

東京大学大学院新領域創成科学研究科
人間環境学専攻

修士論文

き裂進展を考慮した構造最適設計に
関する研究

2008 年 2 月 14 日提出

指導教員 鈴木 克幸 准教授



学生証番号 6 6 7 7 8

市川 幸太

目次

第 1 章 序論	1
1.1 研究背景	2
1.1.1 計算機を用いた設計について	2
1.1.2 メッシュフリー法	3
1.1.3 き裂進展解析	3
1.1.4 最適構造設計	4
1.2 本研究に関連した既往の研究	5
1.2.1 き裂進展解析における現状での取り組み	5
1.2.2 X-FEM 研究の経緯	5
1.2.3 形状最適化研究の経緯	6
1.3 本論文の目的と構成	7
第 2 章 理論	8
2.1 破壊力学	9
2.1.1 応力拡大係数	9
2.1.2 エネルギー解放率と J 積分	11
2.1.3 混合モードき裂における K 値の評価	13
2.1.4 境界積分から領域積分への変換—領域積分法—	16
2.2 X-FEM	19
2.2.1 X-FEM とは	19
2.2.2 X-FEM における変位の近似式	19
2.2.3 剛性マトリクスの導出 (2 次元)	20
2.3 き裂進展解析	24
2.3.1 き裂進展方向	24
2.3.2 き裂進展速度	25
2.3.3 初期き裂発生方向	25
2.3.4 き裂進展解析の流れ	26
2.4 形状変更に関する手法	26
2.5 最適化手法	27

2.5.1 最適化手法に関する制限.....	27
2.5.2 Nelder-Mead Simplex 法.....	27

第3章 X-FEM によるき裂進展解析.....29

3.1 J 積分検証数値解析例.....	30
3.1.1 エッジクラックの解析.....	30
3.1.2 一様引き張り力を受ける斜めき裂.....	34
3.2 複数き裂進展の数値解析例.....	36
3.2.1 複数き裂進展における理論.....	36
3.2.2 複数き裂進展の数値解析例.....	37
3.3 初期き裂数値解析例.....	39
3.3.1 一般的な初期き裂.....	39
3.3.2 特異点から生じる初期き裂.....	41
3.4 疲労寿命を考慮した構造最適化数値解析例.....	44
3.4.1 はじめに.....	44
3.4.2 疲労寿命を求めるための理論の考察.....	44
3.4.3 数値解析対象と構造最適化のためのメッシュ生成法.....	45
3.4.4 形状変更前数値解析結果.....	46
3.4.5 形状変更による疲労寿命と進展経路の変化.....	47
3.4.6 き裂線独立進展との比較.....	52
3.4.7 形状変更による von-Mises 応力の変化.....	55
3.4.8 構造最適化.....	57

第4章 エンドヨークへの適用.....63

4.1 はじめに.....	64
4.1.1 エンドヨークについて.....	64
4.1.2 エンドヨーク形状について.....	65
4.1.3 エンドヨークの形状変更について.....	67
4.2 X-FEM によるき裂の進展解析.....	68
4.2.1 FEM の解析結果とき裂基点.....	68
4.2.2 き裂進展解析結果.....	70
4.2.3 形状変化と疲労寿命変化の予想.....	72
4.3 構造最適化.....	73

第5章 結論.....	77
-------------	----

第6章 今後の展望.....	79
----------------	----

目次

図 1.1.1	工学的設計の枠組み	4
図 2.1.1	き裂の変形モード	9
図 2.1.2	き裂端付近の局所座標系	10
図 2.1.3	J 積分の経路	12
図 2.1.4	相互積分法 の概念	13
図 2.1.5	領域積分法 の概念図	16
図 2.1.6	関数 q の形状とその空間微分（コンターは局所座標系における dq/dx の値）	18
図 2.2.1	き裂端近傍の変位	19
図 2.2.2	X-FEM における節点のエンリッチ	20
図 2.2.3	き裂面・き裂端周辺の座標系	21
図 2.3.1	き裂進展方向	24
図 2.4.1	Basis Vector のメッシュ	26
図 3.1.1	エッジクラック	30
図 3.1.2	重み関数 q の形状	31
図 3.1.3	各重み関数 q に対する無次元化した応力拡大係数	32
図 3.1.4	き裂線の長さ a に対する無次元化した応力拡大係数	33
図 3.1.5	一様引き張り力を受ける斜めき裂	34
図 3.1.6	一様引き張り力を受ける斜めき裂の解析に用いたメッシュ（2025 要素）	34
図 3.1.7	一様引き張り力を受ける斜めき裂の応力拡大係数	35
図 3.2.1	複数き裂進展の解析対象	37
図 3.2.2	き裂進展図	37
図 3.2.3	き裂の進展長さと繰り返し回数の関係	38
図 3.3.1	初期き裂解析対象	39
図 3.3.2	角度 θ と K 値の関係	40
図 3.3.3	特異点を持つ解析対象	41
図 3.3.4	特異点からの角度と K 値の関係	42
図 3.3.5	主応力方向から作成した初期き裂のき裂進展図	43
図 3.4.1	構造最適化の数値解析例	45
図 3.4.2	形状変更の形式	45
図 3.4.3	形状変更前のき裂進展図	46

図 3.4.4	形状変更前のき裂進展長さと繰り返し回数の関係.....	46
図 3.4.5	き裂を 2 本同時に進展させた場合の総疲労寿命.....	47
図 3.4.6	き裂を 2 本同時に進展させた場合の各部材幅と破断したき裂.....	48
図 3.4.7	横部材幅 8.5mm とき裂進展線.....	49
図 3.4.8	横部材幅 8.5mm における繰り返し回数とき裂進展長さ.....	49
図 3.4.9	縦部材幅 8.5mm とき裂進展線.....	50
図 3.4.10	縦部材幅 8.5mm における繰り返し回数とき裂進展長さ.....	50
図 3.4.11	き裂を 1 本に進展させた場合の総疲労寿命.....	52
図 3.4.12	き裂 1 本を進展させた場合の破断き裂.....	53
図 3.4.13	き裂 1 本を進展させた場合の疲労寿命誤差.....	53
図 3.4.14	上部き裂基点の von-Mises 応力変化.....	55
図 3.4.15	下部き裂基点の von-Mises 応力変化.....	55
図 3.4.16	von-Mises 応力の大きなき裂基点.....	56
図 3.4.17	重量制限を加えたときの部材幅.....	57
図 3.4.18	初期条件の繰り返し回数とき裂長さ.....	58
図 3.4.19	初期条件のき裂進展経路.....	58
図 3.4.20	初期条件の応力分布.....	59
図 3.4.21	最適化後の繰り返し回数とき裂長さ.....	59
図 3.4.22	最適化後のき裂進展経路.....	60
図 3.4.23	von-Mises 応力による繰り返し回数とき裂長さ.....	60
図 3.4.24	von-Mises 応力による最適化後のき裂進展経路.....	61
図 3.4.25	von-Mises 応力最適化後の応力分布.....	61
図 4.1.1	圧延工程図.....	64
図 4.1.2	エンドヨークとその保持部.....	65
図 4.1.3	エンドヨークにおけるローラーと保持部材.....	65
図 4.1.4	エンドヨーク 2 次元図及び拘束条件と荷重.....	66
図 4.1.5	エンドヨークとローラー保持面.....	67
図 4.2.1	エンドヨーク FEM 解析結果.....	68
図 4.2.2	エンドヨークき裂基点.....	69
図 4.2.3	エンドヨークき裂進展図.....	70
図 4.2.4	エンドヨークき裂進展長さと繰り返し回数の関係.....	71
図 4.2.5	形状変更時のローラー保持部からローラーまでの距離.....	72
図 4.3.1	最適化後におけるき裂進展.....	73

図 4.3.2	最適化後におけるき裂進展長さと繰り返し回数.....	74
図 4.3.3	von-Mises 応力による最適化後におけるき裂進展.....	74
図 4.3.4	von-Mises 応力による最適化後におけるき裂進展長さと繰り返し回数	75

第1章 序論

1.1 研究背景

1.1.1 計算機を用いた設計について

現在の工学設計現場においては、計算機を用いた構造解析が日常化しており、さらに設計からシミュレーションまでのプロセスを全て計算機上で行う Computer Aided Engineering (CAE) が広く定着している。そしてその CAE を支援するツールとして、MSC/NASTRAN, ANSYS, MARC, ABAQUS, LS-DYNA 等の汎用コードが数多く開発され、設計現場で使用されている。このような数値解析の信頼性を数理面から支援するのが有限要素法 (Finite Element Method) である。有限要素法は、元来偏微分方程式の境界値問題を数値的に解く手段として開発され、その後、構造・流体・伝熱・電磁気などの物理的現象を数値シミュレーションするための計算手法として広く研究が行われてきた。

広く普及した CAE であるが、未だ解決されていない課題もある。それはメッシュ生成技術の問題である。近年の計算機能力の著しい向上の結果、解析に要する時間は大幅に短縮されたが、それに対して有限要素モデルの作成に要する時間はさほど短縮されていない。というのも、自動メッシュ生成の技術は、2次元においてはほぼ達成されたものの、3次元においては未だ、完全な自動メッシュ生成は不可能であるからである。写像によってメッシュを作成する構造メッシュ生成では、2次元ではデラウニー法、四分木・八分木法、そしてフロント法等の手法が確立されているものの、3次元においては特に六面体要素の自動メッシュ生成アルゴリズムは確立されていない[1]。

また、応力集中部を精度良く解析するには、その部分のメッシュを詳細に切る必要があること、加えて解析精度を向上させるためには品質の良い（すなわち形状がゆがんでいない）メッシュを作ることが必要であるが、このような要求を満たすメッシュを作成するには専門的な知識を有する人間が必要である。なおメッシュの品質に関して、要素のゆがみと精度の問題に取り組んだ研究が行われている[2]。

このように、自動メッシュアルゴリズムとメッシュの品質という問題が未だ解決されていないため、実際の設計現場では、CAD データを基にメッシュ生成アプリケーションソフトが作成したメッシュを人間が手作業で修正しているのが現状である、したがってメッシュ生成に費やされる人的コストは非常に大きいものとなり、設計コストを大きく押し上げている。また、計算機能力の大幅な向上に伴い、ソルバー部分の計算時間が大幅に短縮されているにも関わらず、設計プロセス全体に要する時間は以前と比べてもそれほど減少していない。

メッシュ生成と解析精度の向上という2つの課題は、相互に影響しあいながら、計算工学技術の向上を促してきた。過去に多くの研究者達がこれらの問題の解決に取り組んだが、そのアプローチは大きく分けて3つに分類できる。すなわち、アダプティブ法[3]、複数のメッ

シュを用いる方法（マルチスケール解析，マルチグリッド法，重合メッシュ法など）[4]，そしてメッシュフリー法である．

1.1.2 メッシュフリー法

メッシュフリー法には大きく分けて2つの立場がある．1つは，文字通り要素を必要とせず，領域内に分布する点のデータのみから解析を行うという狭義のメッシュフリー法である．FEMとは数学的な定式化の段階から根本的に異なっており，別体系の計算手法である．もう一つは，解析ソルバー部分では要素に相当するものを使用するものの，プリプロセッシングとメインプロセッシングを連続して（シームレスに）処理するため，ユーザーには要素の存在を意識させない広義のメッシュフリー法である．前者の例としては Element Free Galerkin Method (EFGM)[5]，Moving Particle Semi-implicit Method (MPS)，Smooth Particle Hydrodynamics (SPH)，後者の例としては，Reproducing Kernel Particle Method，Finite Cover Method[6]，Generalized Finite Element Method[7]，Free Mesh Method，Extended Finite Element Method (X-FEM)[8]が挙げられる．これらの手法は，基本境界条件の課し方が煩雑になるという側面もあることから，従来の有限要素法との対比で考えるならば，いずれもまだ研究段階に留まっており，実用化には至っていないのが現状である．

1.1.3 き裂進展解析

構造設計に求められる最も基本的要求は構造が破壊しないことであり，種々の破壊形態について研究が進められている．主な破壊形態として脆性破壊，崩壊・座屈，疲労破壊があげられる．最近の破壊の傾向に関して特徴的なことは，脆性破壊及び崩壊・座屈が激減していることである．その要因としては，有限要素法の発達によるところが大きい．有限要素法により，設計時の応力算定が容易になった．その一方で疲労破壊は現在でも散見される．疲労き裂の発生には作用する荷重の大きさや頻度はもとより，溶接部の応力集中や残留応力等多くの因子が影響するため，予測が難しい．

き裂の進展解析を行うことは疲労寿命予測の点から非常に重要である．有限要素法に基づくき裂の進展解析における課題は，き裂が進展するのにもなうリメッシュ作業である．これは特に3次元の場合には非常に多くの労力を必要とする．また，混合モードき裂の応力拡大係数を精度良く求め，き裂進展経路を予測し自動的に進展させるプログラムが必要となる．

1.1.4 最適構造設計

汎用 CAE ソフトウェアにおいて、最適化機能は設計試案を自動的に導き出す有用なツールである。最適構造設計という考え方は決して新しいものでなく、構造設計である以上、設計者は何らかの目的関数に対して最適化を行っている。つまりどのような構造設計においても、設計者は自身の勘や経験から構築した目的関数を用いて試行錯誤を繰り返し、いわば手動で何らかの最適解を導いているのである。最適化・最適設計とは設計者が求める設計の理想を、数学理論に基づいて計算機により自動で導くことである。

様々な構造物や機器・システム等を社会環境・自然環境・経済性などを含めて計画する作業は一般的に工学的設計と呼ばれており、その設計過程はおおよそ以下の図の様に示すことができる。

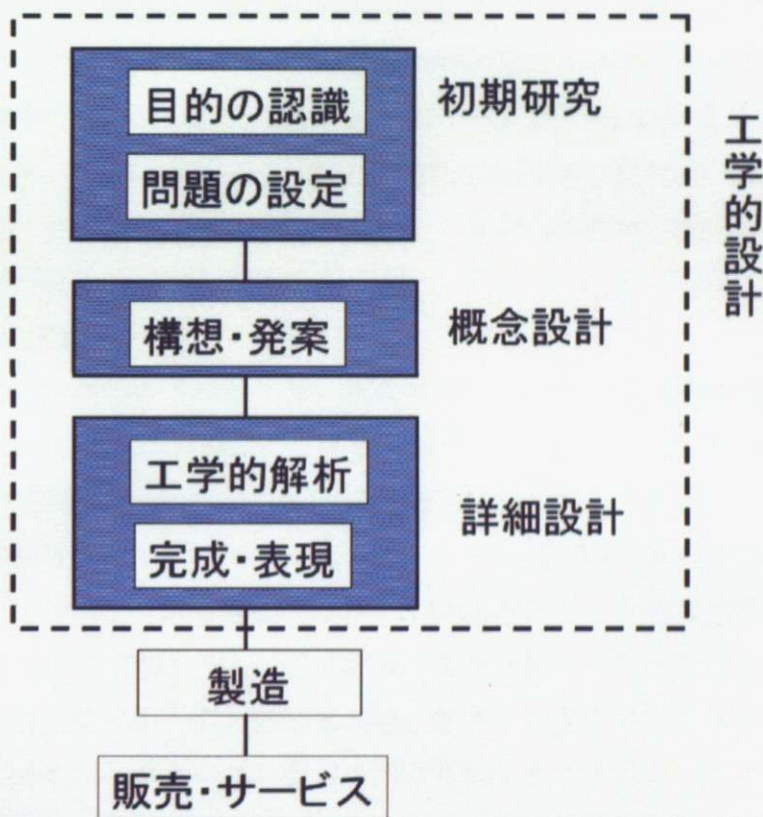


図 1.1.1 工学的設計の枠組み

設計過程は、要求された性能を満足すべく反復を行いつつ進行していく。このときある制約条件を満たしつつ、設計目的をどこまで進められるかという課題が生じる。これを最適化問題という。最適化問題を数理的に解くとき、設計目的に照らし合わせた判断基準を元に評価関数（目的関数ともいう）を決め、様々な制約の下で、これを最大化もしくは最小化するという方法が一般的に採用される。この方法は、設計問題を明確化し数学的手段で解こうとする姿勢に特徴がある。

1.2 本研究に関連した既往の研究

1.2.1 き裂進展解析における現状での取り組み

き裂の進展に関しては多くの研究者が取り組んでいる．たとえば西岡ら[10]はデローニー三角分割に基礎をおく移動有限要素法を開発した．これはき裂端を中心として多層の同心円状に節点を配置し，これらをき裂先端とともに移動させるというものである．修正デローニー三角分割法により適応するメッシュは自動的にリメッシュされ，また，内部指定点群はき裂伝播角度に応じて回転するため任意のき裂進展が可能となる．また，角ら[11]は修正4分木自動要素分割法を用いた手法を提案し，き裂伝播経路について全く予断を必要としない数値シミュレーションを行った．さらに解析領域の周辺にスーパーエレメントを結合する手法を導入した．これらはいずれも，従来の有限要素法をベースとしたアプローチである．

一方で，メッシュフリー法によるき裂進展解析の研究も進んでいる．代表的なものは Belytschko らが提案したエレメントフリーガラーキン法 (Element Free Galerkin Method, EFGM) [5]であるが，さらに Fleming らは，き裂端近傍の漸近変位場を表す関数を変位の近似関数に付加することによって解析精度を向上し，2次元き裂進展解析を行った[12]．

1.2.2 X-FEM 研究の経緯

上に挙げたような一連のメッシュフリー解析手法の一つとして，Belytschko らは，Extended Finite Element Method (X-FEM)と呼ばれる手法を提案した[8]．これは，Babuska らが提案した PU 条件 (Partition of Unity) [13]に基づいて有限要素法を拡張した手法である．

以下に現在までの X-FEM 研究の経緯をまとめる．X-FEM は，EFGM を用いてき裂を解析した研究[5]と同じ発想で，Belytschko らによって提案された．き裂端近傍の漸近変異場を変異の近似式に含めるという発想はもっと以前から取り入れられてきているが，これを PU 条件と関係付けた点に新規性がある．文献[8]では，節点自由度がエンリッチされるのはき裂端漸近変位場だけであり，曲線き裂は，直線き裂を写像することによって扱っていた．そのため長いき裂への適用は困難であったのだが，文献[14]では漸近変異場に加えて Heaviside の step 関数が加えられることによりこの問題点が改善され，リメッシュ不要の進展プロセスが確立された．

この任意の不連続面を変位の近似式に適用するという概念は，文献[15]により一般化された．なお，任意の不連続面に関しては，Asai によって X-FEM と FCM が全く等価であることが示された[16]．

続いて，X-FEM とレベルセット法を結合させることが提案された[17]．すなわち，レベルセット法を用いて材料中の含有物や空部の境界面を表現し，エンリッチ処理に反映させよう

という発想である。このレベルセット法はき裂面の表現にも用いられ、文献[18]では X-FEM とレベルセット法を結合したき裂進展解析が行われた。これによりき裂進展解析がさらに効率的になった。

1.2.3 形状最適化研究の経緯

近代的な最適設計論は 1960 年に Schmit[19]が最適設計問題を拘束条件付最小化問題として定式化し、非線形計画法を用いてといたのが始まりであるといわれている。その後、Fox and Kapoor[20]が感度解析という概念を発表し、非線形計画問題を逐次線形化して線形計画法によって解くという逐次線形計画法(SLP)を確立した。これらの業績によって、それまでの技術者の経験に頼ることが多かった最適な設計というものが、数学的な問題へと変化し、応用数学の一分野として確立されるようになった。その後、最適設計の適応例としては構造物の板厚や断面積を設計変数として最適化する「寸法最適化問題」であったが、Zienkiewicz and Campbell[21]が有限要素モデルの節点を移動させるという方法で構造物の形状を変更する「形状最適化」を実現した。Zienkiewicz らは、最適形状を導く際に節点座標を設計変数として、節点を移動させることによって形状変更をする方法を提案した。形状最適化の始まりはこのような有限要素法ベースの手法であった。節点座標を直接設計変数に設定する方法は明快な発想であるが大規模モデルに対しては節点の増加に伴い設計変数が爆発的に増加することや、応力集中部において境界の波うち現象が発生するといった欠点を有していた。波うち減少に対しては、アダプティブ有限要素法を用いたメッシュの再分割によってある程度抑制できることが報告されている[22]。その後境界表現に多項式やスプライン関数を利用した手法が開発され、これらは数値計画法や最適性規準法と組み合わせられ、離散形の形状最適化問題の解法として数多く報告が行われた[23]。近年では境界表現を設計者が設定する Basis Vector 法と呼ばれる基底変形の線形和として表す方法が用いられている[24]。Basis Vector 法では、Basis Vector の数が設計変数の数となるため古典的な形状最適化手法よりも設計変数が小さく計算負担が少ない。また、Basis Vector により形状制御が拘束されているために、計算が安定しているという利点がある。Basis Vector 法によって得られる最適設計形状は設定された Basis Vector に依存するため理論的に最適な形状はできないが、形状変更の制約を Basis Vector によって設定できることを考えるときわめて実用的な手法であるといえる。

1.3 本論文の目的と構成

近年、CAE の発展と普及により、構造物の機械的強度を超えた応力が掛かることにより発生する破断は減少している。一方、構造物に断続的な荷重がかかり、き裂が進展することによる破断は発生し続けている。この破断の形態を脆性破壊と呼ぶ。

脆性破壊では、一般的に要求される設計強度を満足した条件の下で発生するため、予見することが難しく、破断を防ぐための対策としては定期的なメンテナンスにおける目視や非破壊検査に頼っているのが現状である。しかし、このような定期的なメンテナンスを行っても、初期のき裂は短く発見しづらい場合が多く、見落とした場合には重大な被害を招きかねない。

そこで本研究では、定期的なメンテナンスで見落とされた場合でも破断を招くことが無い様、き裂の進展により破断にいたるまでの寿命を最大化する最適な構造設計見つけ出すことにより、構造物の安全性を向上することを目的とする。

き裂の発生・進展のシミュレーションについては、未解明な部分も多く、効果的な設計方法の模索のためには簡便で精度の高いシミュレーション技術が必要であり、本論文ではき裂の発生・進展のシミュレーションに X-FEM を用いる。

また、一般の構造物における脆性破壊は、複数のき裂が偶発的に発生し、相互のき裂の進展に影響を及ぼしながら進展する。本論文では複数き裂の影響を考慮したき裂進展解析により疲労寿命を算出し、疲労寿命を目的関数とする構造最適化を行った結果について報告する。本論文は以下の構成で展開する。

まず第 2 章では、破壊力学の基本的な事項の説明、X-FEM の定式化、き裂進展、最適化に関する説明を行う。

第 3 章では、数値解析例を用いて X-FEM の精度検証、複数き裂進展解析、初期き裂策定の精度検証、複数き裂進展解析、形状変更した際の応答曲面導出、疲労寿命を考慮した構造最適化を行う。また、現状の応力で構造物の安全性を評価する場合の最適設計との比較を行う。

第 4 章では、第 3 章で証明した複数き裂進展解析を考慮した構造最適化を用いて、エンドヨークのき裂進展解析及び疲労寿命推定、構造最適化を行い、その結果を検証する。

第 5 章で結論を述べ、第 6 章で今後の展望について述べる。

第2章 理論

2.1 破壊力学

本節では、応力拡大係数や J 積分など、き裂進展解析に必要な破壊力学の事項について説明する。

2.1.1 応力拡大係数

き裂は、その近傍の応力分布に最も強い影響を与える。その分布の強さのみに影響し、分布形態には影響を与えない。き裂端近傍の応力場は以下の 3 つの基本的なモードに分類できる。これら 3 つの変形モードの線形和により任意の変位場および応力場を記述できる。小規模降伏状態を仮定した線形弾性体の破壊挙動については、応力拡大係数 (stress intensity factor) K が、き裂先端近傍の特異応力場を特徴づける破壊力学パラメータとして用いられている。

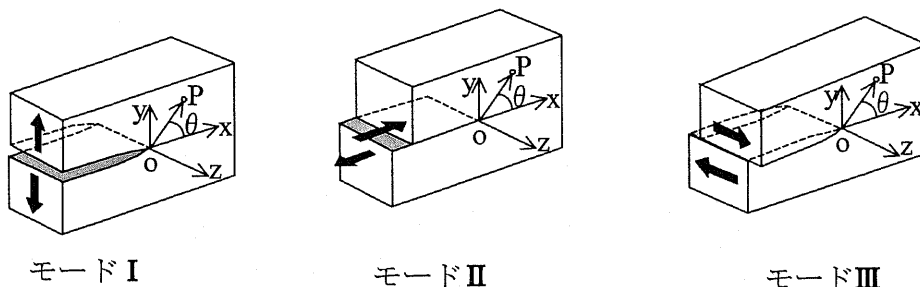


図 2.1.1 き裂の変形モード

線形破壊力学によるき裂の開口変形をここで確認する。き裂端上の 1 点を原点とする図 2.1.2 の様な直交デカルト座標系を考える。すなわち、き裂面上でき裂前縁と直交する方向を x 軸、き裂面の法線方向を y 軸、き裂前縁の接線方向を z 軸とし、この $x-y$ 面内に極座標系 $(r-\theta)$ を作成する。

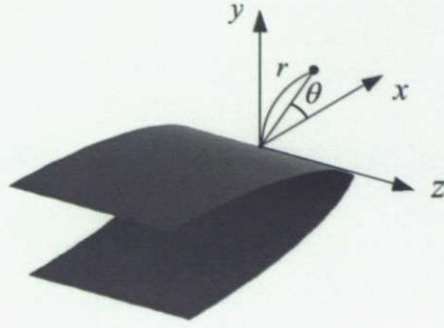


図 2.1.2 き裂端付近の局所座標系

線形破壊力学によれば、き裂端を原点とする局所デカルト座標系における変位 \mathbf{u} , \mathbf{v} は、き裂の開口モード **I** に対しては、

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.1.1)$$

と表され、また、開口モード **II** に対しては、

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ -\cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.1.2)$$

開口モード **III** に対しては、

$$w = \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.1.3)$$

と表される。ただし、

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{Plane strain} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{Plane stress} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

である。また、 G は横剪断係数、 ν は Poisson 比である。

2.1.2 エネルギー解放率と J 積分

(a) エネルギー解放率 (strain energy release rate)

き裂面を持つ弾性体を考え、き裂面の面積を A とする。き裂面が単位面積だけ増加する際に解放されるポテンシャルエネルギー q をエネルギー解放率と呼び、次式で定義する。ただし Π はポテンシャルエネルギーである。

$$q = -\lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi}{\delta A} = -\frac{\partial \Pi}{\partial A} \quad (2.1.5)$$

線形弾性体及び小規模降伏状態では、エネルギー解放率と応力拡大係数の間には次式の関係が成立する。

$$q = \frac{1-\nu^2}{2G} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (2.1.6)$$

(b) J 積分 (J-integral)

J 積分は、非線形な挙動をする材料のき裂先端近傍におけるひずみ集中係数の性質を調べる目的で、Rice[29]により最初に導入された。き裂先端の塑性域が拡大して(2.1.1)式 ~ (2.1.3)式の特異場が消失し、応力拡大係数とその力学的パラメータとしての意味を失った場合であっても、J 積分は弾塑性破壊力学における破壊条件を記述する上できわめて重要なパラメータとなるのである。その定義を以下に述べる。

以下の図に示すような 2 次元のき裂モデルを考える。 x_1 軸はき裂面と平行にあるものとし、経路 Γ は図のように、き裂の一方の面から出発し、き裂先端を反時計回りに囲んで、き裂の他面で終わる任意の曲線とする。また、表記を簡潔にするため、以下ではテンソルの添え字表記を行う。まず、ひずみエネルギー密度 (strain energy density) を次式で定義する。

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.1.7)$$

このとき、J 積分を次式で定義する。

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Gamma \quad (2.1.8)$$

ここで、 T_i , u_i は経路 Γ 上の表面応力及び変位ベクトルであり、経路 Γ に沿う外向き法線ベクトルを n_j ($j=1,2$) とすると、以下の関係が成り立つ。

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (i=1,2) \quad (2.1.9)$$

また、J 積分の値は、その積分経路 Γ に依存しないことが知られている (経路独立性)。

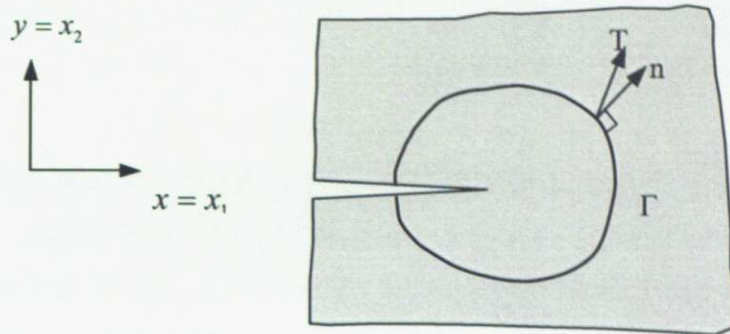


図 2.1.3 J 積分の経路

(c) エネルギー解放率と J 積分の関係

そして重要な特徴として，線形弾性体（及び小規模降伏）の場合には，次式が成り立つ．

$$J = \frac{1-\nu^2}{2G} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (2.1.10)$$

すなわち，J 積分とエネルギー解放率は等価である．一般にエネルギー法による解は，ある領域内での平均値を求めていることになるので，き裂端近傍における要素分割に比較的鈍感である．き裂端近傍のごく近傍に積分経路をとった場合を除けば，比較的粗い要素分割でも精度の高い解析が期待できる．

2.1.3 混合モードき裂における K 値の評価

(2.1.10)式によると, J 積分を用いての応力拡大係数の算出では, 混合き裂のモード分離を行うことができない. 単一モードき裂でなければ K 値を求めることはできない.

混合モードき裂の K 値を求める方法として, VCCM (Virtual Crack Closure Method)[30]などが提案されている. 本論文では, 2次元の混合モードき裂の K 値算出に interaction integral method と呼ばれる手法を用いる. 2次元問題における混合き裂の応力拡大係数を数値的に求める interaction integral method は文献[31]によって初めて導入された. その後, Moran, Gosz *et al.* は interaction energy integral approach を使って 3次元平面き裂の応力拡大係数を求めた. 以下ではこの手法の概略を説明する.

J 積分の値 (J 値) は, き裂端周辺の応力・ひずみ・変位の関数である. いま, ある形状のき裂に対して, 実際に K 値を求めたい現実の状態 (actual state field: $J = J(\sigma^{act}, \epsilon^{act}, u^{act})$) と, 補助状態 (auxiliary state field, $J = J(\sigma^{aux}, \epsilon^{aux}, u^{aux})$) を想定し, さらにそれらを重ね合わせた状態を考える (図 2.1.4 参照).

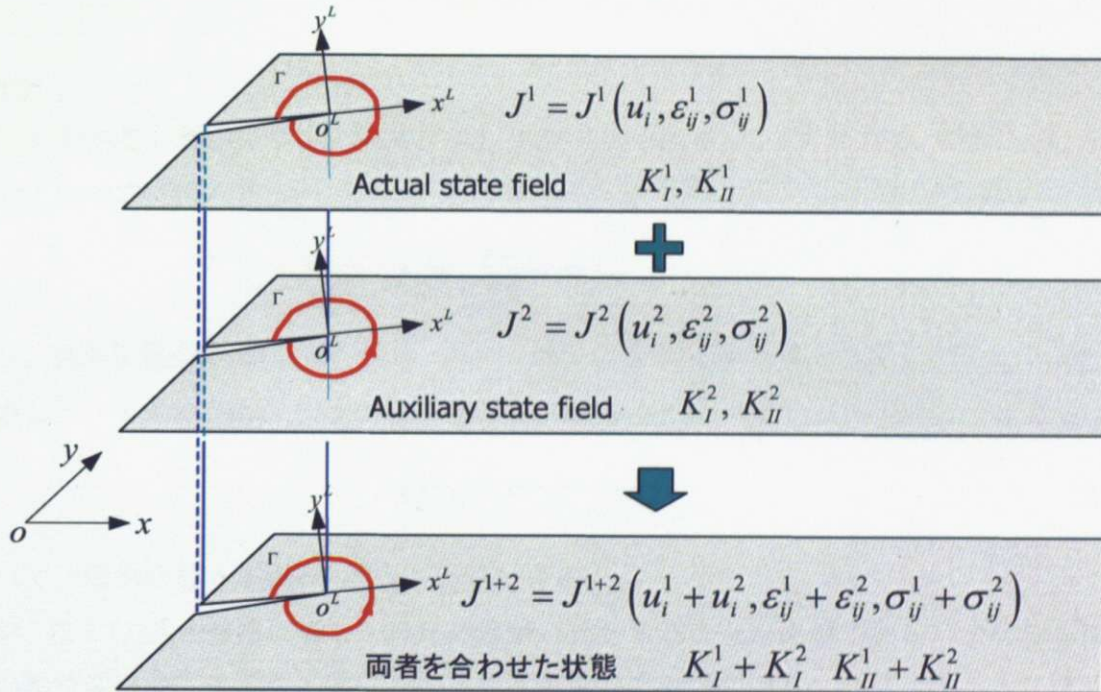


図 2.1.4 相互積分法の概念

この場合,

$$\begin{cases} K_I^{act+aux} = K_I^{act} + K_I^{aux} \\ K_{II}^{act+aux} = K_{II}^{act} + K_{II}^{aux} \end{cases} \quad (2.1.11)$$

が成り立つことは自明のこととする.

両者を重ね合わせた状態で実行した J 積分の式を展開することにより次式が得られる。

$$J(\boldsymbol{\sigma}^{act} + \boldsymbol{\sigma}^{aux}, \boldsymbol{\varepsilon}^{act} + \boldsymbol{\varepsilon}^{aux}, \mathbf{u}^{act} + \mathbf{u}^{aux}) = J(\boldsymbol{\sigma}^{act}, \boldsymbol{\varepsilon}^{act}, \mathbf{u}^{act}) + J(\boldsymbol{\sigma}^{aux}, \boldsymbol{\varepsilon}^{aux}, \mathbf{u}^{aux}) + I^{(act, aux)} \quad (2.1.12)$$

ここで、右辺の $I^{(act, aux)}$ は interaction integral と呼ばれ、次式のように計算される。

$$I = \int_{\Gamma} \left[W^{(act, aux)} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(act)} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{act}}{\partial x_j} \right] n_j d\Gamma \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.1.13)$$

ただし $w^{(act, aux)}$ は interaction strain energy と呼ばれ次式で定義される。

$$W^{(act, aux)} = \sigma_{ij}^{act} \varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}^{act} \quad (2.1.14)$$

ところで2次元では J 値と応力拡大係数の間には、

$$J = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.1.15)$$

の関係が成り立つ((2.1.10)式参照)。そこで、(2.1.11)式、(2.1.15)式を(2.1.12)式に代入して整理すると、

$$I^{(act, aux)} = \frac{2}{E} (K_I^{act} K_I^{aux} + K_{II}^{act} K_{II}^{aux}) \quad (2.1.16)$$

が導かれる。

ここで、補助状態を純粋なモード I ($K_I^{aux} = 1$, $K_{II}^{aux} = 0$) と仮定してその応力場、ひずみ場、変位場の式を(2.1.16)式に代入すると、

$$K_I^{act} = \frac{E}{2} I^{(act, Model)} \quad (2.1.17)$$

となり、現実状態の K_I 値が得られる。逆に、補助状態を純粋なモード II ($K_I^{aux} = 0$, $K_{II}^{aux} = 1$) と仮定して、その応力場・ひずみ場、変位場の式を(2.1.16)式に代入すると、

$$K_{II}^{act} = \frac{E}{2} I^{(act, ModelII)} \quad (2.1.18)$$

となって、現実状態の K_{II} 値を得ることができる。

なお、(2.1.13)式の計算に際しては座標変換に注意することが必要である。すなわち被積分関数の物理量は全てき裂端形状に基づくローカル座標系 (図 2.1.4 の $o^L - x^L - y^L$ 座標系) で表さなければならない。図 2.1.4 の全体座標系 $o - x - y$ から $o^L - x^L - y^L$ へベクトルを変換する座標変換マトリクスを \mathbf{L} とすると、

$$\begin{cases} u_{Local}^{act} = \mathbf{L}^T u^{act} \\ \varepsilon_{Local}^{act} = \mathbf{L}^T \varepsilon^{act} \mathbf{L} \\ \sigma_{Local}^{act} = \mathbf{L}^T \sigma^{act} \mathbf{L} \end{cases} \quad (2.1.19)$$

$$\begin{cases} u_{Local}^{aux} = \mathbf{L}^T u^{aux} \\ \varepsilon_{Local}^{aux} = \mathbf{L}^T \varepsilon^{aux} \mathbf{L} \\ \sigma_{Local}^{aux} = \mathbf{L}^T \sigma^{aux} \mathbf{L} \end{cases} \quad (2.1.20)$$

となる. これらを(2.1.13)式に代入して $I^{(act,aux)}$ を求める.

2.1.4 境界積分から領域積分への変換—領域積分法—

(2.1.13)式を計算する場合には経路 Γ を指定する必要があるが、これを領域積分に変換すると数値計算が好都合になる。これは一般に Domain integral method と呼ばれる。すなわち、(2.1.13)式の被積分関数に、ある関数 $q(\mathbf{x})$ を掛け Gauss の発散定理を適用する。

この領域積分法は、異種材料境の界面き裂問題を解くのに適した方法として提案された。この領域積分法では、き裂端周りの輪郭に沿った積分が、そのき裂端を取り囲む有限要素の領域に対する面積（あるいは体積）積分として表現される。

境界積分を領域積分に変換するという過程は数値計算上では有利に働く。それは、き裂端近傍の特異場の挙動を詳細に把握する必要なしに、正確な破壊力学パラメーターを得ることができるからである。

Domain integral method の方法を以下に述べる。(2.1.13)式の境界 Γ の外側にもう一つの境界 Γ_0 を作成する。そして Γ と Γ_0 の間の領域に分布し、

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{on } \Gamma \\ 0 & \text{on } \Gamma_0 \end{cases} \quad (2.1.21)$$

を満たす十分なめらかな任意の関数 $q(\mathbf{x})$ を用意する。(2.1.13)式は、

$$I^{(act, aux)} = \int_C \left[W^{(act, aux)} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(act)} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{act}}{\partial x_j} \right] q m_j d\Gamma \quad (2.1.22)$$

と表される。ただし、 C は $C = \Gamma + C_+ + \Gamma_0 + C_-$ で定義される閉曲線であり、 m_j は閉曲線 C に対する外向き単位法線ベクトルである（図 2.1.5 参照）。

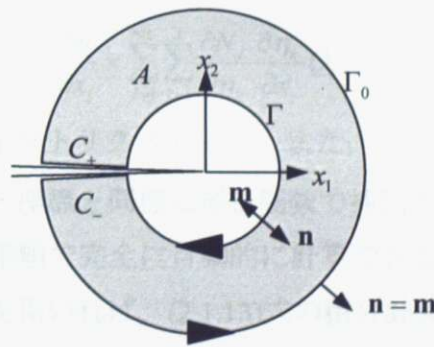


図 2.1.5 領域積分法概念図

「き裂面に外力が課されない」等の条件を用いて式を変換すると最終的に(2.1.23)式が得られる。

$$I^{(act, aux)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(act)} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{act}}{\partial x_j} - W^{(act, aux)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (2.1.23)$$

ただし、 A は閉曲線 C によって囲まれる領域である。そして境界 Γ の半径が 0 になった極限を考える。

ここで問題になるのは関数 $q(\mathbf{x})$ の具体的な形状であるが、 $q(\mathbf{x})$ は(2.1.21)式を満足する十分なめらかな関数であれば、任意のもので良いことが示されている。便利なのは領域 A 内で 1、その外側で 0 となる形、すなわち卓上形である (図 2.1.6)。その勾配を取れば境界 Γ 上の要素のみが $\partial q / \partial x_j \neq 0$ となり、結局、通常の経路積分と全く同じ計算をすることになる。

実際の数値計算に際しては以下のように作成する。すなわち、有限要素によって離散化された空間内での q の値を(2.1.24)式で表す。

$$q = \sum_{I=1}^{nip} N_I Q_I \quad (2.1.24)$$

ここで、 Q_I は節点番号 I の節点に有する節点値であり、 N_I は通常のアソパラメトリック要素で用いる形状関数である。節点値 Q_I は、たとえば $q(\mathbf{x})$ が図 2.1.6 (a)に示すような円形卓上形状であれば、き裂端を中心とするある半径 r の内部にある節点で 1 を、その外側で 0 の値をとるように指定すればよい。ある境界に沿った経路であれば、方向、すなわちベクトル量を扱わなければならないのに対し、半径のようなスカラー量を扱うのであれば処理が簡単になる。

(2.1.23)式に表れる関数 q の空間微分 $\partial q / \partial x_i$ は、通常のアソパラメトリック要素と同じ手続きにより求まる。すなわち、

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} = \sum_{I=1}^{nip} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial N_I}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} Q_I \quad (2.1.25)$$

ここで $\partial \eta_k / \partial x_j$ は Jacobian マトリクスである。また、 $q(\mathbf{x})$ の値は節点に対して与えることにすると、節点間は、変位・座標と同様に形状関数で補間すれば良く、その勾配もアソパラメトリック要素と同様の手順で完全に自動的に計算できるので非常に便利である。

このように、領域積分法を用いれば、(2.1.13)式の積分計算を機械的に行うことができる。

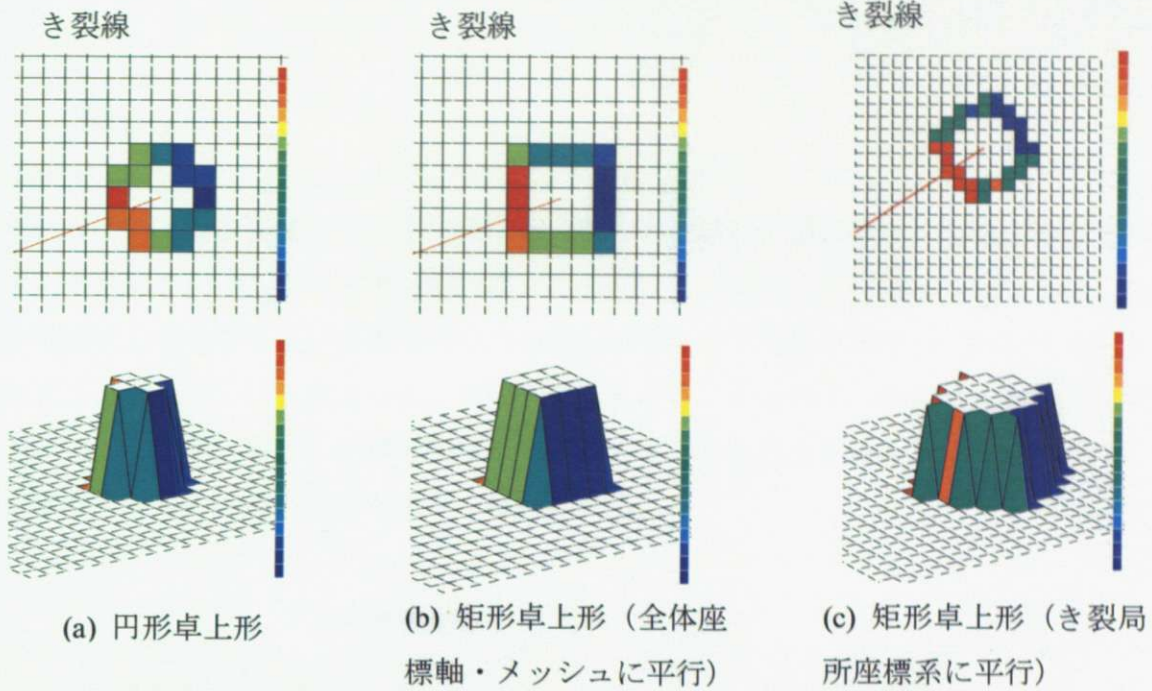


図 2.1.6 関数 q の形状とその空間微分（コンターは局所座標系における dq/dx の値）

2.2 X-FEM

2.2.1 X-FEM とは

X-FEM は、Babuska ら[13]の PU-FEM の重み関数において重み関数として有限要素法の形状関数を使い、近似関数として要素内でのき裂の不連続性を表す関数およびき裂先端の特異場を表す関数を付加したものである。節点自由度には、通常の変位関数のみならず、き裂面の不連続性を表す関数と、き裂端周辺の特異変位場を表す関数の係数が付加されている。これにより、メッシュにき裂面を陽に表現することなく、変位の近似関数に不連続性を与えることが可能になる。また、き裂が進展してもリメッシュを行う必要はなくなる。これにより有限要素モデルの作成の労力が大きく軽減される。

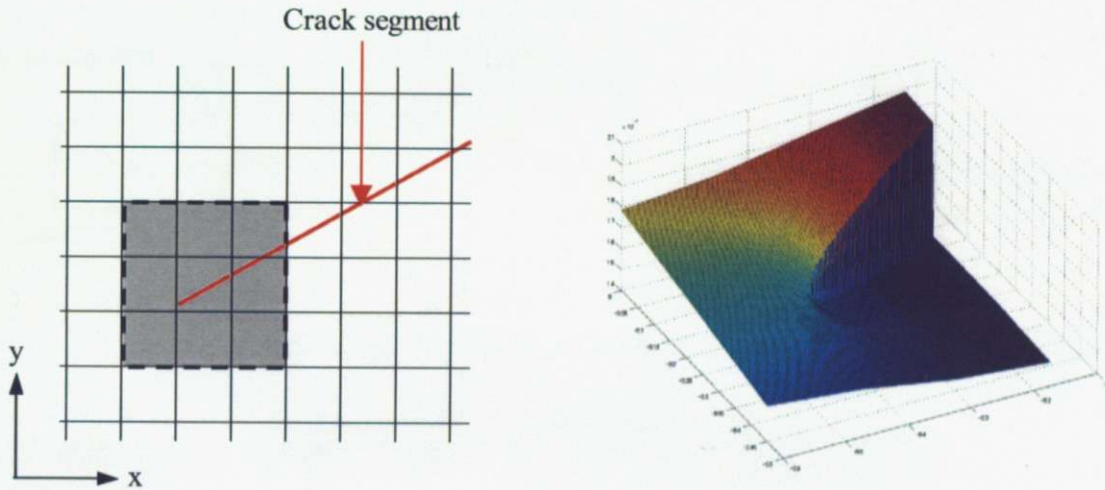


図 2.2.1 き裂端近傍の変位

2.2.2 X-FEM における変位の近似式

以下では X-FEM の理論を概説する。き裂近傍（き裂面近傍あるいはき裂端近傍）に位置する要素内の、位置ベクトル \mathbf{x} における変位 \mathbf{u} を次式で近似する。

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i + \sum_{i \in C} \phi_i(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \psi_k(\mathbf{x}) \mathbf{c}_i^k + \sum_{i \in J} \phi_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_i \quad (2.2.1)$$

ただし、 ϕ_i は通常の FEM で用いられる節点 i に関する内挿関数、 m は要素を構成する節点数（四辺形の場合 4）、 J はき裂面周辺の変位の不連続性を考慮する節点の集合、そして C はき裂端周辺の特異変位場を考慮する節点の集合である（図 2.2.2 参照）。すなわち、節点の内挿関数がき裂線によって完全に切断されるような節点（たとえば図 2.2.2 の△印節点）は集合 J に属し、内挿関数が完全には切断されず、その内部にき裂端を含むような節点（同じく

□印節点) は集合 C に属する. また $\mathbf{d}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i^k$ は適当な定係数ベクトルである.

なお, $H(\mathbf{x})$ はき裂面の不連続性を表す関数 (Heaviside の step 関数), すなわち,

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (y > 0) \\ -1 & (y < 0) \end{cases} \quad (2.2.2)$$

である. また, $\psi(\mathbf{x})$ はき裂端周辺の特異変位場を張る関数の基底で, 次式で表わされる.

$$\begin{aligned} \Psi &= \{\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4\} \\ &= \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

ここで, (r, θ) はき裂端を中心とする局所極座標系を表わす.

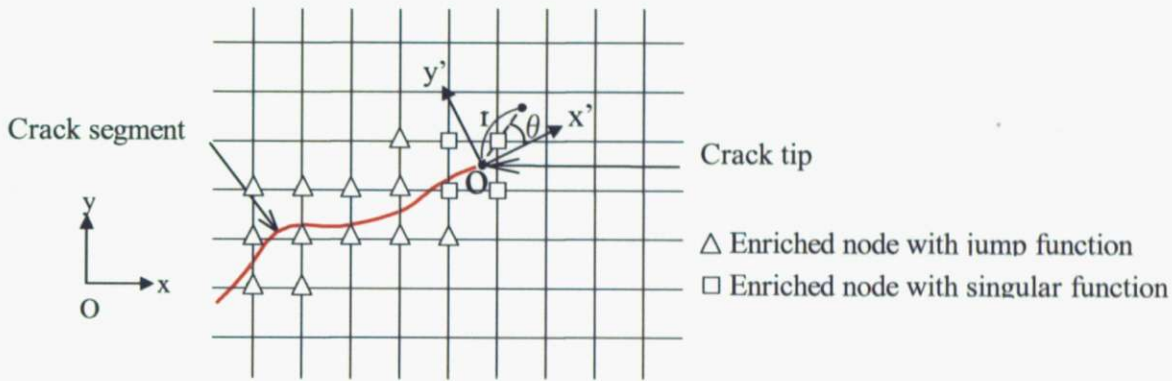


図 2.2.2 X-FEM における節点のエンリッチ

2.2.3 剛性マトリクスの導出 (2次元)

X-FEM は, き裂面の挙動を内部で処理するため, メッシュにき裂面を陽的に表現する必要はなくメッシュ生成処理がき裂面の取り扱いから解放されて簡便になる. しかしその反面, き裂面の取り扱いが定式化に影響し, ソルバー部分を複雑にしている. 特に特異関数を含む要素の B マトリクスの作成には複雑な計算手順を必要とする. これに関して Belytschko らの論文では, 実装に至るまでの詳細な計算式は割愛されている.

以下では, 2次元問題の場合について X-FEM の変位の近似関数から, 要素剛性マトリクスを導く課程を説明する. 変位の近似式が,

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i + \sum_{i \in C} \phi_i(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \psi_k(\mathbf{x}) \mathbf{c}_i^k \quad (2.2.4)$$

であるから, ひずみ成分を

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (2.2.5)$$

と定義するならば、Bマトリクスは、

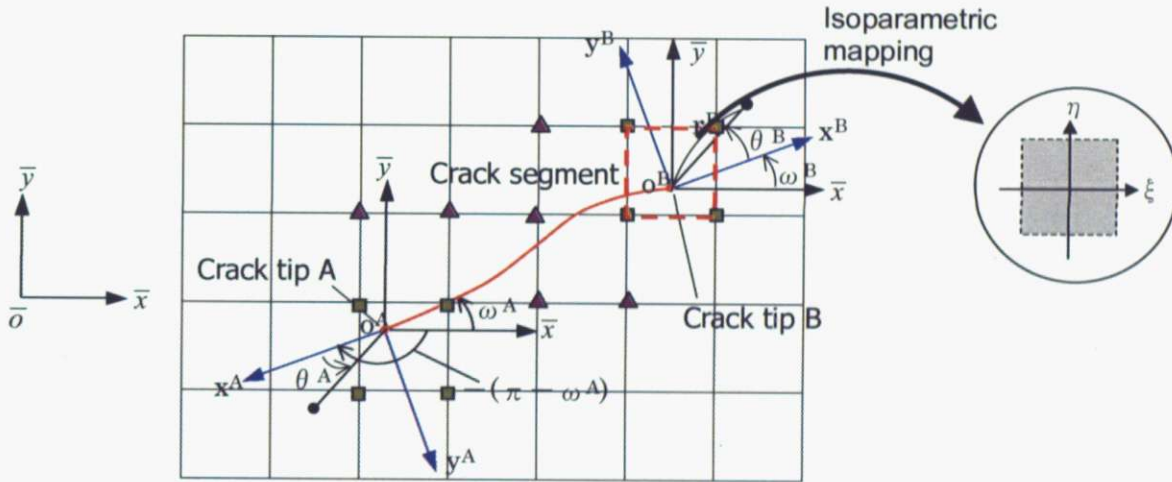
$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{B}_I = [\mathbf{B}_{I1} \quad \mathbf{B}_{I2} \quad \mathbf{B}_{I3} \quad \mathbf{B}_{I4}] \quad (I=1,2,3,4) \quad (2.2.7)$$

となる。ただし、 \mathbf{B}_I は要素内節点番号 I ($I=1\sim4$) に関する成分であることを意味し、 \mathbf{B}_{Ij} は \mathbf{B}_I の中で特異関数 ψ_j ($j=1\sim4$) に対応する成分であることを意味する。そして、

$$\mathbf{B}_{Ij} = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} + (\phi_I \psi_j)_{,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} + (\phi_I \psi_j)_{,y} \\ \phi_{I,y} + (\phi_I \psi_j)_{,y} & \phi_{I,x} + (\phi_I \psi_j)_{,x} \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

と表される。これを以下で、さらに詳しく説明する。



- ▲ Enriched node with Jump function
- Enriched node with singular function

図 2.2.3 き裂面・き裂端周辺の座標系

2次元の場合、き裂端は2つ存在するので、全体座標系 $\bar{o}-\bar{x}-\bar{y}$ とは別に、き裂端A、き裂端Bをそれぞれ原点とし、き裂線に平行な方向を x 軸とする局所デカルト座標系 $o^A-x^A-y^A$ と $o^B-x^B-y^B$ 、及びそれらに対応関係にある極座標系 $o^A-r^A-\theta^A$ 、 $o^B-r^B-\theta^B$ を導入する(図2.2.3)。また、局所座標系の x 軸と全体座標系の x 軸がなす角をそれぞれ ω^A 、 ω^B とする。一般には、 $\omega^A \neq \omega^B$ である。

(2.2.8)式において、特異関数 ψ_j を含む部分だけを取り出すと、

$$\begin{cases} (\phi_I \psi_j)_{,\bar{x}} = \phi_{I,\bar{x}} \cdot \psi_j + \phi_I \cdot \psi_{j,\bar{x}} \\ (\phi_I \psi_j)_{,\bar{y}} = \phi_{I,\bar{y}} \cdot \psi_j + \phi_I \cdot \psi_{j,\bar{y}} \end{cases} \quad (2.2.9)$$

である。ここで、全体座標系 $\bar{o}-\bar{x}-\bar{y}$ と自然座標系 (ξ, η) の間には、局所座標系 $o^A-x^A-y^A$, $o^B-x^B-y^B$ を介さず直接アイソパラメトリック写像が行われる。したがって $\phi_{I,\bar{x}}$ と $\phi_{I,\bar{y}}$ は、通常のアイソパラメトリック要素の場合と同じ手続きで計算される。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} \phi_{I,\bar{x}} \\ \phi_{I,\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{I,\bar{x}} \\ N_{I,\bar{y}} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

である。ここで、 ξ, η は、その積分点を含む要素を正規化された座標系に写像したときの座標値である。 \mathbf{J} は積分変数・積分領域が変換されたことに伴う Jacobian である。これに対して、 $(\phi_I \psi_j)_{,\bar{x}}$ や $(\phi_I \psi_j)_{,\bar{y}}$ の計算には、座標系の変換を考慮しなくてはならない。すなわち以下の2つの操作を行う。

(a) $(x, y) \leftrightarrow (r, \theta)$ の変換

ψ_j は直接的には極座標系 $r-\theta$ の関数として表現されているので、チェーンルールを用いてデカルト座標系 x, y 方向に関する微分に変換する。

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.2.11)$$

であるから、

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases} \quad (2.2.12)$$

として、

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \psi_i}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \end{cases} \quad (j=1 \sim 4) \quad (2.2.13)$$

と書き換える。さらに $\frac{\partial \psi_j}{\partial r}, \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta}$ の具体的な計算式を以下で示す。

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (2.2.14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_3}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) = \sqrt{r} \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta + \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_4}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) = \sqrt{r} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) \end{cases} \quad (2.2.17)$$

(b) $(x, y) \leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ の変換

全体剛性マトリクスに足し込むのは、 $o^A - x^A - y^A$ 座標系や $o^B - x^B - y^B$ 座標系での変位に対する剛性ではなく、 $\bar{o} - \bar{x} - \bar{y}$ 座標系での変位に対する剛性である。そこでやはり同様にして、チェーンルールを用いて微分の変数を変換する。き裂端Aとき裂端Bでは、回転角 ω の取り扱いが異なることに注意する。すなわち、図 2.2.3 の回転角 ω^0 を用いて

$$\begin{cases} \omega = -(\pi - \omega^A) & \text{around cracktipA} \\ \omega = \omega^B & \text{around cracktipB} \end{cases} \quad (2.2.18)$$

と定義した ω に対して、

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = \cos \omega, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = -\sin \omega, \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} = \sin \omega, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \cos \omega \quad (2.2.19)$$

が成り立つので、

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \cos \omega - \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \sin \omega \\ \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \sin \omega + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \cos \omega \end{cases} \quad (2.2.20)$$

となる。(2.2.14)～(2.2.17)式を(2.2.20)式に代入した値を用いて(2.2.9)式を計算する。

2.3 き裂進展解析

2.3.1 き裂進展方向

き裂端近傍の応力は次式のようになる.

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{cases} 3\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \end{cases} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{cases} -3\sin(\theta/2) - 3\sin(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2) + 3\cos(3\theta/2) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

き裂の進展方向を決めるための基準となる式はいくつか提案されているが, 本論文では, maximum circumferential stress criterion を使用した. これは, 円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ が最大であるような方向にき裂は進展するという仮定に基づいた式である. (2.3.1)で示されるき裂進展方向 θ_c は, 応力拡大係数 K_I, K_{II} を用いて次式で与えられる.

$$\theta_c = 2\arctan \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (2.3.2)$$

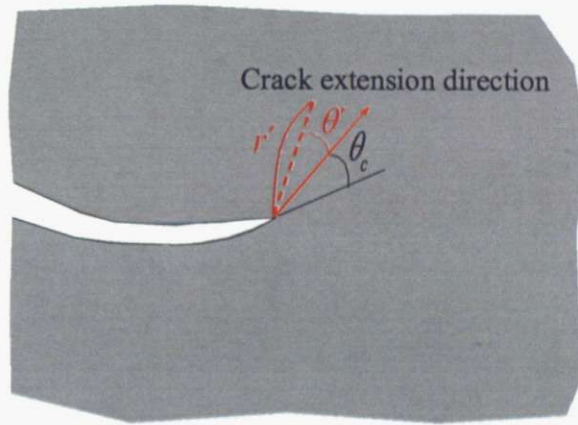


図 2.3.1 き裂進展方向

極座標系 $r'-\theta'$ における K_I を K_I^{eq} と書くと,

$$K_I^{eq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_h}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_h}{2} \sin \frac{\theta_h}{2} \quad (2.3.3)$$

となる. 極座標系 $r'-\theta'$ における K_{II} は 0 である.

2.3.2 き裂進展速度

繰り返し荷重が与えられた時のき裂伝播寿命の計算で広く使われている手法として Paris[34]によって提案されたパリス則がある.

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \quad (2.3.4)$$

ここで, a : き裂進展長さ, N : 繰返し回数, C, m : 伝播定数, ΔK : 応力拡大係数範囲である.

2.3.3 初期き裂発生方向

X-FEM において, き裂進展解析を行うためには初期き裂が必要である. しかし, 実際の構造物において, 初期状態でき裂が予め存在するということは無い. そこで, 実際の疲労き裂による破壊における初期のき裂が発生のアルゴリズムに照らし合わせて, 初期き裂を策定する必要がある. 初期のき裂が発生のアルゴリズムは以下のとおりである.

- ① 結晶におけるすべり発生
- ② 多点表面き裂の発生
- ③ 多点表面き裂の成長
- ④ 合体
- ⑤ ひとつの大きな表面き裂

となる [33].

き裂進展解析において, 結晶のすべり発生からの確に表現するシミュレーションは困難であり, また疲労寿命の計算には無駄である. そこで本研究では, 以下の仮定を用い, 初期き裂の方向を設定する.

き裂の発生段階において, 上記アルゴリズムから初期の多点表面き裂の成長において, 初期の表面き裂の成長段階があることが分かる. このとき, き裂成長方向は, 通常のき裂進展の場合と同様のアルゴリズム, つまり(2.3.1)で用いた円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ が最大であるような方向にき裂は進展するという仮定に基づいた考え方をを用いる. これにより, 初期き裂発生方向は, き裂発生節点における円周応力 $\sigma_{\theta\theta}$ が最大, つまり主応力方向に発生すると考える.

2.3.4 き裂進展解析の流れ

き裂進展解析の全体の流れは以下の通りである。

まず，2.3.3 で説明した理論に基づき，初期き裂を設定する。

次に，2.2 で説明した X-FEM を用いて応力解析を行い，2.1.3 の相互積分法にもとづき K_I 値， K_{II} 値を求め，2.3.1 の考え方でき裂進展方向を決定する。き裂進展長さは，Paris 則を用いて求める。同時に，繰り返し回数を計算しき裂が壁面に達するまで繰り返し行う。

2.4 形状変更に関する手法

本論文における形状変更は，構造最適化を行うためにスムーズな形状変更でなければならない。そこで，今回は形状変更の手法として Basis Vector 法を用いる。以下に Basis Vector 法の説明を記す。

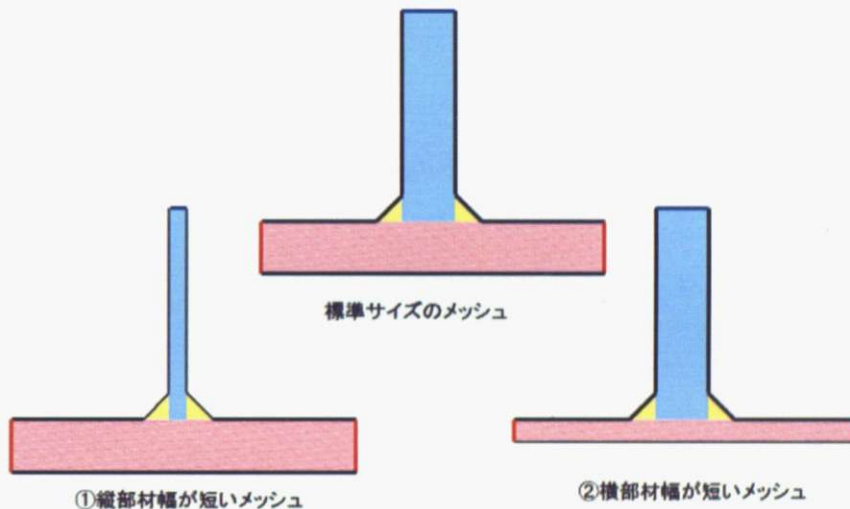


図 2.4.1 Basis Vector のメッシュ

まず，上図のように標準サイズのメッシュを作成する。次に，変更させたい部位のサイズをある程度変更させたメッシュを作成する。変更させたい部位が複数あるときは，その部位数，用意する。

次に以上のメッシュを用いて新たなメッシュを作成する。変更後の節点座標 M_α を形状変更の関数 α_i であらわすと

$$M_\alpha = M + \sum_i \alpha_i (M_i - M) \quad (2.4.1)$$

となる。以上の式を用いて形状を変化させる。

2.5 最適化手法

2.5.1 最適化手法に関する制限

本論文では、疲労寿命が最大となる形状を解析することを目的とする。これを非線形計画法の最適化問題として考えると、本論文での解析は、設計変数を形状変更値とし、目的関数を疲労寿命と考えられる。この問題を解く上で問題となるのが、き裂進展自体をひとつの関数として扱うため、勾配を求めることができないという点である。そこで、本論文では勾配を使用せずに最適解を求めることができる Nelder-Mead Simplex 法[27]を用いて解析を行う。

2.5.2 Nelder-Mead Simplex 法

N次元の引数を持つ関数 $F_{(x)}$ 最小化する場合を考える。ここで、任意の N+1 の点における値 $F_{(x_i)}$ が多面体をなすとき、この多面体を以下の手順で逐次改良し解に近づく。

Step.1 任意の N+1 の点における値を以下のように順列させる

$$F_{(x_1)} \leq F_{(x_2)} \cdots \leq F_{(x_n)} \leq F_{(x_{n+1})} \quad (2.5.1)$$

Step.2 次に最大の点 $F_{(x_{n+1})}$ に関して、多面体の体積を保存したまま移動させる。このとき移動後の点の座標は

$$x_r = (1 + \alpha)x_0 - \alpha x_{n+1} \quad (2.5.2)$$

このとき

$$x_0 = \sum_N x_i \quad (2.5.3)$$

ここで

(1) $F_{(x_1)} \leq F_{(x_r)} \leq F_{(x_n)}$ のとき、新たな点を x_r として Step.1 にもどる

(2) $F_{(x_r)} \leq F_{(x_1)}$ のとき、さらに新たな点を用意する。

$$x_e = \rho x_r + (1 - \rho)x_0 \quad (2.5.4)$$

ただし

$$\rho < \alpha \quad (2.5.5)$$

このとき

① $F_{(x_e)} \leq F_{(x_r)}$ のとき、 $F_{(x_{n+1})} = F_{(x_e)}$ として Step.1 に戻る。

②それ以外するとき, $F_{(x_{n+1})} = F_{(x_r)}$ として Step.1 に戻る.

(3) $F_{(x_n)} \leq F_{(x_r)} \leq F_{(x_{n+1})}$ のとき,

$$x_c = (1 + \gamma)x_0 - \gamma x_{n+1} \quad (2.5.6)$$

① $F_{(x_c)} \leq F_{(x_r)}$ のとき, $F_{(x_{n+1})} = F_{(x_c)}$ として Step.1 に戻る.

②それ以外するとき, $F_{(x_{n+1})} = F_{(x_r)}$ として Step.1 に戻る.

以上を繰り返し, シンプレックスの直径が、指定したトレランスの値より小さくなるまで、繰り返される.

第3章 X-FEM によるき裂進展解析

3.1 J 積分検証数値解析例

3.1.1 エッジクラックの解析

まず，解析精度検証のための線形解析を行う．図 3.1.1 (a)に示すエッジクラックを解析した（ヤング率 $E = 2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ ）．用いたメッシュは図 3.1.1 (b)．

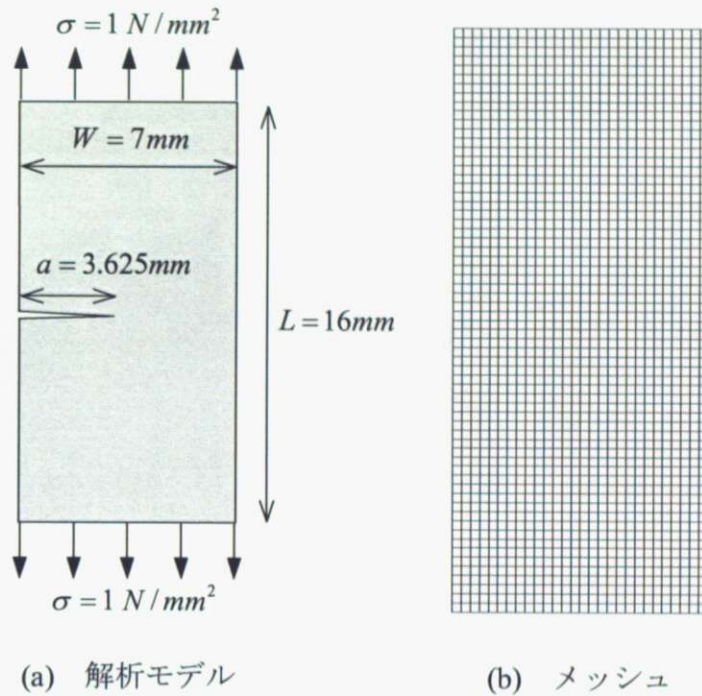


図 3.1.1 エッジクラック

このモデルの応力拡大係数の近似解析解は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} K_I &= C\sigma\sqrt{a\pi} \\ K_{II} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

ただし，C は次式で表わされる補正係数である．

$$C = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{W}\right) + 10.55\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (3.1.2)$$

(2.1.23)式の重み関数 $q(x_1, x_2)$ の形状が応力拡大係数の精度に及ぼす影響を調べるため，図 3.1.2 に示す 5 種類の重み関数を使用した．すなわち，台地形(円)，台地形(矩形)，放物線，二重放物線(上下に凸である 2 つの放物線を変曲点で結合したもの)，そして円錐形である．これらは図 2.1.5 の領域 A 内において関数 $q(x_1, x_2)$ がどのような勾配で分布しているかを示すものである．さらにそれぞれの種類の関数 q に対して，中心部（すなわちき裂端）からの広がりも 3 段階に変化させた．これは図 2.1.5 の境界 Γ_0 が円であるとすれば，その半径のこ

とを指す．これをき裂端周辺部に存在する要素の大きさの1倍から3倍まで変化させることとした．

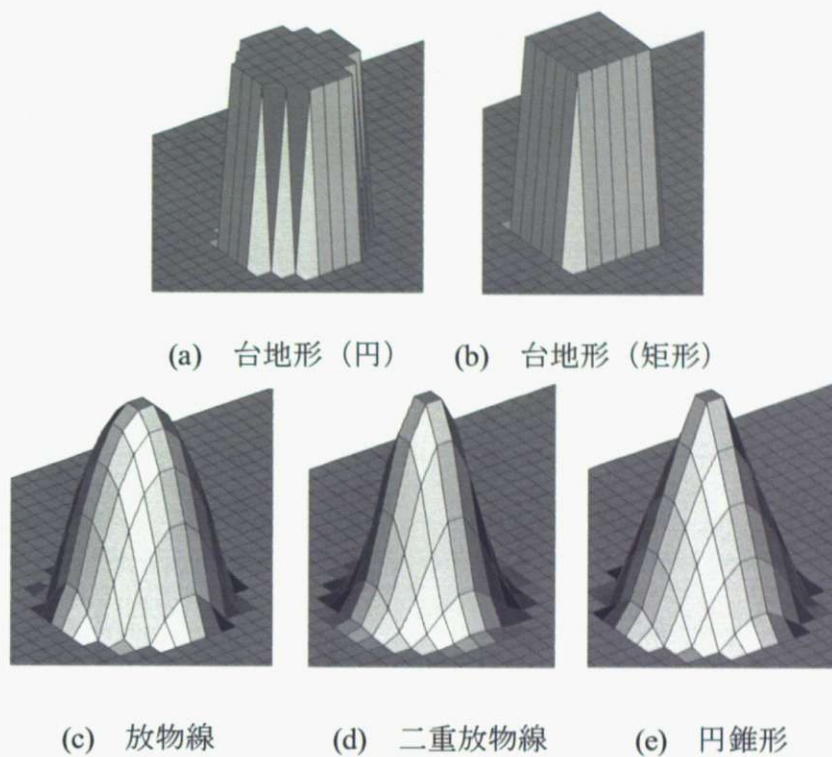


図 3.1.2 重み関数 q の形状

これらの重み関数を用いて無次元化した応力拡大係数を評価した結果を図 3.1.3 に示す．これによると台地形（円）と台地形（矩形）の2種類は非常に精度が高い．それに対して他の関数は精度が低く，円錐形が最も精度が低い．実際の(2.1.23)式で計算されるのは関数 q の微分（勾配）であるから，この結果はその勾配がなるべく中心（き裂端）から離れたところに存在するような関数 q の形状が望ましいことを示している．

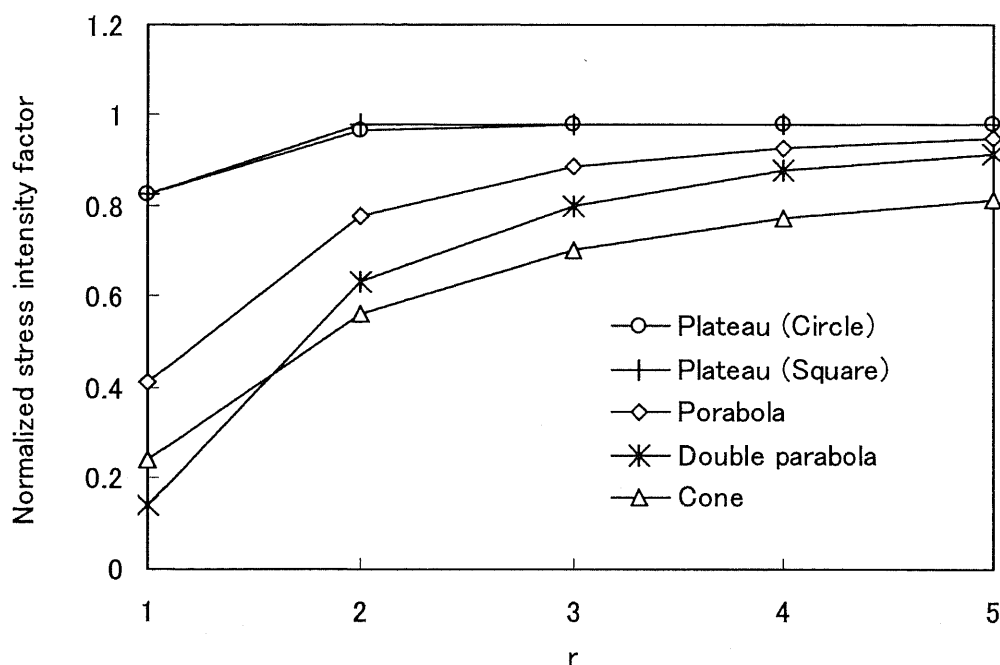


図 3.1.3 各重み関数 q に対する無次元化した応力拡大係数

また、同じ台地形であっても、それが円形か矩形かはあまり精度に影響しないこともわかる。ただしき裂端からの広がり重要で、中心（き裂端）から要素1個分の長さでは十分な精度が得られていない。2個分以上ではほぼ収束している。

次に、き裂線の長さ a を変化させた場合の無次元化した応力拡大係数を図 3.1.4 に示す。重み関数は台地形（円）の形状のものを用い、その広がり半径を3段階に変化させた。半径を要素長の2倍または3倍とすると、 $1 < a < 5$ の範囲では近似解析解との良い一致が得られた。ただ、き裂線が短い場合（ $a=1$ ）程度では、半径が要素長3倍の場合に精度が大きく低下している。き裂線の長さが短い場合には重み関数の広がりを大きくし過ぎ無いことに注意が必要である。そして通常は半径が要素長の2倍程度で十分な精度が得られることがわかった。なお、 $a < 1$ 及び $a > 5$ の場合は、き裂先端近傍の応力、変位の誤差が大きくなった結果、精度の悪化が起きている。

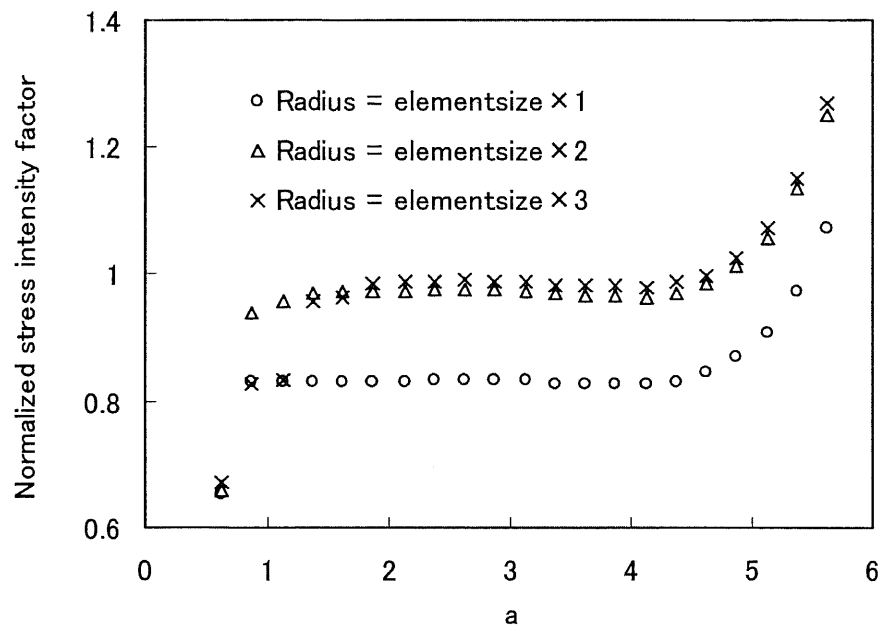


図 3.1.4 き裂線の長さ a に対する無次元化した応力拡大係数

以降の解析では、重み関数 $q(x_1, x_2)$ の形状としては、台地形（円）とし、また、き裂端からの広がりは、中心（き裂端）から要素 2 個分の長さとした。

3.1.2 一様引き張り力を受ける斜めき裂

中央に斜めのき裂を有し、一様引き張り力を受ける板を解析した（図 3.1.5）。解析に用いたメッシュを図 3.1.6 に示す。メッシュは $45 \times 45 = 2025$ 要素分割。また、用いた要素は全て四節点四角形要素である。き裂長さ a と板の一边の長さ W の比率は、 $a/W = 0.1$ である。また、無限板中の斜めき裂の理論解は次式で与えられる。

$$\begin{cases} K_I = \sigma \sqrt{\pi(a/2)} \cos^2 \beta \\ K_{II} = \sigma \sqrt{\pi(a/2)} \sin \beta \cos \beta \end{cases} \quad (3.1.3)$$

応力拡大係数の算出には相互積分法及び領域積分法を用いた。角度 β の変化に対する応力拡大係数の変化を図 3.1.7 に示す。無限板の理論値との差は 1% 程度であり、理論値とほぼ一致した。

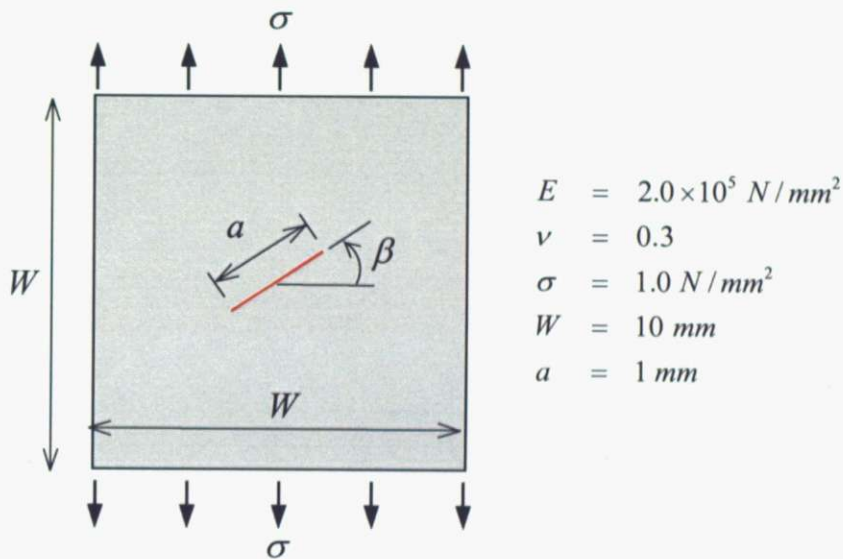


図 3.1.5 一様引き張り力を受ける斜めき裂

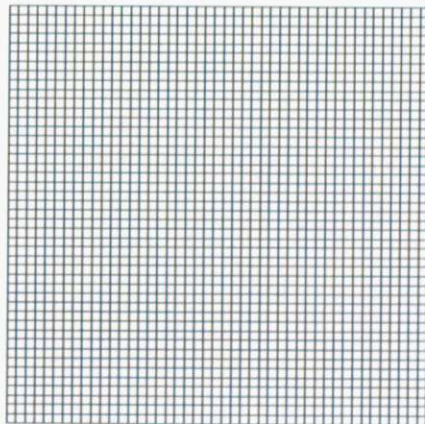


図 3.1.6 一様引き張り力を受ける斜めき裂の解析に用いたメッシュ（2025 要素）

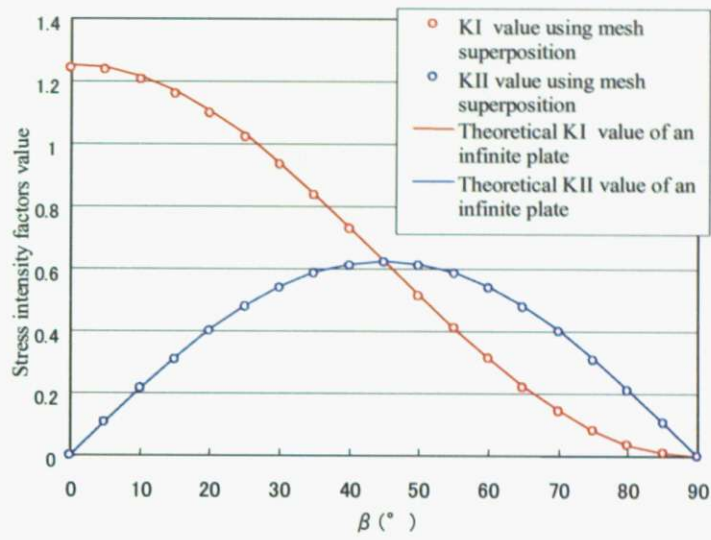


図 3.1.7 一様引き張り力を受ける斜めき裂の応力拡大係数

3.2 複数き裂進展の数値解析例

3.2.1 複数き裂進展における理論

実際の解析では paris 則を用いて求めたき裂進展速度から、き裂進展距離を導出し、き裂進展させなければならない。以下にき裂進展のアルゴリズムを記載する。

(a) 繰り返し回数を固定する場合

規定の繰り返し回数をとすると、進展長さ a_i は

$$a_i = \frac{da_i}{dN_i} N_{fix} \quad (3.2.1)$$

となる。この場合、予め適当なき裂進展長さになるように N_{fix} を求めておかなければならない。

(b) 最大き裂進展長さを固定する場合

規定の最大き裂進展長さを a_{fix} とすると、それぞれの繰り返し回数 N_i は

$$N_i = \left(\frac{da_i}{dN_i} \right)^{-1} a_{fix} \quad (3.2.2)$$

となる。この場合、すべてのき裂に同一の繰り返し回数がかかるはずである。つまり、規定の最大き裂進展長さ a_{fix} まで到達するのにかかる最小繰り返し回数を N_i^{\min} としたとき、各々のき裂進展長さは、

$$a_i = \frac{da_i}{dN_i} N_i^{\min} \quad (3.2.3)$$

となる。

3.2.2 複数き裂進展の数値解析例

以下のくびれを持つ構造物に関しき裂線を2本作成した場合の解析を, 進展長さを0.1mmに固定した場合と, 繰返し回数を 2.5×10^5 回と固定した場合で計算を行った.



図 3.2.1 複数き裂進展の解析対象

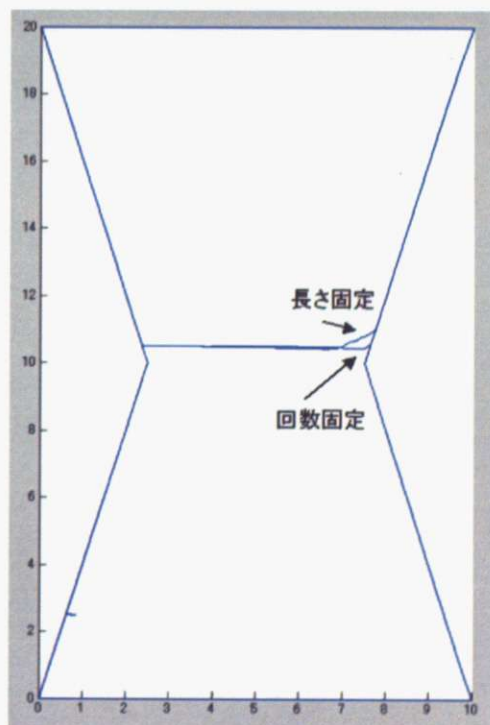


図 3.2.2 き裂進展図

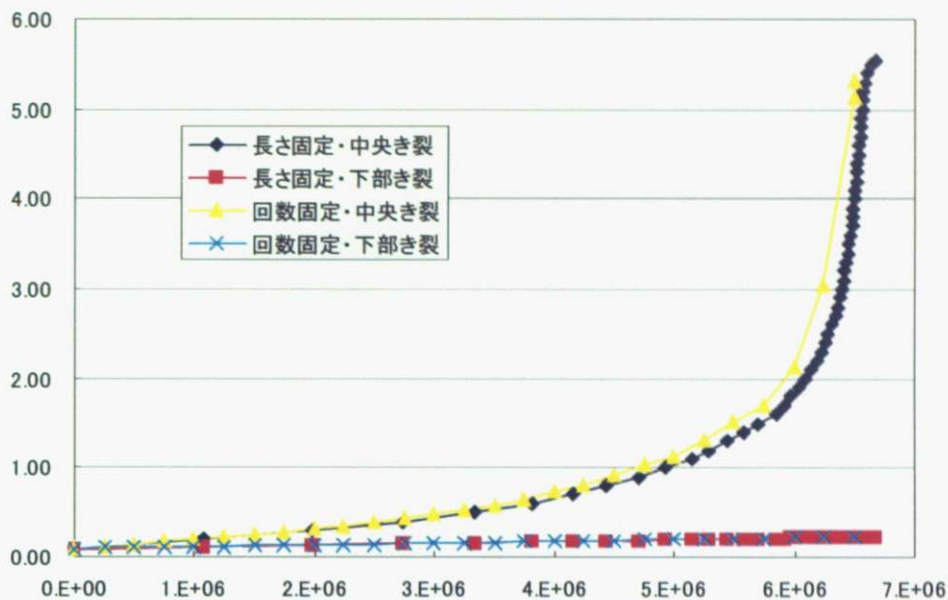


図 3.2.3 き裂の進展長さと繰り返し回数の関係

まず，き裂進展に関して考察する．き裂はほぼ真横に進展し，進展速度が高速破断を起こす領域までは同じ進み方をしている．しかし，ここで回数固定の場合は，進展速度が速くなったため，1 ステップに伸びる長さが長くなってしまい，ほとんど進展方向が変わることなく破断するのに対し，長さ固定の場合は，長さごとに進展速度及び進展方向を計算するため，詳細な解析が可能となっている．

次に，破断までの繰り返し回数について考察する．長さ固定で 6.67×10^6 回，回数固定で 6.51×10^6 回となった．約 2.3% の誤差である．今回の計算での誤差は比較的小さいが，2 本のき裂が同じように伸びてどちらが高速破断を引き起こすかが各々の進展長さによるときは，長さ固定で繰り返し計算を行ったほうがよいと判断した．

3.3 初期き裂数値解析例

3.3.1 一般的な初期き裂

以下のような解析対象について解析する。

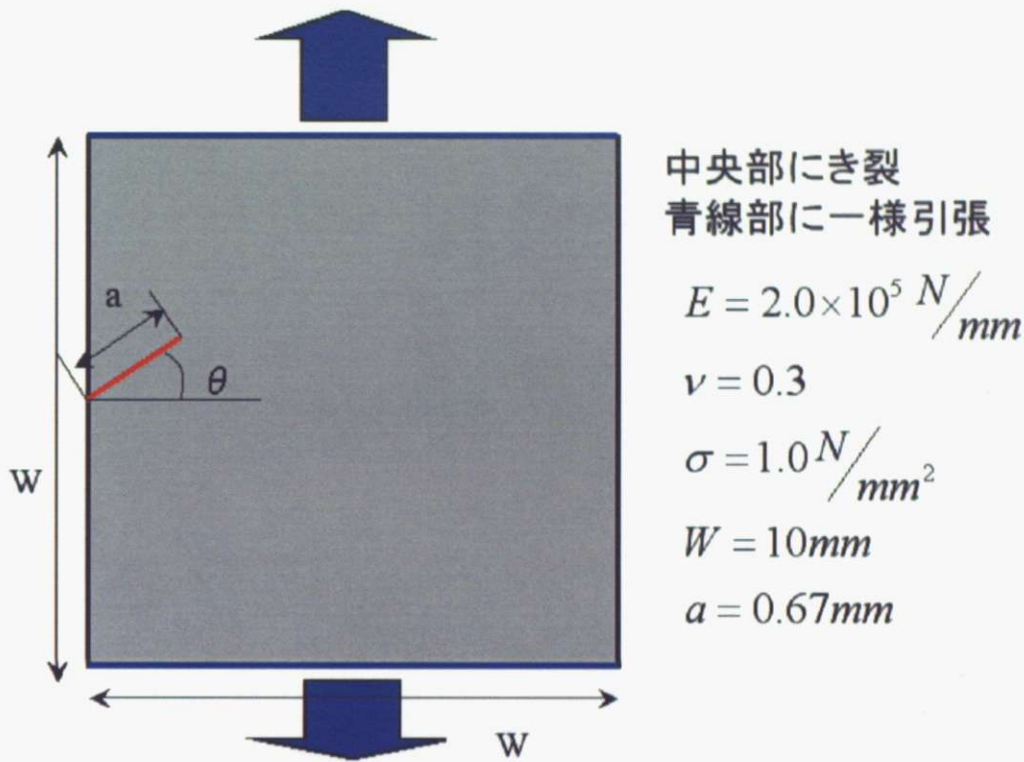


図 3.3.1 初期き裂解析対象

ここで、初期き裂長さについて考察する。初期き裂の大きさはその性質から鑑みて、なるべく小さいことが求められる。しかし、可能な限り小さくすると、き裂進展のために用いる 2.1.2 で定義した J 積分の積分領域が、き裂端が計算領域の表面上に存在するために、飛び出してしまう可能性がある。

そこで、初期き裂長さは、J 積分の積分範囲が領域外に及ばない最小の長さとして定義する。以上を用いて、き裂基点となる要素の主応力方向から初期き裂を作成した。このときの主応力方向から求めた初期き裂方向及び K_I 、 K_{II} と誤差を示す。

	$\theta (^{\circ})$	K1	K2
主応力方向	0.1015	0.66384	0.00732
K1 最大値	-0.4	0.66386	0.00208
誤差(%)	0.27	0.003	

表 3.3.1 主応力方向と初期き裂の K 値誤差

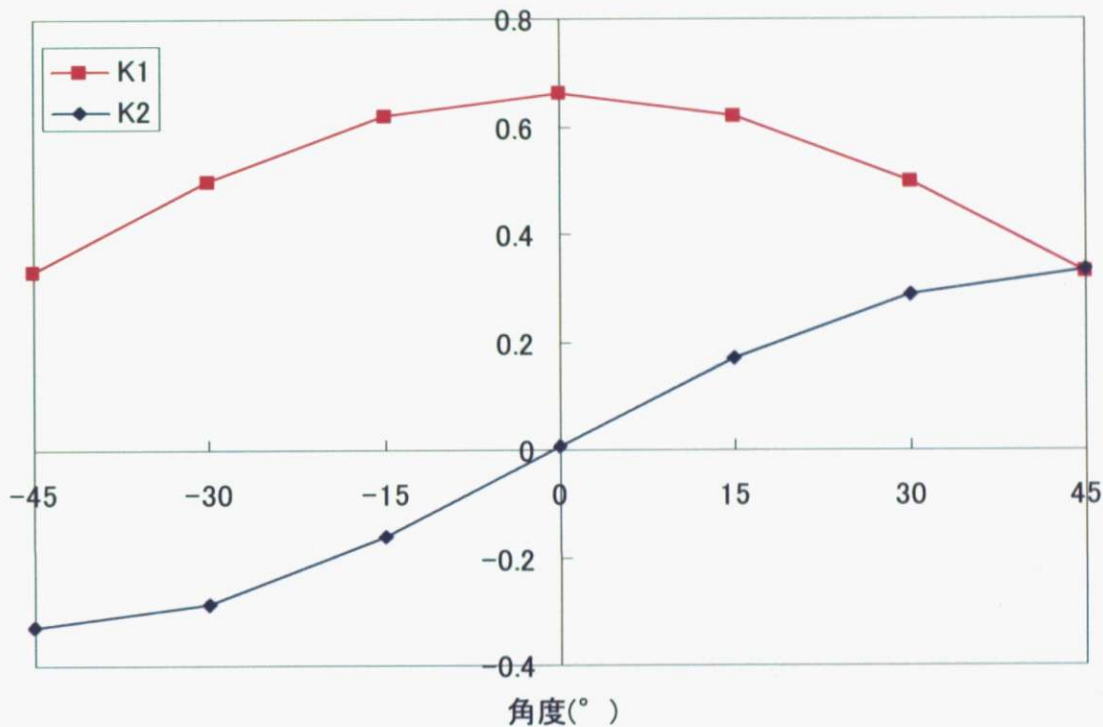


図 3.3.2 角度 θ と K 値の関係

以下に考察を記す．要素での主応力方向から求めた値で初期き裂を作成した場合において K1 が最大の値が得られ，初期き裂方向を定める理論として正しいことが分かった．また，局所的な最大を持つ角度と比較した場合でも誤差はほとんど無く，非常にいい解が得られたと思う．

3.3.2 特異点から生じる初期き裂

以下のようなL字形の構造物にX方向に荷重を加えたとき、黄色の点（特異点）に生じる初期き裂の方向を考える。

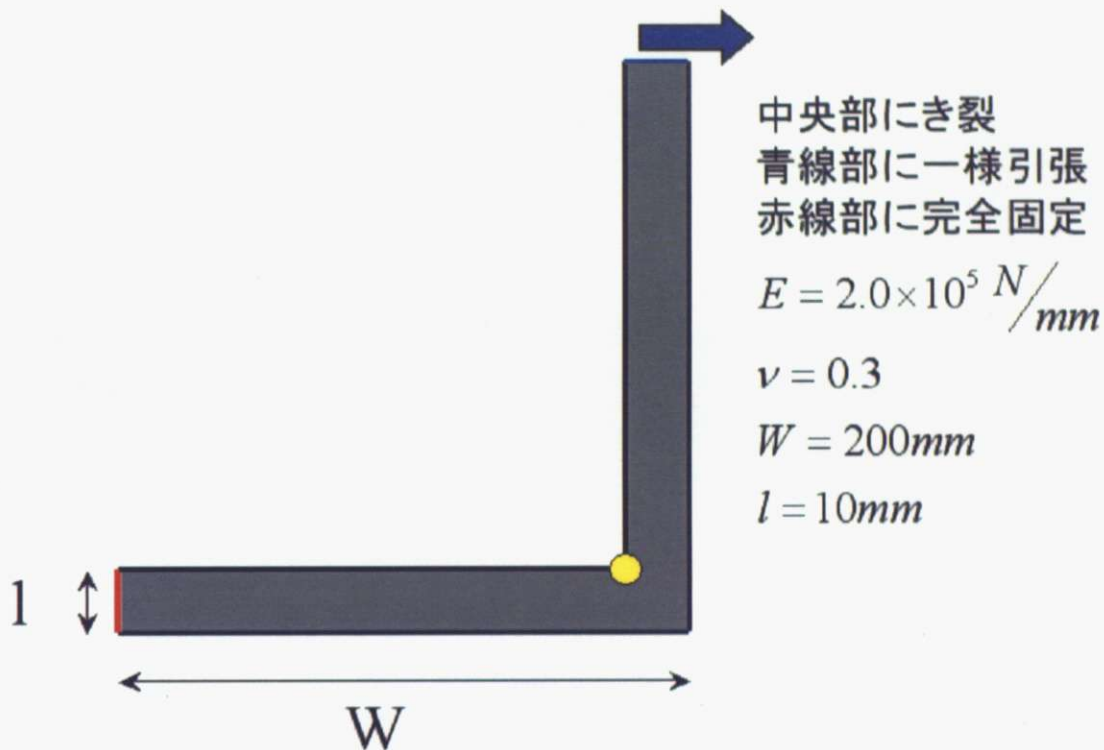


図 3.3.3 特異点を持つ解析対象

き裂発生部位は、解析において点を指定することとなる。そこで、点の主応力方向を求める。節点応力は以下の考え方に従い求める。

まず、平均化された要素内応力を σ_{FEM} とし、形状関数を N 、節点応力を $\bar{\sigma}$ としたとき、領域内では以下の式が成り立つ。

$$\int_{\Omega} (\sigma_{FEM} - N\bar{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (3.3.1)$$

ここで両辺に形状関数の転置マトリクス N^T をかけることにより、

$$\int_{\Omega} N^T (\sigma_{FEM} - N\bar{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (3.3.2)$$

$$\left(\int_{\Omega} N^T N d\Omega \right) \bar{\sigma} = \int_{\Omega} N^T \sigma_{FEM} d\Omega \quad (3.3.3)$$

両辺を整理して

$$\bar{\sigma} = \frac{\int_{\Omega} N^T \sigma_{FEM} d\Omega}{\int_{\Omega} N^T N d\Omega} \quad (3.3.4)$$

つまり，節点応力は上式を領域全体で解くことにより得られる．

このとき特異点の主応力方向は

$$\theta = -45.3744^\circ$$

このときの K 値は

$$K_I = 222.4593$$

$$K_{II} = -4.3726$$

となりせん断方向の K 値が非常に小さくなっていることがわかる．

以下に特異点における角度と K 値の関係を示す．また，主応力方向に初期き裂を配置した場合のき裂進展図を示す．

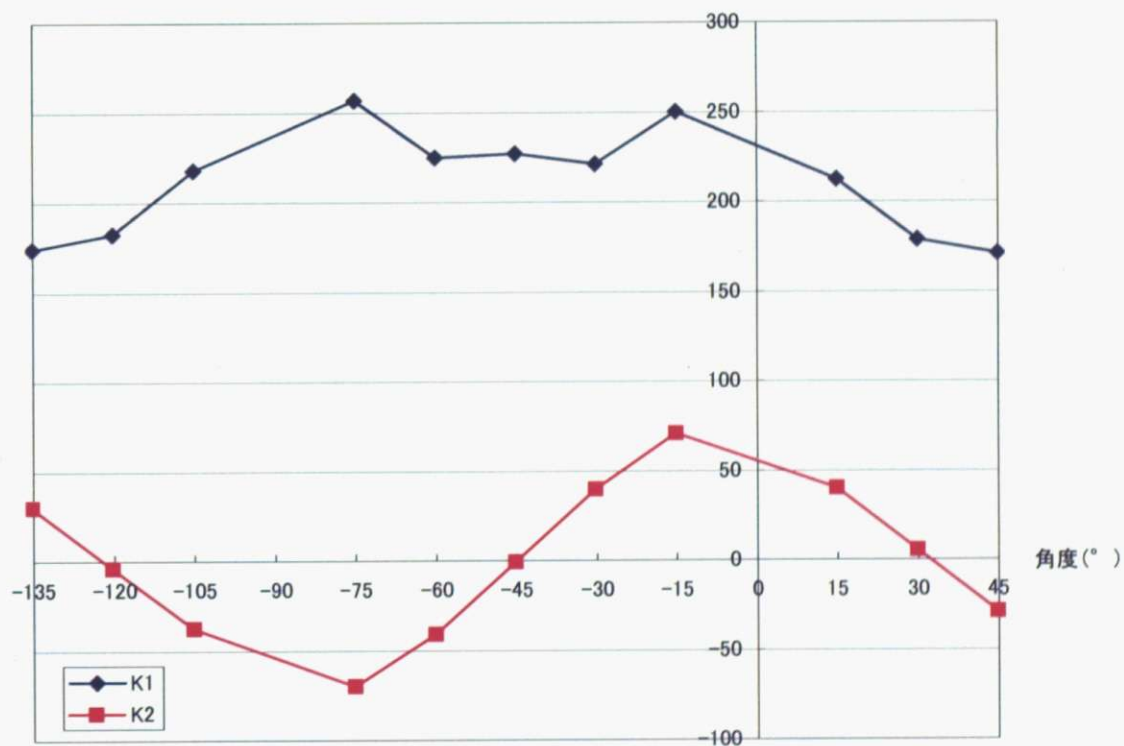


図 3.3.4 特異点からの角度と K 値の関係

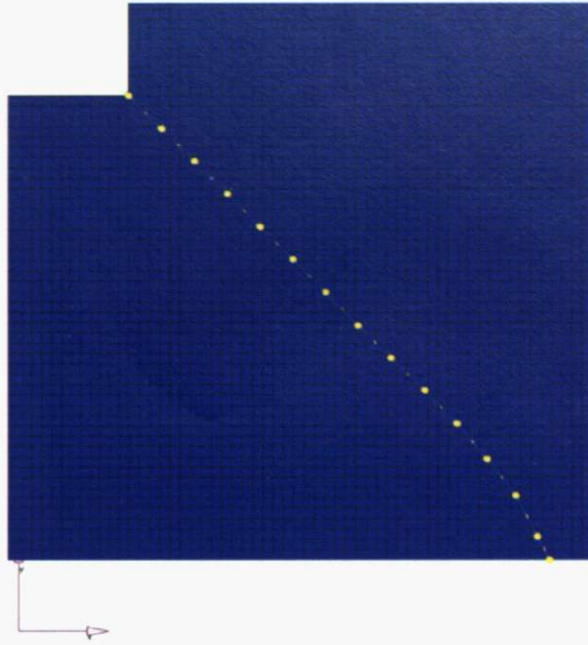


図 3.3.5 主応力方向から作成した初期き裂のき裂進展図

まず, 特異点からの角度と K 値の関係について考察する. 主応力方向, つまり -45° では K_{II} がほぼ 0 になっている. 理論的には主応力と 90° なす方向, つまり, $+45^\circ$ 及び -135° でも K_{II} がほぼ 0 になるはずであるが, 実際は初期き裂の大きさがあることにより, 特異点以外の領域の影響を受け, K_{II} がほぼ 0 となる方向は $+30^\circ$ 及び -120° である.

つぎに K_I について考察する. K_I は主応力方向では大きな値をとるが最大ではない. これは初期き裂の方向により応力を受ける長さが変化すること, また特異点以外の領域の影響を受けることこの二つにより -15° 及び -75° の位置で最大となっているものと思われる.

主応力方向から作成した初期き裂のき裂進展図について考察する. 初期き裂に関して K_{II} がほぼ 0 であるので, そのまま直線的にき裂が進展している. これにより初期き裂は主応力方向を用いたアルゴリズムで十分実用的であると考えられる.

3.4 疲労寿命を考慮した構造最適化数値解析例

3.4.1 はじめに

本項目では、3.2 で記した複数き裂進展および 3.3 で記した初期き裂策定を用い、総繰返し回数を計算することで疲労寿命を計算し、この結果を用いて構造最適化を行うことを目的とする。

疲労寿命を計算する上では現状の解析では、壁面に達した場合の繰返し回数計算に対し、理論的に不十分であることが認められる。以下に、上記事例に対する理論の考察を記する。

また、構造最適化を行う場合のメッシュ生成法についても説明を行う。

3.4.2 疲労寿命を求めるための理論の考察

き裂が壁面に達した場合について考える。き裂が壁面に達すると破断が生じる。ここで問題となるのが破壊形態の変化である。本研究で行うき裂進展は疲労破壊に分類される。しかし、破断に際して行われる破壊は材料が耐えられる機械的強度を超えたときに起こる破壊である。ここで、機械的強度を超えたときに起こる破壊が起こる状況に関して、その時点で応力拡大係数は非常に高くなっており、これによりき裂進展速度は速くなる。これにより、荷重繰返し回数は無視できる回数となり、破断時に関してき裂進展解析を行い続けても理論上整合性が保たれる。

また、破断に際しても、 J 積分の積分範囲が解析領域を飛び出さないよう留意する必要がある。

3.4.3 数値解析対象と構造最適化のためのメッシュ生成法

本解析において以下の解析対象を用いた。

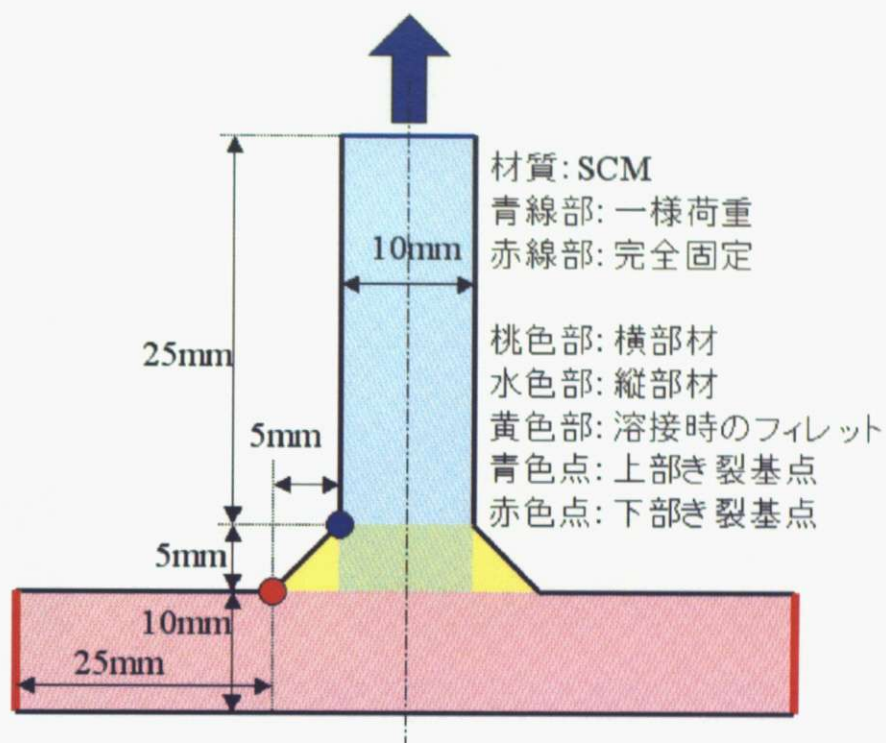


図 3.4.1 構造最適化の数値解析例

き裂基点となる点は、図の緑の2点を使用し、図上部の点から発生するき裂を「上部き裂」、また図下部の点から発生するき裂を「下部き裂」と呼ぶことにする。

次に、形状変更の様式について考える。形状変更は以下の図のようにする。

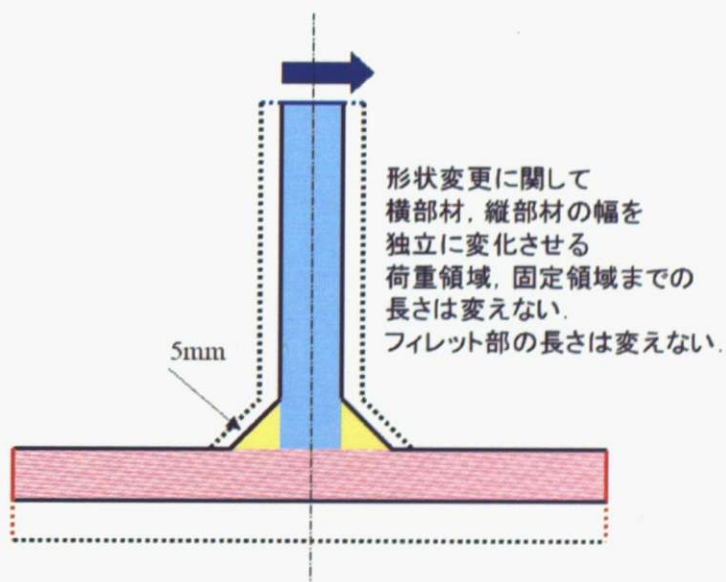


図 3.4.2 形状変更の形式

3.4.4 形状変更前数値解析結果

次に形状変更前のき裂進展図及び繰り返し回数とき裂進展速度の関係を示す。

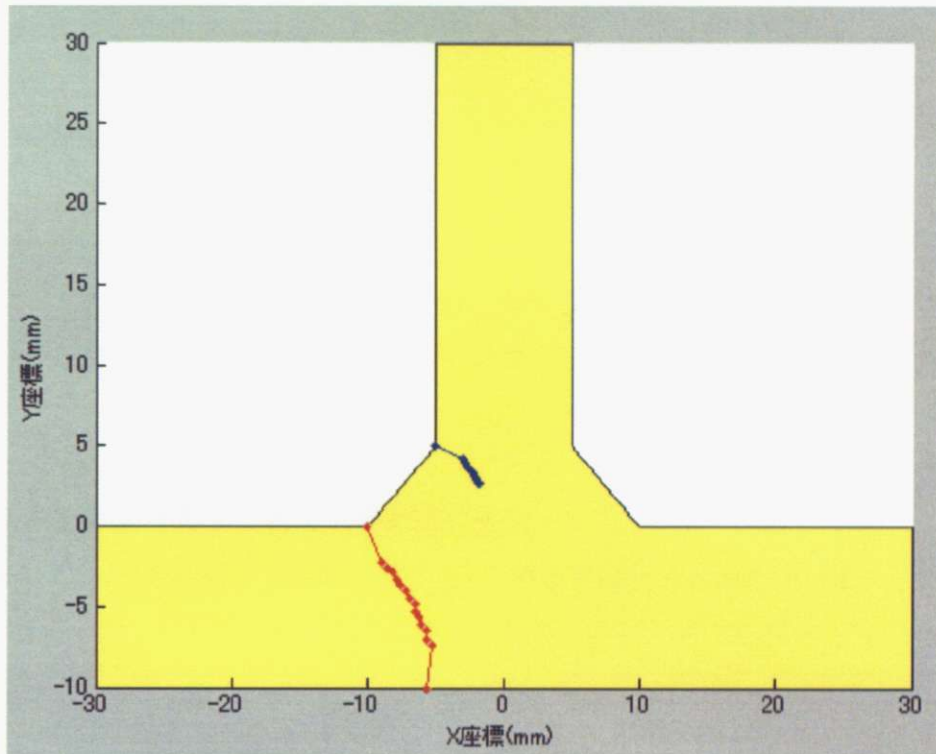


図 3.4.3 形状変更前のき裂進展図

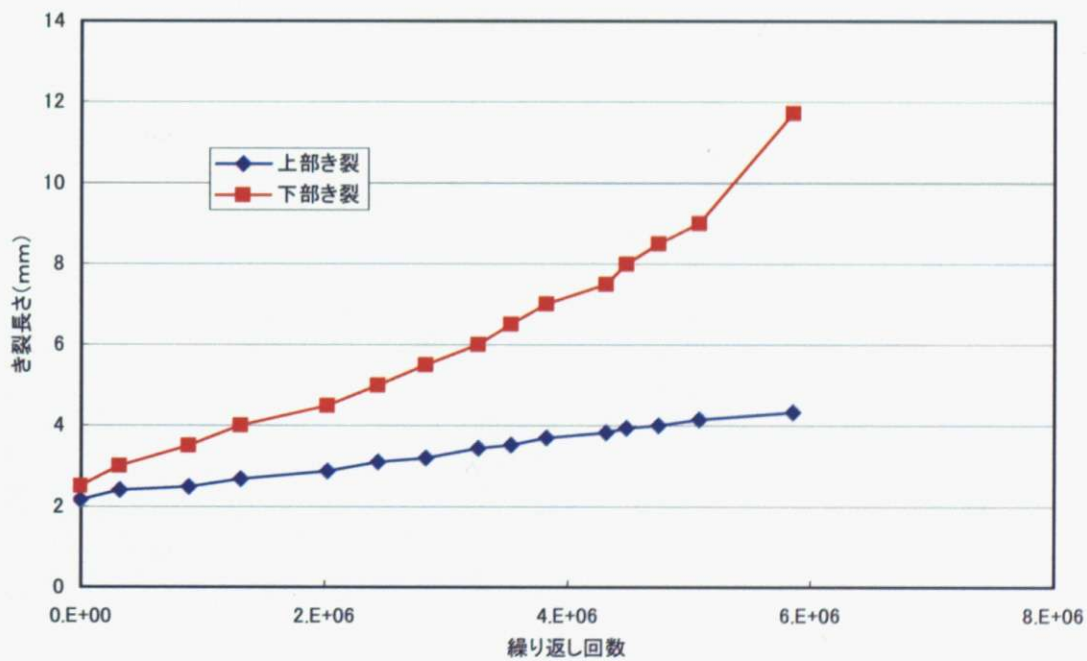


図 3.4.4 形状変更前のき裂進展長さと繰り返し回数の関係

以下に形状変更前のき裂についての考察を記す。

- ・き裂進展方向に関して

初期き裂は主応力方向に伸ばしているが、両き裂とも初期き裂とほぼ同一の方向に伸びている。また、最終的な破断時には応力状態が変わるため、き裂進展方向が左に傾く結果となっている。

- ・繰り返し回数とき裂進展長さについて

初期の段階の進展速度を保ったまま両き裂とも進展している。しかし、途中から下部き裂において徐々にき裂進展速度が高まっているのに対し、上部き裂のき裂進展速度はそのままである。これは、下部き裂の進展速度上部き裂の進展速度に比べて速いために、下部き裂がより進展し、その結果、下部き裂への応力集中が増し、下部き裂の進展速度を速めているのである。

3.4.5 形状変更による疲労寿命と進展経路の変化

以上を用いて、縦部材幅を 10mm から 5mm、横部材幅を 10mm から 5mm に変化させた場合の応答曲面を示す。

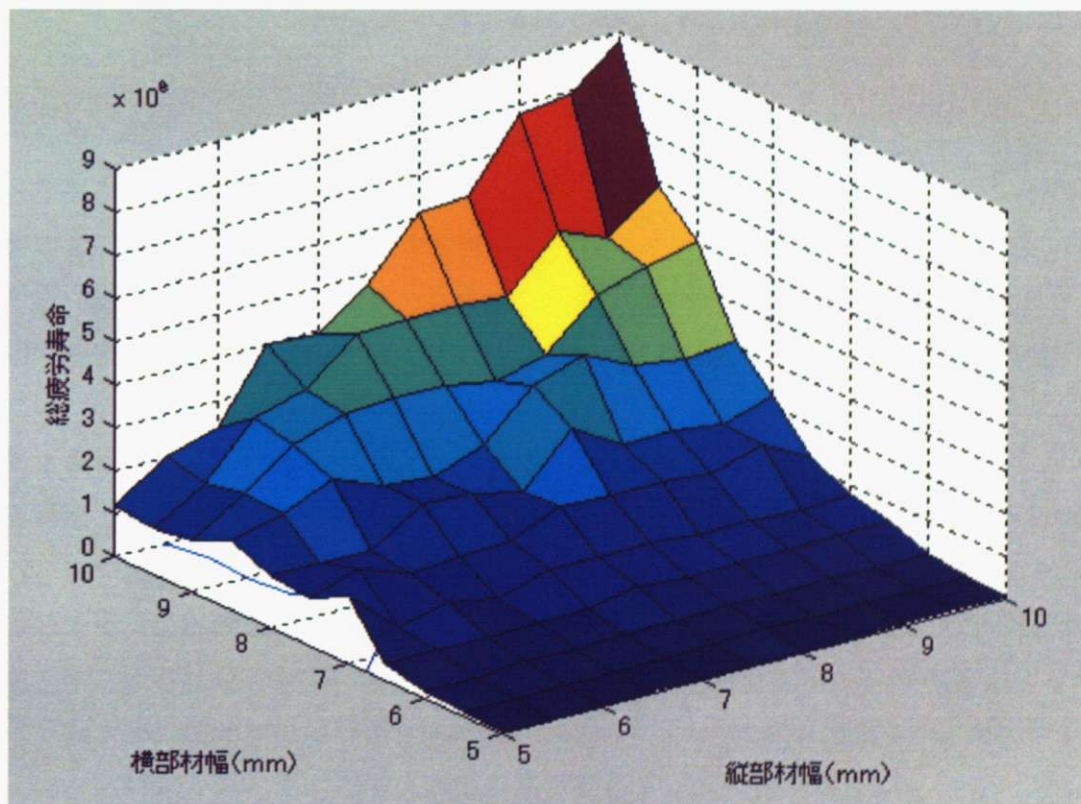


図 3.4.5 き裂を 2 本同時に進展させた場合の総疲労寿命

	縦部材幅										
	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
横部材幅	10mm	×	×	×	×	×	×	×	○	○	○
	9.5mm	×	×	×	×	○	○	○	○	○	○
	9.0mm	×	×	×	○	○	○	○	○	○	○
	8.5mm	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	8.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	7.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	7.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	6.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	6.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	5.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	5.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

図 3.4.6 き裂を 2 本同時に進展させた場合の各部材幅と破断したき裂

(×は上部き裂が破断, ○は下部き裂が破断)

以下に形状変化に関する考察を記す.

・応答曲面形状に関して

概要としては, 縦部材, 横部材ともに幅を短くすると疲労寿命は短くなっている. しかし, 縦部材幅 10mm, 横部材幅 10mm の状態で, 破断するのが下部のき裂であることにより, 縦部材幅のみを短くした場合の疲労寿命の減少は, 横部材幅のみを短くした場合の疲労寿命の減少に比べ小さくなっている.

・破断き裂に関して

縦部材幅 10mm 横部材幅 10mm では, 下部き裂が延びているためある程度縦部材幅を短くしても下部き裂が破断原因となっている. 縦部材幅を 8.5mm まで短くするとようやく上部き裂が進展する. また縦部材幅をより短くすると横部材幅が少し短い場合でも上部き裂が原因の破断をするようになるが, その場合の縦部材幅を横部材幅で割った値は小さくなっている. これは上部き裂が破断原因になるためには, つまりより上部き裂の部位で応力集中を起こすためには横部材幅を短くする以上に縦部材幅を短くしなければならないということを意味している.

次に縦部材幅のみ，または横部材幅のみを変化させた場合について示す．

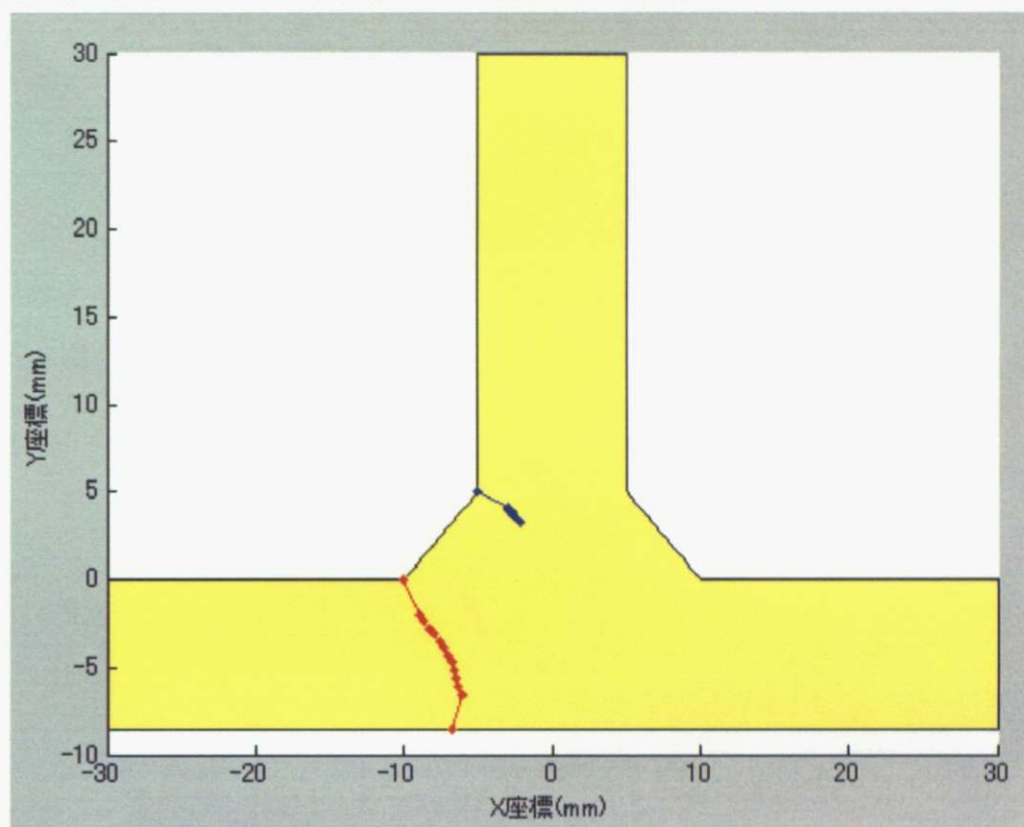


図 3.4.7 横部材幅 8.5mm とき裂進展線

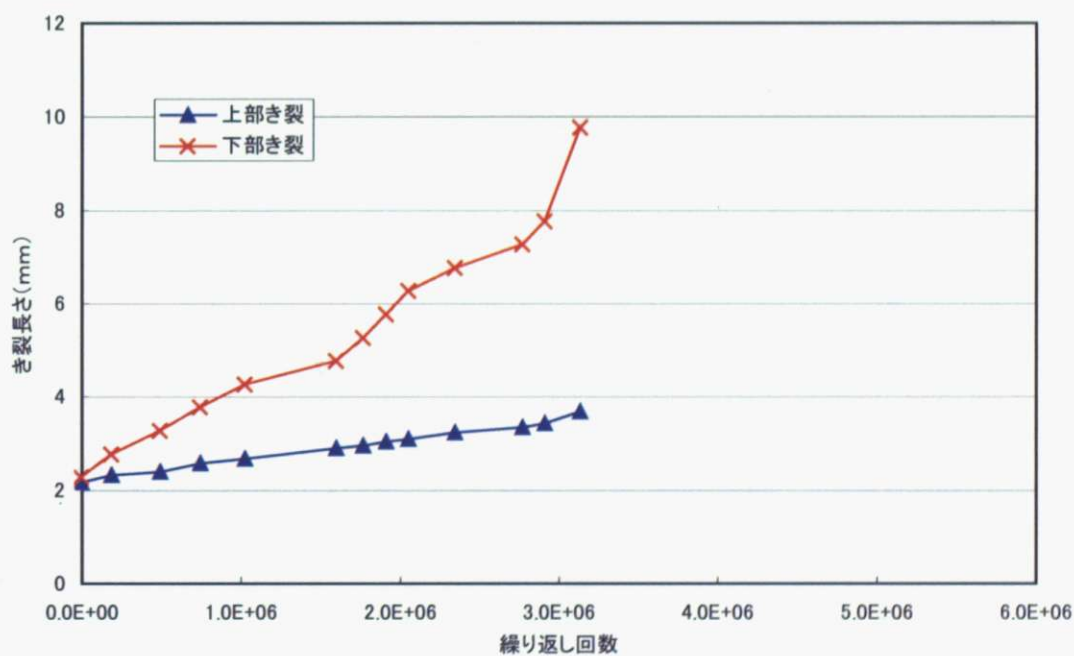


図 3.4.8 横部材幅 8.5mm における繰り返し回数とき裂進展長さ

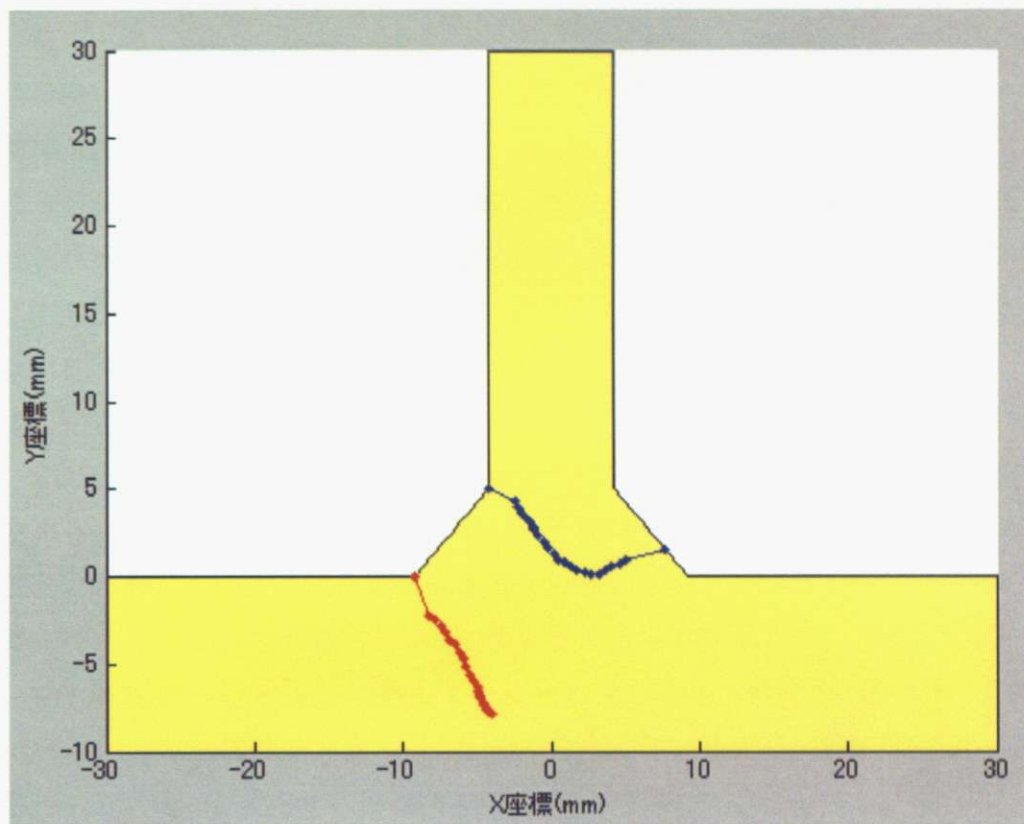


図 3.4.9 縦部材幅 8.5mm とき裂進展線

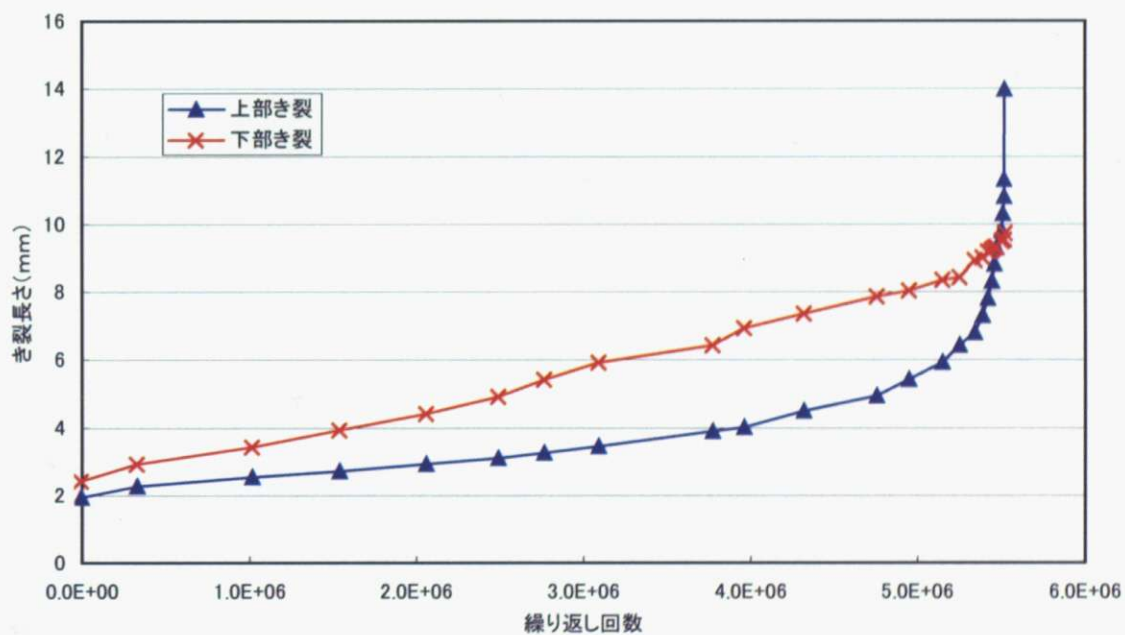


図 3.4.10 縦部材幅 8.5mm における繰り返し回数とき裂進展長さ

以下に縦部材幅のみ、または横部材幅のみを変化させた場合の考察を記す。本研究では形状変更前と縦部材、横部材それぞれ1.5mm短くした場合を比較した。

- ・き裂進展方向について

き裂進展方向に関しては各部材の幅を変化させても大きな差異は無かった。ここで、き裂寿命はき裂進展経路長をき裂進展速度で割った値である。各部材の幅の変化によってき裂進展方向、き裂進展経路長共に変化しないということは、各部材の幅による応力集中が疲労寿命に大きな相関をなしていると考えられる。

- ・繰り返し回数とき裂進展長さの関係について

まず、初期のき裂進展速度に関しては、縦部材幅を小さくすると上部き裂の進展速度、横部材幅を小さくすると下部き裂の進展速度それぞれが速くなっている。これは、初期の状態ではき裂長さが非常に小さく、き裂進展速度に付与しているのは構造物がもともと持っている応力集中であり、応力集中はそれぞれの部材幅によって決まっているからである。

次に、横部材幅のみを8.5mmに短くした場合をしてみる。形状変化前つまり縦部材幅10mm横部材幅10mmの場合は下部き裂が進展し破断していたので、横部材を短くした場合は下部き裂への応力集中が高まり、下部き裂のき裂進展速度が速くなっている。一方、上部き裂では応力集中は変化が無いために上部き裂のき裂速度は変わっていない。しかし、上部き裂の最終的なき裂進展距離は下部き裂の進展速度の速さや縦部材が短くなったことによる破断までの繰り返し回数の減少により、短くなっている。

縦部材幅を8.5mmに短くした場合をしてみる。この場合の繰り返し回数とき裂進展長さの関係は非常に特徴的である。初期状態では応力集中の関係から下部き裂の進展速度が速いが、上部き裂の進展長さが6mm付近になると、上部き裂が延びたために接着面積が小さくなり上部き裂の応力集中が高まり進展速度が上がる。これにより、下部き裂の進展速度を追い越し破断へと導いている。このような破断をする場合では、両き裂とも進展するため、破断のためのエネルギー消費が大きくなり疲労寿命が長くなっている。

3.4.6 き裂線独立進展との比較

次に複数き裂進展の特徴をき裂 1 本ずつ進展させた場合との比較により確認をする。この場合は上部き裂基点もしくは下部き裂基点の片方からき裂を作成し、そのまま進展させていった場合どちらのき裂が先に破断するかを計算し、先に破断するき裂の必要繰り返し回数を総疲労寿命とする。このときの応答曲面、破断き裂線、2 本同時進展との誤差は以下のようにになっている。

ここでき裂 1 本ずつ進展させた疲労寿命 N_1 とき裂 2 本同時進展させた疲労寿命 N_2 の誤差は、

$$Err = \frac{|N_1 - N_2|}{N_2} \times 100 \quad (3.4.1)$$

で表わすことができる。

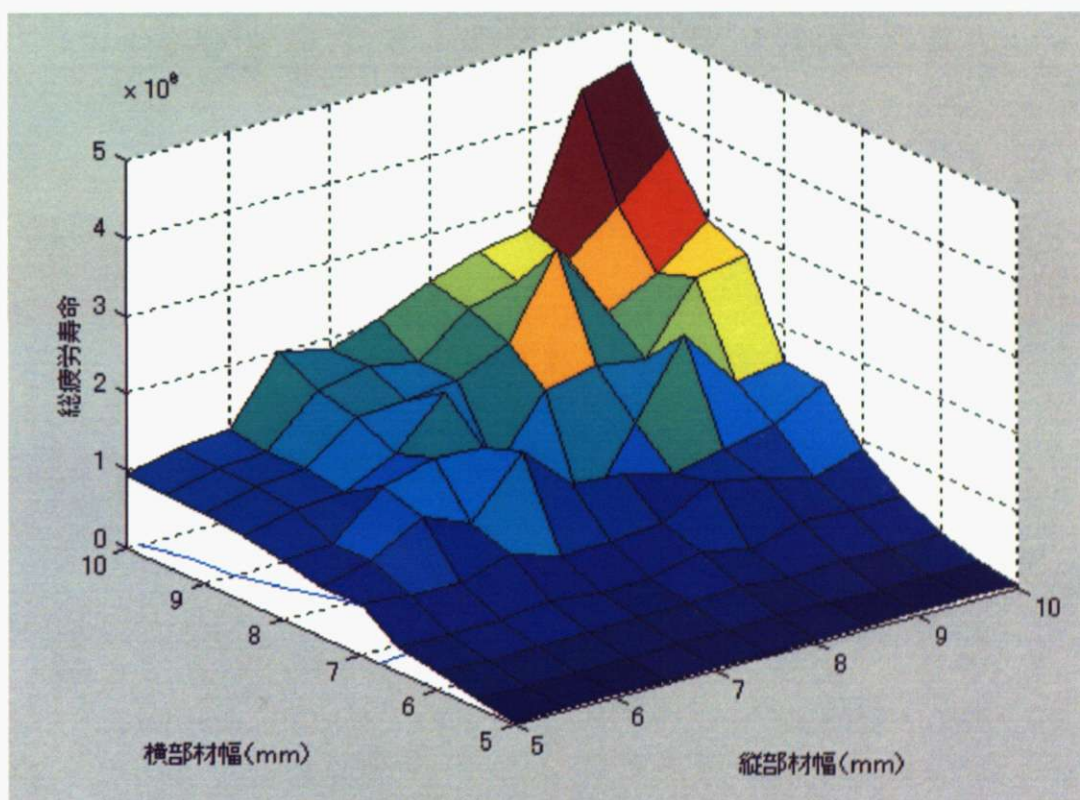


図 3.4.11 き裂を 1 本に進展させた場合の総疲労寿命

横部材幅	縦部材幅										
	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
	10mm	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	9.5mm	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	9.0mm	×	×	×	×	×	×	○	○	○	○
	8.5mm	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○
	8.0mm	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○
	7.5mm	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	7.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	6.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	6.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	5.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	5.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

図 3.4.12 き裂1本を進展させた場合の破断き裂
(×は上部き裂が破断, ○は下部き裂が破断)

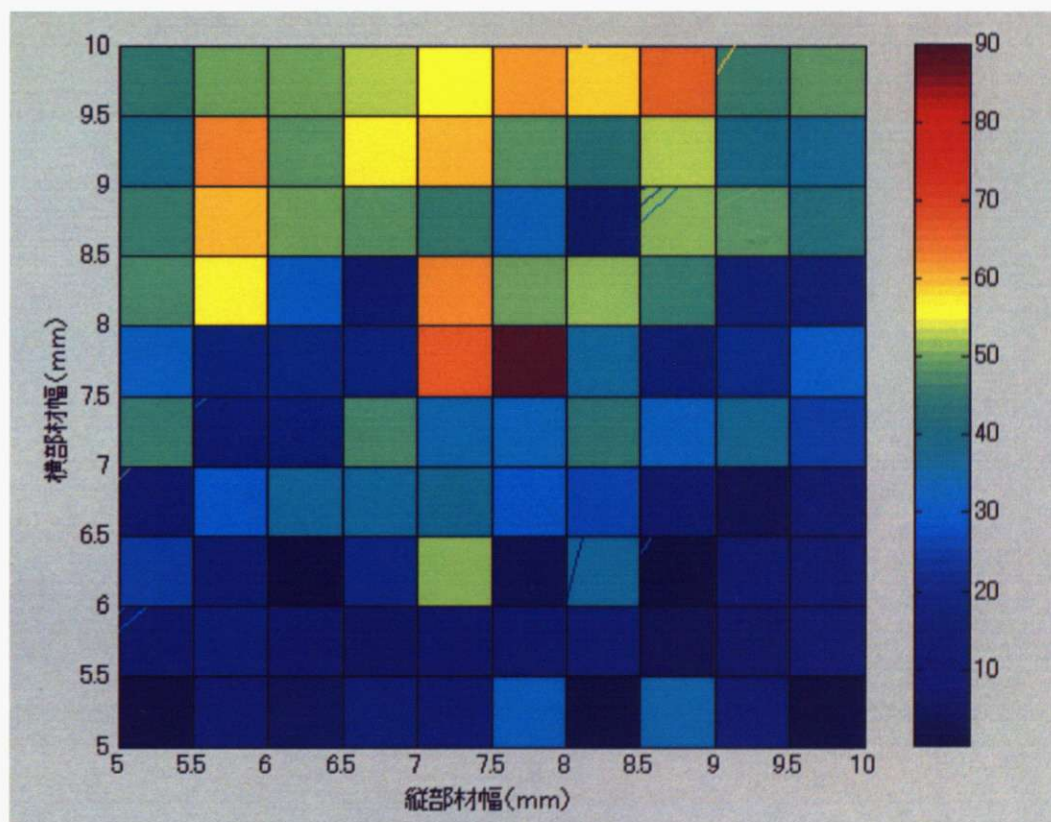


図 3.4.13 き裂1本を進展させた場合の疲労寿命誤差

以下にき裂1本ずつ進展させた場合の考察を行う

- ・き裂を1本ずつ進展させた場合と2本進展させた場合の寿命誤差は、平均で23%となり、2本同時進展させたほうが寿命は長くなる。これは、2本目のき裂を進展させるのにエネルギーを必要とし、1本の場合よりも寿命が長くなる。

- ・誤差が小さいのは片方のき裂が支配的に伸びる縦部材幅10mm横部材幅5mmの場合である。これに対し誤差が大きくなるのは縦部材7.5~5.0mm横部材10~8.0mmの場合である。この場合は両方のき裂が相互に及ぼしあって進展するため、片方のき裂のみと比べて誤差が大きくなる。最適設計ではこの領域に解が集中することになり、結果的に正しくない答えが出るものと思われる。

- ・き裂を1本進展させた場合の破断き裂の境界は2本進展させた場合の境界に対して下がっている。これは、上部き裂と下部き裂を比べた場合、破断までの距離が縦部材幅10mm、横部材幅10mmだと、下部き裂のほうが短く、下部き裂が先に急速進展を起こしやすい環境が整っている。それゆえ、2本同時進展だと先に急速進展領域に届いたほうが破断を起こすため、この点で2本同時進展の場合下部き裂が破断しやすくなっている。

3.4.7 形状変更による von-Mises 応力の変化

現状の応力により評価する手法との比較を行うため形状変更させた場合の von-Mises 応力の変化について調査した。以下に各部材幅 10mm から 5.0mm まで変化させた結果を示す。

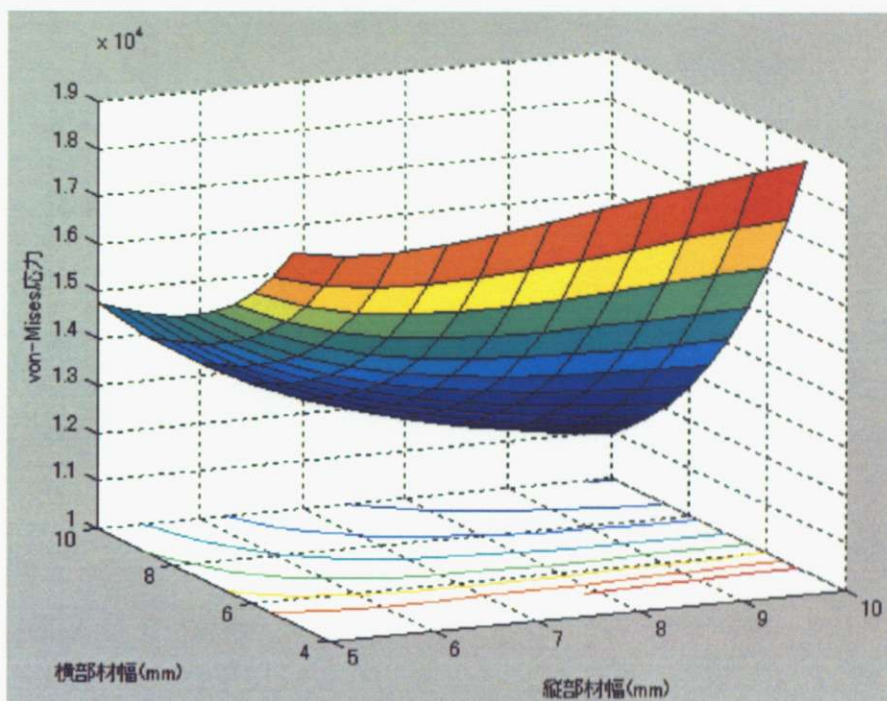


図 3.4.14 上部き裂基点の von-Mises 応力変化

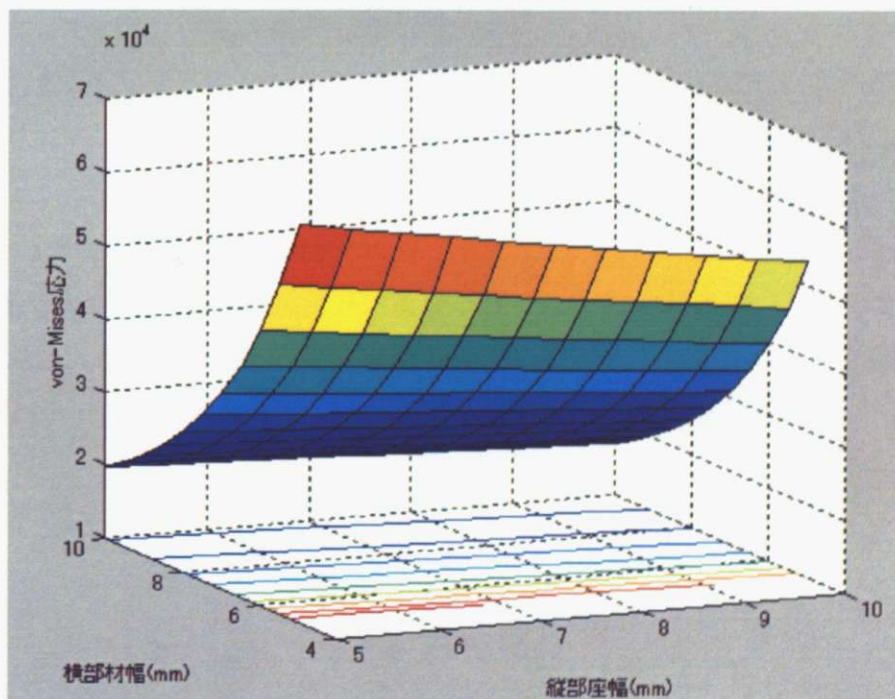


図 3.4.15 下部き裂基点の von-Mises 応力変化

横部材幅	縦部材幅											
		5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
	10mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	9.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	9.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	8.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	8.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	7.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	7.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	6.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	6.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	5.5mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
5.0mm	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	

図 3.4.16 von-Mises 応力の大きなき裂基点

以下に von-Mises 応力で評価した場合の考察を行う

・ von-Mises 応力の変化に関して

縦部材幅の変化では上部き裂基点の変化が大きくなっているが下部き裂基点の変化は微小となっている。これは、上部き裂基点の応力集中は、荷重の集中度と比例関係をなしていることを意味している。また横部材幅の変化では、下部き裂基点、上部き裂基点共に von-Mises 応力を大きくしている。これは下部の応力集中具合が上部まで達していることを意味している。

・ von-Mises 応力の大きなき裂基点について

本計算領域では常に下部き裂が大きい結果となった。この結果で、下部き裂は初期に進展しやすいき裂であることが分かる。また上部き裂の初期応力集中が小さいため、現状の応力による構造物評価では上部き裂の危険性は見落とされてしまう結果となる。

3.4.8 構造最適化

以上を基にして，構造最適化を行った．今回は重量制限を設けた場合について考える．以下に T 字バーの総重量を 6.63g としたときの部材幅について考える．

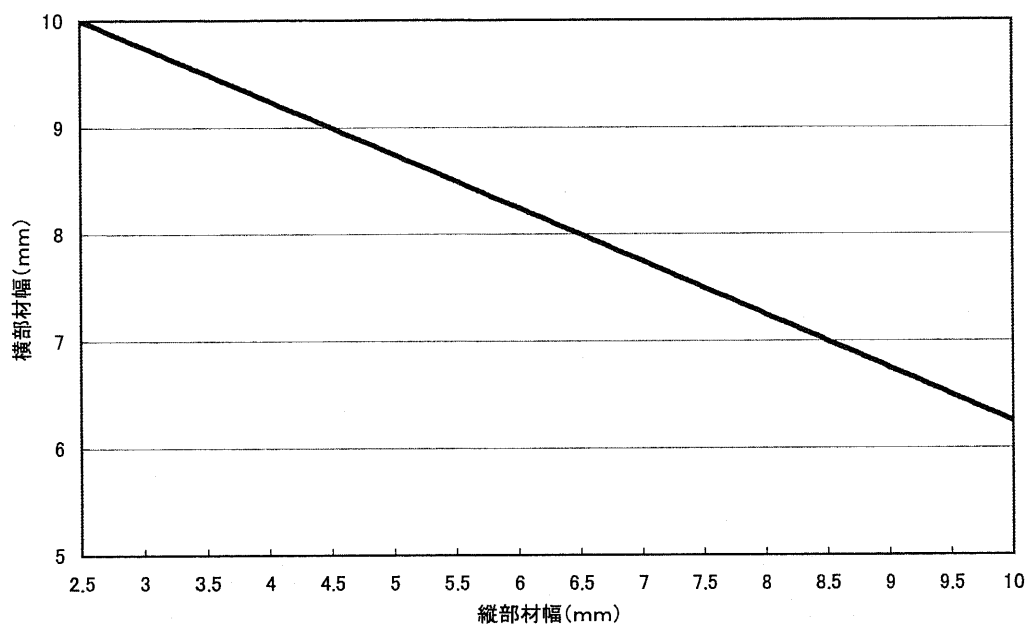


図 3.4.17 重量制限を加えたときの部材幅

部材幅に関しては以上のようになる．このときに関して最適化を行った．結果は以下のとおりである．

表 3.4.1 最適化初期値と解析結果

	最適化前 (初期条件)	最適化後	応力による最適化
縦部材幅	7.5mm	6.01mm	2.86mm
横部材幅	7.5mm	8.25mm	9.82mm
総疲労寿命	2.14×10^6 回	3.17×10^6 回	2.97×10^5 回
疲労寿命比	1	1.53	0.14

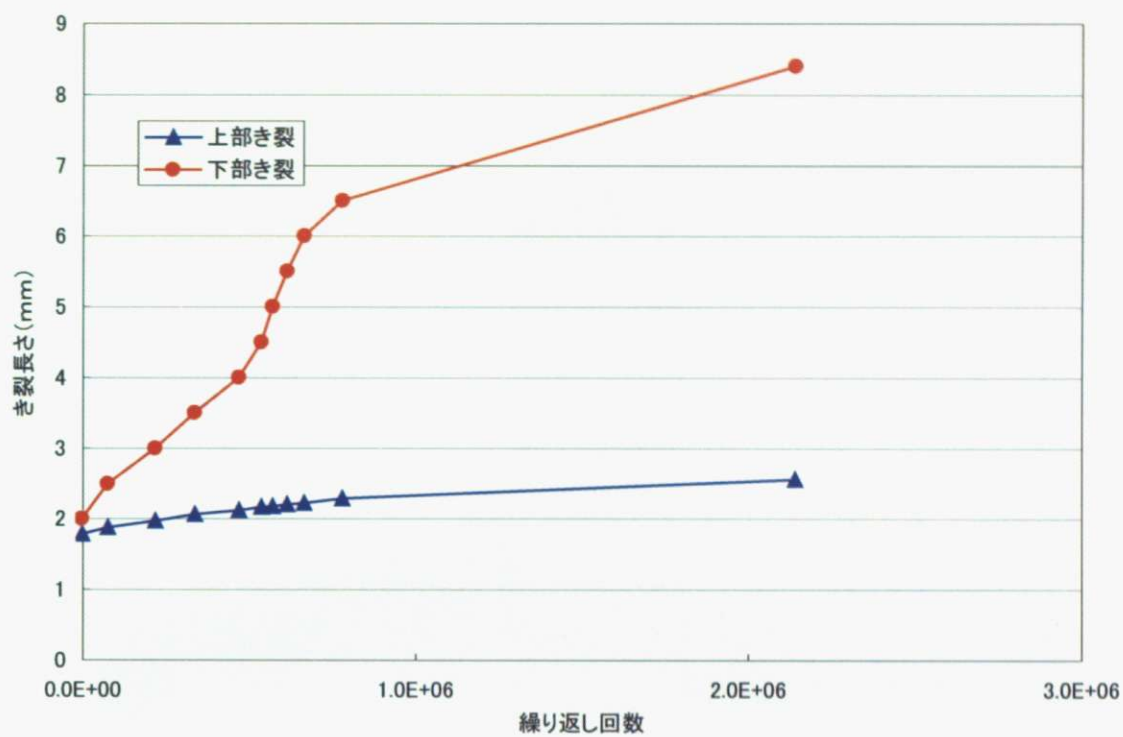


図 3.4.18 初期条件の繰り返し回数とき裂長さ

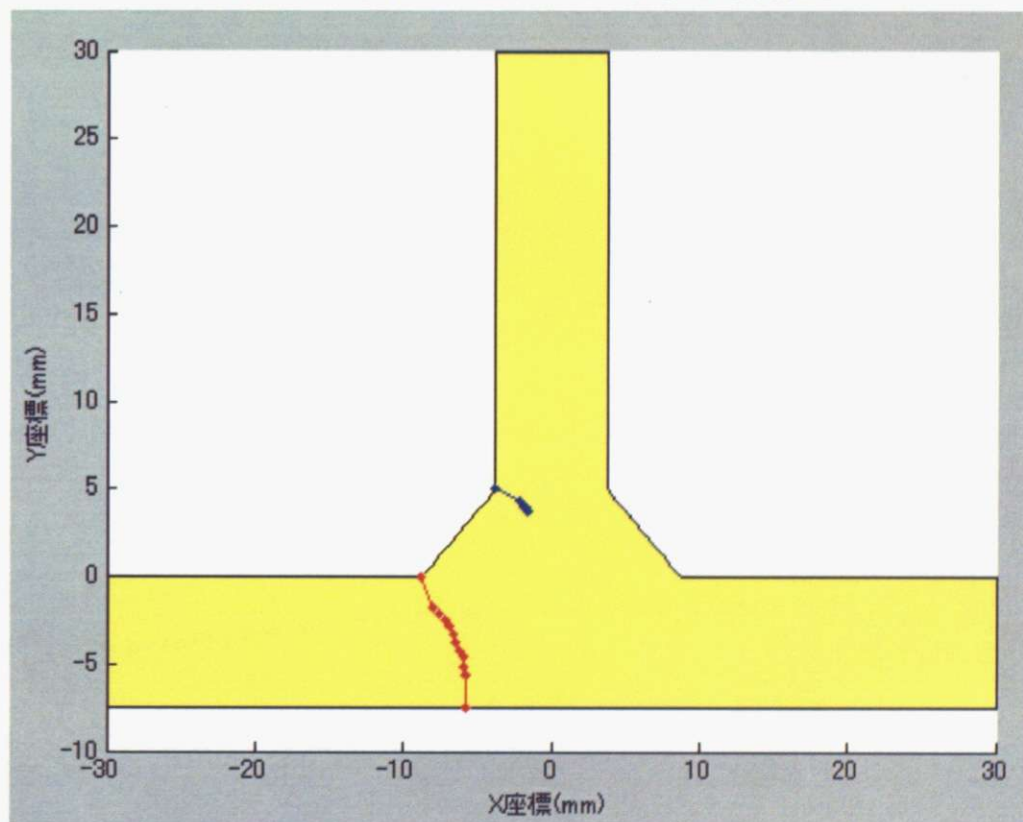


図 3.4.19 初期条件のき裂進展経路

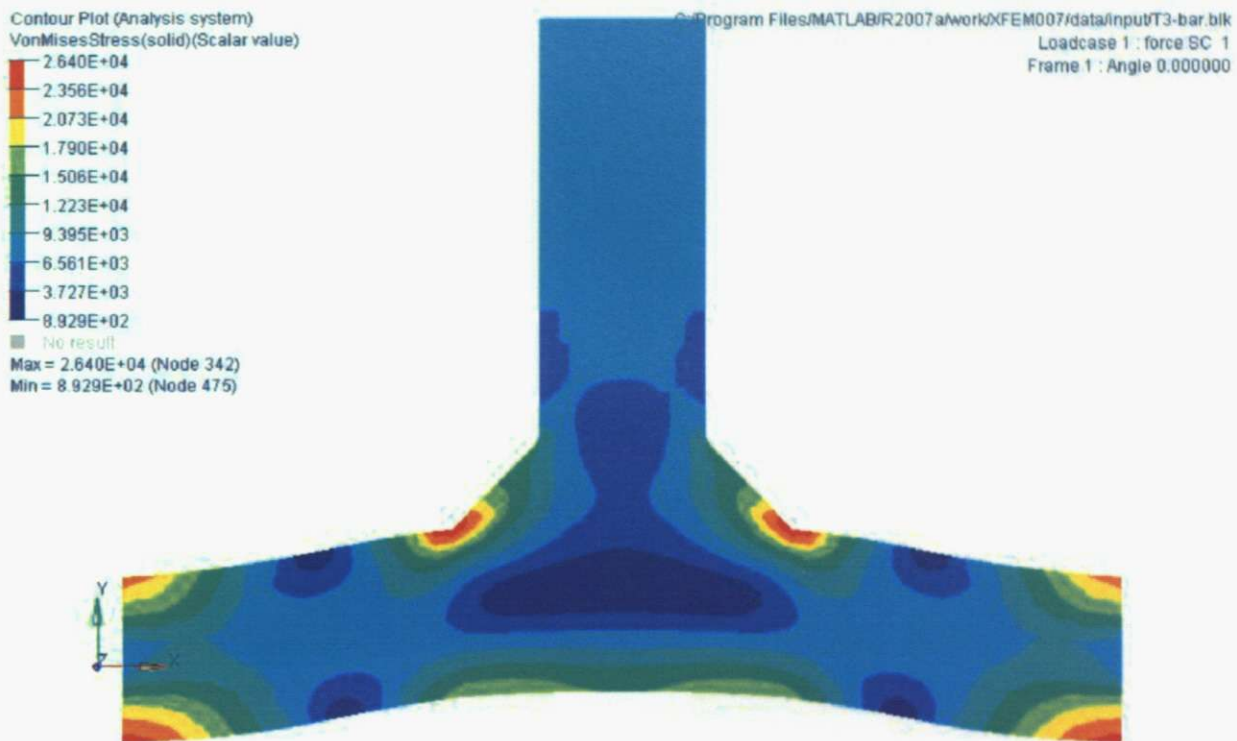


図 3.4.20 初期条件の応力分布

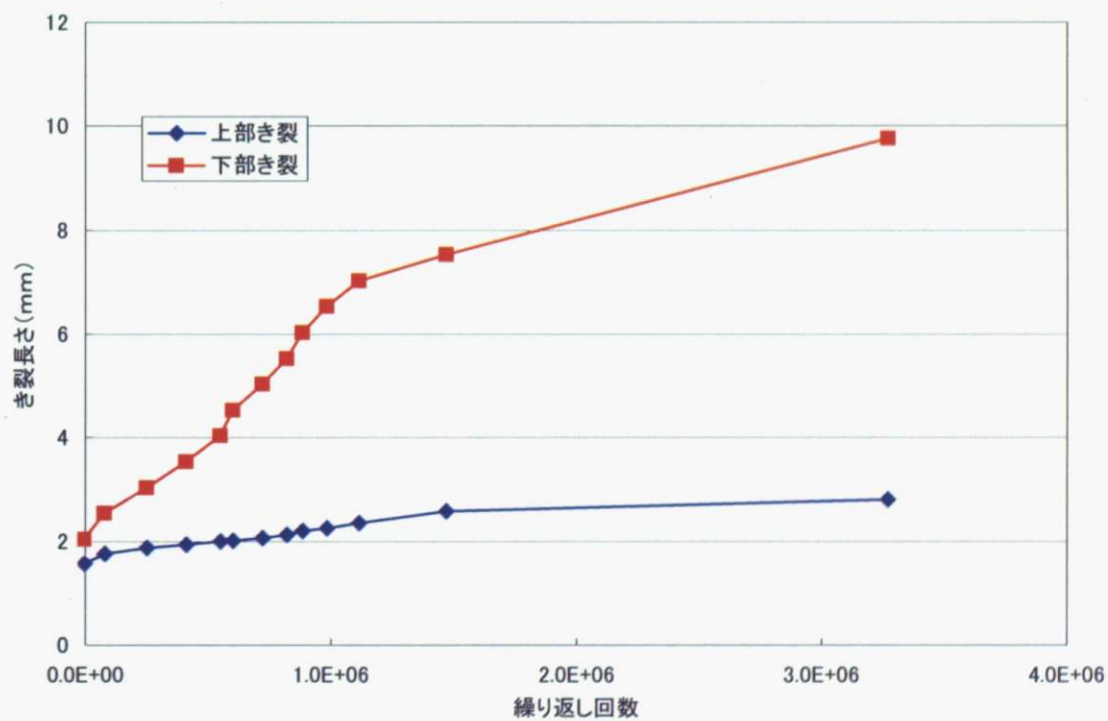


図 3.4.21 最適化後の繰り返し回数とき裂長さ

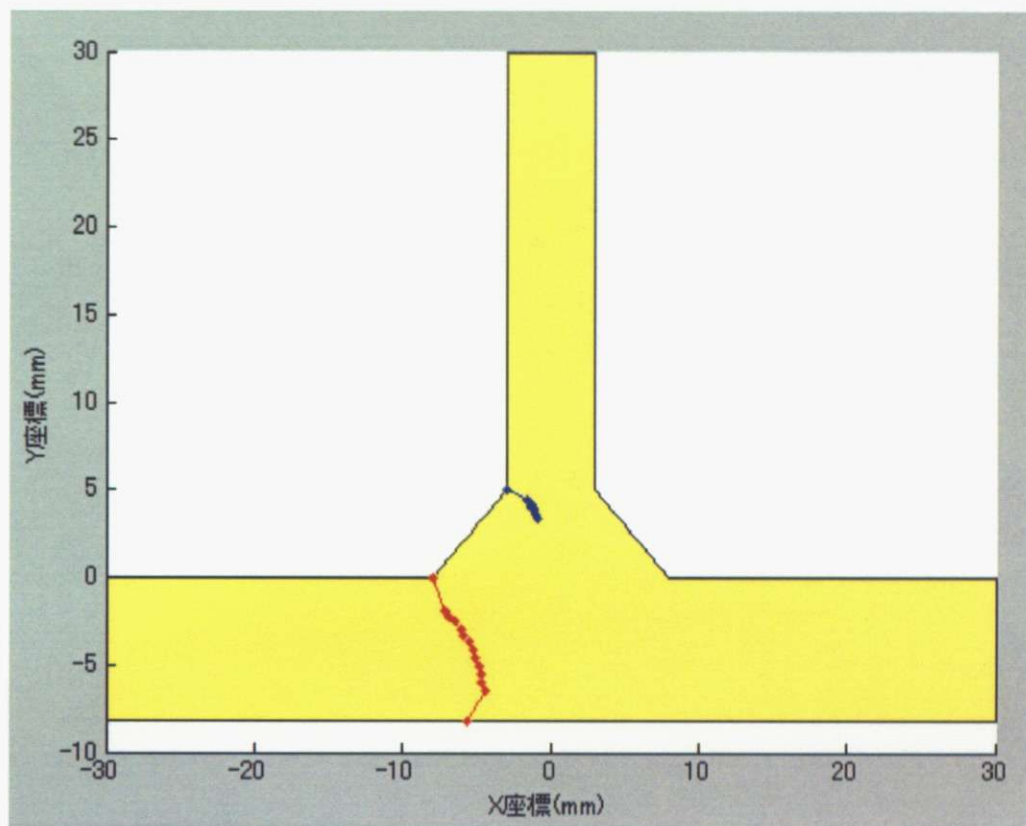


図 3.4.22 最適化後のき裂進展経路

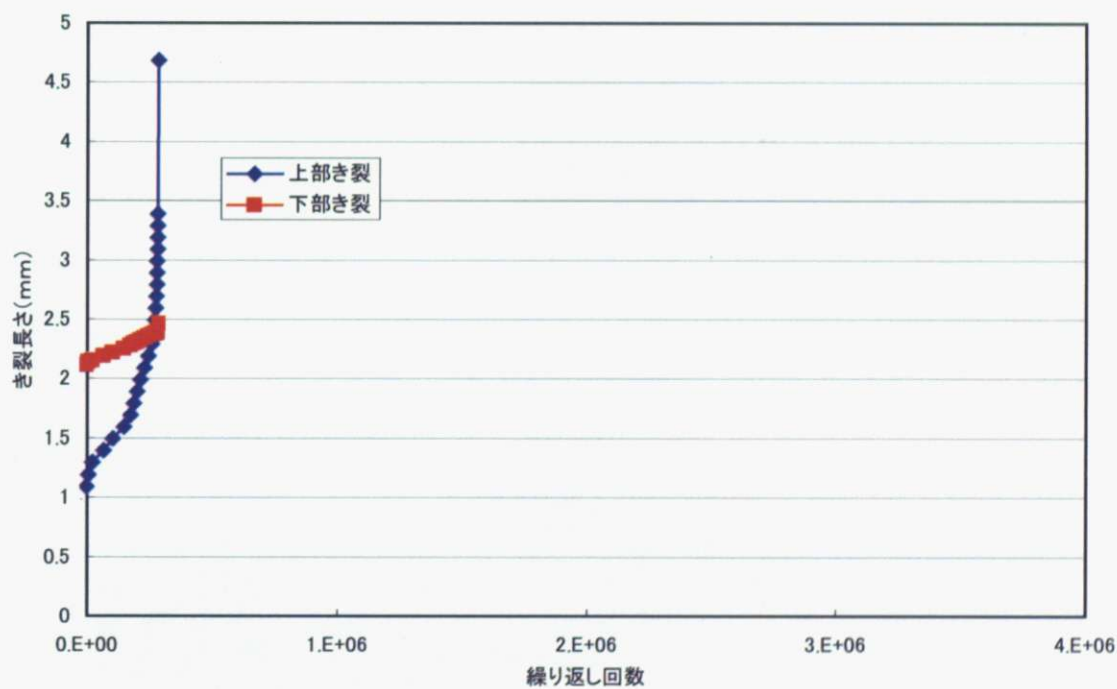


図 3.4.23 von-Mises 応力による繰り返し回数とき裂長さ

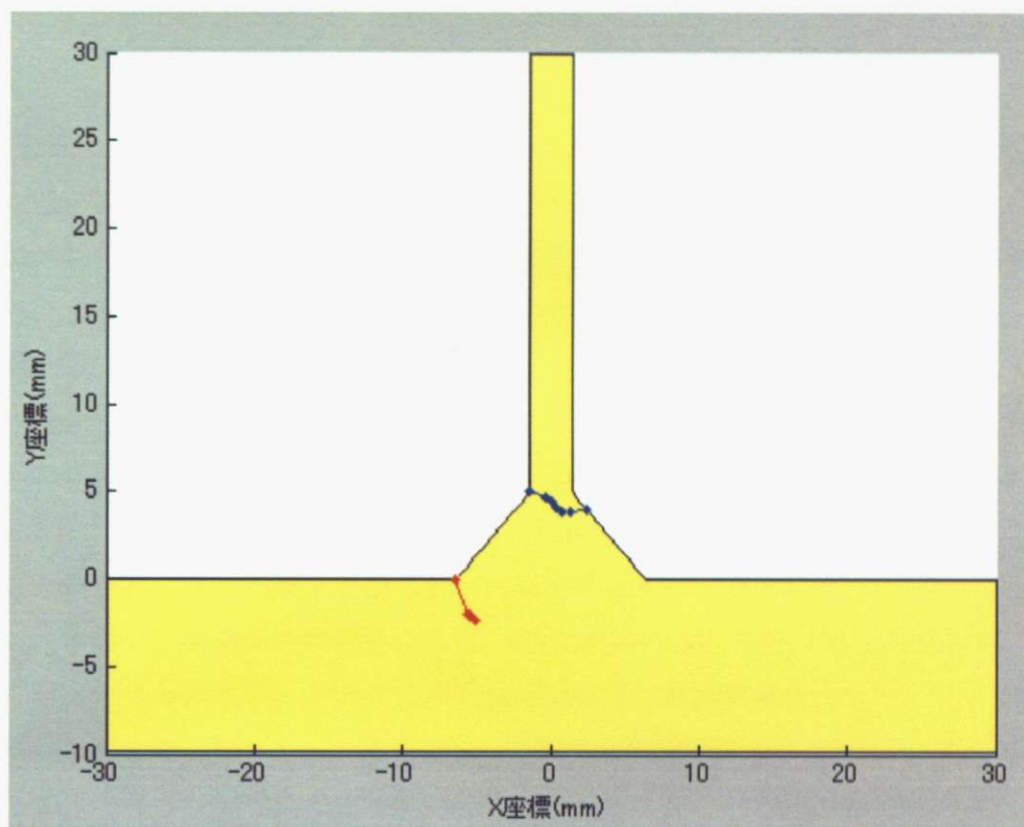


図 3.4.24 von-Mises 応力による最適化後のき裂進展経路

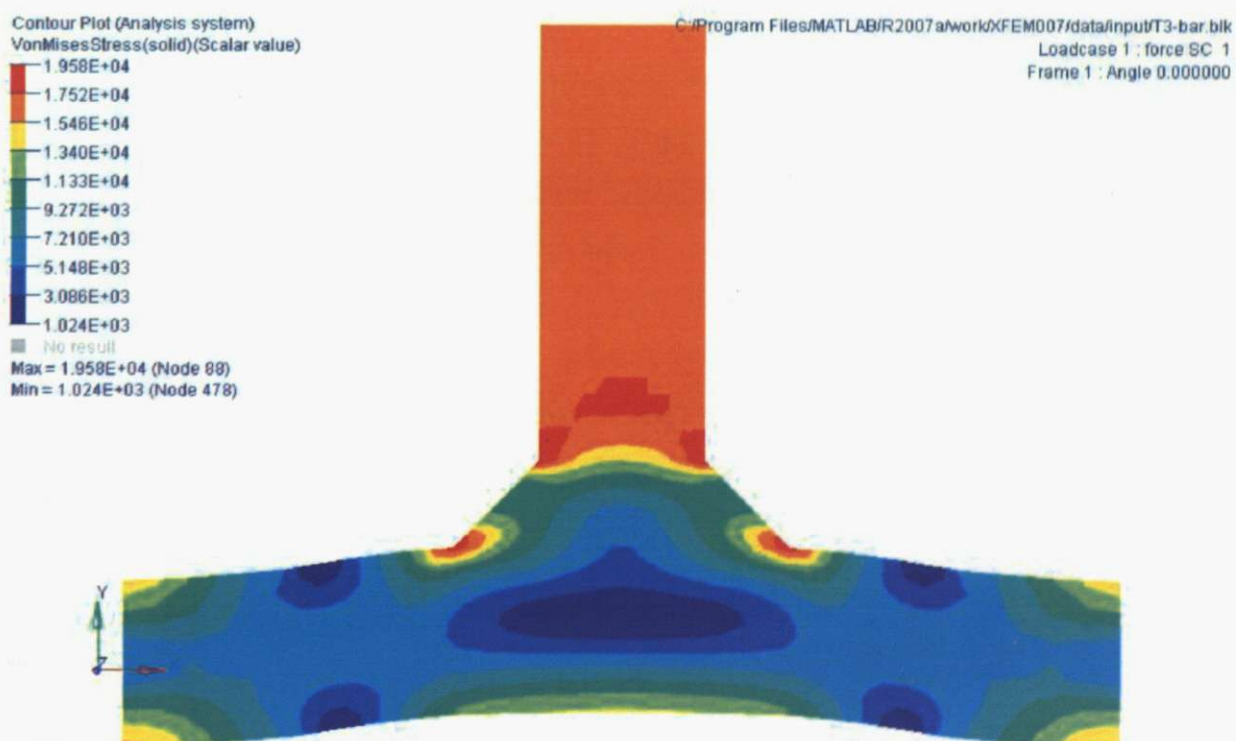


図 3.4.25 von-Mises 応力最適化後の応力分布

以上の最適化について考察を行う。

まず、疲労寿命を目的関数とした最適化の、最適化後の疲労寿命結果について考察を行う。疲労寿命は初期値の 1.53 倍となり、十分疲労寿命が長くなったと考える。これは、工学的安全率の観点からすると、現状のメンテナンス期間を維持し続ける場合、破断する確立は 0.65 倍になる。これは、材料使用量を変化させずに安全率を向上させる方法としてはかなりよいものとする。

次に、最適化後の寸法に関して考察する。疲労寿命を延ばすためには、3.4.4 で述べたように、双方のき裂を十分伸ばすことが重要である。これに基づく予想を立てると、図 3.4.5 と図 3.4.6 から、双方のき裂が伸びる縦部材幅 5.5mm 横部材幅 8.5mm 付近が最大になり、上部き裂が応力集中部位まで進展するもしくは破断するものと思われた。

しかし、本論分の重量制限の項目により、横部材幅を 1mm 短縮すると縦部材幅は 2mm 短縮されてしまうことにより、上部き裂が破断原因になる縦部材幅まで短くしてしまうと縦部材幅が横部材幅に対し短くなりすぎており、下部き裂が進展せず、結果的に疲労寿命が短くなってしまふと考えられる。それゆえ、今回は、ある程度上部き裂が進展し、また下部き裂が進展するのに十分な距離が存在する縦部材幅 6.01mm という長さで収束したものと思われる。

次に、き裂進展長さと繰返し回数の関係を最適化前と最適化後について比較しながら考察を行う。最適化前のき裂進展長さと繰返し回数の関係は一方的に下部き裂が伸びている。これに対し、最適化後の上部き裂は初期から下部き裂が応力集中するまである程度伸びている。これにより、疲労寿命が延びる結果となっている。

von-Mises 応力を目的関数とした最適化の最適化後の疲労寿命に関して考察する。最適化後の疲労寿命は、初期条件から約 7 分の 1 と非常に短くなってしまっている。これにより、最大 von-Mises 応力による最適化は、疲労寿命の面から考慮するとマイナスの効果を起こしていることが分かる。次に最適化後の応力集中は、縦部材幅が短くなったことにより、上部き裂基点にも応力集中が発生している。これにより上部き裂が初期の段階において進展しやすいことや、また縦部材幅が短い故に即座に進展し破断を起こしている。これにより非常に短い疲労寿命となってしまっている。

第4章 エンドヨークへの適用

4.1 はじめに

4.1.1 エンドヨークについて

近年、インドなどの新興国の経済成長が著しい。それに伴い、成長する自動車産業はじめ各種製造業の生産拡大、またインフラ整備の進展とそれに伴うエネルギー需要の拡大により、各分野で鋼板のニーズはますます高まり、持続的な成長が見込まれている。[28]

鋼板の製造には、熱された鋳片を圧延する工程を必要とする。圧延は、圧縮を行うローラー部を持つ圧延機を用いて行われる。

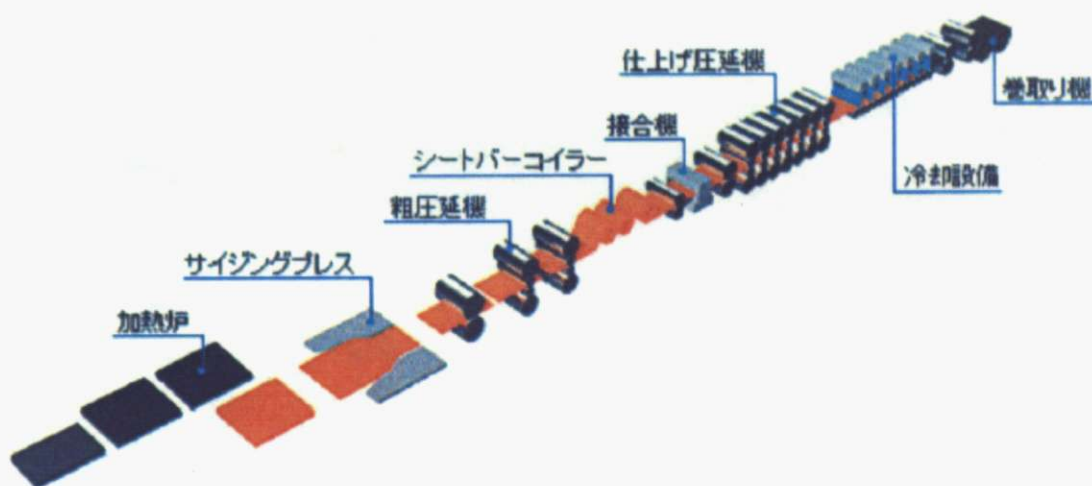


図 4.1.1 圧延工程図

ローラー部は、エンドヨークと呼ばれる回転伝達及び保持を行う機構により固定されている。エンドヨークには強大な応力が架かることにより、疲労によるき裂が発生、進展し、最終的には破断する。エンドヨークが破断した場合、取り替える作業を行わなければならない。この作業により、メンテナンス費用の損失、鋼板製造ラインに対し時間的な損失、また鋼板需要に対し機会損失を招いている。以上の損失を低減する為に、より長い寿命を持つエンドヨークを導入すること目的とする。

エンドヨークは形状と荷重により、複数のき裂が多発的に発生し、相互のき裂の進展に影響を及ぼしている。本論文では、複数き裂の影響を考慮し、X-FEM によるエンドヨークき裂の進展解析を考慮し、構造最適化を行った結果について報告する。

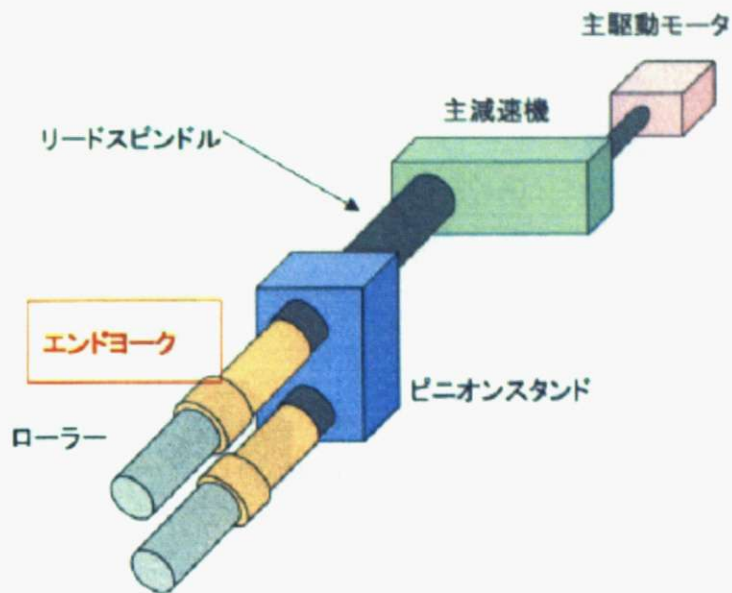


図 4.1.2 エンドヨークとその保持部

4.1.2 エンドヨーク形状について

エンドヨークはローラーを保持するために、以下のような形状になっている。今回はこの形状から 200mm を取り出し解析することにする。

次に、拘束条件と荷重について説明する。

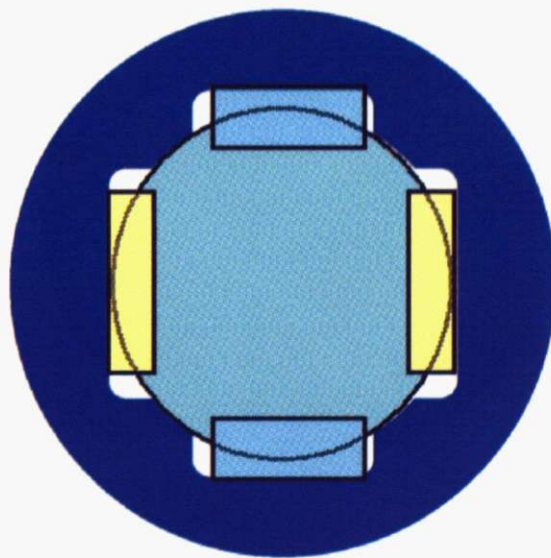
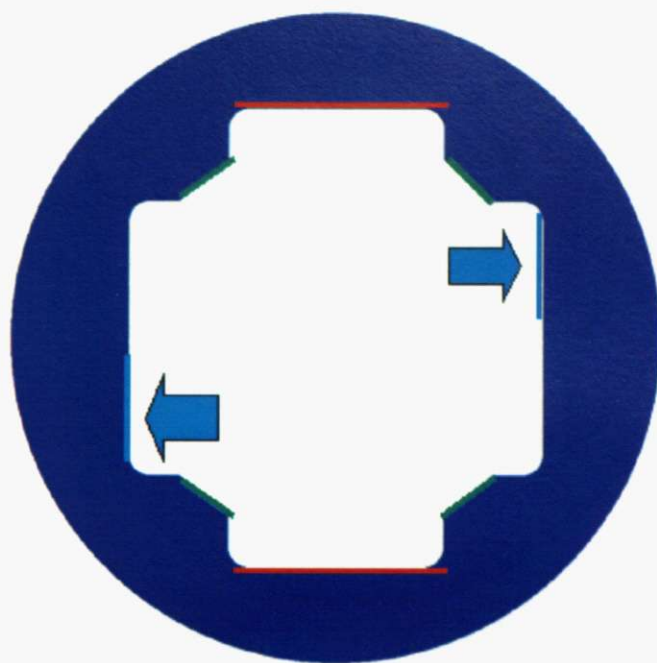


図 4.1.3 エンドヨークにおけるローラーと保持部材

エンドヨークは上図のようにローラーを挿入し、回転力を伝達させるために保持部材を挿入する。このため、実際の解析の際は以下のような境界条件を与える。



赤線部:Y方向固定
緑線部:周方向固定
水色線部:分布荷重

図 4.1.4 エンドヨーク 2次元図及び拘束条件と荷重

4.1.3 エンドヨークの形状変更について

本論分では、エンドヨークのローラー保持面に関しそのローラー面からの長さを変更する。エンドヨークでは4.1.2で説明したように、ローラーを挿入するのだが、保持面がローラー端面と重なってしまうとローラーを挿入できなくなってしまう。

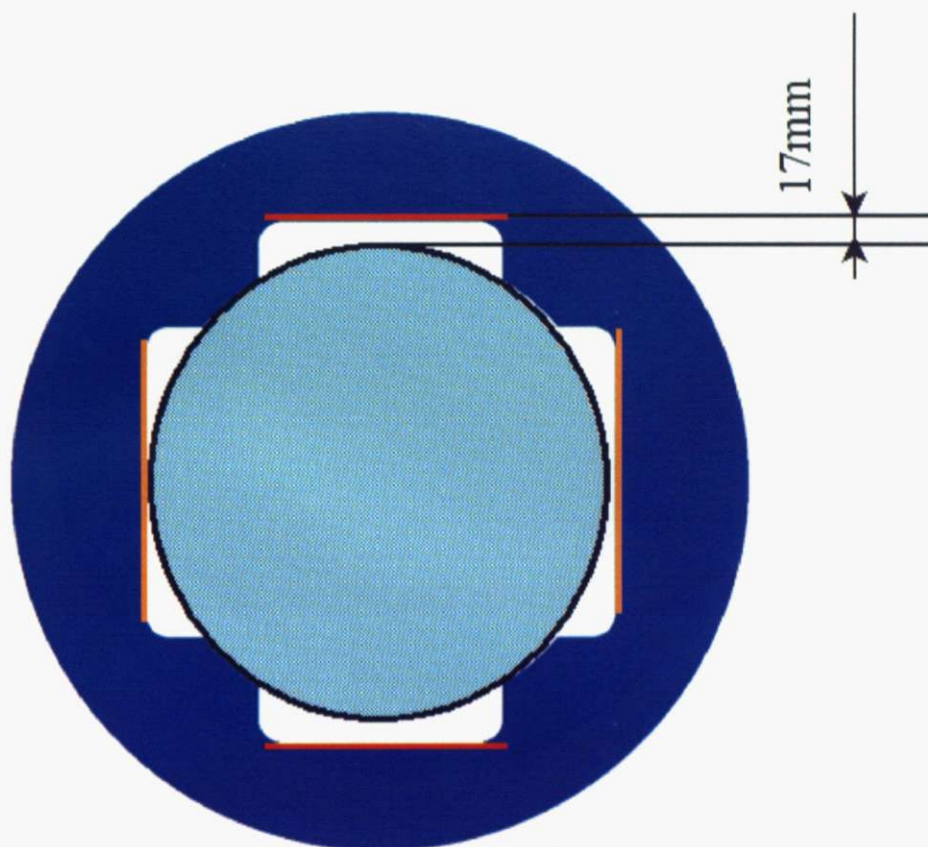


図 4.1.5 エンドヨークとローラー保持面

現状の形状では、ローラー保持面とローラー端面との間に上下保持面では 17mm、左右保持面では 0mm の余裕がある。そこで、本論文では、上下保持面を 17mm ローラー端面に近づけたメッシュと、左右保持面を 17mm ローラー端面から離れたメッシュを作成した。この 2 つのメッシュを用いて、3.4.3 の Basis Vector 法を用いることによりメッシュ生成を行う。

4.2 X-FEM によるき裂の進展解析

4.2.1 FEM の解析結果とき裂基点

はじめに、現状のメッシュでFEM解析を行った。

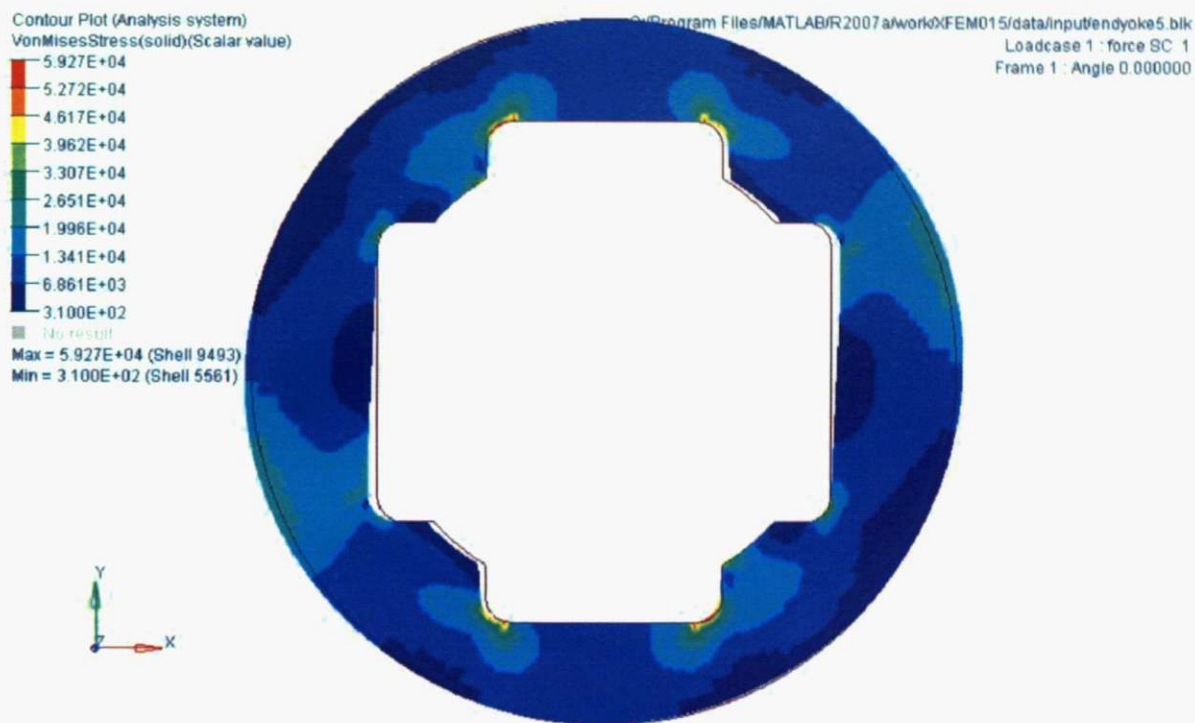


図 4.2.1 エンドヨーク FEM 解析結果

上図のように、上下ローラー保持面に2箇所ずつ計4箇所、左右ローラー保持面に2箇所ずつ計4箇所の応力集中部位が存在するのが分かる。この応力部位からき裂基点を作成する。

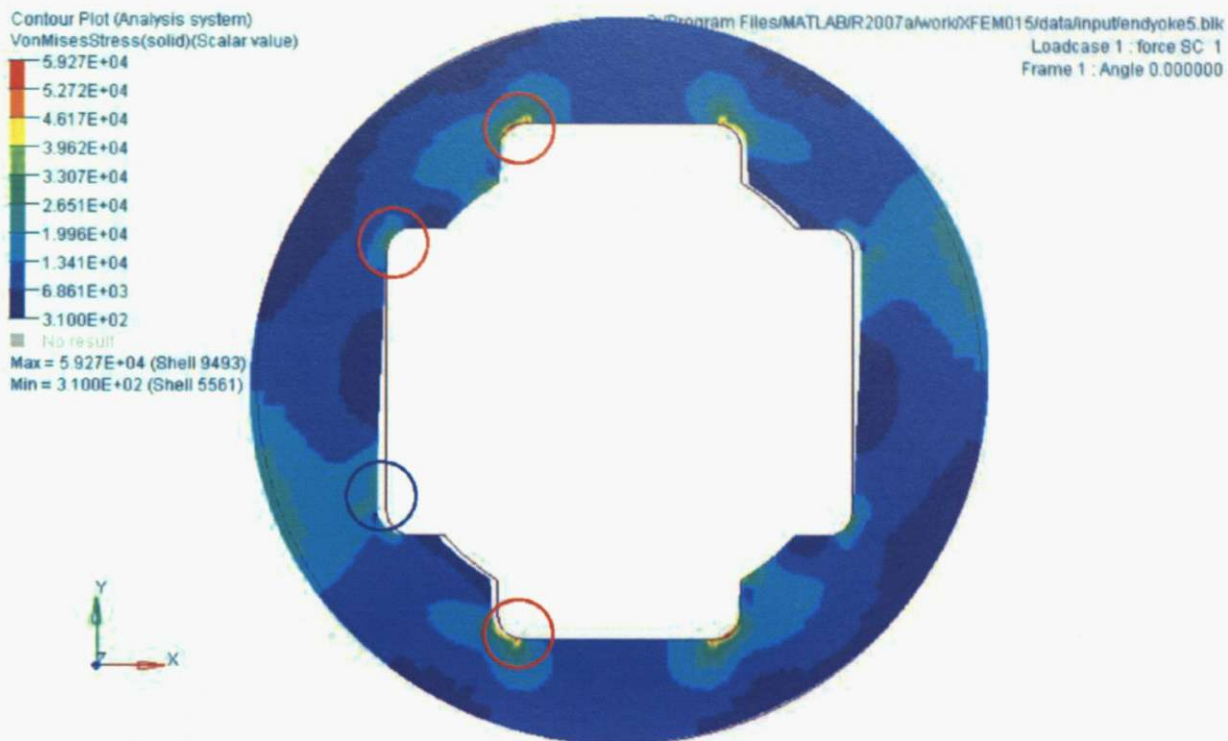


図 4.2.2 エンドヨークき裂基点

上図のように本論文では向かって左側のみの応力集中部にき裂基点を用意した。これは左右同時にき裂が進展して、解が不安定になるのを防ぐためである。また、左側計4箇所に応力集中部でも青色の応力集中部は圧縮による応力集中なので何らかの原因で初期の結晶面でのすべりが発生してもそれがき裂に発展することは考えにくい。そこで本論文では赤い円で囲った3箇所をき裂基点とする。

4.2.2 き裂進展解析結果

以下に、現状の形状でき裂進展解析を行った場合の結果を示す。

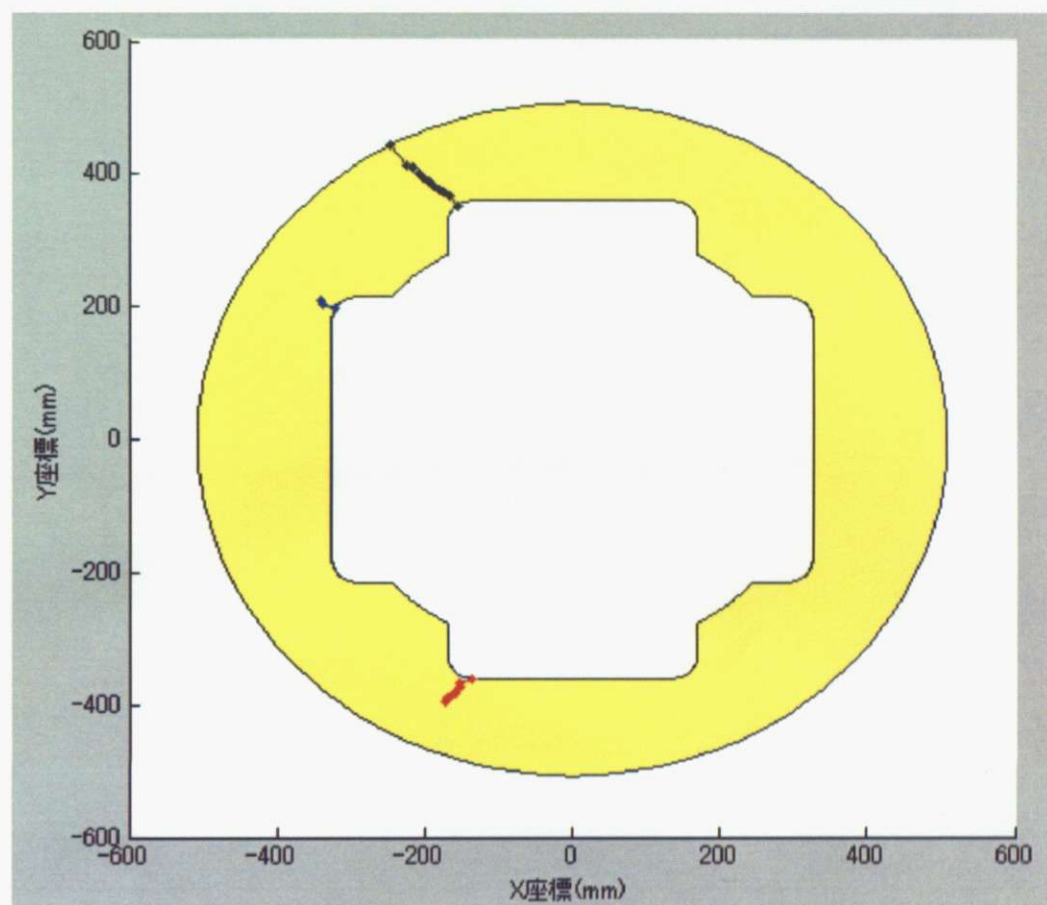


図 4.2.3 エンドヨークき裂進展図

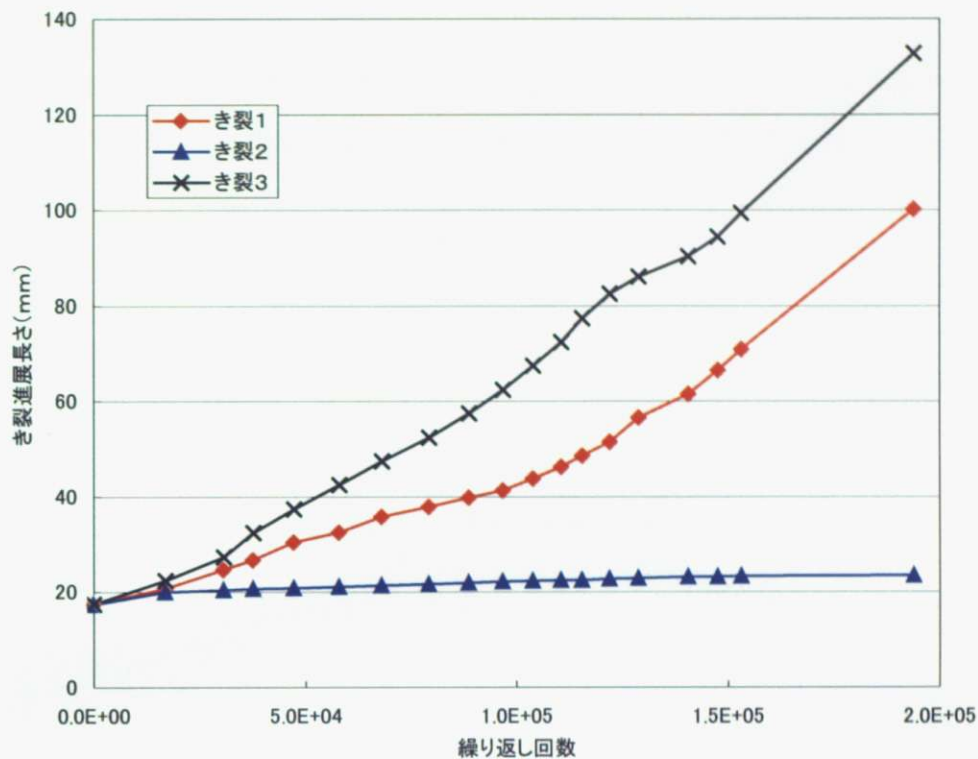


図 4.2.4 エンドヨークき裂進展長さと繰り返し回数の関係

まず、定義として、作成したき裂を下から順に「き裂1」、「き裂2」、「き裂3」と命名する。

き裂の進展経路に関して考察する。き裂は主応力方向から作られた初期き裂と同様の方向をとりながら、曲がることなく壁面に達している。これは第3章で用いたT字バーの内部で変化する応力状態とは異なり、エンドヨーク断面ではほぼ一様に、ローラー面側では引張り、外側では圧縮が発生しているものと考えられる。これにより、き裂寿命を考える上では、初期の集中荷重の大きさと、壁面までの長さが問題であると考えられる。

次にき裂進展長さと繰り返し回数の関係に関して考察する。初期き裂が与えられたとき、その応力集中の大きさから、き裂3が伸びている。初期状態では、き裂2も進展しているのだが、き裂3が壁面に近づくに従い、進展は遅くなっている。また、最終ステップが大きくなっているが、これは壁面でのメッシュサイズが大きくなり、き裂先端点でのJ積分の積分範囲が大きくなったための現象である。

4.2.3 形状変化と疲労寿命変化の予想

4.2.2 の結果を元に形状変更を予想する。現状では、上下ローラー保持面のき裂が進展しているので、左右ローラー保持面のき裂つまりき裂2を進展させなければならない。そのために、上下ローラー保持面をローラー部に近づけ、左右ローラー保持面をローラー部から離さなければならない。しかし、ここで考慮すべきは、ローラー保持面の長さの比である。左右ローラー保持面は上下ローラー保持面に比べ長くなっており、上下ローラー保持面と左右ローラー保持面をローラーから同一距離離れた場合、左右ローラー保持面からのき裂が先に進展してしまう。これにより、最適化後の形状は、上下ローラー保持面とローラーの距離は左右ローラー保持面とローラーの距離に比べ、若干短くなるものと考えられる。

また、本論文においては、形状変化に関する制約条件として使用材料重量を一定とした。

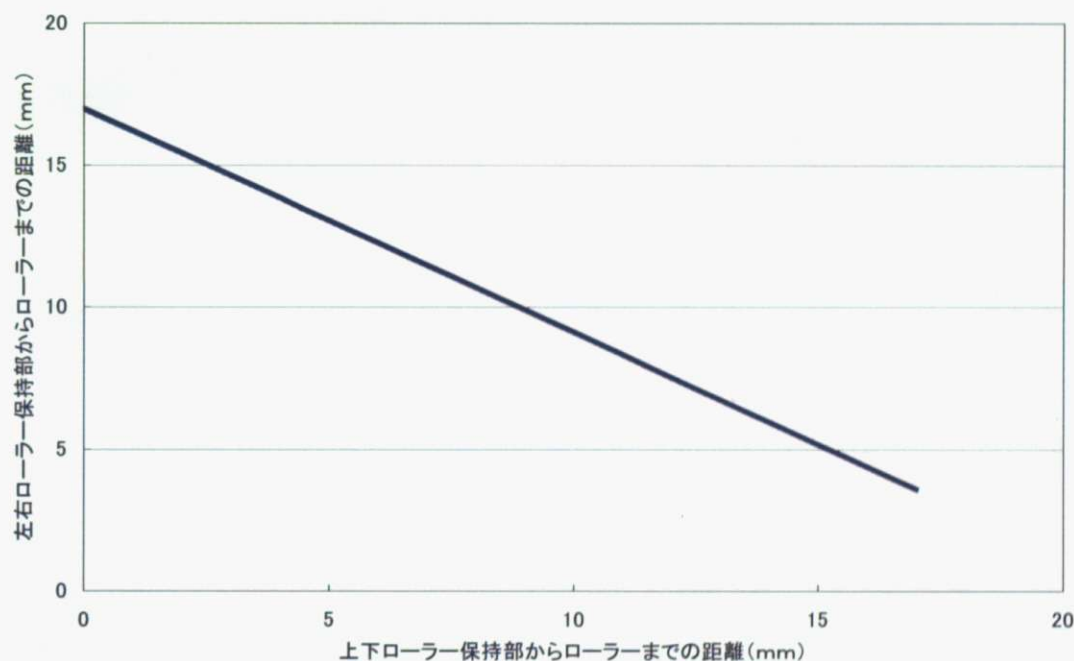


図 4.2.5 形状変更時のローラー保持部からローラーまでの距離

それゆえ、形状変更時のローラー保持部からローラーまでの距離の関係は上図のようになり、予想としては上下ローラー保持部からローラーまでの距離が 9mm 程度となると予想する。

4.3 構造最適化

以上を用いて、構造最適化を行った結果を以下に示す。

表 4.3.1 最適化初期値と解析結果

	最適化前(初期条件)	最適化後	Von-Mises 応力による 最適化
上下保持面とローラー 端面までの距離	17.0mm	9.75mm	0.00mm (下限値)
左右保持面とローラー 端面までの距離	0.0mm	11.3mm	3.60mm
総疲労寿命	1.94×10^5 回	2.90×10^5 回	1.56×10^5 回
疲労寿命比	1	1.50	0.80

また、最適解におけるき裂進展図及び、き裂長さと繰り返し回数の比を示す。

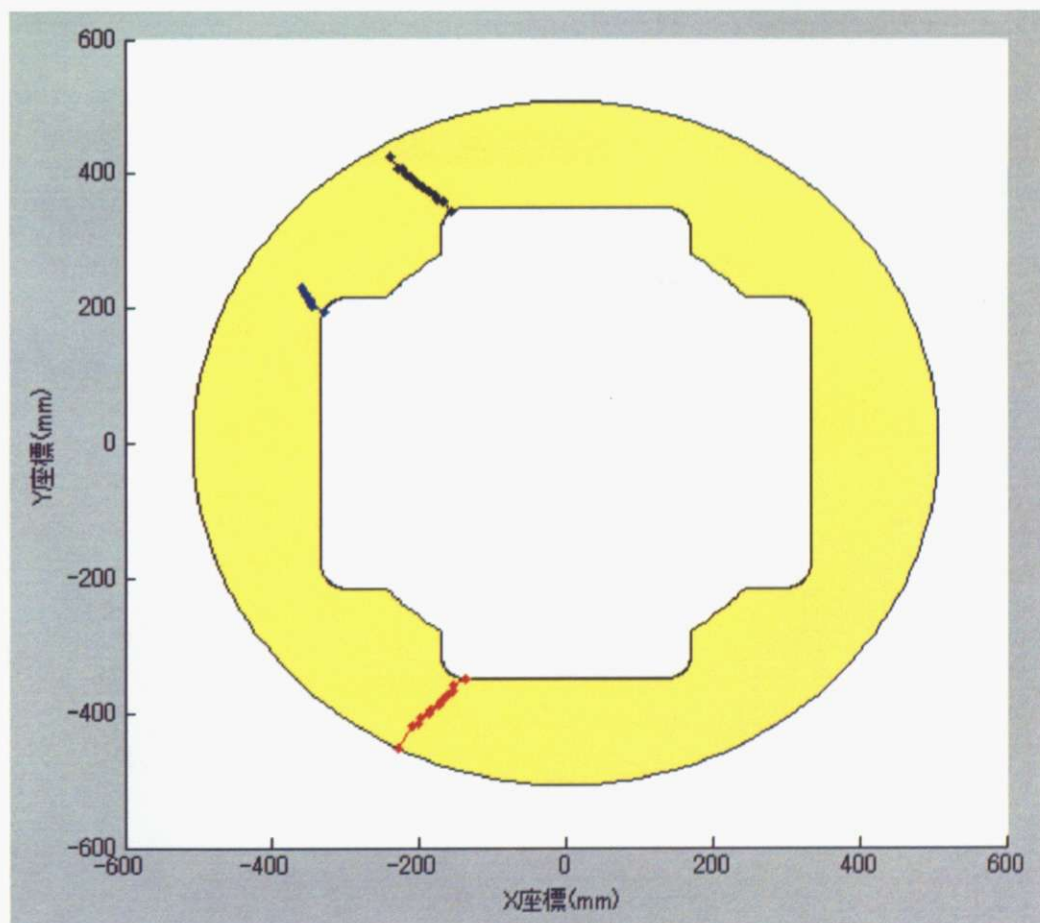


図 4.3.1 最適化後におけるき裂進展

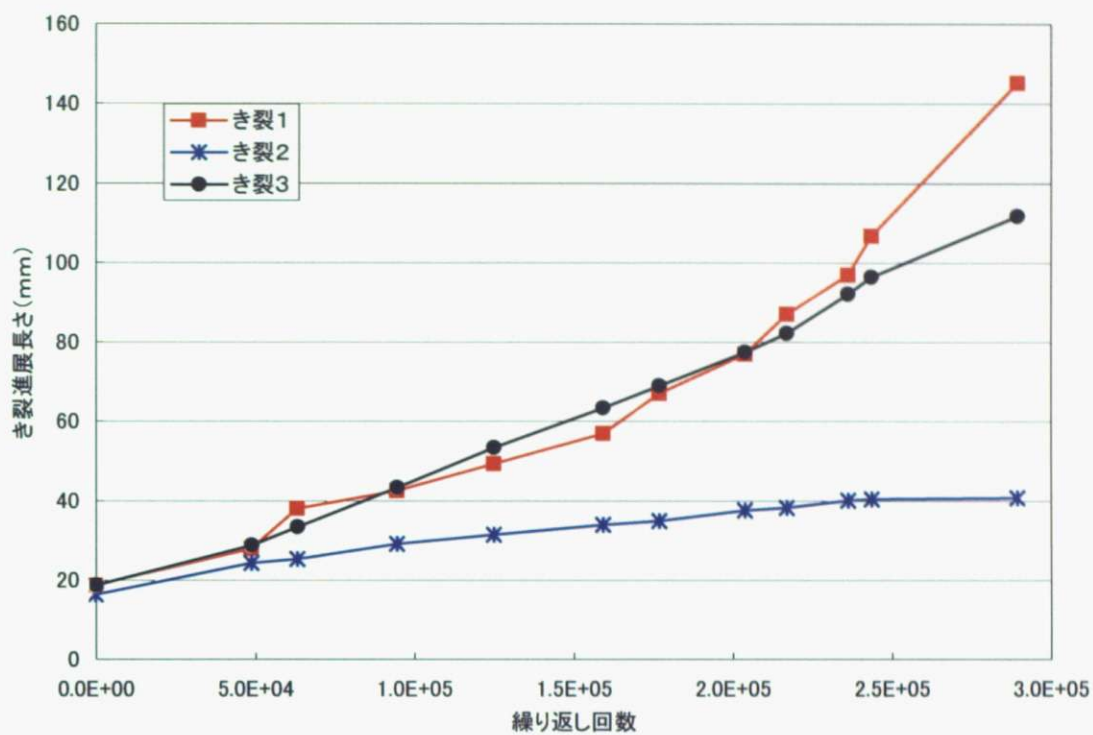


図 4.3.2 最適化後におけるき裂進展長さと繰返し回数

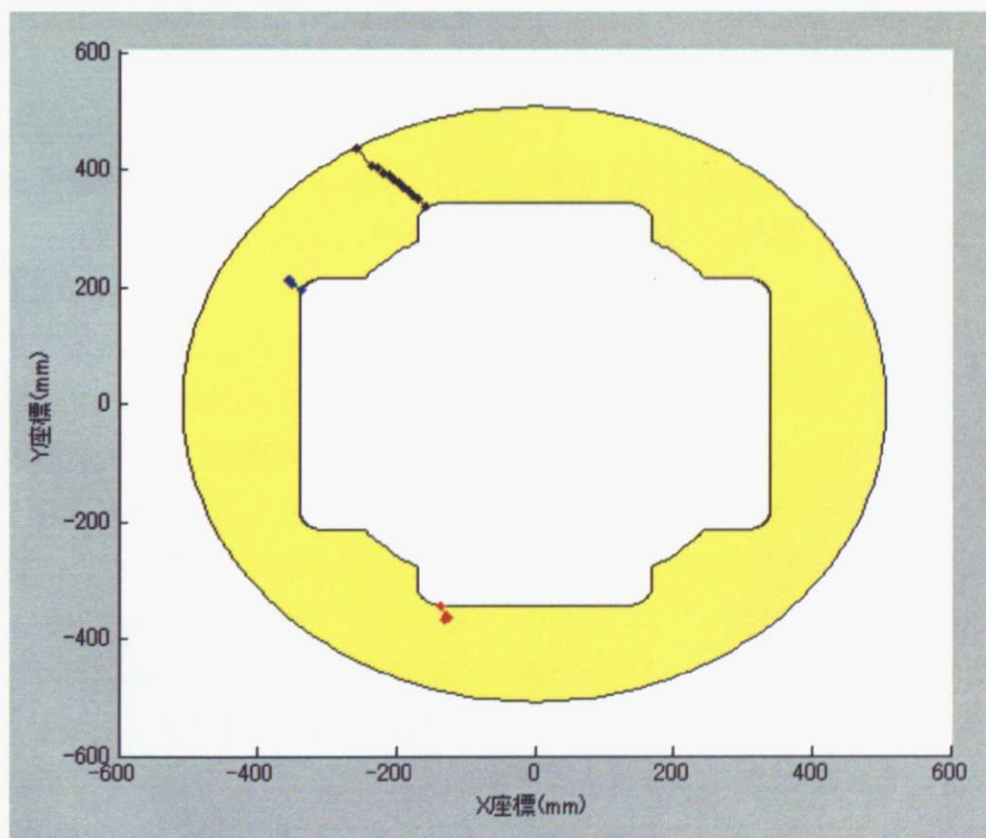


図 4.3.3 von-Mises 応力による最適化後におけるき裂進展

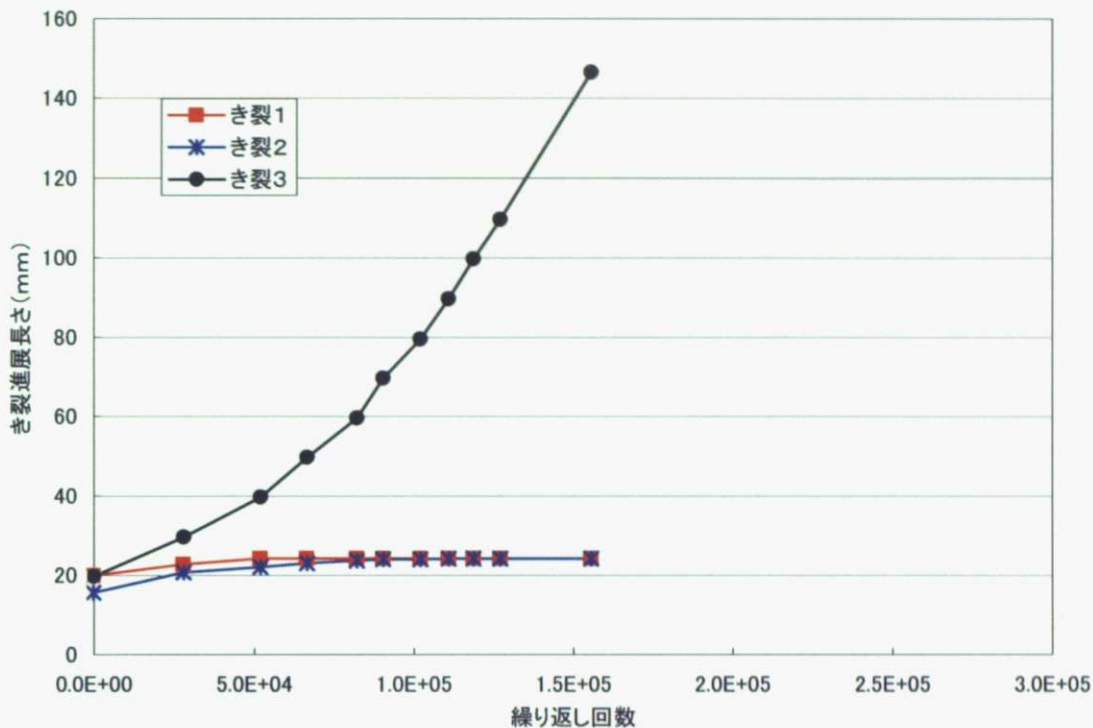


図 4.3.4 von-Mises 応力による最適化後におけるき裂進展長さと繰り返し回数

以上について考察を行う。

まず、総疲労寿命の結果に関して考察する。本解析では、最適化後のき裂寿命比は 1.50 倍というかなり高い値が得られた。この結果により疲労寿命を目的関数とした最適設計が有効であることが示された。

次に、き裂進展方向及び長さに関して考察を行う。き裂進展方向は、初期条件と比較した場合、大きな差異は認められなかった。しかし、長さに関しては、進展したき裂がき裂 1 であり、この点に関して、初期条件とは大きく異なっている。これは、左右保持面がエンドヨーク中心から離れたことにより、き裂 1 が受ける曲げモーメントが大きくなりこれによりき裂 1 が進展しやすくなったものと考えられる。これと同時に、左右保持面と壁面の距離が狭まったことによりき裂 2 が進展しやすくなり、初期値に比べて伸びている。

最後にき裂進展長さと繰り返し回数に関して考察を行う。ここでは非常に興味深い結果が出ている。き裂 1 とき裂 3 の K 値がほぼ同じであるため、き裂進展長さが互いに影響を及ぼしながら進展している。これにより、最も進展するき裂 1 でもき裂進展速度は初期条件のき裂 1 とほぼ変わらないまでに抑えられている。また、き裂 2 にも応力集中がある影響で初期条件よりも伸びている。これによりエネルギーが発散され、き裂進展を遅くしていると思われる。

る.

次に von-Mises 応力による最適化を行った場合の疲労寿命について考察する. この場合は, き裂基点 3 における応力集中が大きくなり, 同時にき裂基点 1 における応力集中は小さくなった. これにより, き裂 3 のみが一方的に進展する結果となり, 疲労寿命が短くなったと考えられる. き裂進展方向は, き裂 2・3 が同一方向であるのに対し, き裂 1 は応力方向が変化したために進展方向も変わっており, それにより進展量が減少したと考えられる.

第5章 結論

本論文では、き裂進展を考慮した構造最適化を実現するため、き裂進展解析においてリメッシュを必要としない手法である X-FEM を用い、複数き裂進展、初期き裂策定や総疲労寿命評価を可能にし、以上を用いて構造最適化を行った。

第3章では、2次元の基本的なき裂問題に対して、X-FEM き裂進展解析を行い、その結果を近似解析解と比較して良好な結果が得られること数値的に示した。また、単純な例で領域積分法における重み関数の形状の影響を評価した。重み関数 $q(x_1, x_2)$ の形状としては、台地形（円）が好ましく、また、き裂端からの広がり、中心（き裂端）から要素2個分の長さのときに最も精度の良い解が得られる。次に、複数き裂進展に対し Paris 則を用い表現した。また、初期き裂方向は主応力方向を用いることで表現した。総疲労寿命は初期き裂の進展速度を考慮することで表現した。以上を考慮の上、き裂基点を2箇所持つ T 字バーに対しき裂進展解析を行い、疲労寿命を導出した。そして、Basis Vector 法を用いることにより連続的な形状変更を可能にし、各部材幅に対する応答曲面を導出した。これにより、複数のき裂が偏り無く進展する場合に疲労寿命が長くなることが分かった。そして疲労寿命を目的関数とし、また部材幅を設計変数として Nelder-Mead Simplex 法を用いて構造最適化を行い、疲労寿命の長い最適形状を得ることができた。また、von-Mises 応力による最適化の場合との比較により疲労寿命を目的関数とした最適化が優れていることを証明した。

第4章では、解析例題としてエンドヨークを用いて、き裂進展問題に対し解析を行い現状のき裂進展が上下ローラー保持面から進展したき裂が破断に向かうことを確認した。その上で、形状変更のモデルを作成し、Basis Vector 法を用いることにより連続的な形状変更を可能にし、疲労寿命を目的関数とし、またローラー保持面からローラーまでの距離を設計変数として Nelder-Mead Simplex 法を用いて最適化を行い、疲労寿命の延長に成功し、最適形状を得ることができた。また、von-Mises 応力による最適化の場合との比較により疲労寿命を目的関数とした最適化が優れていることを証明した。

第6章 今後の展望

本論文において、初期き裂長さは要素長さの2倍以上という制限をつけて作成した。これはき裂進展解析を行うには十分に小さい長さであるが、より詳細な解析を行うためには、初期き裂長さはできるだけ小さい場合がよい。この考え方に基づくと、現状のJ積分のための積分範囲を小さくする必要があり、J積分を行うための新たな手法開発が必要となる。

また、本論文でのき裂進展解析において応答局面がなだらかでない場合が散見された。これは、き裂線分が節点近傍を通る場合、剛性マトリクスが特異になる場合があるため、ある程度の距離以内に入るとその要素にはき裂線が存在しないように解析しているからである。この距離を大きくすると剛性マトリクスが特異になる確率は低くなるが応答曲面が凹凸を持った形状となってしまう。これを防ぐために距離を短くすると、剛性マトリクスが特異になる確率が増える状況である。より詳細な最適化を行う場合は、この問題を数値的に分析する必要があると思われる。

本論文において、疲労寿命を目的関数とした構造最適化を行った。目的関数は疲労寿命以外にも構造物重量や最大ミーゼス応力などを指定することも可能であり、これらの目的関数に重みをつけることにより様々な要求に適した最適形状が得られると思われる。

また、本論文において、設計変数は部材幅や端面までの距離という応力集中形状が変化しないように設定した。このとき重量を指定することで、設計変数が実質1となっているが、この制限を除けば重量に制限が無い場合の部材幅や端面までの距離の設計変数を独立に扱うことができ、よりフレキシブルな形状変形が可能となる。また本論文の手法を用いれば、より多岐にわたる設計変数を使用した形状最適化が可能であると考えられる。例えば、エンドヨークに関してはローラー保持面を形成するためのRを変化させることにより応力集中を起こりにくくすることも可能であると考えられる。

参考文献

- [1] 日本機械学会, 計算力学ハンドブック (I 有限要素法構造編), 丸善 (1998)
- [2] M. Sekiguchi, A study of element distortion for membranes and plate, 東京大学博士論文 (2003)
- [3] J. Fih and S. Markolefas, Adaptive global-local refinement strategy based on the interior error estimates of the h-Method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 37, 827-838 (1994)
- [4] 中住昭吾, 重合メッシュ法を用いた構造解析手法に関する研究, 東京大学博士論文 (2003)
- [5] T. Belytschko, Y.Y. Lu and L. Gu, Element-free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 37, 229-256 (1994)
- [6] 鈴木克幸, 大坪英臣, 寺田賢二郎, ミン勝載, 金伝栄, 中西克嘉, ボクセル被覆による 3次元ソリッドのメッシュレス解析, 土木学会応用力学論文集, 1, 215-222 (1998)
- [7] T. Strouboulis, K. Copps and I. Babuska, The generalized finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 190, 4081-4193 (2001)
- [8] 半谷裕彦, 川口健一, 空間構造の形態解析と創生に関する研究, 平成 8 年~10 年科学研究費補助金基盤研究(A)(2)研究成果報告書, (1999)
- [9] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 45(5), 601-620 (1999)
- [10] 西岡俊久, 岸本健吾, 藤本岳洋, 移動有限要素法による介在物を含む材料中の破壊経路予想シミュレーション, 計算工学講演会論文集, 7, 447-450 (2002)
- [11] 角洋一, 船橋智司, 「スーパーエレメントを用いた溶接構造体のき裂伝播シミュレーション」 日本造船学会論文集, 180, 549-557 (1996)
- [12] M. Fleming, Y.A. Chu, B. Moran and T. Belytschko, Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 40, 1483-1504 (1997)
- [13] J. Melenk, I. Babuska, The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 139, 289-314 (1996)
- [14] N. Moes, J. dolbow and T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46, 131-150 (1999)
- [15] C. Daux, N. Moes, J. Dolbow, N. Sukumar and T. Belytschko, Arbitrary branched and

- intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* , 48, 1741-1760 (2000)
- [16] 浅井光輝, 微視的構造特性を考慮した非均質脆性材料の破壊シミュレーション, 学位論文 (博士 (工学)), 2003
- [17] N. Sulumar, D.L. Chopp, N. Moes, T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* , 190, 6183-6200 (2001)
- [18] M. Stolarska, D.L. Chopp, N. Moes and T. Belytschko, Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* , 51, 943-960 (2001)
- [19] L.A.Schmit, Structural design by systematic synthesis, Proc. of Second Conference on Electronic Computation, ASCE, pp 105-122, 1960.
- [20] R.L.Fox and M.P.Kapoor, Rates of change of eigenvalues and eigenvectors, *AIAA Journal*, Vol. 6, pp. 2426-2479, 1968.
- [21] O.C.Zienkiewicz and J.S.Campbell, Shape optimization and sequential linear programming, Optimum Structural Design, (eds. Gallagher, R.H. and Zienkiewicz O.C.), Wiley, pp. 109-126, 1973.
- [22] N.Kikuchi, K.Y.Chung, T.Torigai and J.E.Taylor, Adaptive Finite element methods for shape optimization of linearly elastic structures, *Comput. methods Appl. Mech. Engrn.*, Vol. 57, pp. 67-89, 1986.
- [23] V.raiband and C.Fleury, Shape optimal design using B-Spline *Comput. Methods Appl. Mech. Engrn.*, Vol. 44, pp. 247-267, 1984.
- [24] 趙希禄 他, 構造最適設計のシステム開発について, 第 17 回設計シンポジウム, pp. 77-81, 1999.
- [25] N. Sukumar, N. Moes, B. Moran and T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* , 48, 1549-1570 (2000)
- [26] <http://www.asahi.com/special/070505/OSK200706040115.html>
- [27] Lagarias, J.C., J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, "Convergence Property of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions," *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 9 Number 1, pp. 112-147, 1998.
- [28] JFEスチール(株) ニューデリー事務所開設について
<http://www.jfe-steel.co.jp/release/2007/11/071128-1.html>

- [29] J.R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *J. Appl. Mech.* , 35, 379-386 (1968)
- [30] S.K. Maiti, Finite element computation of crack closure integrals and stress intensity factors, *Engineering Fracture Mechanics*, 41-3, 339-348 (1992)
- [31] J.F. Yau, S.S. Wang, H.T. Corten, A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *J. Appl. Mech.* , 47, 335-341 (1980)
- [32] J. Dolbow, N. Moes, T. Belytschko, An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190, 6825-6846 (2001)
- [33] 豊貞雅宏, 丹波敏男 : 鋼構造物の疲労寿命予測, 共立出版株式会社
- [34] P.C. Paris, The mechanics of fracture propagation and solutions to fracture arrestor problems, *The Boeing Company Document*, D-2-2195 (1957)

謝辞

本論文を執筆するに当たってご指導を賜りました東京大学大学院新領域創成科学研究科の鈴木克幸准教授に心より感謝申し上げます。

一昨年まで特別研究員として本研究室に在籍されていた現産業技術研究所の中住昭吾さんには、理論面や、研究に行き詰ったときに大変貴重な助言を頂戴しました。心より感謝致します。

JFE 技研の栗原康行さんには、本論文のきっかけとなるアイデアを与えてくださったこと、またエンドヨーク解析に関するご指導や貴重な助言を頂きました。厚く御礼申し上げます。

昨年まで本研究室に在籍されていた岩田隆道さん、中川玲さんには、修士1年において研究における基礎知識や取り組み方を親身に教えていただきました。深く感謝致します。

修士課程2年の有木俊博さん、伊藤陽介さんは同期として私生活や研究での悩みや喜びを共有しながらお互い支えあい、研究や学生生活について深い議論を交わしながら共に学生生活を歩んできました。本当に感謝しております。

修士1年の稲田二郎君には4章でのモデリングに関して手伝って頂きました。大変感謝しております。

本研究室の博士課程のKirkayak Levent さん、De Souza Vinicius Aguiar さん、修士1年の磯部信君、二岡佑介君、そして、すでに卒業された高明さん、牧野哲也さんには、公私共々多くの助力を頂きました。深く感謝致します。

本研究室の吉田二郎技官及び秘書の大嶋さやかさん、大森亜矢子さん、宮部綾子さんには主に事務手続きでお世話になりました。ありがとうございました。

2007年2月 市川 幸太