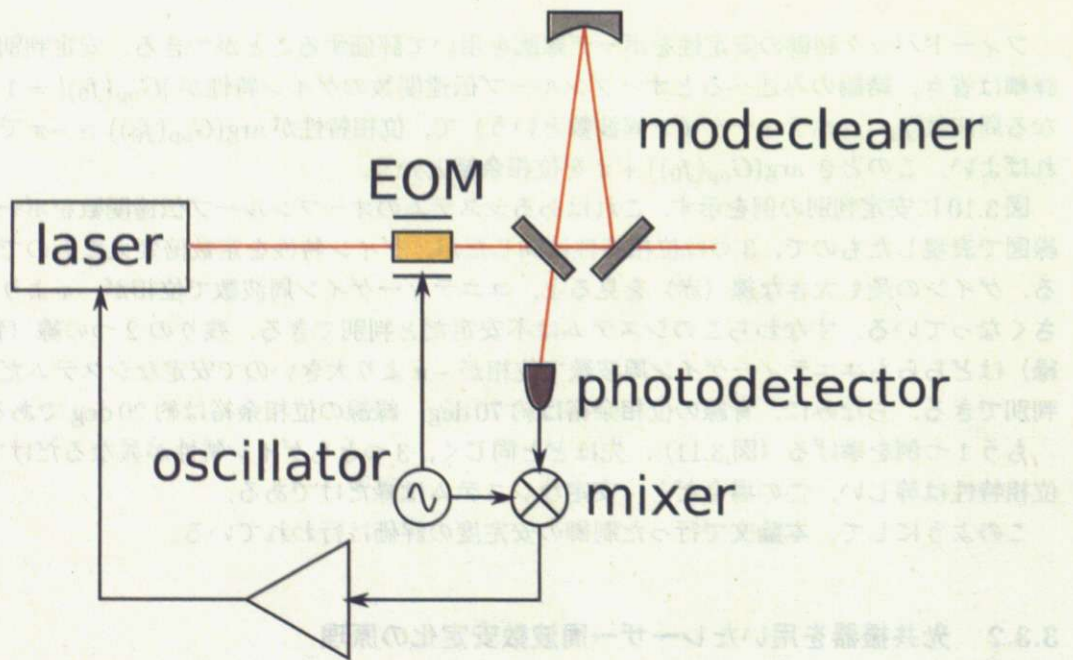


図 3.12: 光共振器 (モードクリーナー) 1 つでの周波数安定化システム. EOM は位相変調のために用いている. Pound-Drever-Hall 法により誤差信号を取得し, レーザー周波数を制御する.

誤差信号の取得

周波数雑音の取得法として Pound-Drever-Hall (PDH) 法³¹⁾ を用いる。図 3.12 は PDH 法のセットアップも含めて描かれてある。EOM でレーザー光の位相変調を行い、光共振器 (モードクリーナー) に入射させる。モードクリーナーの反射光を変調周波数と同じ周波数で復調することで、周波数雑音に比例した信号を得ることができる、つまり、周波数雑音を強度変化に変換することで取得できるのがある。以下に PDH 法について説明する。
角振動数 Ω の光を考える。

$$E(t) = E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.24)$$

この光を変調指数 m 、変調角周波数 ω_m で位相変調をかけると、

$$E_i(t) = E_0 e^{i[\Omega t + m \sin(\omega_m t)]} \quad (3.25)$$

となる。この式はベッセル関数 $J_k(m)$ によって展開できる。さらに、変調指数が十分小さい ($m \ll 1$) とき、

$$E_i(t) = E_0 [J_0(m) e^{i\Omega t} + J_1(m) e^{i(\Omega + \omega_m)t} - J_1(m) e^{i(\Omega - \omega_m)t}] \quad (3.26)$$

となる。つまり、変調周波数だけシフトした周波数の光 (サイドバンド) が生成される。もとの光と同じ周波数の成分はキャリアと呼ばれる。このような光が光共振器に入射すると、その周波数に応じて振幅・位相の変化を受ける。キャリアのみが振幅 A 倍、位相変化 Φ を受けるとすると、

$$E_r(t) = E_0 [J_0(m) A e^{i\Phi} e^{i\Omega t} + J_1(m) e^{i(\Omega + \omega_m)t} - J_1(m) e^{i(\Omega - \omega_m)t}] \quad (3.27)$$

となる。この光をフォトディテクタ (効率 γ) で検出すると、

$$\begin{aligned} V(t) &= \gamma |E_r(t)|^2 \\ &= \gamma |E_0|^2 [J_0(m) A e^{i\Phi} e^{i\Omega t} + J_1(m) e^{i(\Omega + \omega_m)t} - J_1(m) e^{i(\Omega - \omega_m)t}]^2 \\ &= \gamma |E_0|^2 [J_0(m)^2 A^2 + 2J_1(m)^2 \\ &\quad - 4J_0(m)J_1(m)A \sin \Phi \sin(\omega_m t) - 2J_1(m)^2 \sin(2\omega_m t)] \quad (3.28) \end{aligned}$$

となる。これに変調周波数と同じ周波数の信号を位相変調と同位相で掛け合わせて (in-phase で掛け合わせるという)、つまり $g \sin(\omega_m t)$ を掛けて、ローパスフィルタを用いて DC 成分 (変調周波数より十分低い周波数) のみ取り出すことを考えると、

$$V(t) = 2g\gamma |E_0|^2 J_0(m) J_1(m) A \sin \Phi \quad (3.29)$$

$$= 2g\gamma |E_0|^2 J_0(m) J_1(m) \text{Im}[A e^{i\Phi}] \quad (3.30)$$

という信号が得られ、キャリアの複素振幅の虚数項に比例した信号が得られることが分かる。

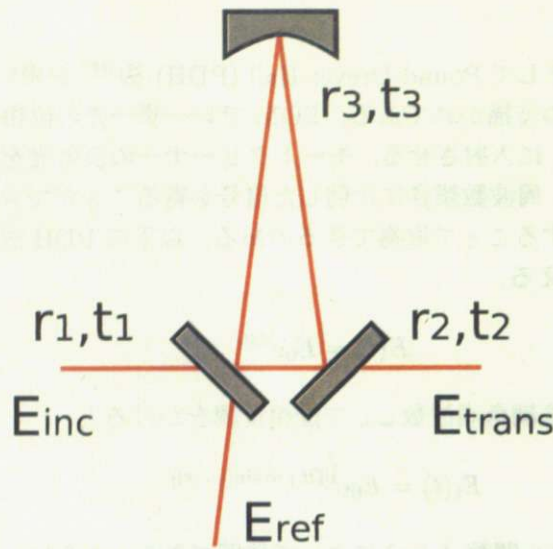


図 3.13: 3枚の鏡で構成されるリングキャビティ

次に、光共振器の応答について考える。今回考えるべきなのは3枚の鏡で構成されたリング型の光共振器である。図 3.13 より、入射光と反射光、透過光の間には、

$$E_{\text{ref}} = \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}} \right) E_{\text{inc}} \quad (3.31)$$

$$E_{\text{trans}} = \frac{t_1 t_2 e^{-i\psi}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}} E_{\text{inc}} \quad (3.32)$$

という関係が成り立つ。ここで、 $\phi = 2\pi\nu L/c$ は、周波数 ν の光が共振器内を1周したとき (L 進んだとき) の位相の変化、 ψ はリングの短い辺を進むときの位相の変化である。入射光強度、透過光強度をそれぞれ I_{inc} 、 I_{trans} とすると、

$$I_{\text{trans}} = \left(\frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 r_3} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2 r_3}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2} \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)} I_{\text{inc}} \quad (3.33)$$

となる。 $\phi = 2\pi n$ (n : 整数) のとき透過光は極大値をもつ。このとき共振周波数 ν_n は、

$$\nu_n = \frac{c}{L} n, \quad n \text{ は整数} \quad (3.34)$$

となる。このとき隣り合う周波数

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{L} \quad (3.35)$$

をフリースペクトルレンジ (FSR) という。また、共振が十分鋭いとき、式 (3.33) は、共振からの位相のずれ $\delta\phi$ を用いて、

$$I_{\text{trans}} = \left(\frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 r_3} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{r_1 r_2 r_3 \delta\phi^2}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2}} I_{\text{inc}} \quad (3.36)$$

と書ける。さらに、周波数のずれ $\delta\nu$ に関して $\delta\phi = 2\pi \frac{\delta\nu}{\nu_{\text{FSR}}}$ なので、

$$I_{\text{trans}} = \left(\frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 r_3} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{(2\pi)^2 r_1 r_2 r_3 \delta\nu^2}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2 \nu_{\text{FSR}}^2}} I_{\text{inc}} \quad (3.37)$$

と書ける。これから共振の半値全幅 $\Delta\nu$ が、

$$\Delta\nu = \frac{(1 - r_1 r_2 r_3) \nu_{\text{FSR}}}{\pi \sqrt{r_1 r_2 r_3}} \quad (3.38)$$

と求まる。半値全幅と FSR の比から、共振器の共振の鋭さを示す指標フィネス \mathcal{F} が

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\Delta\nu} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2 r_3}}{1 - r_1 r_2 r_3} \quad (3.39)$$

と定義される。FSR を用いて、式 (3.31) を書き直すと、

$$E_{\text{ref}} = \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 e^{-i2\pi\nu/\nu_{\text{FSR}}}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i2\pi\nu/\nu_{\text{FSR}}}} \right) E_{\text{inc}} \quad (3.40)$$

となり、これが 3 枚鏡の光共振器（モードクリーナー）の応答を表すものであり、伝達関数 $H_{\text{cavity}}(\nu)$ として、

$$H_{\text{cavity}}(\nu) = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 e^{-i2\pi\nu/\nu_{\text{FSR}}}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i2\pi\nu/\nu_{\text{FSR}}}} \quad (3.41)$$

と求まる。また、レーザーの周波数と共振器の共振周波数の差 $\delta\nu$ を変数としたときの伝達関数 $H_{\text{cavity}}(\delta\nu)$ は、

$$H_{\text{cavity}}(\delta\nu) = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 e^{-i2\pi\delta\nu/\nu_{\text{FSR}}}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i2\pi\delta\nu/\nu_{\text{FSR}}}} \quad (3.42)$$

と全く同じ形式で書ける。ここで、 $\delta\nu/\nu_{\text{FSR}} \ll 1$ とすると、

$$\begin{aligned} H_{\text{cavity}}(\delta\nu) &= -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 e^{-i2\pi\delta\nu/\nu_{\text{FSR}}} (1 - r_1 r_2 r_3 e^{i2\pi\delta\nu/\nu_{\text{FSR}}})}{(1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i2\pi\delta\nu/\nu_{\text{FSR}}}) (1 - r_1 r_2 r_3 e^{i2\pi\delta\nu/\nu_{\text{FSR}}})} \\ &= -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 (e^{-i2\pi\delta\nu/\nu_{\text{FSR}}} - r_1 r_2 r_3)}{(1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i2\pi\delta\nu/\nu_{\text{FSR}}}) (1 - r_1 r_2 r_3 e^{i2\pi\delta\nu/\nu_{\text{FSR}}})} \\ &\sim -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 \left(1 - r_1 r_2 r_3 - i \frac{2\pi\delta\nu}{\nu_{\text{FSR}}} \right)}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

となる。 $H_{\text{cavity}}(\delta\nu)$ を使って PDH 法を考えていく。サイドバンドについて、

- レーザーの周波数雑音が小さい。
- ミラーの反射率がほぼ 1。
- キャリアの周波数が共振器の共振周波数に近い。

- サイドバンドが共振器の線幅の外にある。

のとき、サイドバンドに対して、 $H_{\text{cavity}}(\delta\nu \pm f_m) \sim -1$ となる。これに対して、キャリアに対する伝達関数は、式(3.30)より、式(3.43)の虚数項を考えればよく、

$$\begin{aligned} \text{Im}[H_{\text{cavity}}(\delta\nu)] &\sim -\frac{2\pi t_1^2 r_2 r_3}{\nu_{\text{FSR}}(1-r_1 r_2 r_3)^2} \delta\nu \\ &= -\frac{2t_1^2 \mathcal{F}}{\pi r_1 \Delta\nu} \delta\nu \end{aligned} \quad (3.44)$$

となるので、式(3.30)に代入すると、

$$\begin{aligned} V(t) &= 2g\gamma|E_0|^2 J_0(m) J_1(m) \text{Im}[H_{\text{cavity}}(\delta\nu)] \\ &\sim -4g\gamma|E_0|^2 J_0(m) J_1(m) \frac{t_1^2 \mathcal{F}}{\pi r_1 \Delta\nu} \delta\nu \end{aligned} \quad (3.45)$$

となり、周波数雑音 $\delta\nu$ に比例した信号が得られるのである。

PDH 法の伝達関数の周波数特性

これまでは大まかに PDH 法による誤差信号の取得について述べた。ここでは、 $\delta\nu$ が時間変化する場合について考え、周波数雑音 $\delta\nu(t)$ のフーリエ変換 $\delta\nu(\omega)$ と、復調後の信号 $V(t)$ (フーリエ変換 $V(\omega)$) 間の伝達関数 $H_{\text{PDH}}(\omega) = V(\omega)/\delta\nu(\omega)$ について考える。

角振動数 Ω の光に位相雑音 $\delta\phi(t)$ が加わった場合を考える。

$$E(t) = E_0 e^{i(\Omega t + \delta\phi(t))} \quad (3.46)$$

このとき、位相雑音 $\delta\phi(t)$ と周波数雑音 $\delta\nu(t)$ の間には、

$$\delta\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta\phi(t)}{dt} \quad (3.47)$$

という関係があり、

$$\delta\nu(\omega) = i \frac{\omega}{2\pi} \delta\phi(\omega) \quad (3.48)$$

という関係が成り立つ。位相変調 (変調角周波数 ω_m , 変調指数 m) により、

$$\begin{aligned} E_{\text{inc}}(t) &= E_0 e^{i(\Omega t + m \sin \omega_m t)} e^{i\delta\phi(t)} \\ &\sim E_0 e^{i(\Omega t + m \sin \omega_m t)} \{1 + i\delta\phi(t)\} \\ &\sim E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{i(\Omega + k\omega_m)t} \{1 + i\delta\phi(t)\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

となる。これをフーリエ変換すると、

$$E_{\text{inc}}(\omega) = E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \{\delta(\omega - \Omega - k\omega_m) + i\delta\phi(\omega - \Omega - k\omega_m)\} \quad (3.50)$$

となる。ここで $\delta(\omega)$ はディラックのデルタ関数である。

光共振器で反射すると式 (3.42) が掛かるので、反射光は $E_{\text{ref}}(\omega) = H_{\text{cavity}}(\omega)E_{\text{inc}}(\omega)$ と表され、逆フーリエ変換により時間領域に戻すと、

$$E_{\text{ref}} = E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \left[H_{\text{cavity}}(\Omega + k\omega_m) e^{i(\Omega + k\omega_m)t} + \frac{1}{2\pi} \int d\omega H_{\text{cavity}}(\omega) e^{i\omega t} i\delta\phi(\omega - \Omega - k\omega_m) \right] \quad (3.51)$$

となり、反射光強度のうち、DC 成分と $\delta\phi^2$ の項を無視すると、

$$\left| \frac{E_{\text{ref}}}{E_0} \right|^2 = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(m) J_l(m) \left[H_{\text{cavity}}^*(\Omega + k\omega_m) \int d\omega H_{\text{cavity}}(\omega) \delta\phi(\omega - \Omega - l\omega_m) e^{i(\omega - \Omega - k\omega_m)t} - H_{\text{cavity}}(\Omega + l\omega_m) \int d\omega H_{\text{cavity}}^*(\omega) \delta\phi^*(\omega - \Omega - k\omega_m) e^{-i(\omega - \Omega - l\omega_m)t} \right] \quad (3.52)$$

となる。効率 γ のフォトディテクタで検出し、再びフーリエ変換すると、

$$V_{\text{PD}} = |E_0|^2 \frac{i\gamma}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(m) J_l(m) \left[H_{\text{cavity}}^*(\Omega + k\omega_m) H_{\text{cavity}}(\omega + \Omega + k\omega_m) \delta\phi(\omega + (k-l)\omega_m) - H_{\text{cavity}}(\Omega + l\omega_m) H_{\text{cavity}}^*(-\omega + \Omega + l\omega_m) \delta\phi(\omega + (k-l)\omega_m) \right] \quad (3.53)$$

$$= |E_0|^2 \frac{\gamma}{\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(m) J_l(m) \left[H_{\text{cavity}}^*(k\omega_m) H_{\text{cavity}}(\omega + k\omega_m) \delta\nu(\omega + (k-l)\omega_m) - H_{\text{cavity}}(l\omega_m) H_{\text{cavity}}^*(-\omega + l\omega_m) \delta\nu(\omega + (k-l)\omega_m) \right] \quad (3.54)$$

となる。これを in-phase で復調すると、

$$V(\omega) = \frac{ig}{2} \{ V_{\text{PD}}(\omega + \omega_m) - V_{\text{PD}}(\omega - \omega_m) \} \quad (3.55)$$

$$= \frac{ig}{2} |E_0|^2 \frac{\gamma}{\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(m) J_l(m) \left[H_{\text{cavity}}^*(k\omega_m) H_{\text{cavity}}(\omega + (k+1)\omega_m) \delta\nu(\omega + (k-l+1)\omega_m) - H_{\text{cavity}}(l\omega_m) H_{\text{cavity}}^*(-\omega + (l-1)\omega_m) \delta\nu(\omega + (k-l+1)\omega_m) + H_{\text{cavity}}^*(k\omega_m) H_{\text{cavity}}(\omega + (k-1)\omega_m) \delta\nu(\omega - (k-l-1)\omega_m) - H_{\text{cavity}}(l\omega_m) H_{\text{cavity}}^*(-\omega + (l+1)\omega_m) \delta\nu(\omega - (k-l-1)\omega_m) \right] \quad (3.56)$$

となり, $\delta\nu(\omega)$ に比例する項だけ取り出すと,

$$\begin{aligned}
V(\omega) = & \frac{ig}{2}|E_0|^2 \frac{\gamma}{\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) J_{k+1}(m) [\\
& H_{\text{cavity}}^*(k\omega_m) H_{\text{cavity}}(\omega + (k+1)\omega_m) \delta\nu(\omega) \\
& - H_{\text{cavity}}((k+1)\omega_m) H_{\text{cavity}}^*(-\omega + k\omega_m) \delta\nu(\omega) \\
& + H_{\text{cavity}}^*(k\omega_m) H_{\text{cavity}}(\omega + (k-1)\omega_m) \delta\nu(\omega) \\
& - H_{\text{cavity}}((k-1)\omega_m) H_{\text{cavity}}^*(-\omega + k\omega_m) \delta\nu(\omega)] \quad (3.57)
\end{aligned}$$

となる. 変調指数が十分小さい ($m \ll 1$) とを考え, $k=0$ のみを取り, さらに $H_{\text{cavity}}^*(\omega) = H_{\text{cavity}}(-\omega)$, $H_{\text{cavity}}(\omega \pm \omega_m) \sim H_{\text{cavity}}(\pm\omega_m) \sim -1$ より,

$$\begin{aligned}
V(\omega) = & -\frac{ig}{2}|E_0|^2 \frac{\gamma}{\omega} J_0(m) J_1(m) \{H(\omega) - H(0)\} \{H^*(\omega_m) + H(\omega_m)\} \quad (3.58) \\
\sim & ig|E_0|^2 \frac{\gamma}{2\pi f} J_0(m) J_1(m) \left\{ \frac{t_1^2 r_2 r_3 e^{-i2\pi f/\nu_{\text{FSR}}}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i2\pi f/\nu_{\text{FSR}}}} - \frac{t_1^2 r_2 r_3}{1 - r_1 r_2 r_3} \right\} \\
\sim & \frac{g\gamma \mathcal{F} t_1^2 r_2 r_3 \sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\pi \nu_{\text{FSR}}} J_0(m) J_1(m) \frac{1}{1 + i \frac{2\mathcal{F} \sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\nu_{\text{FSR}}} f} \quad (3.59)
\end{aligned}$$

となる. つまり, PDH 法の伝達関数は,

$$f_{\text{cavity pole}} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{2\mathcal{F} \sqrt{r_1 r_2 r_3}} \sim \frac{\nu_{\text{FSR}}}{2\mathcal{F}} \quad (3.60)$$

にポールをもつ伝達関数で近似できる. これをキャビティーポールという.

光共振器を用いた周波数安定化のブロックダイアグラム

では, 図 3.12 の周波数安定化に話を戻す. これまでのことより, 図 3.12 の周波数安定化システムをブロックダイアグラムにすると, 図 3.14 のようになる. F_{laser} はフリーランのレーザーの周波数特性, F_{mc} はモードクリーナーの共振周波数とその揺らぎを合わせたもの, F_{trans} はモードクリーナーの透過光の周波数特性, この場合, 安定化した後の周波数特性とも解釈できる. また, 伝達ブロックに関しては, C_{mc} はキャビティーポールに関する項で,

$$C_{\text{mc}} \equiv \frac{1}{1 + if/f_{\text{cavity pole}}} \quad (3.61)$$

である. D_{mc} は周波数→電圧変換係数, $G_{\text{mc}} \equiv E_{\text{mc}} H_{\text{mc}}$ で, E_{mc} はフィルタ回路, H_{mc} は電圧→周波数変換係数である. 普通, 雑音の低減を議論するときは, 雑音の大きさがどうなるかを議論するものであるが, 本論文では, 周波数特性 F_i を用いて議論する. 理由としては, 以下のようなことが挙げられる.

- 基準となるもの (モードクリーナーや干渉計の腕の長さ) の揺らいでいる効果も考慮しなければならない.

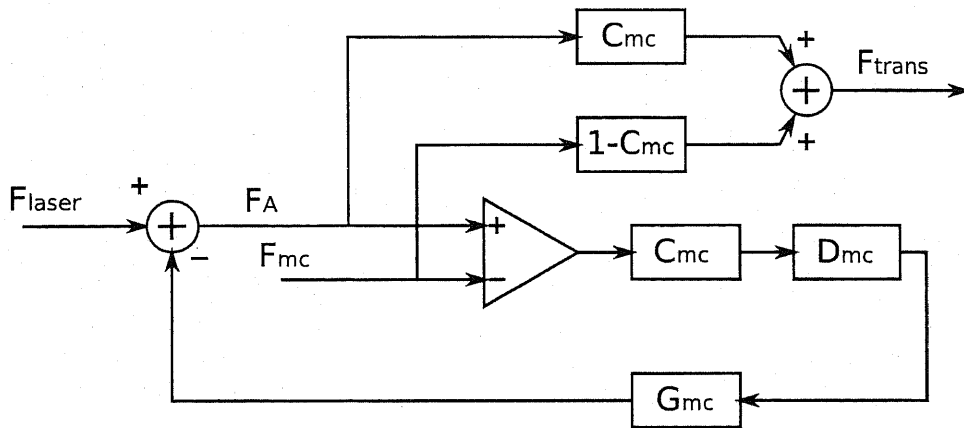


図 3.14: 光共振器を用いた周波数安定化のブロックダイアグラム. F_{laser} : フリーランのレーザーの周波数特性, F_{mc} : モードクリーナーの共振周波数とその揺らぎを合わせたもの, F_{trans} : モードクリーナーの透過光の周波数特性, C_{mc} : キャビティーポールに関する項, D_{mc} : 周波数→電圧変換係数, $G_{\text{mc}} = E_{\text{mc}}H_{\text{mc}}$, E_{mc} : フィルタ回路, H_{mc} : 電圧→周波数変換係数である.

- 最終的には絶対的な周波数の安定化ではなく, 干渉計の腕の長さに対する相対的な周波数安定化を行う.
- 多段式周波数安定化システム自体が, 次々とより安定な基準を用意して, 前段で基準となっているものが後段では安定化する対象となる.

では, 各 F_i の間に成り立つ関係を考える. 図 3.14 より,

$$F_A = F_{\text{laser}} - C_{\text{mc}}D_{\text{mc}}G_{\text{mc}}(F_A - F_{\text{mc}}) \quad (3.62)$$

$$F_{\text{trans}} = C_{\text{mc}}F_A + (1 - C_{\text{mc}})F_{\text{mc}} \quad (3.63)$$

が成り立つ. 2式から F_A を消去すると,

$$F_{\text{trans}} - F_{\text{mc}} = \frac{C_{\text{mc}}}{1 + C_{\text{mc}}D_{\text{mc}}G_{\text{mc}}}(F_{\text{laser}} - F_{\text{mc}}) \quad (3.64)$$

$$= \frac{C_{\text{mc}}}{1 + T_{\text{mc}}}(F_{\text{laser}} - F_{\text{mc}}) \quad (3.65)$$

が得られる. ここで, $T_{\text{mc}} \equiv C_{\text{mc}}D_{\text{mc}}G_{\text{mc}}$ はこの制御ループのオープンループ伝達関数である. つまり, フリーランの周波数雑音 " $F_{\text{laser}} - F_{\text{mc}}$ " が $C_{\text{mc}}/(1 + T_{\text{mc}})$ 倍されることになる. $|T_{\text{mc}}| \gg 1$ のとき, 周波数雑音を約 $1/|T_{\text{mc}}|$ に抑えることができることを意味する. さらにモードクリーナーのキャビティーポールがパッシブなローパスフィルタとして働くことが分かる. これが, 光共振器を用いた周波数安定化の基本的な流れである.

3.3.3 多段式周波数安定化において各段に要求されるもの

これまでのことを用いて, 図 3.8 の多段式周波数安定化システムを考える. 最終的には, F_c の F_{int} を基準としたときの周波数安定度を評価しなければならない.

第1モードクリーナーループ

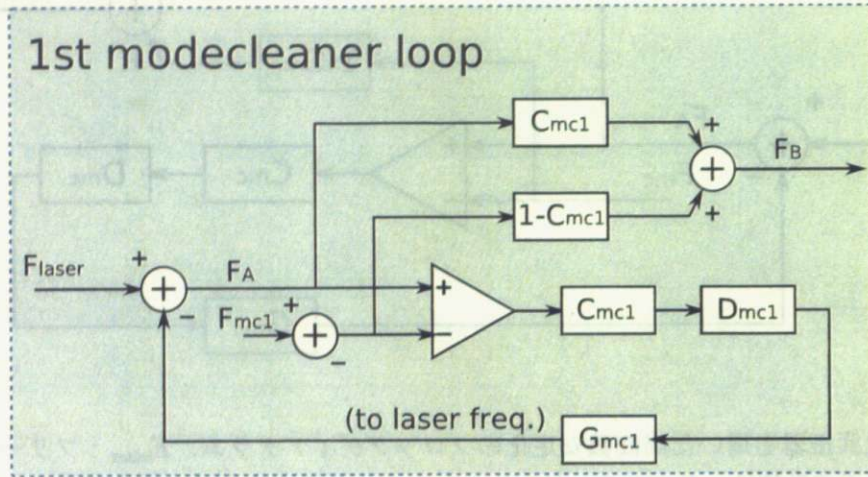


図 3.15: 第1モードクリーナーループのブロックダイアグラム.

初段 (図 3.15) から順に考えていく. 1st モードクリーナーループは, 先ほど述べた 1 つのモードクリーナーを用いた周波数安定化と同じなので, 結果を引用して,

$$\begin{aligned} F_a - F_{mc1} &= \frac{C_{mc1}}{1 + C_{mc1}D_{mc1}G_{mc1}} (F_{laser} - F_{mc1}) \\ &= \frac{C_{mc1}}{1 + T_{mc1}} (F_{laser} - F_{mc1}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$T_{mc1} \equiv C_{mc1}D_{mc1}G_{mc1} \quad (3.67)$$

となる. モードクリーナーを基準としたとき, フリーランのレーザーの周波数雑音は, $C_{mc1}/(1+T_{mc1})$ 倍になってモードクリーナーから出て行くことになる. したがって, オープンループ伝達関数のゲインを大きくすればするほど, 周波数安定度は上がることになる. したがって, どこまでゲインを稼げるかは周波数アクチュエータが決めることになる.

第2モードクリーナーループ

では, 次に2段階を含めて考える (図 3.16). 第2モードクリーナーを用いて取得した誤差信号は, 第1モードクリーナーのエンドミラーについているマグネットコイルアクチュエータにフィードバックされるだけでなく, 初段の誤差点にも信号を返す仕組みになっている. これをフィードアラウンドという. 図 3.16 より,

$$\begin{aligned} F_C &= \frac{C_{mc1}C_{mc2}}{(1+T_{mc1})(1+T_{mc2})} F_{laser} \\ &+ \left(1 - \frac{C_{mc1}}{1+T_{mc1}}\right) \frac{C_{mc2}}{1+T_{mc2}} F_{mc1} \\ &+ \left(1 - \frac{C_{mc2}}{1+T_{mc2}}\right) F_{mc2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

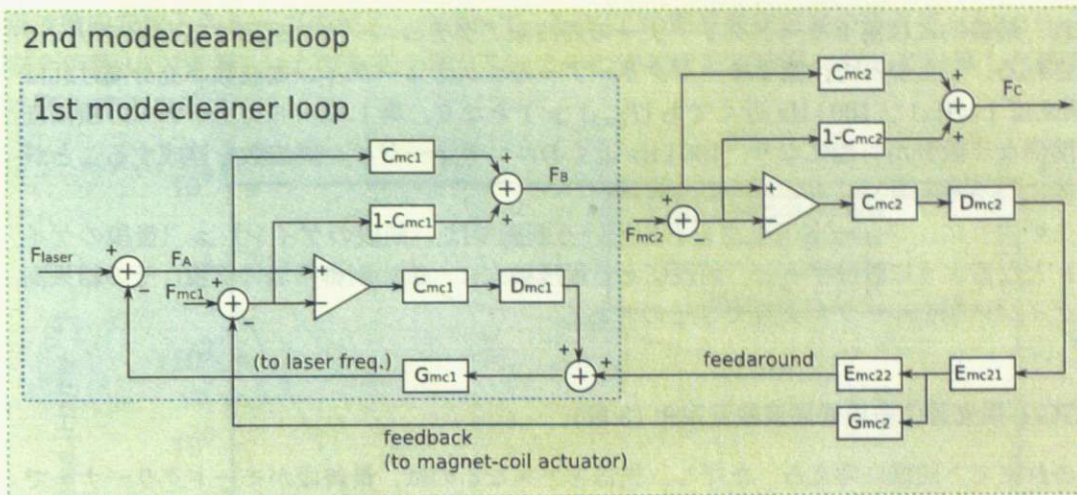


図 3.16: 第2モードクリーナーループのブロックダイアグラム.

となる. これを F_{mc2} を基準周波数にして表記し直すと,

$$\begin{aligned}
 F_C - F_{mc2} &= \frac{C_{mc1}C_{mc2}}{(1 + T_{mc1})(1 + T_{mc2})} (F_{laser} - F_{mc2}) \\
 &+ \left(1 - \frac{C_{mc1}}{1 + T_{mc1}}\right) \frac{C_{mc2}}{1 + T_{mc2}} (F_{mc1} - F_{mc2}) \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

となる. 式(3.69)を見ると, レーザーの周波数雑音は, 第1モードクリーナーでの制御ゲイン (約 $1/|T_{mc1}|$ 倍) と第2モードクリーナーの制御ゲイン (約 $1/|T_{mc1}|$ 倍) の両方で安定化される (つまり, 約 $1/|T_{mc1}||T_{mc2}|$ 倍). さらに, 右辺第2項を見ると, 第1モードクリーナーの安定度は第2モードクリーナーの制御ゲインの分だけ安定化される (約 $1/|T_{mc2}|$ 倍) ということになる. また, オープンループ伝達関数は,

$$\begin{aligned}
 T_{mc2} &= C_{mc2}D_{mc2}E_{mc21}(T_{mc2feedback} + T_{mc2feedaround}) \\
 &= -C_{mc2}D_{mc2}E_{mc21} \left\{ G_{mc2} \left(1 - \frac{C_{mc1}}{1 + T_{mc1}}\right) + E_{mc22} \frac{C_{mc1}G_{mc1}}{1 + T_{mc1}} \right\} \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

である. 式(3.70)についてもう少し考える. 右辺第1項がフィードバックによる項, 第2項がフィードアラウンドによる項である. フィードアラウンドなしのとき, 制御を制限するものは, マグネットコイルアクチュエータの部分である. 文献⁵⁾によると, 鏡の機械的な共振が 20 kHz あたりにあるといわれている. したがって 10 kHz 以下の制御帯域しか実現できないので, 高いゲインを得るのは非常に難しい.

そこで, フィードアラウンドを導入する. 式(3.70)を見ると, フィードバック項とフィードアラウンド項は並列結合なので, 伝達関数は和で表される. つまり, 2つの伝達関数のゲインが大きい方の特性に従うということである. 10 kHz 以上で (フィードアラウンドループ) \gg (フィードバックループ) が実現すれば, フィードアラウンドループによって 10 kHz 以上のユニティーゲイン周波数を達成することは可能になる.

さらに, フィードアラウンドの項を見ると, 第1モードクリーナーによる項があり, $|T_{mc1}| \leq 1$ では, フィードアラウンド項に第1モードクリーナーループによる位相の遅れが

現れ、最終的には第1モードクリーナーの周波数アクチュエータに起因する制限でリミットされる。したがって、第1モードクリーナーのユニティゲイン周波数が充分高ければ（例えば1MHz）、100kHz近くでも $|T_{mc1}| \gg 1$ となり、第1モードクリーナーの項にはほぼ関係なく設計が可能になり、100kHz近くのユニティゲイン周波数を達成することが可能になるだろう。

このように、フィードアラウンドを用いる制御では、（前段のゲイン） \gg （後段のゲイン）となるように設計すると、前段にある程度独立に、広い制御帯域の実現、その結果高いゲインの制御ループが実現できるのである。

LCGT 用光源の多段式周波数安定化 (3 段)

これまでと同様に考える。ただし、先ほどと異なるのは、最終段がモードクリーナーではなく、干渉計の腕の長さで、安定度の評価を行うのは干渉計に入る直前の光 F_C についてである。図 3.8 より、

$$\begin{aligned}
 F_C &= \frac{C_{mc1}C_{mc2}}{(1+T_{mc1})(1+T_{mc2})(1+T_{L+})} F_{laser} \\
 &+ \frac{C_{mc2}}{(1+T_{mc2})(1+T_{L+})} \left(1 - \frac{C_{mc1}}{1+T_{mc1}}\right) F_{mc1} \\
 &+ \frac{1}{1+T_{L+}} \left(1 + \frac{C_{mc2}}{1+T_{mc2}}\right) F_{mc2} \\
 &+ \frac{T_{L+}}{1+T_{L+}} F_{int}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

最終的な周波数の基準は F_{int} なので、 F_{int} を基準として整理し直すと、

$$\begin{aligned}
 F_C - F_{int} &= \frac{C_{mc1}C_{mc2}}{(1+T_{mc1})(1+T_{mc2})(1+T_{L+})} (F_{laser} - F_{int}) \\
 &+ \frac{C_{mc2}}{(1+T_{mc2})(1+T_{L+})} \left(1 - \frac{C_{mc1}}{1+T_{mc1}}\right) (F_{mc1} - F_{int}) \\
 &+ \frac{1}{1+T_{L+}} \left(1 + \frac{C_{mc2}}{1+T_{mc2}}\right) (F_{mc2} - F_{int})
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

となる。また、 T_{mc1} 、 T_{mc2} 、 T_{L+} はそれぞれ次のようになる。

$$T_{mc1} = C_{mc1}D_{mc1}G_{mc1} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
 T_{mc2} &= T_{mc2feedback} + T_{mc2feedaround} \\
 &- C_{mc2}D_{mc2}E_{mc21} \left\{ G_{mc2} \left(1 - \frac{C_{mc1}}{1+T_{mc1}}\right) + E_{mc22} \frac{C_{mc1}G_{mc1}}{1+T_{mc1}} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
 T_{L+} &= T_{L+feedback} + T_{L+feedaround} \\
 &- C_{int}D_{int}E_{int1} \left\{ G_{int} \left(1 - \frac{C_{mc2}}{1+T_{mc2}}\right) + E_{int2} \frac{C_{mc2}G_{mc2}}{1+T_{mc2}} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

これらを用いて、LCGT で必要な周波数安定度を達成させるための各サーボループの要求値を検討する。

周波数安定度と各ループのゲインについて LCGT の周波数安定度の要求値 (図 3.2 から安全係数 10 で計算) および各モードクリーナーの安定度を文献⁵⁾に従って計算した結果は図 3.17 となる。

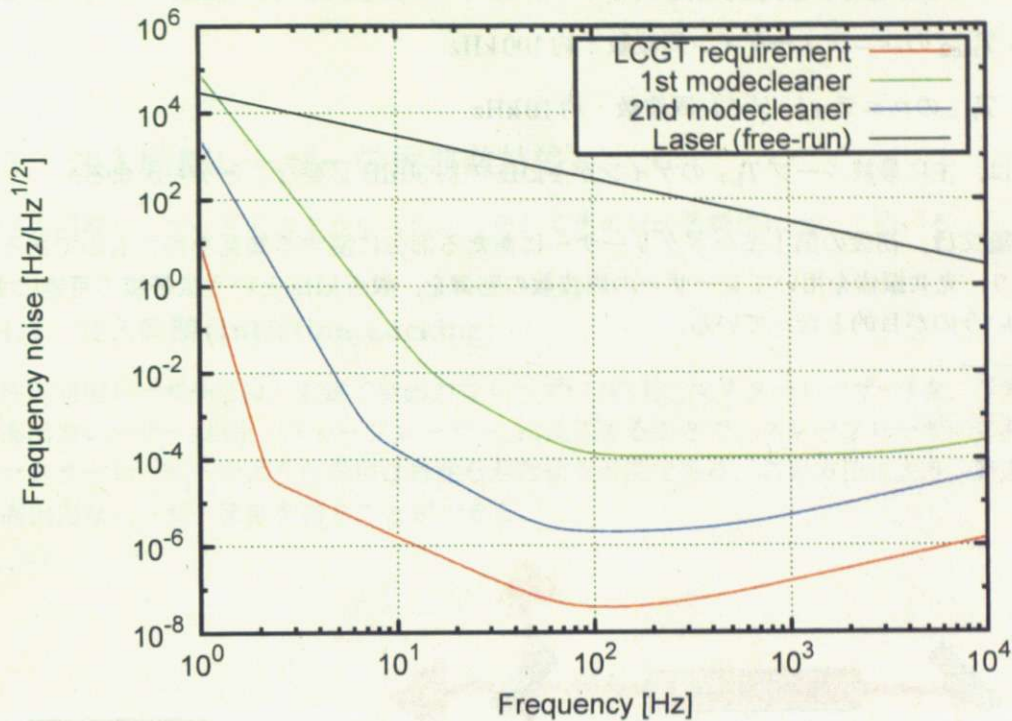


図 3.17: 周波数安定度に対する要求 (各周波数安定度)。

式(3.72)を見ると, 各オープンループ伝達関数 T_i が十分大きいとき, フリーランのレーザーの周波数雑音は, 各ループによる抑制の効果が積 ($\sim 1/|T_{mc1}||T_{mc2}||T_{L+}|$) で利く. 同様に, 第1モードクリーナーの安定度は, およそ $1/|T_{mc2}||T_{mc2}|$ 倍になり, 第2モードクリーナーの安定度は, $1/|T_{L+}|$ 倍になる. これらから, 各ループのゲインに関する要求は図 3.17 に示す各周波数安定度の差を埋めるように設計すればよいことが分かる. ただし, 実際はキャビティーポールの効果 (C_i) があるので, 高周波ではもう少し要求は軽くなる. LCGT の観測帯域 (数十 Hz-1 kHz) では, $|T_i| \gg 1$, $|C_i| \sim 1$ と考えることができるので, 観測帯域での各ループに必要なゲインをまとめると以下のようなになる.

- $|T_{mc1}| > 130 \text{ dB (at 100 Hz)}, |T_{mc1}| > 110 \text{ dB (at 1 kHz)}$
- $|T_{mc2}| > 40 \text{ dB (at 100 Hz)}, |T_{mc1}| > 30 \text{ dB (at 1 kHz)}$
- $|T_{L+}| > 40 \text{ dB (at 100 Hz)}, |T_{mc1}| > 30 \text{ dB (at 1 kHz)}$

各ループの制御帯域について 次に, 各ループのユニティーゲイン周波数付近 $|T_i| \sim 1$ のことを考える. 2段の安定化のときと同じ考察ができ, $|T_i| \sim 1$ において, $|T_i| \ll |T_1$ 前の段

と設計するとよい。したがって、先ほどの各ループの要求を考慮し、各 T_i についてさらに以下のような要求が追加される。

- T_{mc1} のユニティーゲイン周波数：数百 kHz-1 MHz
- T_{mc2} のユニティーゲイン周波数：約 100 kHz
- T_{L+} のユニティーゲイン周波数：約 10 kHz

これは、主に最終ループ T_{L+} のゲインが 1 kHz で約 30 dB 必要なことから決まる。

本論文は、初段の第 1 モードクリーナーにあたる部分に関する知見を得たものである。つまり、光共振器を用いてレーザーの周波数の制御を、数百 kHz という広帯域で可能にするというのが目的となっている。

第4章 注入同期レーザーの周波数安定化

4.1 注入同期レーザーの周波数特性

注入同期レーザーがどのようなものか、そしてその周波数特性について述べる。

4.1.1 注入同期 (Injection Locking)

注入同期レーザーとは、安定で低出力なレーザー (以下、マスターレーザー) を、不安定な高出力レーザー (以下、スレーブレーザー) に注入することで、スレーブレーザーの発振にマスターレーザーのような安定な特性をもたせる方法である。この方法により、安定かつ高出力なレーザー発振を得ることができる。

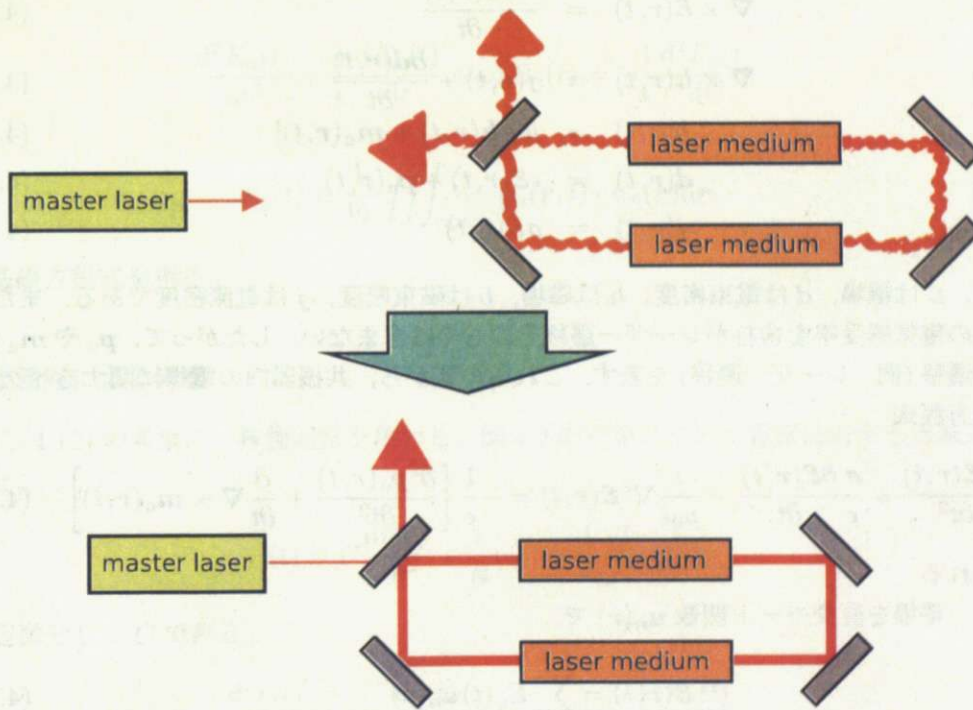


図 4.1: 注入同期のイメージ図. 上図: マスターレーザー, スレーブレーザーをそれぞれ単独で発振させた場合. 下図: 注入同期を行った場合.

図 4.1 にイメージしやすく描いた図を示す. マスターレーザーは低出力だが目的に合った安定なものを用いる. スレーブレーザーは、高出力だが多縦モード (多周波数) 発振で

あつたり、大きな周波数雑音、強度雑音をもつようなものを想像するとよい。また、注入同期ではスレーブレーザーはリング型レーザーの構成で使用するのが一般的であり、スレーブレーザー単体では双方向に発振する。マスターレーザーとスレーブレーザーを組み合わせると注入同期がかかっている（ロックしている）状態を図の下に示す。マスターレーザーの発振特性を受け継いでいるような状態で高出力発振が起こる。また、スレーブレーザー単体では双方向で発振していたのが、ロックした状態だとマスターレーザーに合わせて単一方向発振となり、逆方向の発振が抑制される。注入同期を用いることでこのようなことが実現される。

4.1.2 注入同期の基礎方程式の導出

ここでは、Siegman³⁷⁾を参考に注入同期を記述するために必要な式の導出を行う。

ベクトル波動方程式

レーザー共振器内の電磁場に関するマクスウェル方程式からスタートする。

$$\nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 [\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{m}_a(\mathbf{r}, t)] \quad (4.3)$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{p}_a(\mathbf{r}, t) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \quad (4.5)$$

ここで、 \mathcal{E} は電場、 \mathbf{d} は電束密度、 \mathbf{h} は磁場、 \mathbf{b} は磁束密度、 \mathbf{j} は電流密度である。また ϵ は結晶の電気感受率を含むがレーザー遷移そのものは含まない。したがって、 \mathbf{p}_a や \mathbf{m}_a は原子的遷移（例：レーザー遷移）を表す。これらの式から、共振器内の電場に関するベクトル波動方程式

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon} \nabla^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{p}_a(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{m}_a(\mathbf{r}, t) \right] \quad (4.6)$$

が得られる。

次に、電場を直交モード関数 $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ で、

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n E_n(t) \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

と展開できると仮定する。ここで、 $E_n(t)$ は時間のみ依存のスカラー関数である。このとき $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ はヘルムホルツ方程式

$$[\nabla^2 + k_n^2] \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.8)$$

を満たし、共振器の境界条件を満たすものとする。これは、空の共振器 ($\sigma = 0, p_a = 0, m_a = 0$) のときに、式 (4.6) を単色光 $\mathcal{E} = \mathbf{u}_n(\mathbf{r})e^{i\omega_n t}$ の場合を仮定することで得られ、固有値は、

$$k_n = \omega_n \sqrt{\mu_0 \epsilon} = \frac{\omega_n}{c} \quad (4.9)$$

となる。つまり、 $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ 、 ω_n はそれぞれ空の共振器の固有共振モード、固有共振角周波数である。さらに関数 $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ は直交関係

$$\iiint_{\text{cavity}} \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \mathbf{u}_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = V_c \cdot \delta_{nm} \quad (4.10)$$

を満たすものと仮定する。ここで、 V_c は体積の次元をもつ任意の定数である。

式 (4.6) に対して、 $m_a = 0$ として先ほどのモード展開をすると、

$$\sum_m \left\{ \frac{\partial^2 E_m(t)}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial E_m(t)}{\partial t} + \omega_m^2 E_m(t) \right\} \mathbf{u}_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{p}_a(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (4.11)$$

となる。ここで、式 (4.10) を用いて、式 (4.11) の両辺の $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ との内積をとり、積分を行うと、

$$\frac{d^2 E_n(t)}{dt^2} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{dE_n(t)}{dt} + \omega_n^2 E_n(t) = -\frac{1}{\epsilon} \frac{d^2 P_n(t)}{dt^2} \quad (4.12)$$

$$P_n(t) \equiv \frac{1}{V_c} \iiint_{\text{cavity}} \mathbf{p}_a(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4.13)$$

と基礎方程式を得る。

等価回路による考察

式 (4.12) の考察に、等価回路を用いる。図 4.2 の回路について電流に対する方程式を導くと、

$$i_a(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R} v(t) + \frac{1}{L} \int v(t) dt \quad (4.14)$$

両辺微分して C で割ると、

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{C} \frac{di_a(t)}{dt} \quad (4.15)$$

となり、式 (4.12) と式 (4.15) を対応させると、

$$\gamma_0 \equiv \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{1}{RC} \quad (4.16)$$

$$\omega_c^2 \equiv \omega_n^2 = \frac{1}{LC} \quad (4.17)$$

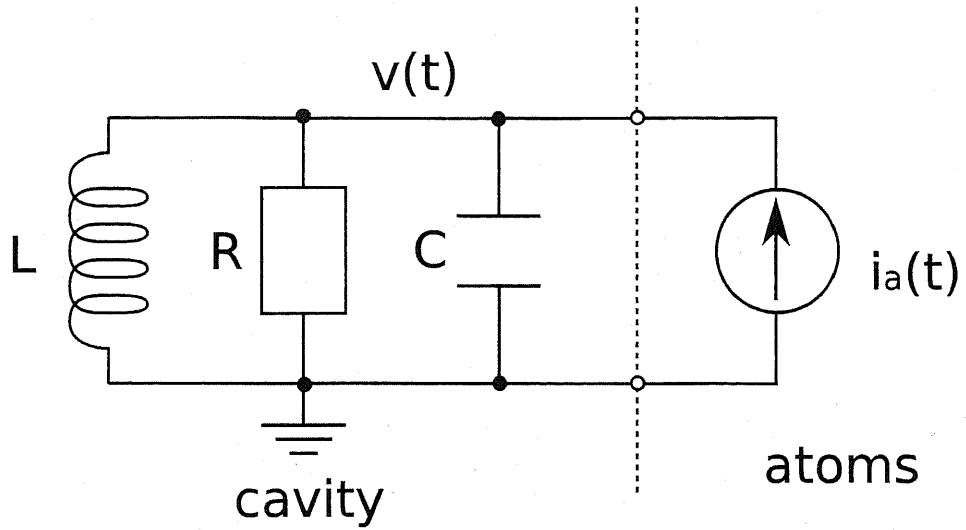


図 4.2: 基礎方程式の等価回路.

を得る. さらに, 共振器内に考えているモードのみ存在するときの電場エネルギー

$$U_{\text{cavity}} = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{\text{cavity}} |\mathcal{E}|^2 dr = \frac{1}{2} \epsilon V_c E_n^2(t) \quad (4.18)$$

と, 回路中のエネルギー

$$U_{\text{circuit}} = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad (4.19)$$

が等しくなるように,

$$v(t) \equiv - \left(\frac{\epsilon V_c}{C} \right)^{\frac{1}{2}} E_n(t) \quad (4.20)$$

とすると,

$$\frac{d^2 E_n(t)}{dt^2} + \gamma_0 \frac{dE_n(t)}{dt} + \omega_c^2 E_n(t) = - \left(\frac{1}{\epsilon C V_c} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{di_a(t)}{dt} \quad (4.21)$$

となり,

$$i_a \equiv \left(\frac{C V_c}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_n}{dt} \quad (4.22)$$

という関係が導かれる.

外部との結合

次は, これを利用して外部との結合のある場合について考える. 外部との結合を含む場合の等価回路を図 4.3 に示す. 図 4.3 から, $v(t)$ に関して,

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_e} \right) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{C} \left\{ \frac{di_a(t)}{dt} + \frac{di_e(t)}{dt} \right\} \quad (4.23)$$

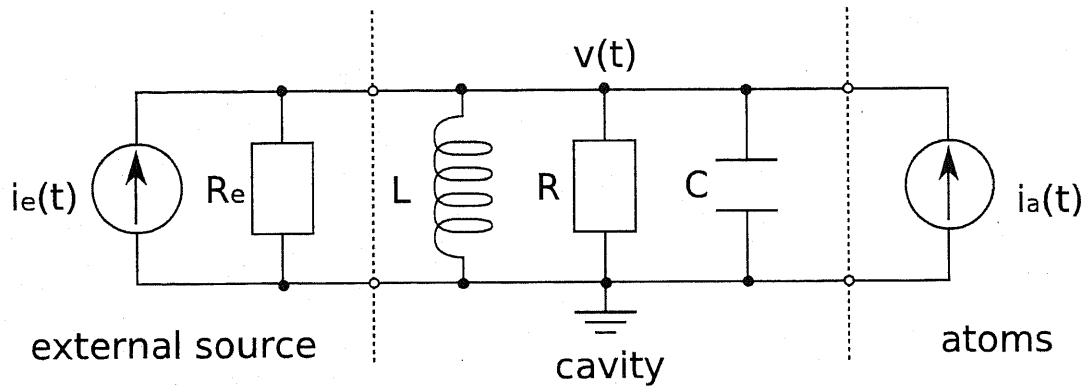


図 4.3: 外部との結合を含む場合の等価回路.

が成り立つ. 2つの抵抗からの損失から,

$$P_{\text{loss}}(t) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_e} \right) v^2(t) \quad (4.24)$$

$$= 2(\gamma_0 + \gamma_e) U_{\text{cavity}} \quad (4.25)$$

と, 全体のロスに対応する γ_c を定義する. このとき, 出射光として取り出せる部分を γ_e , 散乱等のほかのロスは γ_0 に含める. 次に, 単位時間あたりに供給されるエネルギー P_{in} に対して,

$$P_{\text{in}}(t) \equiv 2\mathcal{E}_e^2(t) \quad (4.26)$$

となる $\mathcal{E}_e(t)$ を定義する. 出射光の電場エネルギー $P_{\text{out}}(t)$ に関しては,

$$P_{\text{out}}(t) = \frac{1}{4} R_e i_e^2(t) \quad (4.27)$$

である. $P_{\text{in}}(t) = P_{\text{out}}(t)$ より,

$$i_e(t) = -\sqrt{\frac{8}{R_e}} \mathcal{E}_e(t) \quad (4.28)$$

が得られる. これらより, 式(4.23)を書き直すと,

$$\frac{d^2 E_n(t)}{dt^2} + \gamma_c \frac{dE_n(t)}{dt} + \omega_c^2 E_n(t) = -\frac{1}{\epsilon} \frac{d^2 P_n(t)}{dt^2} + \sqrt{\frac{8\gamma_e}{\epsilon V_c}} \frac{d\mathcal{E}_e(t)}{dt} \quad (4.29)$$

という, 外部との結合を含めた基礎方程式が導かれる.

振幅・位相基礎方程式

これからは、 E_n , P_n を簡単のためそれぞれ E , P と書く。 $E(t)$, $P(t)$ は準正弦波的なものとして、光の角周波数 ω に対して振幅や位相の変化はゆっくりであるとして、

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{E}(t)e^{i\omega t} + \text{c.c.} \right\} \quad (4.30)$$

$$\mathcal{E}_e(t) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{E}_e(t)e^{i\omega t} + \text{c.c.} \right\} \quad (4.31)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{P}(t)e^{i\omega t} + \text{c.c.} \right\} \quad (4.32)$$

とし、式(4.29)に代入し、 $e^{i\omega t}$ の項のみ取り出すと、

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \tilde{E}(t)}{dt^2} + (2i\omega + \gamma_c) \frac{d\tilde{E}(t)}{dt} + (i\omega\gamma_c - \omega^2 + \omega_c^2) \tilde{E}(t) \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{d^2 \tilde{P}(t)}{dt^2} + 2i\omega \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} - \omega^2 \tilde{P}(t) \right\} + \sqrt{\frac{8\gamma_e}{\epsilon V_c}} \left\{ \frac{d\tilde{E}_e(t)}{dt} + i\omega \tilde{E}_e(t) \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

となり、さらに包絡線近似より、

$$\frac{d\tilde{E}(t)}{dt} + \left\{ \frac{\gamma_c}{2} + i(\omega - \omega_c) \right\} \tilde{E}(t) = -i\frac{\omega}{2\epsilon} \tilde{P}(t) + \sqrt{\frac{2\gamma_e}{\epsilon V_c}} \tilde{E}_e(t) \quad (4.34)$$

となる。共振器内外の光を

$$\tilde{E}(t) = E_c(t)e^{i\phi_c(t)} \quad (4.35)$$

$$\tilde{E}_e(t) = E_e(t)e^{i\phi_e(t)} \quad (4.36)$$

と振幅と位相に分離し、分極は共振器内の位相に合わせて、

$$\tilde{P}(t) = (C(t) - iS(t))e^{i\phi_c(t)} \quad (4.37)$$

と表記すると、式(4.34)から2つの実数の方程式が得られる。

$$\frac{dE_c(t)}{dt} + \frac{\gamma_c}{2} E_c(t) = -\frac{\omega}{2\epsilon} S(t) + \sqrt{\frac{2\gamma_e}{\epsilon V_c}} E_e(t) \cos \{ \phi_c(t) - \phi_e(t) \} \quad (4.38)$$

$$\frac{d\phi_c(t)}{dt} + (\omega - \omega_c) \phi_c(t) = -\frac{\omega}{2\epsilon} \frac{C(t)}{E_c(t)} - \sqrt{\frac{2\gamma_e}{\epsilon V_c}} \frac{E_e(t)}{E_c(t)} \sin \{ \phi_c(t) - \phi_e(t) \} \quad (4.39)$$

これがそれぞれ振幅、位相に関する基礎方程式である。

注入同期の基礎方程式

レーザー発振器に外部からモードマッチングされた光が注入する場合を考える。注入光を、

$$\mathcal{E}_1(t) = E_1(t)e^{i\{\omega_1 t + \phi_1(t)\}} \quad (4.40)$$

とし、共振器内の電場を、

$$\mathcal{E}(t) = E_c(t)e^{i\{\omega_1 t + \phi(t)\}} \quad (4.41)$$

とする。共振器内に蓄えられた電場エネルギー U_1 を考えると、共振器の外に出る光の電場は、

$$E(t) \equiv \sqrt{\gamma_e U_1} = \sqrt{\frac{\gamma_e \epsilon V_c}{2}} E_c \quad (4.42)$$

と定義できる。また、分極について、

$$P(t) \equiv C(t) - iS(t) = (\chi' + i\chi'')\epsilon E_c(t) \quad (4.43)$$

のように、複素電気感受率 $\chi' + i\chi''$ を用いて書けるとすると、振幅と位相についての基礎方程式 (式 (4.38), 式 (4.39)) はそれぞれ、

$$\frac{dE(t)}{dt} + \frac{\gamma_c - \gamma_m}{2} E(t) = \gamma_e E_1(t) \cos \{\phi(t) - \phi_1(t)\} \quad (4.44)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} + \omega_1 - \omega_0 = -\gamma_e \frac{E_1(t)}{E(t)} \sin \{\phi(t) - \phi_1(t)\} \quad (4.45)$$

となる。ここで、 $\gamma_m \equiv \omega\chi''$, $\omega_0 \equiv \omega_c - \omega\chi'/2$ である。この2式が注入同期の基礎方程式と呼ばれる。

4.1.3 注入同期レーザーの周波数特性

定常発振状態の位相 (周波数) 特性を考える。 E_1 を一定とし、簡単のため $\phi_1 = 0$ とする。さらに、低出力レーザーによる高出力レーザーの安定化を考えるので、 $E \sim E_0$ とする (E_0 は自発発振出力)。すると、式 (4.45) より、

$$\omega_1 - \omega_0 = -\gamma_e \frac{E_1}{E_0} \sin \phi \quad (4.46)$$

となる。ここで、

$$\omega_{\text{lock}} \equiv \gamma_e \frac{E_1}{E_0} \quad (4.47)$$

を定義すると、

$$\sin \phi = \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_{\text{lock}}} \quad (4.48)$$

となり、定常解が存在するための条件として、

$$-\omega_{\text{lock}} < (\omega_1 - \omega_0) < \omega_{\text{lock}} \quad (4.49)$$

が得られる。つまり、 ω_{lock} は、同期がかかるのに許される最大の周波数差を表しており、注入同期のロッキングレンジという。式 (4.47) より、マスターレーザーとスレーブレー

ザーの出力差が大きいとロックレンジは小さくなる。ロックレンジ内での出力の位相の定常解は、

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_{\text{lock}}} \right) \quad (4.50)$$

となる。

次に、マスターレーザー、スレーブレーザーに微小な位相揺らぎがある場合を考える。

$$\phi_1(t) = \delta\phi_1(t) \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \omega_0(t) &= \omega_0 + \delta\omega_c(t) \\ &= \omega_0 + \frac{d\delta\phi_c(t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\phi(t) = \phi + \delta\phi(t) \quad (4.53)$$

これらを位相についての注入同期の基礎方程式（式(4.45)）に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\phi(t)}{dt} + \omega_1 - \omega_0 - \frac{d\delta\phi_c(t)}{dt} &= -\omega_{\text{lock}} \sin \{ \phi + \delta\phi(t) - \delta\phi_1(t) \} \\ &= -\frac{\omega_0 - \omega_1}{\sin \phi} \sin \{ \phi + \delta\phi(t) - \delta\phi_1(t) \} \\ &\sim -\frac{\omega_0 - \omega_1}{\sin \phi} [\sin \phi + \{ \delta\phi(t) - \delta\phi_1(t) \} \cos \phi] \\ \therefore \frac{d\delta\phi(t)}{dt} - \frac{d\delta\phi_c(t)}{dt} &= -\omega_{\text{lock}} \{ \delta\phi(t) - \delta\phi_1(t) \} \cos \phi \end{aligned} \quad (4.54)$$

となる。フーリエ変換を行うと、

$$\begin{aligned} \delta\phi(\omega) &= \frac{(\omega_{\text{lock}} \cos \phi) \delta\phi_1(\omega) - i\omega \delta\phi_c(\omega)}{\omega_{\text{lock}} \cos \phi - i\omega} \\ &= \frac{\delta\phi_1(\omega) + i \frac{\omega}{\omega_{\text{lock}} \cos \phi} \delta\phi_c(\omega)}{1 + i \frac{\omega}{\omega_{\text{lock}} \cos \phi}} \\ &= \frac{\delta\phi_1(\omega) + i \frac{\omega}{\omega'_{\text{lock}}} \delta\phi_c(\omega)}{1 + i \frac{\omega}{\omega'_{\text{lock}}}} \end{aligned} \quad (4.55)$$

となる。最後は、 $\omega'_{\text{lock}} \equiv \omega_{\text{lock}} \cos \phi$ とした。これにより、マスターレーザー、スレーブレーザー、注入同期レーザー出力の位相雑音の関係が明らかになった。また、周波数雑音も $\delta\omega(\omega) = -i\omega \delta\phi(\omega)$ という関係が成り立つので、

$$\delta\omega(\omega) = \frac{\delta\omega_1(\omega) + i \frac{\omega}{\omega'_{\text{lock}}} \delta\omega_c(\omega)}{1 + i \frac{\omega}{\omega'_{\text{lock}}}} \quad (4.56)$$

と同じ形式で書くことができる。これを用いて第3.3節と同じように注入同期レーザーの周波数の安定化を議論したい。マスターレーザーの周波数雑音には、ロックレンジをカットオフ周波数とする1次のローパスフィルタが掛かっている。逆に、スレーブレーザーの周波数雑音にはハイパスフィルタが掛かったような形式になっている。つまり、注入同

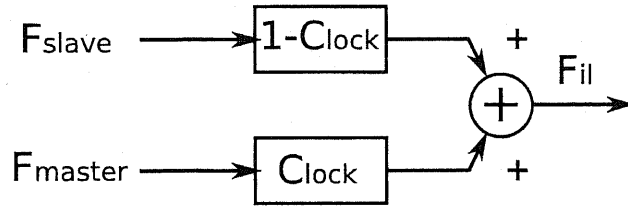


図 4.4: 注入同期レーザーの周波数雑音に関するブロックダイアグラム.

期レーザーの周波数雑音の関係をブロックダイアグラムで表すと図 4.4 のようになる。ここで、 C_{lock} は次のファクターである。

$$C_{\text{lock}} = \frac{1}{1 + i\frac{\omega}{\omega_{\text{lock}}}} \quad (4.57)$$

さらに今回用いている注入同期レーザーは、共振器長の制御が行われている。これは、マスターレーザーの周波数を基準に共振器長を安定化するように働いている。つまり、今まで述べてきた $\delta\phi_c$ は、すでに安定化された後のものであり、真のスレーブレーザーの周波数雑音 $\delta\omega_s$ を用いて、

$$\delta\omega_c(\omega) = \frac{1}{1 + T_{\text{fl}}}\delta\omega_s(\omega) + \frac{T_{\text{fl}}}{1 + T_{\text{fl}}}\delta\omega_1(\omega) \quad (4.58)$$

と書き表される³⁸⁾。ここで、 T_{fl} は、共振器長制御のオープンループ伝達関数である。これを式 (4.56) に代入すると、

$$\begin{aligned} \delta\omega(\omega) &= \frac{\delta\omega_1(\omega) + i\frac{\omega}{\omega_{\text{lock}}}\left\{\frac{1}{1+T_{\text{fl}}}\delta\omega_s(\omega) + \frac{T_{\text{fl}}}{1+T_{\text{fl}}}\delta\omega_1(\omega)\right\}}{1 + i\frac{\omega}{\omega_{\text{lock}}}} \\ &= \left\{C_{\text{lock}} + \frac{T_{\text{fl}}}{1 + T_{\text{fl}}}(1 - C_{\text{lock}})\right\}\delta\omega_1(\omega) + \frac{1 - C_{\text{lock}}}{1 + T_{\text{fl}}}\delta\omega_s(\omega) \quad (4.59) \end{aligned}$$

$$\therefore \delta\omega(\omega) - \delta\omega_1(\omega) = \frac{1 - C_{\text{lock}}}{1 + T_{\text{fl}}}\{\delta\omega_s(\omega) - \delta\omega_1(\omega)\} \quad (4.60)$$

となる。これはマスターレーザーの周波数を基準にスレーブ共振器を安定化する場合 (図 4.5) に一致する。以後、このモデルを使って注入同期レーザーの周波数安定化の話を進める。

4.2 注入同期レーザーのモードクリーナーを用いた周波数安定化

図 4.5 を用いて注入同期レーザーの周波数安定化について考える。注入同期レーザーの周波数安定化は、2 段の周波数安定化とよく似ている。ただし、1 段目の安定化 (注入同期のこと) では周波数基準と制御対象が逆であるという点は注意すべき点である。多段式周波数安定化の考え方をを用いると、十分低い周波数では、

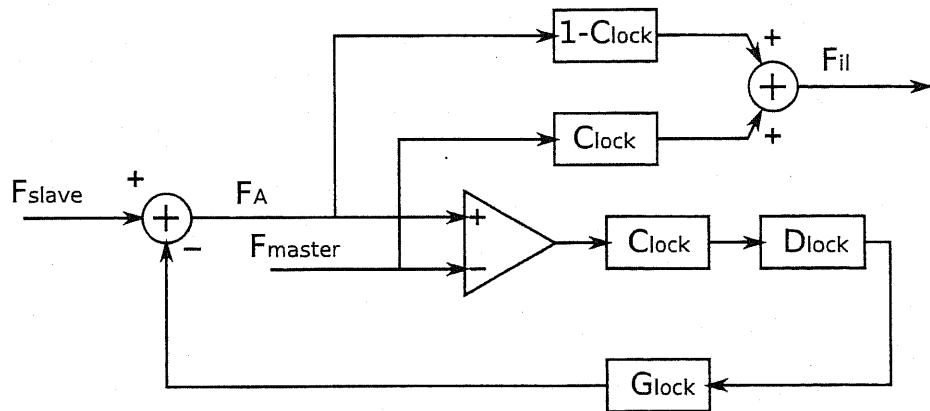


図 4.5: 共振器長制御のもとでの注入同期レーザーの周波数特性のダイアグラム。ただし、前章での周波数安定化と比べると、基準と制御対象の関係が逆になっている。

- スレーブレーザーの周波数雑音は、 $1/|T_{il}||T_{mc}|$ 倍になる。
- マスターレーザーの周波数雑音は、 $1/|T_{mc}|$ 倍になる。

つまり、スレーブレーザーへの要求として、スレーブレーザーの周波数雑音が注入同期の効果によって、マスターレーザーの周波数雑音程度まで抑えられる程度であればよいということになる。ただし、注入同期の段と第1モードクリーナーの段の間では、フィードアラウンドを行わない。

多段式周波数安定化の考え方より、モードクリーナーで得られた誤差信号を前段で基準として用いている周波数の制御に用いる、すなわち誤差信号はマスターレーザーの周波数に返すことで、同時にスレーブレーザーのさらなる安定化につながることを表している(図 4.6, 図 4.7)。

4.2.1 レーザー周波数アクチュエータ

次にレーザー周波数を何を用いて制御するかについて述べる。今回、マスターレーザーとして用いるのは、Non-Planar Ring Oscillator (NPRO) である。これは、レーザー結晶自身で共振器を構成するモノリシック型のレーザー共振器であり、非常に安定な出力が得られる。NPRO の周波数アクチュエータとして、以下のものが備わっている³⁹⁾。

- 結晶の温度調節 : 3 GHz/V , $< 1 \text{ Hz}$
- 結晶についての piezo 素子 (圧電素子) : 1 MHz/V , $< 100 \text{ kHz}$

実際には、piezo 素子の制御では、piezo 素子と結晶を合わせた系の共振が 200 kHz あたりに現れてしまうために、制御帯域として $20\text{-}30 \text{ kHz}$ が限界となる。LCGT の多段式周波数安定化の初段の要求値との比較を行うと、これだけでは制御帯域という点において不十分であるといえる。つまり、もっと速く動作する周波数アクチュエータが必要である。こ

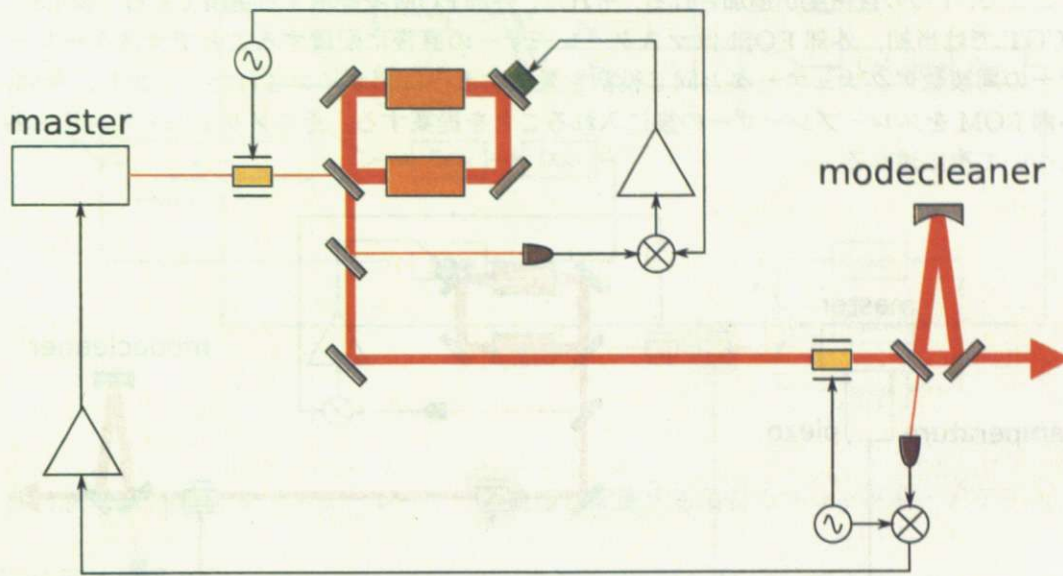


図 4.6: 注入同期レーザーのモードクリーナーを用いた周波数安定化の模式図.

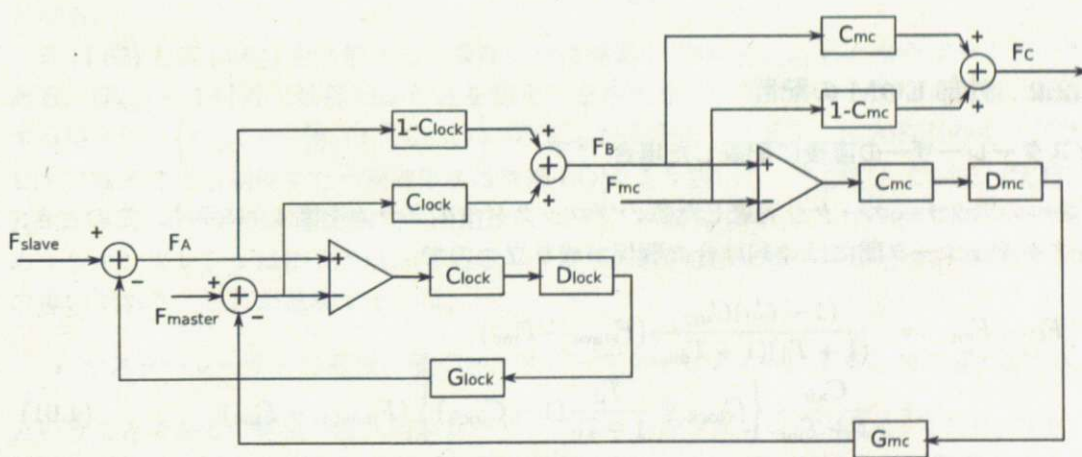


図 4.7: 注入同期レーザーのモードクリーナーを用いた周波数安定化のブロックダイアグラム.

の問題を解決するために、更なるアクチュエータとして外部 EOM (広帯域 EOM) を用いた制御を行う⁴⁰⁻⁴²⁾。

ここで、1つの自由度が追加される。それは、外部 EOM を配置する場所である (図 4.8)。LCGT では当初、外部 EOM はマスターレーザーの直後に配置することでマスターレーザーの周波数アクチュエータと同じ役割を果たすようにデザインされた。しかし、今回、外部 EOM をスレーブレーザーの後に入れることを提案する。そのメリット・デメリットについて次に述べる。

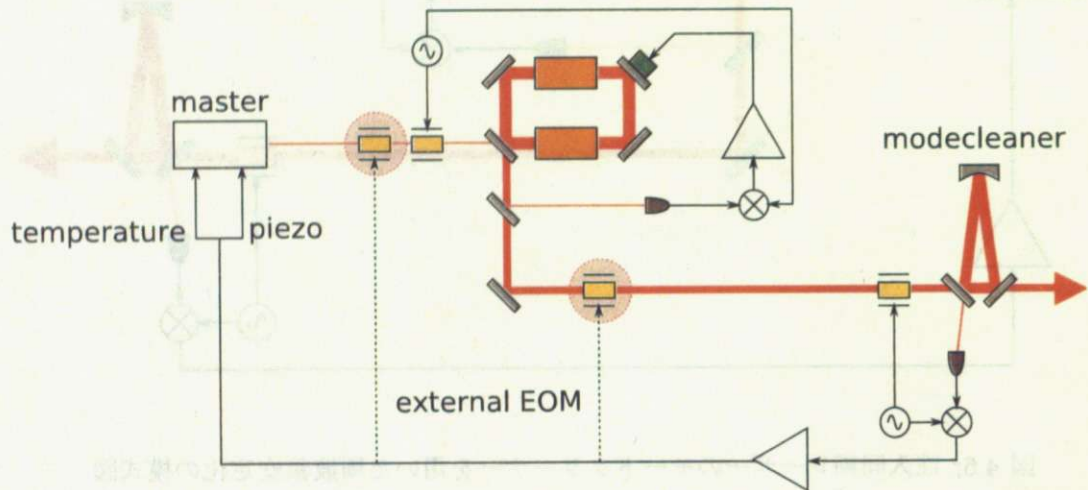


図 4.8: 3つの周波数アクチュエータを考慮した注入同期レーザーの周波数安定化の模式図。外部 EOM をどこに配置すべきかについての自由度が増える。

4.2.2 外部 EOM の配置

マスターレーザーの直後に配置した場合

3つのアクチュエータを考慮した際のブロックダイアグラムを図 4.9 に示す。このとき、各アクチュエータ間には並列結合の関係が成り立つので、

$$F_C - F_{mc} = \frac{(1 - C_{il})C_{mc}}{(1 + T_{il})(1 + T_{mc})} (F_{slave} - F_{mc}) + \frac{C_{mc}}{1 + T_{mc}} \left\{ C_{lock} + \frac{T_{il}}{1 + T_{il}} (1 - C_{lock}) \right\} (F_{master} - F_{mc}) \quad (4.61)$$

$$T_{mc} = C_{mc} D_{mc} (G_{temp} + G_{piezo} + G_{EOM}) \left\{ C_{lock} + \frac{T_{il}}{1 + T_{il}} (1 - C_{lock}) \right\} \quad (4.62)$$

を得る。

2. スレーブレーザーの後に配置した場合 このときのブロックダイアグラムを図 4.10 に示す。G_{EOM} を通過した信号のみが注入同期のあとにフィードバックされる。このとき、

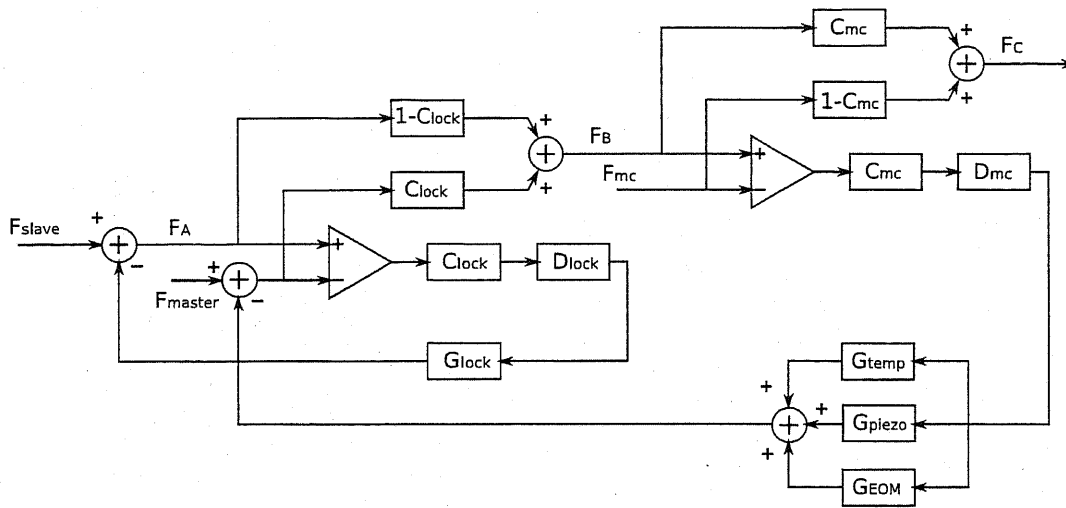


図 4.9: 外部 EOM をマスターレーザーの直後に配置する場合のブロックダイアグラム。

各 F_i 間の関係は,

$$F_C - F_{mc} = \frac{(1 - C_{il})C_{mc}}{(1 + T_{il})(1 + T_{mc})}(F_{slave} - F_{mc}) + \frac{C_{mc}}{1 + T_{mc}} \left\{ C_{lock} + \frac{T_{il}}{1 + T_{il}}(1 - C_{lock}) \right\} (F_{master} - F_{mc}) \quad (4.63)$$

$$T_{mc} = C_{mc}D_{mc} \left[(G_{temp} + G_{piezo}) \left\{ C_{lock} + \frac{T_{il}}{1 + T_{il}}(1 - C_{lock}) \right\} + G_{EOM} \right] \quad (4.64)$$

となる。

式(4.62)と式(4.64)を比較する。異なる点は括弧[]内の G_{EOM} にかかるファクターである。 $|T_{mc}| \sim 1$ 付近 (数百 kHz 付近を想定) を考える。マスターレーザーの直後に配置する場合は、 $\left\{ C_{lock} + \frac{T_{il}}{1 + T_{il}}(1 - C_{lock}) \right\} \sim C_{lock}$ がかかる。ただし、注入同期のループは、ピエゾ素子による制御のため制御帯域は外部 EOM より狭いことを仮定している (実際に T_{il} のユニティゲイン周波数は約 10 kHz)。また、本論文で用いている注入同期レーザーのロッキングレンジは約 370 kHz である。つまり、370 kHz にポールが一つあるかないかの違いである。これが意味するのは、

- マスターレーザーの直後に置くと、スレーブキャビティによる位相の遅れが効く。

ということである。従来の注入同期レーザーではロッキングレンジが広く (1 MHz 以上)、問題にすることはなかったのだが、本研究で用いているレーザーでは大きく影響が出ると思われる。高い周波数であることを考えると、このような影響は避けたいところである。

ここまでは、外部 EOM をマスターレーザーの直後に置くことによるデメリット (逆に、スレーブレーザーの直後に置くことによるメリット) を述べた。しかし、逆に外部 EOM をスレーブレーザーの直後に置くことによるデメリットもある。それは、外部 EOM に高

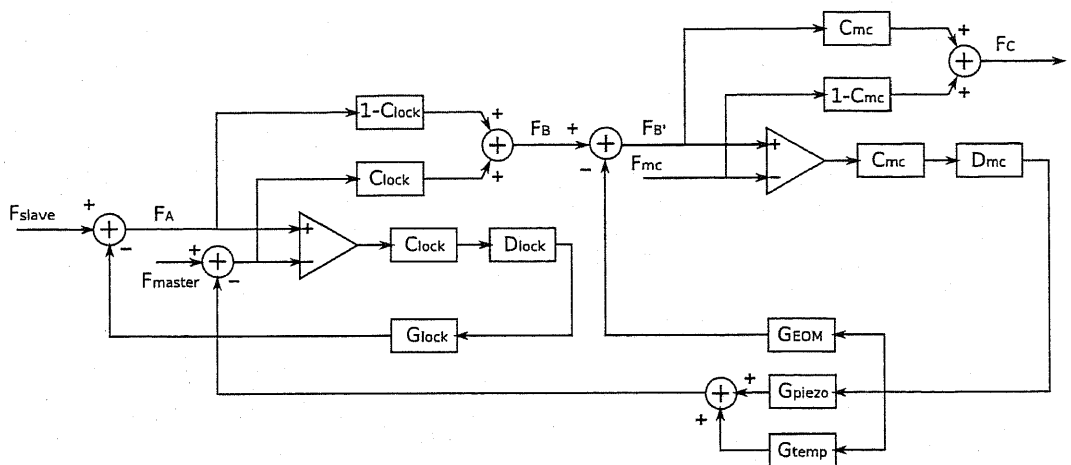


図 4.10: 外部 EOM をスレーブレザーの直後に配置する場合のブロックダイアグラム.

出力光を通すことである。実際に、市販品のもので、100 W レベルの高出力光用の EOM はない。それは、さまざまな熱効果が問題になるからである。しかし、次世代型重力波検出器に目を向けると、今議論している周波数安定化用外部 EOM 以外に、100 W 以上の高出力光を通す必要のある EOM（干渉計制御とモードクリーナー制御に用いる位相変調用狭帯域 EOM）が必須となっている。つまり、次世代型重力波検出器が稼動するときには 100 W 以上の高出力光を通す EOM が必要となる。

したがって、本論文において、周波数安定化用外部 EOM は、スレーブレザーの後に配置する構成を選択し、そのためにまず高出力光用 EOM の評価を行い、100 W レーザーの周波数制御を行った。