

# DKT シェル要素の高度化に関する研究

修士課程二年 66804 張舒荔

指導教官 渡邊 浩志

This study deals with the triangle shell element called DKT shell element that formulated with the discrete Kirchhoff technique. DKT is generally formulated with the updated-Lagrangian formulation. In this study, we implement the total-Lagrange formulation into CST membrane shell, and implement a transversely isotropic constitutive modelling into CST membrane shell. The analysis using the new DKT shell element formulation show a series of accurate analysis data is illustrated.

**Keywords:** shell element, discrete Kirchhoff, anisotropic, total-lagrangian formulation

## 1. 緒言

現在研究室で開発中の心臓シミュレーターには僧帽弁と大動脈弁が含まれているが、これらは三次元薄肉曲面構造物であり有限要素モデル化を行う際にはシェル要素を用いるのが一般的である。工学の分野では、これまでさまざまなシェル要素が開発されてきている<sup>(1,2)</sup> が、特に薄肉な構造物を解析する場合にはDKTシェル要素<sup>(3,4)</sup>が高い解析精度を示すことが知られている。しかしながら、DKTシェル要素で幾何学非線形問題を扱う場合、従来の研究では等方性構成式を用い、updated-Lagrange法を基礎にするが、定式化が困難なため、一部簡略化するのが一般的であった<sup>(5)</sup>。大動脈弁および僧房弁は異方性と粘弾性を持つ強い非線形性を示す生体軟組織であるため、異方性の入れたシェル要素で解析を行う必要があると考えられるが、現在のシェル要素には合理的に組み込むことが困難である。また、特に応力テンソルの評価に簡略化が施されているので、厳密には正しく応力を求めておらず、弾性体の構成則を用いているにも係わらず、変形経路に依存した応力になり、特に増分回数が増えるとともに誤差が溜まってくる。そのため、本研究では、現在のDKTシェル要素の定式化を見直し、幾何学非線形性を考慮した場合であっても、正確な応力テンソル

を求めることが可能で、updated-Lagrange法に基づき接線剛性を求める際に必要な現配置基準の4階の構成則テンソルを合理的に導くことを目的とする。

## 2. DKT 18シェル要素

本研究では、最終的に心臓シミュレーターに組み込む必要があるため、三角形形状で辺中点に自由度を持たず、各頂点に並進3自由度と回転3自由度を持つDKT18シェル要素<sup>(3)</sup> (図1)を取り扱うこととする。

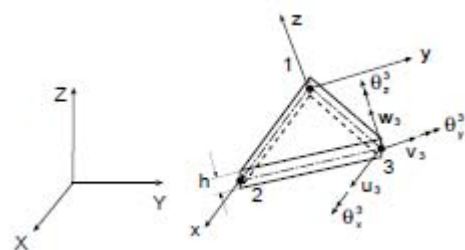


図1.DKT18 シェル要素

DKT18シェル要素は図2に示すように面内変形を解析する定ひずみ膜要素 (CST要素) と図3に示すように面外変形解析を行うためのDK9板曲げ要素および数値的な特異性を回避するために人工的に加えた面内回転自由度  $\theta_z$  から構成されている。

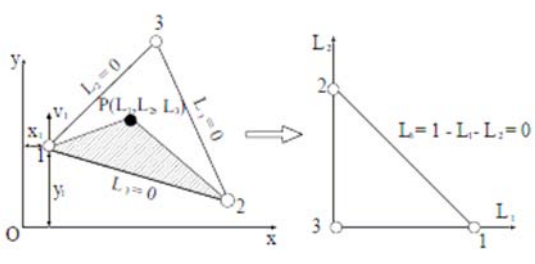


図 2.CST 要素

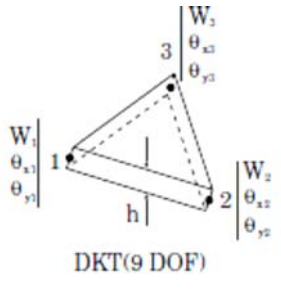


図 3.DK9 要素

### 3. DKT シェル要素の定式化

薄板の曲げ変形では、「変形前中立面に対して垂直な線素は、変形後も中立面に対して垂直である」という Kirchhoff の仮定が成立する. そのため古典的な板曲げ理論においては Kirchhoff の仮定に基づき板のたわみを求める基礎式を導出する<sup>(6)</sup>. しかしながらこの式をそのまま有限要素法により近似を行うためには、隣接する要素間でたわみの 1 階微分まで連続 (C1 連続) な補間関数を用いる必要が生じ、これまでさまざまな研究が行われてきたが、いまだ十分な精度を与える要素は得られていない<sup>(1,2)</sup>.

DKT シェル要素は、面外せん断変形を許容する Reissner-Mindlin 板曲げ理論に基づき、要素内のいくつかの点に離散的に Kirchhoff 拘束条件を入れることにより、近似的に Kirchhoff 仮定を満たし、隣接する要素でたわみが連続であれば 1 階微分の連続性が要請されない C0 連続の要素である. 応力と歪の導出式は以下に示す. 板曲げ及び膜要素の変位・ひずみ関係式は以下ようになる. 板曲げについてはただし  $\beta$  は線素の傾き角として

$$\varepsilon_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -\beta_{x'x} \\ -\beta_{y'y} \\ -(\beta_{x'y} + \beta_{y'x}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

膜については以下ようになる。

$$\varepsilon_m = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式(1)から

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= z \frac{1}{2A} (y_{31} H_{x'\xi}^T + y_{12} H_{x'\eta}^T) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= z \frac{1}{2A} (-x_{31} H_{y'\xi}^T - x_{12} H_{y'\eta}^T) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= z \frac{1}{2A} (-x_{31} H_{x'\xi}^T - x_{12} H_{x'\eta}^T + y_{31} H_{y'\xi}^T + y_{12} H_{y'\eta}^T) \end{aligned} \quad (3)$$

が導出できる. この式中の  $H_x$ ,  $H_y$  には要素の辺長が陽な形で含まれている. そのため大変形を扱う際には現在の形状を用いて作成するのが合理的である. したがって、参照配置は現時刻のものを用いる updated-Lagrange 定式化を行うのが合理的であると考えられる. Updated-Lagrange 法に基づく仮想仕事式は以下ようになる<sup>(7)</sup>.

$$\int_v T : \delta A_L dv \quad (4)$$

現在の DKT シェル要素は updated-Lagrange 法に基づき接線剛性マトリックスを求めているが、この基礎となる速度形仮想仕事式における応力速度は時刻  $t$  での現配置を基準とする時刻  $\tau$  での第 2 Piola-Kirchhoff 応力速度を  $\tau \rightarrow t$  として求める Truesdell の応力速度である. 仮想仕事式に基づき内力評価を行うためには Cauchy 応力を客観性のある構成式からもとめる必要があるが、現在は簡略化して Truesdell 応力速度の積分を

Cauchy 応力とみなしているが、これは厳密には成立しない。また、Truesdellの応力速度とストレッチテンソルの間に客観性のある構成式を仮定した場合であっても、厳密な応力積分を実行する必要があるが<sup>6)</sup>、現在は単にひずみ増分から応力増分を求めて加えているだけである。そのため変形経路が複雑になると応力に誤差が溜まってきて残留応力を生じるなどの問題が起こる。

以上より、現 DKT シェル要素を以下のように修正した。まず、応力の評価について、生体材料の挙動をあらゆる構成則の多くは異方性の超弾性体でモデル化されるが、このとき一般に第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみ及びそれらの速度の間に

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}, \dot{S}_{ij} = C_{ijkl} \dot{E}_{kl} \quad (5)$$

の関係式が成立するが、これをそのまま現配置に変換して 4 階の構成則テンソルを次のように導いた。

$$c_{ijkl} = \frac{1}{J} F_{il} F_{jk} F_{kk} F_{ll} C_{IJKL} \quad (6)$$

Cauchy 応力 T は第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソルから求める。なお、このとき DKT シェル要素は面内変形にたいしての面外変形の影響は小さく、面外変形挙動は面内変形挙動に影響を与えないという仮定を入れてあるため、変形勾配テンソル F は膜要素の F のみを使った。

また、この要素を実際に弁の解析に用いるにあたってはPortら<sup>8)</sup>が提案した異方性超弾性モデルとそれに基づいて導出した応力テンソルと 4 階弾性テンソルを膜要素に組み込んだ。第 2 piola-kirchhoff 応力テンソルおよびそれに対応する 4 階弾性テンソルは以下に示す。

$$\Psi_4 = 2c_0c_1(I_1 - 3) \exp^{c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_4-1)^4}$$

$$S = 2 \sum_{i=1, i=4}^5 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{33}} + pC^{-1}$$

$$C = 4 \sum_{i,j=1,4}^4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial I_i \partial I_j} \frac{\partial I_j}{\partial C} \otimes \frac{\partial I_j}{\partial C} + 2C^{-1} \otimes \frac{\partial p}{\partial C} + 2p \frac{\partial C^{-1}}{\partial C}$$

(7)

## 4. 要素の検証

### 4.1 解析モデルと主要パラメータ

以上の修正方法を用いて現DKT要素の修正を行った。解析には 8 要素 10 節点のモデルを用いて、単純引張、曲げ、モーメント荷重と繰り返して荷重をかける解析を行った。主要なパラメータとしてヤング率 $E=0.07 \times 10^{12} \text{Pa}$ 、ポアソン比は 0.3、厚さは 0.0001m である。その解析結果から修正前の DKT シェル要素の適合性、問題点と修正後 DKT シェル要素の応力評価の比較検討を行う。

### 4.2 結果と考察

まず、修正前の DKT 要素を使って単純引張、単純曲げ、Rolling up 解析を行った。(図 4~6) グラフから分かるように、解析解と理論解はほぼ一致しており、修正前の DKT シェル要素であっても変形経路が単純な解析であれば、妥当な解が得られることが分かった。

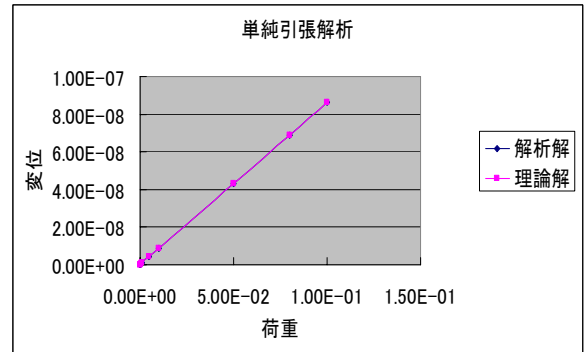


図 4 単純引張解析荷重変位曲線

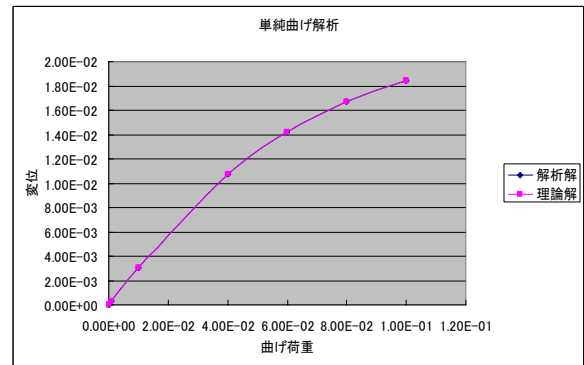


図 5 単純曲げ解析荷重変位曲線

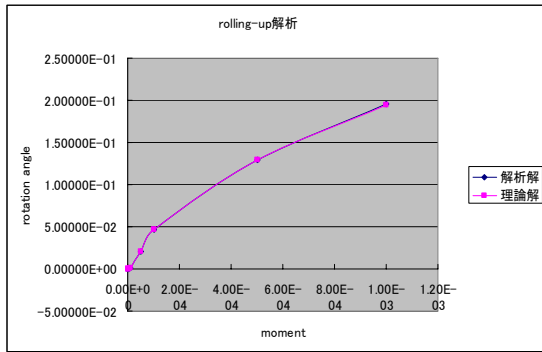


図6 Rolling up 解析 モーメント角度曲線

次に、変形経路が複雑な解析の一例として繰り返して荷重をかける解析を行った。40ステップを一周期として合計25周期の繰り返し合計1000の解析を行った結果、増分回数が増えるにしたがって応力の誤差が溜まっていくことがわかった。これに対して修正後のDKTシェル要素を使って同じ行ったところ、グラフからでもわかるように応力は除荷されれば、0に戻っており、修正後のDKTシェル要素は適切に応力が評価できていることを確認できた。

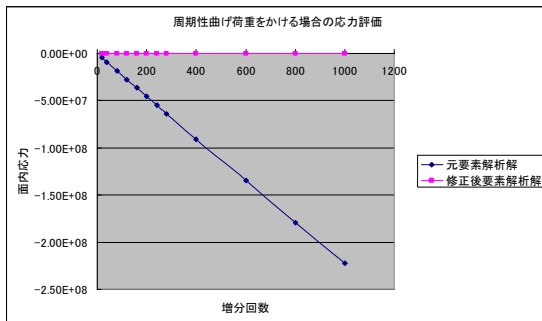


図7 繰返曲げ解析応力履歴 (垂直荷重)

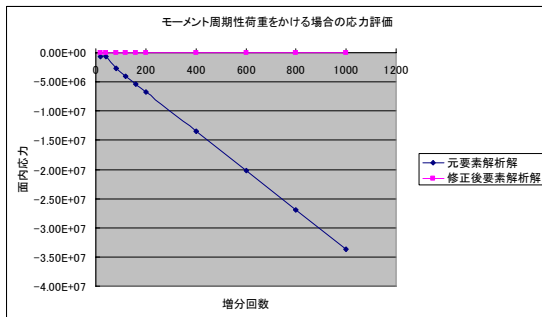


図8 繰返曲げ解析応力履歴 (モーメント)

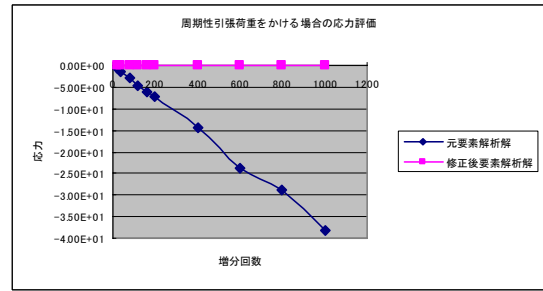


図9 繰返単純引張解析応力履歴

## 2. まとめ及び今後の課題

DKTシェル要素の精度をより高めるために、極力簡略化を導入しない定式化を行った。その結果、従来の要素の問題点を克服できることが確認できた。今後は以下の点を改善する必要があると考えられる。

- 実際にDKTシェル要素を用いて僧帽弁と大動脈弁の解析を試み、その適合性を検証する。
- 他要素での解析結果との比較検討によりDKTシェル要素の適合性を検証する。

## 参考文献

- (1) H. T. Y. Yang, et al. *Compt & Struct.* Vol. 35, 481-504 (1990)
- (2) H. T. Y. Yang, et al. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 47, 101-127 (2000)
- (3) J. L. Batoz, et al., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.15, 1771-1812 (1980)
- (4) J. L. Batoz, et al., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 52, 615-630 (2001)
- (5) 張衛紅 東京大学大学院機械情報工学専攻博士論文 2002年
- (6) 半谷, 「平板の基礎理論」彰国社(1995)
- (7) 久田, 野口, 「非線形有限要素法の基礎と応用」, 丸善(1995)
- (8) V.Port et al., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 71, 987-1008 (2007)