

東京大学大学院新領域創成科学研究科
人間環境学専攻

修士論文

DKT シェル要素の高度化に
関する研究

2008年2月19日提出

指導教員 渡邊 浩志 講師



学生証番号 47-66804

張 舒荔

目次

第1章 序章	3
1.1 研究目的	3
1.2 背景・従来研究	3
1.2.1 degenerated シェル要素	4
1.2.2 合応力による定式化	5
1.2.3 次数低減積分による安定化	6
1.2.4 非適合モード	6
1.2.5 enhanced strain 法	7
1.2.6 3次元弾性理論	8
1.2.7 drilling 自由度を持つ要素	9
1.2.8 共回転型シェル要素	10
1.2.9 複合材に関する高次理論	11
1.2.10 僧帽弁解析に関する研究	11
1.3 Discrete Kirchhoff 板/シェル要素の概要	13
1.3.1 DKT12 シェル=(DKT6+CST)	17
1.3.2 DLTP (DLTP + LST)	19
1.3.3 DKL	20
第2章 DKT シェル要素の定式化	22
2.1 構造要素の変形理論	22
2.1.1 Kirchhoff-Love 板曲げ理論	22
2.1.2 Reissner-Mindlin の板曲げ理論	24
2.1.3 DKT 板曲げ理論要素の有限要素方程式化	27
2.1.4 Batoz の DKT 板曲げ要素 3 節点 9 自由度	28
2.1.5 Updated 型の仮想仕事式	39
2.1.6 速度型の仮想仕事式	40
2.1.7 膜要素	40
2.1.8 CST 要素の Total-Lagrange 定式化	41
第3章 非線形有限要素定式化	48
3.1 弾性体 [17]	48
3.2 超弾性体 [17]	49
3.3 仮想仕事原理	51
3.3.1 total Lagrange 法	52

3.3.2	updated Lagrange 法	53
3.4	Newton-Raphson 法	53
第 4 章	横等方超弾性構成モデル [4]	56
4.1	緒言	56
4.2	非圧縮横等方超弾性モデル	56
4.2.1	僧帽弁	56
4.2.2	平面応力状態仮定	57
4.2.3	Kinematics	57
4.2.4	非圧縮横等方材料	57
4.2.5	応力テンソルと弾性テンソル	58
4.3	僧帽弁解析用歪エネルギー関数	59
4.3.1	応力・歪関係とその線形化	59
4.3.2	応力テンソルと弾性テンソル成分	61
第 5 章	解析	63
5.1	緒言	63
5.2	解析モデルおよび解析条件	63
5.2.1	解析モデル	63
5.2.2	パラメータ	63
5.3	解析結果	64
5.3.1	解析手法	64
5.4	考察	67
第 6 章	結論	68
6.1	僧帽弁用横等方超弾性モデルの取り入れ	68
6.2	膜要素の total-Lagrange 定式化	68
6.3	応力評価比較検証	68
6.4	今後の課題	68
付 録 A	付録 A	69
A.1	Membrane Locking	69
A.2	Shear Locking	70

第1章 序章

1.1 研究目的

現在研究室で開発中の心臓シミュレーターには僧帽弁と大動脈弁が含まれているが、これらは三次元薄肉曲面構造物であり有限要素モデル化を行う際にはシェル要素を用いるのが一般的である。工学の分野では、これまでさまざまなシェル要素が開発されてきている(1,2)が、特に薄肉な構造物を解析する場合にはDKTシェル要素(3,4)が高い解析精度を示すことが知られている。しかしながら、DKTシェル要素で幾何学非線形問題を扱う場合、従来の研究では等方性構成式を用い、updated-Lagrange法を基礎にするが、定式化が困難なため、一部簡略化するのが一般的であった(5)。大動脈弁および僧房弁は異方性と粘弾性を持つ強い非線形性を示す生体軟組織であるため、異方性の入れたシェル要素で解析を行う必要があると考えられるが、現在のシェル要素には合理的に組み込むことが困難である。また、特に応力テンソルの評価に簡略化が施されているので、厳密には正しく応力を求めておらず、弾性体の構成則を用いているにも係わらず、変形経路に依存した応力になり、特に増分回数が増えるとともに誤差が溜まってくる。そのため、本研究では、現在のDKTシェル要素の定式化を見直し、幾何学非線形性を考慮した場合であっても、正確な応力テンソルを求めることが可能で、updated-Lagrange法に基づき接線剛性を求める際に必要な現配置基準の4階の構成則テンソルを合理的に導くことを目的とする。

1.2 背景・従来研究

1960年の半ばから、シェル要素の開発が行われてはじめて、線形、非線形の領域における、板、シェルの、動解析、振動解析への適用に関する論文が大幅に増加し始めた。過去40年において、様々な実用事例に適用するべく、開発された理論モデルは、莫大なものである。しかしながら、全ての状況に十分に対応できるような、包括的かつ一般的な理論は、ひとつとして、存在していない。時として、ある種の物理的問題に対して、より正確で効率的であることを求めるために、一般性は犠牲にされてきた。また、ある時は、より幅広い工学上の実用問題を扱うために、正確性がある意味で妥協されてもきた。

コンピュータ上のシェル要素の実装は、有限要素法の研究者が挑戦し続けてきている話題である。過去の未解決の問題の幾つかも長い年月をかけて解決され、一見理にかなった要素の奇妙な挙動も、説明が可能になった。数学的に説明することが出来ない問題も、結果的に厳密な解決策が見つかったものもあれば、数値実験により研究されている問題の中には、いまだに研究者を悩ませている問題もある。

以下、現在、コンピュータによるシェルの解析に使われている研究方法の概要を示す。

- (i) degenerated シェル
- (ii) 合応力による定式化
- (iii) 次数低減積分による安定化 (アワーグラスコントロール)
- (iv) 非適合モード
- (v) enhanced strain 法 (混合法, ハイブリッド法)
- (vi) 3次元弾性理論による要素
- (vii) drilling 自由度を持つ要素
- (viii) 共回転型シェル要素
- (ix) 複合材に関する高次理論

成功しているシェル要素はいずれも, 上記に挙げた技術の一つ以上組み合わせて作られている. これらの研究方法は, 相互に関連しあっているため, その一つを取り上げるのは, 十分でないかもしれないが, 議論を判り易くするためである. なお, この章は, Henry T. Y. Yang ら [6] のシェル調査に拠っている.

1.2.1 degenerated シェル要素

degenerated シェル要素は, Ahmad の論文に, その起源を見ることが出来る. この要素は, 伝統的なシェル理論を回避し, 3次元ソリッド要素を機械的に明瞭な仮定

- (i) 中立面に対する法線ベクトルは変形後も直線を保つが, 必ずしも垂直である必要はない
- (ii) 板厚は変化しない
- (iii) 板厚方向の応力成分は0とする

の下に degenerated した変位型曲面要素である. この要素を平面要素として用いると, Reissner-Mindlin 型板曲げ要素+平面応力要素に完全に一致する. 定式化が簡単であり, かつ連続体力学の基礎方程式から直接導かれる要素であり, 有限要素定式化も分かりやすい, という利点がある. 基本的な考え方が大変簡明な一方で, 一般に計算コストが高くなるため, 特に材料非線形問題への適用が, 限られてくるのが問題である.

1.2.2 合応力による定式化

シェル解析の大部分が、degenerated シェルを使っているのに対し、resultant-stress 法は、古典的非線形シェル理論に起源を見ることが出来る。この方法は、“薄い物体は、一般的な一連の3次元の支配方程式を、ある意味で等価なシェル理論につながる方程式に置き換えることで、最も上手く扱うことが出来る”とする考え方に基づく。Eriksen と Truesdell が、Cosserats 連続体の概念を基に、シェルをディレクターを持つ表面として考えることで、直接的な理論構築を始めた。Cosserats は、変位場に加えて、それとは独立に、回転自由度が各連続体の断片に割り当てられているというものだった。結果的には、彼らの導いた方程式、ひずみ法は、元の Cosserats の方程式とはかなり異なるものとなった。また、Simo は、stress-resultant 法に基づいた、幾何学的に正しいシェルを提案した。このモデルは、完全に stress-resultant によって定式化されており、シェルの広げられない一方向の Cosserats 表面として扱っている。

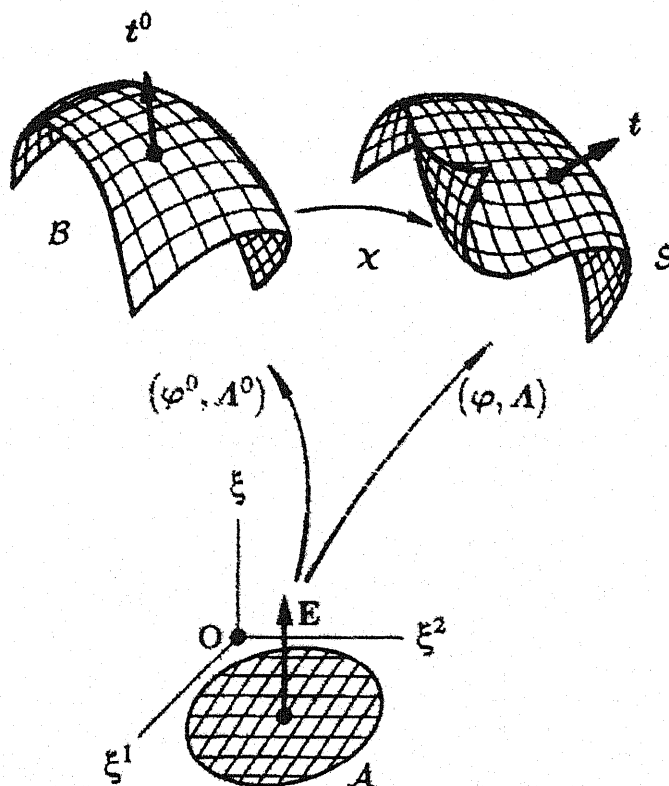


Fig. 1.1: 非伸張性 cosserats 表面の形状 [7]

これらの考えに基づく論文は、膨大な数が現れている。例えば、Simo[7]などを参照されたい。

1.2.3 次数低減積分による安定化

アイソパラメトリック要素を用いた変位型有限要素法では、要素分割に対して解の収束性は保障されているものの、完全積分を行うと剛性を過大評価してしまう時がある。(ロッキングという。)これを回避するために、完全積分を行える積分点の数より少ない積分で、接線剛性マトリクスを評価する。これを次数低減積分と呼ぶ。場合によってはロッキングの原因となっている項のみを次数低減積分を行い、残りは完全積分を用いるときもある。(選択型次数低減積分という。)もし、形状関数が一次要素の場合、ランクが不足する(接線剛性マトリクスのランクが、全自由度 - 剛体モード より少ない)ため、ゼロエネルギーモードが剛性マトリクスに含まれる。このため、擬似剛性を接線剛性マトリクスに付加する、アワーグラスモード制御を行って安定解を得ている。くわしくは[9],[17]などを参照されたい。

1.2.4 非適合モード

非適合モードは、曲げが支配的な変形をする低次アイソパラメトリック要素の shear-locking を回避するために、Wilson によって提唱された方法である。この方法の実用的な特徴としては、粗いメッシュでの高次の正確性、メッシュ分割に関しての insensitivity、非圧縮に近い非線形材料解析に関して優れていること、などが挙げられる。しかし、wilson のゆがんだ配置における定式化に不備があったため、研究者間の注目はずっと低いものだった。代わりに、応力と変位を独立な変数として扱う Hybrid 法が成功を収めていた。この研究法が認知され始めたのは、Ibrahimbegovic, Wilson らが、8 節点 Wilson-brick 要素の幾何学非線形解析を発表してからである。この要素は、変位型の定式化に基づき、非適合モードで修正されたものであった。そして、本質的には Hybrid 法と同じ性能を示すこと、非線形の構成式を持つ材料に関して明確な利点があることが判明した。彼らの最近の論文には、例えば [8] などがある。

1.2.5 enhanced strain 法

Simo と Rifai は, 平面要素を 3 次元領域で扱うに当たり, 次の変分汎関数を考えた.

$$\Pi = \int_V \left[\frac{1}{2} \epsilon^T E \epsilon - u^T f \right] dV - \int_S u^T \bar{T} dS - \int_V \sigma^T \epsilon^i dV \quad (1.1)$$

ひずみは以下のように, 2 つに分解される.

$$\epsilon = Du + \epsilon^i = Bq + B^i \lambda \quad (1.2)$$

D は, 微分係数のマトリクスであり, u は compatible 変位場, ϵ^i は enhanced ひずみである. また, B は標準的なひずみマトリクス, q には要素の節点自由度 (たわみ, 回転角, 厚み変化) が含まれ, λ は enhanced ひずみ係数である.

assumed 応力 σ と, 選択された enhanced ひずみ ϵ^i とには, 以下の直交条件が成り立つ.

$$\int_V \delta \sigma^T \epsilon^i dV = 0 \quad (1.3)$$

推測的には, 応力係数を計算する数式は全く生成されないと思われる. それゆえ, この方法において, 応力は, assumed ひずみ項からは得られない. 一つの可能性としては, 構成式 $\epsilon = Du + \epsilon^i$ におけるひずみを使って, 応力を求めることが考えられる.

この方法の利点としては, 曲げの状況と同様に, 非圧縮という限定下でも大変良く機能することが挙げられる. そのため, 幾何学的, 材料的, 非線形問題をシミュレートするのに適用される. また, 定式化の特徴上, 粗いメッシュでも, 大変正確である. さらに, 非弾性材料のモデル化も分かりやすい.

1.2.6 3次元弾性理論

現代のシェル理論は、いわゆる Reissner-Mindlin 理論に基づくため、厚み方向の横せん断ひずみは、一定としている。また、厚み方向の垂直応力は、ゼロと仮定される。それゆえ、3次元の場合の6つの応力要素は、シェルの場合、5つに減少する。この平面応力状態は、構成式においても考慮されなければならない。しかし、3次元連続体によってのみ記述されるような、複雑な材料に対しては、3次元の構成式を使うほうが有利になるのは、事実である。

シェル要素に対して3次元の構成式を適用するための一つの方法として、厚み方向の垂直応力を、シェル要素の変位型定式化に加えることが考えられる。このためには、厚み方向に関するディレクターベクトルを内挿することになるが、一般的なシェルと比較して、厚み方向のひずみを記述する分、自由度が増えている。だが、厚み方向のひずみが一定の要素に、3次元の構成式を用いると、Locking が起きてしまう。この影響は、enhanced assumed strain 法を用いることによって、和らげることが出来る。また、板厚が薄い場合、ディレクターベクトルを双一次の形状関数で内挿すると、別の Locking が起きてしまう。この影響も、厚み方向のひずみに関して、特殊な内挿をすることで、和らげうる。しかしながら、このような特徴は、必然的に、シェルの定式化を複雑で扱いにくいものにしてしまう。

1.2.7 drilling 自由度を持つ要素

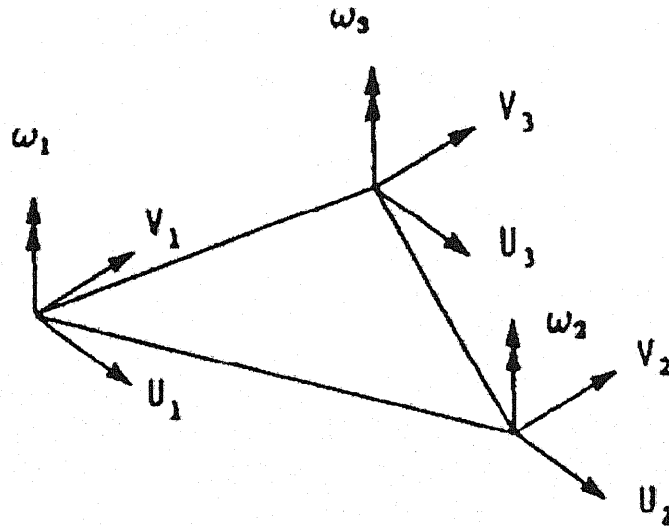


Fig. 1.2: drilling 自由度を持つ三角形膜要素

図 1.2.7 において回転角 ω_i は、次のように表せる。

$$\omega_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right) \quad (1.4)$$

drilling 自由度を持つ膜要素とは、このように、節点の回転角が定義された膜要素であり、板曲げ要素と重ね合わせて出来るシェル要素は、各節点、6 自由度（3 変位, 3 回転自由度）を持つ。そして、以下の利点がある。

- (i) 中間節点を加えることなく性能向上が図れる可能性があり、モデルの準備、メッシュの生成が簡単になる。
- (ii) シェルの交点の扱いが簡単になる。

典型的な膜要素の場合、内回転自由度を持たないので、板曲げ要素と重ね合わせても角節点に 5 自由度しか持たない。この場合、プログラムを組む上での数々の実用上の難点があり、モデル構築のためにそれを克服しなければならない。しかし、drilling 自由度を持つ膜要素はこの問題を回避している。つまり、工学的見地からすれば、大変魅力的と言える。[10]などを参考にされたい。

1.2.8 共回転型シェル要素

非線形の領域において上手く解析できるような複雑なシェル構造は、宇宙空間における構造物などを、より適切に設計仕様する際に求められる。そこで大回転（例えばたわみが大きいときや、座屈など）に耐えるようなシェル要素の改良に関する、多くの研究がなされてきた。伝統的には、大回転についての有限要素定式化は、構成式と要素の運動学が強固に結びついた、一つのモジュールの中で行われてきた。この方法は、多くのほり、シェル要素に対しては、回転が穏やかと仮定に基づいているため有効でなかった。

理論的には、連続体の運動は、常に純粋な変形に続いて剛体運動をするように分解することが出来る。有限要素離散化が十分細かく連続体の近似が適当な場合は、要素レベルにおいても、この分解を行うことが出来る。もし、剛体運動が、変位、回転が大きいがひずみが小さい変位場から取り除かれれば、純粋な変形は、要素の次元に比べて常に小さい量となる。この方法の利点は、要素の定式化とは独立に、任意の要素の、任意の大変位、大回転からひずみを計算できるところである。下の図は、Peyman Khosraviら [11] の論文に掲載されているもので、彼らはDKT 板曲げ要素に、OPT 膜要素を重ね合わせたシェルを発表している。

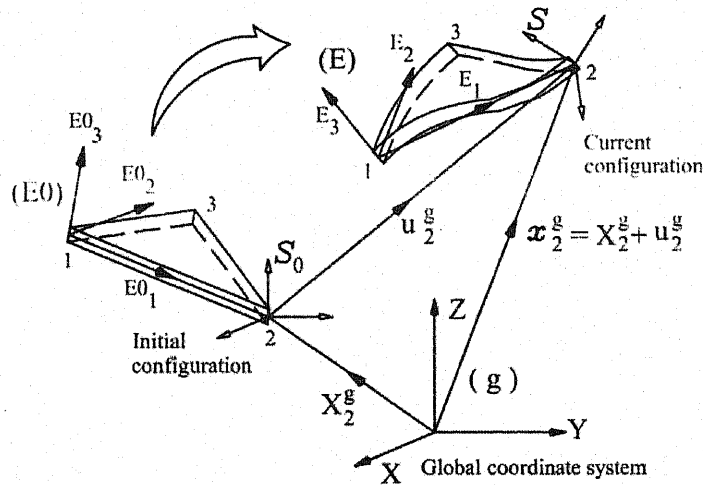


Fig. 1.3: 共回転法

1.2.9 複合材に関する高次理論

薄板上の複合材は、しばしば古典薄板理論 (CLT) を用いて、それに相当する単一の層でモデル化されてきた。CLT は、Kirchhoff-Love の仮定に基づく、古典的な板曲げ理論の直接的な拡張である。すなわち、板は、平面を保ち、変形前の中立面に対する垂線は、変形後の中立面にたいしても、垂直を保つという仮定である。この理論は、厚みの板の長さに対する比率が小さければ十分なものである。しかし、高度なフィラメント状の複合材は、繊維方向の有効弾性率に比べて有効横断弾性率が著しく小さいため、厚みの影響に左右されやすい。Reddy と Kuppusamy は、厚みが辺の 10 分の 1 の場合、CLT によって予測される固有振動数は、せん断の影響を含めて予測されたときと比べて、25 パーセントほど高いという結果を示した。さらに、古典理論は、たわみを小さく、固有振動数や座屈荷重を高く予測してしまう。

CLT の欠点を克服するため、せん断応力を考慮した単層理論が現れた。これは Mindlin 型の一次のせん断変形理論 (FSDT) である。しかし、CLT、FSDT のどちらの理論も、全ての層を等価な一つの層であると考えられるため、横断面のゆがみはモデル化できない。また垂線が変形しないという仮定が、隣接した層の間のせん断応力の非適合性を生じてしまう。

Pagano による解析によれば、複合平板は変形後の垂線の面内の変形は、板の厚みだけでなく、各層の幾何学的配置と直交異方性の度合いにも依存することが分かった。それゆえ、等方の板、シェルで容認される "変形不可能な垂線" の仮定は、ポアソン比が大きい多層の異方性の板、シェルでは板厚が比較的薄くても容認できなくなる。そこで、垂線の変形の補正を考慮に入れたせん断変形理論が、多層の異方性板、シェルの弾性挙動 (たわみ、面内変位の分布など) の正確な予測には必要になってくる。

3次元効果 (厚みの変化や、変形した垂線のゆがみ) を考慮した妥当な理論は現在沢山存在し、2つのタイプに大別される。一つは layerwise 理論であり、もう一つは単層理論である。前者ではせん断応力、垂線の連続性は課せられていないのに対し、後者はせん断応力の連続性が課せられている。

1.2.10 僧帽弁解析に関する研究

本研究の目的は心臓の僧帽弁および大動脈弁の合理的な解析である。僧帽弁とは、心臓の左心房と左心室の間にある弁であり、左心室と左心房の間にある非常に重要な部分である。左心房が収縮すると同時に開いて左心室へと血液を送り込み、また左心室が収縮すると同時に閉じて左心房へ血液が逆流しないように働いている。僧帽弁は前葉と後葉からなり、前葉は後葉より遥かに大きい。前葉と後葉のどちらも輪環と腱索と接触し、腱索はまた乳頭と接触する。これらを僧帽弁系と呼び、心臓収縮期に、心室が収縮する際血液が心房に逆流するのを防いでいる。それゆえ、血液逆流を防ぐために極めて重要な役割を果たす。心臓の病変を正しく評価するためには、正常な心臓とその構成組織を理解しなければならない。ほとんどすべての生体軟組織 (例えば: 心筋、筋腱、心臓弁、動脈) は異方性と粘弾性的な強い非線形性を示す材料である。生体状態下に生体軟組織は大変形をし、それに異なる構成要素たちが複雑な連成を行う。このような複雑な生体挙動、生体内外においての異なる応答反応を示す生体軟組織を、実現可能な材料モデルと関連パラメータで同一化する

ことはいまだに大きな挑戦となっている。

May-Newman と Yin は僧帽弁解析用横等方材料法則を提案した。彼らの材料法則は、豚の僧帽弁系を用いて2軸テンソル実験を行った、実験データに基づいている。この研究により、僧帽弁前葉と後葉は、どちらも異方性と強い非線形性を示すことが分かった。

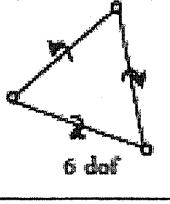
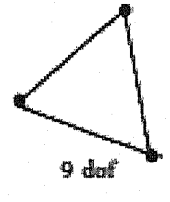
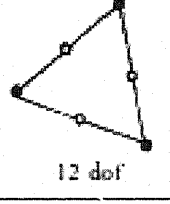

異方性を持つ材料の大変形解析に適用できるため、生体軟組織の解析に超弾性構成モデルは理想なモデルになる。今まで、異なる材料モデルを用いていくつか僧帽弁系用流体解析を行われてきた。(e.g. Kunzelman et al., Einstein et al., Votta et al., Dal Pan et al.), この中のいくつかは、構成モデルを有限要素解析コードに組み込んだ。Holzapfel et al. は生体膜構造解析用モデルを有限要素に実装した。Weiss et al. は非圧縮横等方超弾性モデルを有限要素に実装した。Sun と Sacks は Fung モデルを実装した。

1.3 Discrete Kirchhoff 板/シェル要素の概要

Kirchhoff 板曲げ理論を用いることによって得られる変位型有限要素法に適合するモデルでは、たわみ w の C^1 連続性が求められる。これによって、内挿関数が要素全域で（細分が無く）定義されるとすれば、最小限の自由度しか持たないシンプルな要素を開発することが困難になってしまう。Kirchhoff 理論に基づく、連続体レベルでの、高性能な要素の定式化が困難を極めたことが、1960 年代後半の、いわゆる Discrete Kirchhoff 技術による板/シェル定式化の発展へとつながっていった。最初の論文は、Wempner らに、続いて Stricklin ら、Dhatt によって投稿された。彼らは、それぞれ独自に新しい 3 節点の、各節点 3 自由度を持つ、三角形板曲げ要素を開発した。（ここでは DKT9 と呼んでいる。）

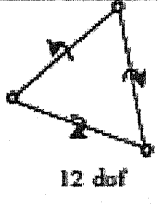
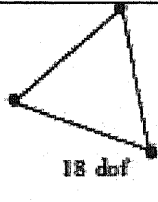
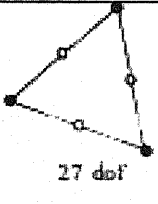

DKT 板曲げ要素の定式化の特徴として、Reissner-Mindlin 理論に離散的に Kirchhoff 拘束条件 (DK 条件) を加えることが挙げられる。そもそも、Reissner-Mindlin 理論はせん断変形を考慮した理論だが、板の厚みが薄くなるにつれて、曲げ問題に対し、解が非常に固くなっていく。これは、ロッキングと呼ばれる。一方、DKT 板曲げ要素において剛性マトリクスを計算する際、せん断ひずみエネルギーは完全に無視される。（エネルギー計算の際のみ、要素全体で Kirchhoff 条件が成り立つとする。）そのため、せん断歪によるロッキングは起こらない。ただ、せん断変形をすとしていないはずなのに、せん断歪エネルギーは無視している。この矛盾を解決しているのが、Discrete Kirchhoff 仮定である。この方法は、Mindlin 板の Locking-free 他の方法と比べて計算が簡明になる、つまり定式化に特別な変分原理が必要ないという点で優れている。[14]Reissner-Mindlin 理論は、たわみに関する C^0 連続性しか考慮しないため、キルヒホッフ条件 (C^1 連続性) を離散的にしか満たさない DK 要素は、非適合要素であるといえる。しかし、エネルギーを得るために直接変位を使う変位法とは違い、DK 法は、回転角を得るためだけにたわみ w を使い、回転角から導かれる曲率をもとにエネルギーを計算するので、気にする必要はない。

Fig. 1.4: DKT 板曲げ要素の概要

形状	変数	要素名	作者 (発行年)	注釈
 6 dof	$\circ w$ $\curvearrowright \theta_s$	DKT6	Batoz (1991)	β_x, β_y half C^0
 9 dof	$\bullet w, \theta_x, \theta_y$	DKT9 DKT-BK	Stricklin Dhatt Batoz Batoz- Katili(1992)	β_s quadratic β_n linear
 12 dof	$\bullet w, \theta_x, \theta_y$ $\circ w$	DKTP	Dhatt	β_s cubic, β_n linear
 12 dof	$\circ w \curvearrowright \theta_s$	Semiloof DKL DKTL	Irons Meek, Tan Poulsen Damkilde	

三角形 DKT 板曲げ要素の概要を図 (1.4) に示す。最も単純な要素は、DKT6 と呼ばれる要素だが、最初に開発されたわけではない。DKT9 要素は 1980 年まで、主にカナダの Laval 大学で用いられたものであり、この要素の剛性マトリクスは、別の方法でも得ることが出来る。研究者の中には、定式化の複雑化や、調整可能な係数を導入という代償を払って、DKT9 要素を向上させる修正案を提唱してきた者もいる。1986 年に、Dhatt などが 12 自由度 (中間節点で w , 角節点で w, θ_x, θ_y) を持つ DKTP 要素を開発した。いわゆる Loof 節点を持つ要素は、Irons、Meek と Tan、Poulsen と Damkilde によって開発された。

Fig. 1.5: DKT シェル要素の概要

形状	変数	要素名	作者 (発行年)	注釈
 12 dof	○ U, V, W ⤵ θ_s	DKT12	Batoz (1991,1992)	DKT6+CST
 18 dof	● U, V, W $\theta_x, \theta_y, \theta_z$	DKT18 DLR18	Batoz Dhatt Carpenter	Bathe DKT9+CST DKT+ALLman Membrane with rotation around the normal
 27 dof	○ U, V, W ● U, V, W	DLTP DLT	Dhatt Talbot and Dhatt	DKTP +LST +small stiffness (around θ_z) idem
 24 dof	○ U, V, W ⤵ θ_s		Poulsen and Damiklde	

三角形 DKT シェル要素の概要を図 (1.5) に示す。に最も簡明なシェル要素は DKT12 要素であり, CST 膜要素と, DKT6 板曲げ要素を重ね合わせて作られる。DKT18 要素は, CST 膜要素と, DKT 9 板曲げ要素を重ね合わせて作られる。1 節点に 6 自由度設定されており, ある状況における全体座標系での剛性マトリクスの特異性を回避するため, 面内回転角に相当する, 小さな剛性係数を加えることがひつようになる。回転自由度を持つ, 三角形膜要素も, ある状況における, 膜の挙動を改良するべく用いられるが, 中には, **membrane locking** を引き起こす危険があるものもある。LST 要素と, DKTP 要素を重ね合わせても, 効果的な要素を得ることが出来る。DLTP 要素や, DLT 要素は, 角節点に 6 自由度, 中間節点に 3 自由度を持っている。24 自由度を持つ要素も最近定式化されたが, これは, semi-Loof 要素の一種である。

DK板曲げ要素のほとんどは、混合法や、仮定ひずみ法で定式化されるより一般的な要素の特殊な場合に相当すると言える。

1.3.1 DKT12 シェル=(DKT6+CST)

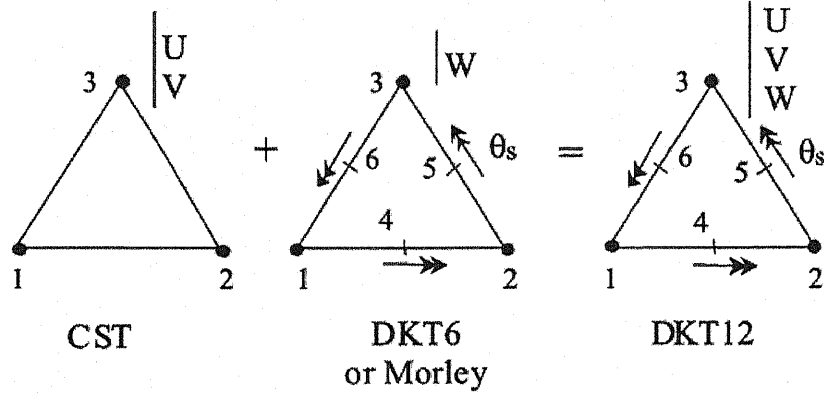


Fig. 1.6: DKT12 シェル

シェルの定式化において、膜の部分と、曲げの部分は、どちらも非常に重要であり、膜のエネルギー、曲げのエネルギーの正確性の、相対的にバランスがとれていることは、利点になる。以下に、定式化を示す。

$$\begin{aligned} \{\epsilon^*\} &= \{e^*\} + z\{\chi^*\} \\ &= \begin{Bmatrix} u_{,x}^* \\ v_{,y}^* \\ u_{,y}^* + v_{,x}^* \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x}^* \\ \beta_{y,y}^* \\ \beta_{x,y}^* + \beta_{y,x}^* \end{Bmatrix} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

ここで、 $\{e^*\}$, $z\{\chi^*\}$ は、仮想膜ひずみ、曲げひずみであり、 β_x^* , β_y^* は、それぞれ、zx 平面、zy 平面に対する垂線の仮想回転角である。DKT6 要素の仮想的な曲げを定義するため、回転角 β_x^* と β_y^* は、 $k=4,5,6$ (図) の節点における回転角 β_{xk}^* , β_{yk}^* により、semi- C^0 近似を用いて、次のように表される。

$$\beta_x^* = \sum_{k=4,5,6} N_k \beta_{xk}^*; \quad \beta_y^* = \sum_{k=4,5,6} N_k \beta_{yk}^* \quad (1.6)$$

$$N_4 = 1 - 2\eta; \quad N_5 = -1 + 2\xi + 2\eta; \quad N_6 = 1 - 2\xi \quad (1.7)$$

ここで、 ξ, η は、面積座標である。 $\beta_{xk}^*, \beta_{yk}^*$ は、 $\beta_{sk}^*, \beta_{nk}^*$ に変換される。

$$\{\chi^*\} = [B_{ns}]\{\beta_{ns}^*\} \quad (1.8)$$

ここで、 $\{\beta_{ns}^*\} = \langle \beta_{n4}^* \beta_{n5}^* \beta_{n6}^* \beta_{s4}^* \beta_{s5}^* \beta_{s6}^* \rangle$ である。回転角 β_{sk}^* を、節点のたわみ w_i^*, w_j^* で表すため、キルヒホッフ仮定が、各要素の辺に導入される。

$$\int_0^{L_k} \gamma_{sk}^* ds = \int_0^{L_k} (w_{,s}^* + \beta_s^*) ds = 0 \quad (1.9)$$

$$\beta_{sk}^* = (w_i^* - w_j^*)/L_k \quad (1.10)$$

最終的に, $[B_f]$ マトリクスが次のように求まる.

$$\{\chi^*\} = [[B_w][B_\theta]]\{w_n^*\} = [B_f]\{w_n^*\} \quad (1.11)$$

$$\langle w_n^* \rangle = \langle w_1^* \ w_2^* \ w_3^* \ \theta_4^* \ \theta_5^* \ \theta_6^* \rangle \quad (1.12)$$

CST 要素と DKT6 要素を組み合わせて出来る DKT12 シェルは,12 自由度しかない.

$$\{\epsilon^*\} = ([B_m] + z[B_f])\{u_n^*\} \quad (1.13)$$

$$\langle w_n^* \rangle = \langle u_i^* \ v_i^* \ w_i^* \ \theta_{i+3}^*; \ i = 1, 2, 3 \rangle \quad (1.14)$$

1.3.2 DLTP (DLTP + LST)

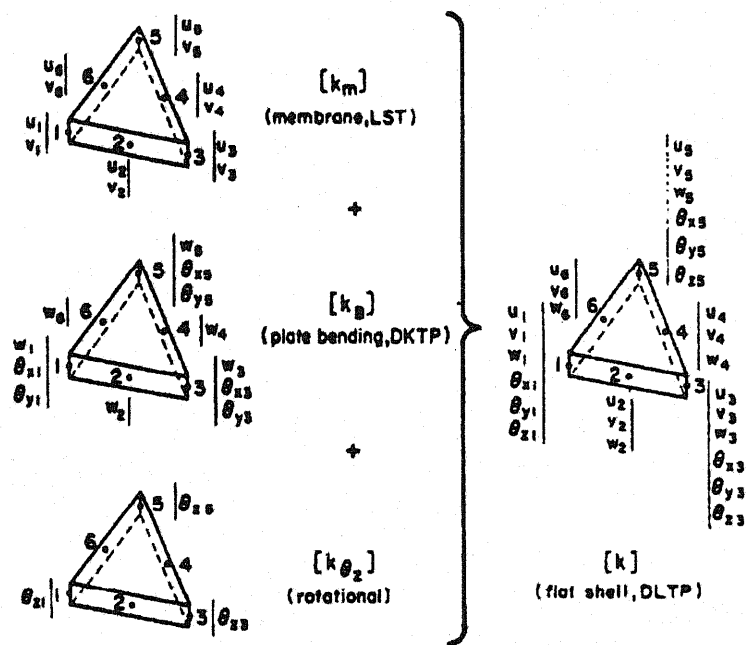


Fig. 1.7: DLTP 要素の構成

DLTP 要素は、Fafard ら [1] によって開発された要素で、DKT 板曲げ要素と線形歪要素 (LST 要素) とを重ね合わせることで作られる要素である。図 (1.7) は DLTP 要素の剛性マトリクスの成り立ちを示している。線形問題に関しては、要素内におけるたわみ w を明示的に定義する必要はなかったが、非線形の問題に関しては、要素内における $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ の近似が必要になってくる。効果的な非線形要素を得るためには、 w の内挿は大変重要である。(u, v, w) の選択の仕方によっては、membrane-locking が起きてしまうからである。この DLTP 要素では、非線形項の計算のため、Green-Lagrange ひずみを、(u, v, w) の 2 次の関数として定義している。接線剛性マトリクスは、(u, v, w) の 2 次の内挿の場合、固い結果になるため、線形の内挿によって得ている。

1.3.3 DKL

板曲げ要素と、膜要素を組み合わせる場合、前述のように、面内回転角が不足しているため、一つの節点に集まる要素が同一平面上にあると、全体座標系に座標変換する際、特異点を生じる。この問題の一つの解決策として、面内回転角を、節点変位として加える方法があるが、膜要素にLST要素を使う場合、これは不可能である。代わりに、節点変数として、頂点の回転角を使うことを避ける方法が考えられる。しかし、頂点の回転角が存在しないことは、要素内の C^0 連続を達成することすら出来ない。もし回転角が、Loof節点（各辺に沿う2つのガウス積分点）から内挿されれば、この問題の不整合が最小限に抑えられる。例えば、Poulsenら[19]の論文では以下のようなになる。

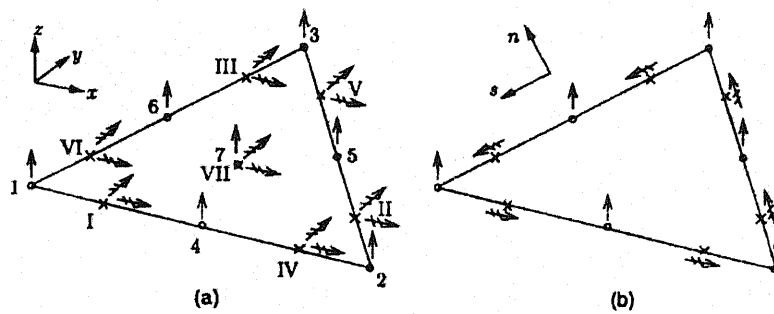


Fig. 1.8: DKL 要素の自由度 (a) 最初において (b) 最後において

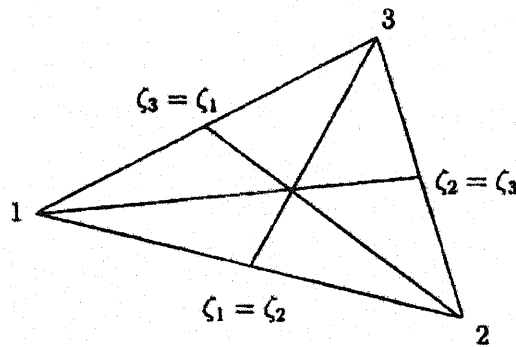


Fig. 1.9: 面積座標

各点における形状関数は、次のようになる

$$N_I = \frac{1}{3}[(1 + \sqrt{3})\zeta_1^2 + (1 - \sqrt{3})\zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 5\zeta_1\zeta_2 + (2\sqrt{3} - 4)\zeta_2\zeta_3 - (2\sqrt{3} + 4)\zeta_3\zeta_1] - \sqrt{3}(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_2 - \zeta_3)(\zeta_3 - \zeta_1) \quad (1.15)$$

$$N_1 = \zeta_1(2\zeta_1 - 1) + 3\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \quad (1.16)$$

$$N_4 = 4\zeta_1\zeta_2 - 12\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \quad (1.17)$$

$$N_7 = 27\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \quad (1.18)$$

他の点における形状関数は、上の式の添え字の置換によって得られる。

最初に、剛性マトリクスが Loof 節点、中心点における回転角に基づくとする。中心点における回転角が、まず変換 T_1 によって取り除かれる。Kirchhoff の仮定が要素において成り立つ。

$$\int_A [(\theta_x - \frac{\partial w}{\partial y})dA] = 0 \quad (1.19)$$

$$\int_A [(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x})dA] = 0 \quad (1.20)$$

$$(1.21)$$

これは、いかなる方向においても、Kirchhoff 仮定が成り立つことを意味する。

Loof 節点 I, ..., VI における回転角は、local 座標系に置換され (T_2)、Kirchhoff 拘束条件を離散的に課すことで、辺に垂直な回転角を取り除くことが出来る。

$$\theta_n - \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad \text{nodes I, ..., IV} \quad (1.22)$$

最終的に 12 の自由度を与える置換マトリクスを T_3 として、全置換マトリクスが以下のようになる。

$$\mathbf{T}_\theta = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3 \quad (1.23)$$

剛性マトリクスは次のように計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{T}_\theta^T \mathbf{K}_\theta \mathbf{T}_\theta \\ &= \mathbf{T}_\theta^T \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{T}_\theta \end{aligned} \quad (1.24)$$

第2章 DKT シェル要素の定式化

2.1 構造要素の変形理論

2.1.1 Kirchhoff-Love 板曲げ理論

Kirchhoff-Love 板曲げ理論は

- Kirchhoff-Love の仮定, すなわち, 板に対する法線ベクトルは変形後も中立面に対して垂直を保つ. (面外せん断変形を許さない)
- 板厚は変化しない.
- 板厚方向の応力成分は零とする.

に基づいている. この理論は, 平板が十分に薄い場合に漸近的な意味で正しい結果を与える.

Kirchhoff-Love の仮定により, 平板の変位は,

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}; \quad w = w(x, y) \quad (2.1)$$

のようになる. (図 2.1)

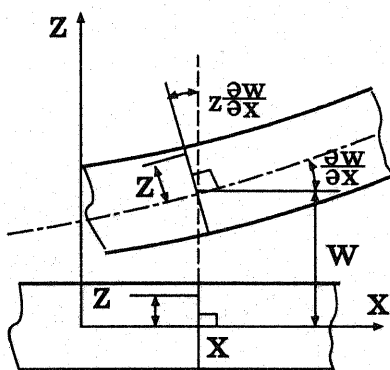


Fig. 2.1: Kirchhoff-Love 平板の変位

ひずみは以下のようになる。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで κ を曲率及びねじれ率とすると、ひずみは以下のように表すことができる

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = z \{\boldsymbol{\kappa}\} \quad (2.5)$$

板の応力状態は平面応力状態 ($\sigma_{zz} = 0$) とする。このとき、均質な弾性板に対して、板の応力は以下の式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\kappa}\} \\ &= z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\kappa}\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、以下のように応力ひずみマトリクス $[D]$ を定義する。

$$[D] = \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = z [D] \{\boldsymbol{\kappa}\} \quad (2.8)$$

板のひずみエネルギー U は次式で表せる。ただし、板厚を h とすると、

$$U = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\boldsymbol{\varepsilon}^T\} [D] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dz dx dy \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\boldsymbol{\kappa}^T\} [D] \{\boldsymbol{\kappa}\} z^2 dz dx dy \quad (2.10)$$

ここで、 $[D_b]$ を以下のように定義する。

$$[D_b] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [D] z^2 dz = \frac{h^3}{12} [D] \quad (2.11)$$

$$= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

これを用いると、ひずみエネルギー U は、以下のように表すことが出来る。

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dx dy \quad (2.13)$$

2.1.2 Reissner-Mindlin の板曲げ理論

Reissner-Mindlin の板曲げ理論は

- 中立面に対する法線ベクトルは変形後も直線を保つが、必ずしも中立面に垂直である必要はない。
- 板厚は変化しない
- 板厚方向の応力成分は零とする

に基づいている。板の中立面に対する法線ベクトルは変形後も直線を保つが、必ずしも中

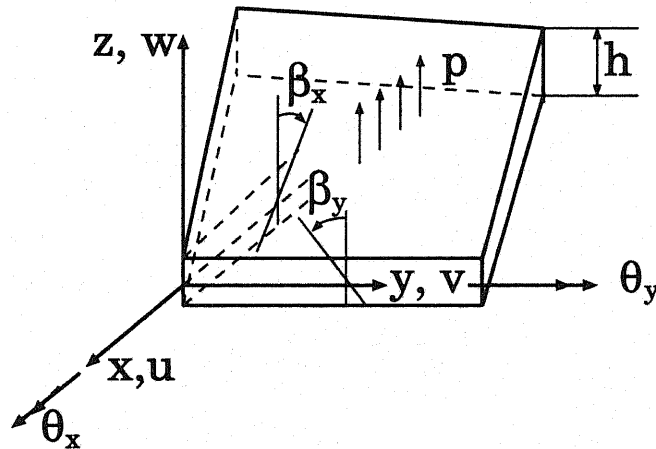


Fig. 2.2: β_x, β_y の正方向の定義

立面に垂直である必要がないという仮定から、板の任意の物質点での変位は、下式の用に表される。

$$u = z\beta_x(x, y); \quad v = z\beta_y(x, y); \quad w = w(x, y) \quad (2.14)$$

Kirchhoff-Love の仮定を満たすような変形状態にあるときは下式が成立する。

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.15)$$

曲げによる歪 ϵ_b は、厚み方向で線形的に変化し、次式のようなになる。

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} z \quad (2.16)$$

ここで、 $\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$ である。面外せん断歪は、次式のように得られる。

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

板の応力状態は、平面応力状態であるので、材料が等方性材料である場合は板の応力は下式で表すことが出来る。

$$\begin{aligned} \{\sigma_b\} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \\ &= z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z[\mathbf{D}]\{\kappa\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_s\} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{E}]\{\gamma\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで、 k をせん断係数として、

$$\{\sigma_s\} = k[\mathbf{E}]\{\gamma\} \quad (2.20)$$

板の歪エネルギー U は次式で表せる。

$$U = U_b + U_s \quad (2.21)$$

ただし、

$$U_b = \frac{1}{2} \int_A \{\kappa\}^T [\mathbf{D}_b] \{\kappa\} dx dy \quad (2.22)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^T [\mathbf{D}_s] \{\gamma\} dx dy \quad (2.23)$$

$[\mathbf{D}_b], [\mathbf{D}_s]$ は、

$$[\mathbf{D}_b] = d \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\mathbf{D}] z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$[\mathbf{D}_s] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\mathbf{E}] dz = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

ここで, k はせん断修正係数で,通常 $k = \frac{5}{6}$. 板の曲げモーメント $\{M\}$, せん断力 $\{Q\}$ は,それぞれ

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_b\} z dz = [D_b] \{\kappa\} \quad (2.26)$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{zx} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = h \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_s\} z dz = [D_s] \{\gamma\} \quad (2.27)$$

となる.

2.1.3 DKT 板曲げ理論要素の有限要素方程式化

DKT 板曲げ要素は三角形の Discrete-Kirchhoff 板曲げ要素であり, Mindlin 型三角形板の幾つかの拘束点に, Kirchhoff 拘束条件を加えることにより作った, locking-free 要素である. Discrete-Kirchhoff 仮定とは, たわみ w と回転角 β をそれぞれ C^0 連続で独立な内挿関数により近似する.

$$w = N_w^{(n)} w^{(n)}; \quad \beta = N_\beta^{(m)} \beta^{(m)} \quad (2.28)$$

その後で, 幾つかの離散的な点に Kirchhoff 条件を課す. 拘束点以外で, Kirchhoff 仮定は成立しないが, せん断歪エネルギー U_s は曲げ歪エネルギー U_b に比べて無視できるほど小さくなる.

ここで以下の仮定を置く.

- (i) 各節点では Kirchhoff 条件を満たす.

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.29)$$

節点での回転自由度を θ_x, θ_y とすると, 各節点では

$$\beta_x^{(m)} = \theta_y^{(m)}, \quad \beta_y^{(m)} = -\theta_x^{(m)} \quad (2.30)$$

- (ii) 拘束点 (discrete point) では, Kirchhoff 条件を満たさなければならない.

- (iii) 回転自由度 β_x, β_y は適合条件を満たす.

2.1.4 Batoz の DKT 板曲げ要素 3 節点 9 自由度

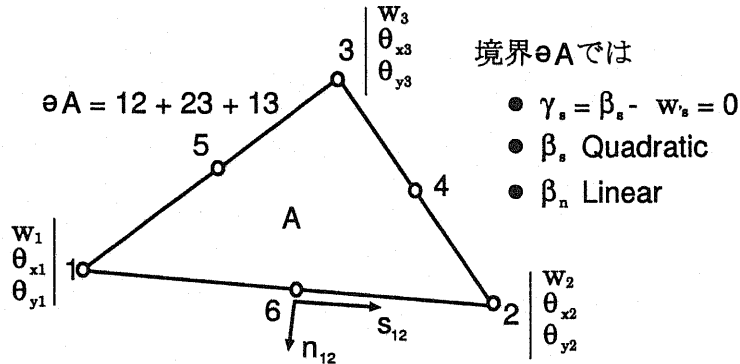


Fig. 2.3: 3 節点の DKT 板曲げ要素

Batoz らは Mindlin 板理論 (節 2.1.2) に以下のように離散的に Kirchhoff 拘束条件を加えることにより, 3 節点 9 自由度の DKT 要素を開発した.

- (i) 要素内の β_x, β_y は, 通常 の 6 節点の補間関数により 2 次式で補間される.

$$\beta_x = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{xi}; \quad \beta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{yi} \quad (2.31)$$

ここで, β_{xi}, β_{yi} は図 2.3 に示す三つの角節点と三つの辺中点での回転角度, また, N_i は式 (2.32) に示す形状関数である.

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1) \\ N_2 &= L_2(2L_2 - 1) \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1) \\ N_4 &= 4L_2L_3 \\ N_5 &= 4L_3L_1 \\ N_6 &= 4L_1L_2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

- (ii) 図 2.3 に示す三つの角節点及び三つの辺中点で, Kirchhoff 拘束条件が以下のように加えられている.

- 三つの角節点では

$$\gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{bmatrix} = 0; \quad \text{at nodes 1, 2 and 3} \quad (2.33)$$

- 三つの辺中点では, たわみの辺方向微係数 $\frac{\partial w}{\partial s}$ と, 回転角の辺方向成分 β_s が一致する.

$$\frac{\partial w}{\partial s} + \beta_{s_k} = 0; \quad k=4,5,6 \quad (2.34)$$

- (iii) 各辺でのたわみ w の変化を 3 次式で近似し, 2 つの端点での 4 つのパラメータ $w_i, \frac{\partial w_i}{\partial s}, w_j, \frac{\partial w_j}{\partial s}$ を用いて, $\frac{\partial w_k}{\partial s}$ を次式のように定義する.

$$\frac{\partial w_k}{\partial s} = -\frac{3}{2l_{ij}}w_i - \frac{1}{4}w'_{s_i} + \frac{3}{2l_{ij}}w_j - \frac{1}{4}w'_{s_j} \quad (2.35)$$

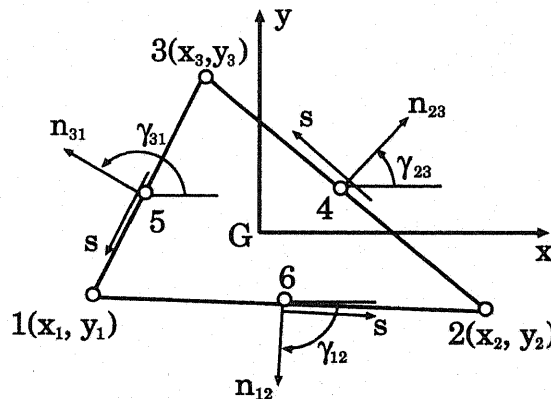
ここで, k は辺 ij の中央点, l_{ij} は ij の長さを示す.

- (iv) 各辺での β_n が線形的に変化している. つまり,

$$\beta_{n_k} = \frac{1}{2}(\beta_{n_i} + \beta_{n_j}) \quad (2.36)$$

ここで, $k=4,5,6$ はそれぞれ, 辺 23, 31, 12 の中点を示す.

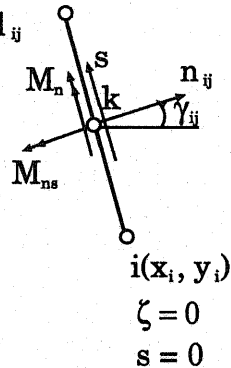
この要素では要素内でのたわみ w に関する補間を定義せず各辺でのたわみ w の変化が三次式であることを仮定した. よって, $\frac{\partial w}{\partial s}$ は辺に沿って二次式で変化する. 各辺で 3 つの拘束点 (2 つの端点, 1 つの辺中点) で Kirchhoff 条件を加えたため, 要素の境界 (各辺) でのすべての点で Kirchhoff 条件を満たしている. (図 2.3).



$$l_{ij} = (\mathbf{x}_{ij}^2 + \mathbf{y}_{ij}^2)^{1/2}; \quad \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; \quad \mathbf{y}_{ij} = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j$$

$$\zeta = 1 \quad j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$$

$$s = l_{ij}$$



$$\begin{aligned} \zeta &= 0 \\ s &= 0 \end{aligned}$$

$$\gamma_{ij} = (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{n}}_{ij})$$

$$\zeta = \frac{S}{l_{ij}}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_i - \zeta \mathbf{x}_{ij}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_i - \zeta \mathbf{y}_{ij}$$

$$C = \cos \gamma_{ij} = -\mathbf{y}_{ij} / l_{ij}$$

$$S = \sin \gamma_{ij} = \mathbf{x}_{ij} / l_{ij}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$$

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_i + \mathbf{y}_j)$$

Fig. 2.4: 3 節点-DKT 板曲げ要素の配置

3 節点 DKT 板曲げ要素の配置を図 2.4 に示す。
各頂点の座標 (x_i, y_i) $i=1,2,3$ を用いて、辺の長さを表す。

$$x_{ij} = x_i - x_j; \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad (2.37)$$

$$l_{ij} = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

また、 x 軸と n_{ij} 軸の成す角を γ_{ij} とすると、

$$C = \cos \gamma_{ij} = \frac{-y_{ij}}{l_{ij}} \quad (2.39)$$

$$S = \sin \gamma_{ij} = \frac{x_{ij}}{l_{ij}} \quad (2.40)$$

今、各辺での β_n, β_s と β_x, β_y は以下の関係を満たしている。

$$\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

また、式 (2.29), (2.33), (2.34) (2.41) により次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ S & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

ここで、 $C = \cos(\vec{x}, \vec{n}_{ij})$, $S = \sin(\vec{x}, \vec{n}_{ij})$. \vec{n}_{ij} は辺 ij の法線ベクトルである。辺中点 (4,5,6) での回転角度 β_x, β_y を消去する。例えば、辺 23 の中点での回転角度は、次式のように頂点 2 及び頂点 3 でのたわみと回転角度で、次頁のように表すことが出来る。

$$\begin{aligned}
\beta_{x4} &\stackrel{\text{式(2.41)}}{=} C_4 \beta_{n4} - S_4 \beta_{s4} \\
&\stackrel{\text{式(2.36)}}{\stackrel{\text{式(2.34)}}{=}} C_4 \cdot \frac{1}{2} (\beta_{n2} + \beta_{n3}) + S_4 \cdot \frac{\partial w_4}{\partial s} \\
&\stackrel{\text{式(2.35)}}{=} -\frac{y_{23}}{l_{23}} \cdot \frac{1}{2} (\beta_{n2} + \beta_{n3}) + \frac{x_{23}}{l_{23}} \cdot \left(-\frac{3}{2l_{23}} w_2 - \frac{1}{4} \frac{\partial w_2}{\partial s} + \frac{3}{2l_{23}} w_3 - \frac{1}{4} \frac{\partial w_3}{\partial s} \right) \\
&= -\frac{y_{23}}{2l_{23}} \cdot (\beta_{n2} + \beta_{n3}) + \frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} \cdot (-w_2 + w_3) + \frac{x_{23}}{4l_{23}} \cdot (\beta_{s2} + \beta_{s3}) \\
&= -\frac{y_{23}}{2l_{23}} \cdot (C\beta_{x2} + S\beta_{y2} + C\beta_{x3} + S\beta_{y3}) + \frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} \cdot (-w_2 + w_3) \\
&\quad + \frac{x_{23}}{4l_{23}} \cdot (-S\beta_{x2} + C\beta_{y2} - S\beta_{x3} + C\beta_{y3}) \\
&\stackrel{\text{式(2.41)}}{=} -\frac{y_{23}}{2l_{23}} \cdot \left(-\frac{y_{23}}{l_{23}} \beta_{x2} + \frac{x_{23}}{l_{23}} \beta_{y2} - \frac{y_{23}}{l_{23}} \beta_{x3} + \frac{x_{23}}{l_{23}} \beta_{y3} \right) + \frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} \cdot (-w_2 + w_3) \\
&\quad + \frac{x_{23}}{4l_{23}} \cdot \left(-\frac{x_{23}}{l_{23}} \beta_{x2} - \frac{y_{23}}{l_{23}} \beta_{y2} - \frac{x_{23}}{l_{23}} \beta_{x3} - \frac{y_{23}}{l_{23}} \beta_{y3} \right) \\
&= -\frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} w_2 + \frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} w_3 + \left(\frac{y_{23}^2}{2l_{23}^2} - \frac{x_{23}^2}{4l_{23}^2} \right) \cdot \beta_{x2} \\
&\quad - \frac{3x_{23} \cdot y_{23}}{4l_{23}^2} \beta_{y2} + \left(\frac{y_{23}^2}{2l_{23}^2} - \frac{x_{23}^2}{4l_{23}^2} \right) \cdot \beta_{x3} - \frac{3x_{23} \cdot y_{23}}{4l_{23}^2} \beta_{y3} \tag{2.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{y4} &\stackrel{\text{式(2.41)}}{=} S_4 \beta_{n4} + C_4 \beta_{s4} \\
&\stackrel{\text{式(2.36)}}{\stackrel{\text{式(2.34)}}{=}} S_4 \cdot \frac{1}{2} (\beta_{n2} + \beta_{n3}) - C_4 \cdot \frac{\partial w_4}{\partial s} \\
&\stackrel{\text{式(2.35)}}{=} \frac{x_{23}}{l_{23}} \cdot \frac{1}{2} (\beta_{n2} + \beta_{n3}) + \frac{y_{23}}{l_{23}} \cdot \left(-\frac{3}{2l_{23}} w_2 - \frac{1}{4} \frac{\partial w_2}{\partial s} + \frac{3}{2l_{23}} w_3 - \frac{1}{4} \frac{\partial w_3}{\partial s} \right) \\
&= \frac{x_{23}}{2l_{23}} \cdot (\beta_{n2} + \beta_{n3}) + \frac{3y_{23}}{2l_{23}^2} \cdot (-w_2 + w_3) + \frac{y_{23}}{4l_{23}} \cdot (\beta_{s2} + \beta_{s3}) \\
&= \frac{x_{23}}{2l_{23}} \cdot (-S\beta_{x2} + C\beta_{y2} + -S\beta_{x3} + C\beta_{y3}) + \frac{3y_{23}}{2l_{23}^2} \cdot (-w_2 + w_3) \\
&\quad + \frac{y_{23}}{4l_{23}} \cdot (-S\beta_{x2} + C\beta_{y2} - S\beta_{x3} + C\beta_{y3}) \\
&\stackrel{\text{式(2.41)}}{=} -\frac{y_{23}}{2l_{23}} \cdot \left(-\frac{y_{23}}{l_{23}} \beta_{x2} + \frac{x_{23}}{l_{23}} \beta_{y2} - \frac{y_{23}}{l_{23}} \beta_{x3} + \frac{x_{23}}{l_{23}} \beta_{y3} \right) + \frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} \cdot (-w_2 + w_3) \\
&\quad + \frac{x_{23}}{4l_{23}} \cdot \left(-\frac{x_{23}}{l_{23}} \beta_{x2} - \frac{y_{23}}{l_{23}} \beta_{y2} - \frac{x_{23}}{l_{23}} \beta_{x3} - \frac{y_{23}}{l_{23}} \beta_{y3} \right) \\
&= -\frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} w_2 + \frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} w_3 + \left(\frac{y_{23}^2}{2l_{23}^2} - \frac{x_{23}^2}{4l_{23}^2} \right) \cdot \beta_{y2} \\
&\quad - \frac{3x_{23} \cdot y_{23}}{4l_{23}^2} \beta_{x2} + \left(\frac{y_{23}^2}{2l_{23}^2} - \frac{x_{23}^2}{4l_{23}^2} \right) \cdot \beta_{y3} - \frac{3x_{23} \cdot y_{23}}{4l_{23}^2} \beta_{x3} \tag{2.44}
\end{aligned}$$

辺 31 の中点 5 での回転角度 β_{x5}, β_{y5} , 辺 12 の中点 6 での回転角度 β_{x6}, β_{y6} も, 同様に導くことができる。

これを式(2.31)に代入し, 式を参照すると, β_x, β_y が節点自由度

$$\{U\} = [w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}] \quad (2.45)$$

で最終的に次式のように表すことができる.

$$\beta_x = \mathbf{H}_x^T(\xi, \eta)\mathbf{U}, \quad \beta_y = \mathbf{H}_y^T(\xi, \eta)\mathbf{U} \quad (2.46)$$

ここで, ξ, η は三角形の面積座標である.

以下, 式(2.46)の導出手順を示す.

$$\begin{aligned}
\beta_x &= \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{xi} \\
&= \sum_{i=1}^3 -N_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \sum_{i=4}^6 N_i \beta_{xi} \\
&= \sum_{i=1}^3 N_i \theta_{yi} + \sum_{i=4}^6 N_i \beta_{xi} \\
&= N_1 \theta_{y1} + N_2 \theta_{y2} + N_3 \theta_{y3} \\
&\quad + N_4 \left\{ -\frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} \omega_2 + \frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} \omega_3 \right. \\
&\quad + \left(\frac{y_{23}^2}{2l_{23}^2} - \frac{x_{23}^2}{4l_{23}^2} \right) \theta_{y2} + \frac{3x_{23}y_{23}}{4l_{23}^2} \theta_{x2} \\
&\quad \left. + \left(\frac{y_{23}^2}{2l_{23}^2} - \frac{x_{23}^2}{4l_{23}^2} \right) \theta_{y3} + \frac{3x_{23}y_{23}}{4l_{23}^2} \theta_{x3} \right\} \\
&\quad + N_5 \left\{ -\frac{3x_{31}}{2l_{31}^2} \omega_3 + \frac{3x_{31}}{2l_{31}^2} \omega_1 \right. \\
&\quad + \left(\frac{y_{31}^2}{2l_{31}^2} - \frac{x_{31}^2}{4l_{31}^2} \right) \theta_{y3} + \frac{3x_{31}y_{31}}{4l_{31}^2} \theta_{x3} \\
&\quad \left. + \left(\frac{y_{31}^2}{2l_{31}^2} - \frac{x_{31}^2}{4l_{31}^2} \right) \theta_{y1} + \frac{3x_{31}y_{31}}{4l_{31}^2} \theta_{x1} \right\} \\
&\quad + N_6 \left\{ -\frac{3x_{12}}{2l_{12}^2} \omega_1 + \frac{3x_{12}}{2l_{12}^2} \omega_2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{y_{12}^2}{2l_{12}^2} - \frac{x_{12}^2}{4l_{12}^2} \right) \theta_{y1} + \frac{3x_{12}y_{12}}{4l_{12}^2} \theta_{x1} \\
&\quad \left. + \left(\frac{y_{12}^2}{2l_{12}^2} - \frac{x_{12}^2}{4l_{12}^2} \right) \theta_{y2} + \frac{3x_{12}y_{12}}{4l_{12}^2} \theta_{x2} \right\} \tag{2.47}
\end{aligned}$$

ω_i, θ_{xi} ($i = 1, 2, 3$) についてまとめると,

$$\begin{aligned}
\beta_x &= \left(N_5 \frac{3x_{31}}{2l_{31}^2} - N_6 \frac{3x_{12}}{2l_{12}^2} \right) \omega_1 + \left(N_6 \frac{3x_{12}}{2l_{12}^2} - N_4 \frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} \right) \omega_2 + \\
&\quad \left(N_4 \frac{3x_{23}}{2l_{23}^2} - N_5 \frac{3x_{31}}{2l_{31}^2} \right) \omega_3 + \\
&\quad \left(N_5 \frac{3x_{31}y_{31}}{4l_{31}^2} + N_6 \frac{3x_{12}y_{12}}{4l_{12}^2} \right) \theta_{x1} + \left(N_6 \frac{3x_{12}y_{31}}{4l_{12}^2} + N_4 \frac{3x_{23}y_{23}}{4l_{23}^2} \right) \theta_{x2} + \\
&\quad \left(N_4 \frac{3x_{23}y_{23}}{4l_{23}^2} - N_5 \frac{3x_{31}y_{31}}{4l_{31}^2} \right) \theta_{x3} + \\
&\quad \left\{ N_1 + N_5 \left(\frac{y_{31}^2}{2l_{31}^2} - \frac{x_{31}^2}{4l_{31}^2} \right) + N_6 \left(\frac{y_{12}^2}{2l_{12}^2} - \frac{x_{12}^2}{4l_{12}^2} \right) \right\} \theta_{y1} + \\
&\quad \left\{ N_2 + N_6 \left(\frac{y_{12}^2}{2l_{12}^2} - \frac{x_{12}^2}{4l_{12}^2} \right) + N_4 \left(\frac{y_{23}^2}{2l_{23}^2} - \frac{x_{23}^2}{4l_{23}^2} \right) \right\} \theta_{y2} + \\
&\quad \left\{ N_3 + N_4 \left(\frac{y_{23}^2}{2l_{23}^2} - \frac{x_{23}^2}{4l_{23}^2} \right) + N_5 \left(\frac{y_{31}^2}{2l_{31}^2} - \frac{x_{31}^2}{4l_{31}^2} \right) \right\} \theta_{y3} \\
&= H_{x1}\omega_1 + H_{x2}\omega_2 + H_{x3}\omega_3 + \\
&\quad H_{x4}\omega_2 + H_{x5}\theta_{x2} + H_{x6}\theta_{y2} + \\
&\quad H_{x7}\omega_3 + H_{x8}\theta_{x3} + H_{x9}\theta_{y3}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

β_y についても, 同様に計算する.

これより, H_x, H_y は次式のようになる.

$$\begin{aligned}
H_{x1} &= \frac{3}{2} \left(-\frac{x_{12}}{l_{12}^2} N_6 + \frac{x_{31}}{l_{31}^2} N_5 \right) & H_{y1} &= \frac{3}{2} \left(-\frac{y_{12}}{l_{12}^2} N_6 + \frac{y_{31}}{l_{31}^2} N_5 \right) \\
H_{x2} &= \frac{3x_{31}y_{31}}{4l_{31}^2} N_5 + \frac{3x_{12}y_{12}}{4l_{12}^2} N_6 & H_{y2} &= -N_1 + \left(\frac{1}{4}y_{31}^2 - \frac{1}{2}x_{31}^2 \right) / l_{31}^2 \cdot N_5 \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}y_{12}^2 - \frac{1}{2}x_{12}^2 \right) / l_{12}^2 \cdot N_6 & & \\
H_{x3} &= N_1 - \left(\frac{1}{4}x_{31}^2 - \frac{1}{2}y_{31}^2 \right) / l_{31}^2 \cdot N_5 & H_{y3} &= -H_{x2} \\
&\quad - \left(\frac{1}{4}x_{12}^2 - \frac{1}{2}y_{12}^2 \right) / l_{12}^2 \cdot N_6 & & \\
H_{x4} &= \frac{3}{2} \left(-\frac{x_{23}}{l_{23}^2} N_4 + \frac{x_{12}}{l_{12}^2} N_6 \right) & H_{y4} &= \frac{3}{2} \left(-\frac{y_{23}}{l_{23}^2} N_4 + \frac{y_{12}}{l_{12}^2} N_6 \right) \\
H_{x5} &= \frac{3x_{12}y_{12}}{4l_{12}^2} N_6 + \frac{3x_{23}y_{23}}{4l_{23}^2} N_4 & H_{y5} &= -N_2 + \left(\frac{1}{4}y_{12}^2 - \frac{1}{2}x_{12}^2 \right) / l_{12}^2 \cdot N_6 \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}y_{23}^2 - \frac{1}{2}x_{23}^2 \right) / l_{23}^2 \cdot N_4 & & \\
H_{x6} &= N_2 - \left(\frac{1}{4}x_{12}^2 - \frac{1}{2}y_{12}^2 \right) / l_{12}^2 \cdot N_6 & H_{y6} &= -H_{x5} \\
&\quad - \left(\frac{1}{4}x_{23}^2 - \frac{1}{2}y_{23}^2 \right) / l_{23}^2 \cdot N_4 & & \\
H_{x7} &= \frac{3}{2} \left(-\frac{x_{31}}{l_{31}^2} N_5 + \frac{x_{23}}{l_{23}^2} N_4 \right) & H_{y7} &= \frac{3}{2} \left(-\frac{y_{31}}{l_{31}^2} N_5 + \frac{y_{23}}{l_{23}^2} N_4 \right) \\
H_{x8} &= \frac{3x_{23}y_{23}}{4l_{23}^2} N_4 + \frac{3x_{31}y_{31}}{4l_{31}^2} N_5 & H_{y8} &= -N_3 + \left(\frac{1}{4}y_{23}^2 - \frac{1}{2}x_{23}^2 \right) / l_{23}^2 \cdot N_4 \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}y_{31}^2 - \frac{1}{2}x_{31}^2 \right) / l_{31}^2 \cdot N_5 & & \\
H_{x9} &= N_3 - \left(\frac{1}{4}x_{23}^2 - \frac{1}{2}y_{23}^2 \right) / l_{23}^2 \cdot N_4 & H_{y9} &= -H_{x8} \\
&\quad - \left(\frac{1}{4}x_{31}^2 - \frac{1}{2}y_{31}^2 \right) / l_{31}^2 \cdot N_5 & &
\end{aligned} \tag{2.49}$$

三角形において,

$$\xi = L_2; \quad \eta = L_3; \quad 1 - \xi - \eta = L_1; \tag{2.50}$$

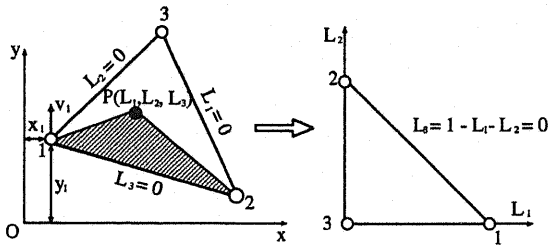


Fig. 2.5: 三角形面積座標及び CST 要素

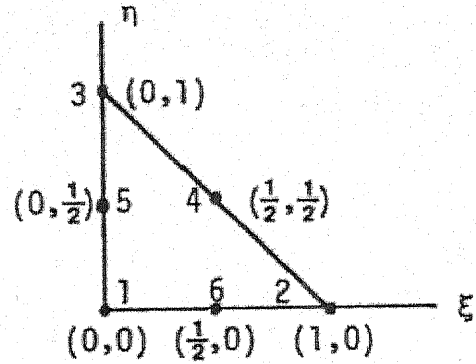


Fig. 2.6: $\lambda - \eta$ 座標

このとき形状関数は,

$$\begin{aligned}
 N^{(1)} &= L_1(2L_1 - 1) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta) \\
 N^{(2)} &= L_2(2L_2 - 1) = \xi(2\xi - 1) \\
 N^{(3)} &= L_3(2L_3 - 1) = \eta(2\eta - 1) \\
 N^{(4)} &= 4L_2L_3 = 4\xi\eta \\
 N^{(5)} &= 4L_3L_1 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \\
 N^{(6)} &= 4L_1L_2 = 4\xi(1 - \xi - \eta)
 \end{aligned}$$

(2.51)

よって, 形状関数の面積座標による偏微分は, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N^{(1)}}{\partial \xi} &= -3 + 4(\xi + \eta) & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial \eta} &= -3 + 4(\xi + \eta) \\
 \frac{\partial N^{(2)}}{\partial \xi} &= 4\xi - 1 & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial \eta} &= 0 \\
 \frac{\partial N^{(3)}}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial \eta} &= 4\eta - 1 \\
 \frac{\partial N^{(4)}}{\partial \xi} &= 4\eta & \frac{\partial N^{(4)}}{\partial \eta} &= 4\xi \\
 \frac{\partial N^{(5)}}{\partial \xi} &= -4\eta & \frac{\partial N^{(5)}}{\partial \eta} &= 4(1 - 2\xi - \eta) \\
 \frac{\partial N^{(6)}}{\partial \xi} &= 4(1 - 2\xi - \eta) & \frac{\partial N^{(6)}}{\partial \eta} &= -4\xi
 \end{aligned}$$

(2.52)

したがって,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_1}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x^{(i)} \\
 &= -3 + 4(\xi + \eta)x^{(1)} + (4\xi - 1)x^{(2)} + 0 \cdot x^{(3)} + \\
 &\quad + 4\eta \cdot \frac{1}{2}(x^{(2)} + x^{(3)}) + (-4\eta) \cdot \frac{1}{2}(x^{(3)} + x^{(1)}) \\
 &\quad + 4(1 - 2\xi - \eta) \cdot \frac{1}{2}(x^{(1)} - x^{(2)}) \\
 &= x^{(2)} - x^{(1)} = x_{21} = -x_{12}
 \end{aligned}$$

(2.53)

同様に,

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi} = y^{(2)} - y^{(1)} = y_{21} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta} = x^{(3)} - x^{(1)} = x_{31} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \eta} = y^{(3)} - y^{(1)} = y_{31} \quad (2.56)$$

これより、ヤコビマトリクスは、以下のようなになる。

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{12} & -y_{12} \\ -x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\det[J] = -x_{12}y_{31} + x_{31}y_{12} = 2A \quad (A: \text{三角形の面積}) \quad (2.58)$$

$$[J^{-1}] = \frac{1}{x_{31}y_{12} - x_{12}y_{31}} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} \\ -x_{31} & -x_{12} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial x_2} \end{Bmatrix} &= [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} + y_{12} \frac{\partial \beta_x}{\partial \eta} \\ -x_{31} \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} - x_{12} \frac{\partial \beta_x}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\{u\}}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} \frac{\partial \{H_x\}}{\partial \xi} + y_{12} \frac{\partial \{H_x\}}{\partial \eta} \\ -x_{31} \frac{\partial \{H_x\}}{\partial \xi} - x_{12} \frac{\partial \{H_x\}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x_2} \end{Bmatrix} &= [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} + y_{12} \frac{\partial \beta_y}{\partial \eta} \\ -x_{31} \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} - x_{12} \frac{\partial \beta_y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\{u\}}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} \frac{\partial \{H_y\}}{\partial \xi} + y_{12} \frac{\partial \{H_y\}}{\partial \eta} \\ -x_{31} \frac{\partial \{H_y\}}{\partial \xi} - x_{12} \frac{\partial \{H_y\}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.62)$$

式(2.49), 式(2.52) を式(2.62) に代入して計算すると,

$$\frac{\partial H_x}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} -\frac{6x_{12}}{l_{12}^2}(1-2\xi) + \left(\frac{6x_{12}}{l_{12}^2} - \frac{6x_{31}}{l_{31}^2}\right)\eta \\ \frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}(1-2\xi) - \left(\frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2} + \frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}\right)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}(1-2\xi) - \left(\frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2} + \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}\right)\eta \\ \frac{6x_{12}}{l_{12}^2}(1-2\xi) - \left(\frac{6x_{23}}{l_{23}^2} + \frac{6x_{12}}{l_{12}^2}\right)\eta \\ \frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}(1-2\xi) + \left(\frac{3x_{23}y_{23}}{l_{23}^2} - \frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}\right)\eta \\ -2 + 6\xi + \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}(1-2\xi) + \left(\frac{3y_{23}^2}{l_{23}^2} - \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}\right)\eta \\ \left(\frac{6x_{31}}{l_{31}^2} + \frac{6x_{23}}{l_{23}^2}\right)\eta \\ \left(\frac{3x_{23}y_{23}}{l_{23}^2} - \frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2}\right)\eta \\ \left(\frac{3y_{23}^2}{l_{23}^2} - \frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2}\right)\eta \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} \frac{6x_{31}}{l_{31}^2}(1-2\eta) + \left(\frac{6x_{12}}{l_{12}^2} - \frac{6x_{31}}{l_{31}^2}\right)\xi \\ \frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2}(1-2\eta) - \left(\frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2} + \frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}\right)\xi \\ -4 + 6(\xi + \eta) + \frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2}(1-2\eta) - \left(\frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2} + \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}\right)\xi \\ -\left(\frac{6x_{23}}{l_{23}^2} + \frac{6x_{12}}{l_{12}^2}\right)\xi \\ \left(\frac{3x_{23}y_{23}}{l_{23}^2} - \frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}\right)\xi \\ \left(\frac{3y_{23}^2}{l_{23}^2} - \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}\right)\xi \\ -\frac{6x_{31}}{l_{31}^2}(1-2\eta) + \left(\frac{6x_{31}}{l_{31}^2} + \frac{6x_{23}}{l_{23}^2}\right)\xi \\ \frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2}(1-2\eta) + \left(\frac{3x_{23}y_{23}}{l_{23}^2} - \frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2}\right)\xi \\ -2 + 6\eta + \frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2}(1-2\eta) + \left(\frac{3y_{23}^2}{l_{23}^2} - \frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2}\right)\xi \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} -\frac{6y_{12}}{l_{12}^2}(1-2\xi) + \left(\frac{6y_{12}}{l_{12}^2} - \frac{6y_{31}}{l_{31}^2}\right)\eta \\ 1 + \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}(1-2\xi) - \left(\frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2} + \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}\right)\eta \\ -\frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}(1-2\xi) + \left(\frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2} + \frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}\right)\eta \\ \frac{6y_{12}}{l_{12}^2}(1-2\xi) - \left(\frac{6y_{23}}{l_{23}^2} + \frac{6y_{12}}{l_{12}^2}\right)\eta \\ -1 + \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}(1-2\xi) + \left(\frac{3y_{23}^2}{l_{23}^2} - \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}\right)\eta \\ -\frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}(1-2\xi) + \left(\frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2} - \frac{3x_{23}y_{23}}{l_{23}^2}\right)\eta \\ \left(\frac{6y_{31}}{l_{31}^2} + \frac{6y_{23}}{l_{23}^2}\right)\eta \\ \left(\frac{3y_{23}^2}{l_{23}^2} - \frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2}\right)\eta \\ \left(\frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2} - \frac{3x_{23}y_{23}}{l_{23}^2}\right)\eta \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} \frac{6y_{31}}{l_{31}^2}(1-2\eta) + \left(\frac{6y_{12}}{l_{12}^2} - \frac{6y_{31}}{l_{31}^2}\right)\xi \\ 1 + \frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2}(1-2\eta) - \left(\frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2} + \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}\right)\xi \\ -\frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2}(1-2\eta) + \left(\frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2} + \frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2}\right)\xi \\ -\left(\frac{6y_{23}}{l_{23}^2} + \frac{6y_{12}}{l_{12}^2}\right)\xi \\ \left(\frac{3y_{23}^2}{l_{23}^2} - \frac{3y_{12}^2}{l_{12}^2}\right)\xi \\ \left(\frac{3x_{12}y_{12}}{l_{12}^2} - \frac{3x_{23}y_{23}}{l_{23}^2}\right)\xi \\ -\frac{6y_{31}}{l_{31}^2}(1-2\eta) + \left(\frac{6y_{31}}{l_{31}^2} + \frac{6y_{23}}{l_{23}^2}\right)\xi \\ -1 + \frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2}(1-2\eta) + \left(\frac{3y_{23}^2}{l_{23}^2} - \frac{3y_{31}^2}{l_{31}^2}\right)\xi \\ -\frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2}(1-2\eta) + \left(\frac{3x_{31}y_{31}}{l_{31}^2} - \frac{3x_{23}y_{23}}{l_{23}^2}\right)\xi \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

2.1.5 Updated 型の仮想仕事式

updated 型の仮想仕事式は, 以下のようになる。

$$\int_v T_{ij} \delta A_{(L)ij} dv \quad (2.67)$$

$$\delta A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.68)$$

平面応力状態を仮定する ($T_{13}, T_{23}, T_{33}, T_{31}, T_{32} = 0$) と, 仮想仕事式の左辺は以下のようになる。

$$\int_v \{ \delta A_{11} \delta A_{22} 2\delta A_{12} \} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{Bmatrix} dv \quad (2.69)$$

$$\{ \delta A_{11} \delta A_{22} 2\delta A_{12} \} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

であることを考えると, 線形問題の自然な拡張として取り扱うことが出来る。つまり,

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon_b \} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = z \{ \kappa \} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &= z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \{H_x\}^T}{\partial x} \\ \frac{\partial \{H_y\}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \{H_x\}^T}{\partial y} + \frac{\partial \{H_y\}^T}{\partial x} \end{Bmatrix} \{ u \} \end{aligned} \quad (2.71)$$

式(2.71)の $\{H_x\}, \{H_y\}$ に含まれる x_{ij}, l_{ij} を現在のものとする事で対応できる。 T_{ij} は, 膜の変形勾配テンソル F を使って求める。

2.1.6 速度型の仮想仕事式

$$\int_v \delta A : \dot{S}_t(t) + \frac{1}{2}(\delta F_t \cdot L + L^T \cdot \delta F_t(t)) \cdot T dv \quad (2.72)$$

$\dot{S}_t(t)$ は次のように求める.

$$\dot{S} = JF^{-1}\dot{S}_t(t)F \quad (2.73)$$

$$\dot{E} = F^T D F^{-T} \quad (2.74)$$

であることを用いると,

$$\dot{S}_{ij} = C_{ijkl}\dot{E}_{kl} \quad (2.75)$$

このとき,

$$S_t(t)_{ij} = \bar{C}_{ijkl}D_{kl} \quad (2.76)$$

とすると,

$$\bar{C}_{pqrs} = \frac{1}{J}F_{pi}F_{qj}F_{rk}F_{sl}C_{ijkl} \quad (2.77)$$

のように導かれる.

2.1.7 膜要素

膜要素の定式化の際、用いる仮定は以下のとおりである.

- (i) 膜要素は平面応力 $\sigma_{33} = 0$
- (ii) 面外せん断歪が 0 ($E_{23} = E_{33} = E_{13} = E_{31} = 0$)
- (iii) 厚みは変化するとすると, $E_{33} \neq 0, F_{33} \neq 0$

これより仮想仕事式は常に以下のようになる.

$$\int_A S_{ij}\delta E_{ij}dV = \{\delta E_{11}\delta E_{22}2\delta E_{12}\} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

S が平面応力だとすると, T は平面応力となるかどうかについて考える. 平面内において, F は必ず以下のようになる.

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \\
&= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T'_{11} &= F_{11}(F_{11}S_{11} + F_{12}S_{21}) + F_{12}(F_{11}S_{12} + F_{12}S_{22}) \\
T'_{12} &= F_{21}(F_{11}S_{11} + F_{12}S_{21}) + F_{22}(F_{11}S_{12} + F_{12}S_{22}) \\
T'_{13} &= F_{33}(F_{11}S_{13} + F_{12}S_{23}) \\
T'_{21} &= F_{11}(F_{21}S_{11} + F_{22}S_{21}) + F_{12}(F_{21}S_{12} + F_{22}S_{22}) \\
T'_{22} &= F_{21}(F_{11}S_{11} + F_{22}S_{21}) + F_{22}(F_{21}S_{12} + F_{22}S_{22}) \\
T'_{23} &= F_{33}(F_{21}S_{13} + F_{22}S_{23}) \\
T'_{31} &= F_{33}(F_{11}S_{31} + F_{12}S_{32}) \\
T'_{32} &= F_{33}(F_{21}S_{31} + F_{22}S_{32}) \tag{2.81}
\end{aligned}$$

$T_{33} = 0$ になる。

シェル要素になると F_{13} , F_{23} , F_{31} , F_{33} は 0 でなくなるので、成立しなくなるのだが、他と比べて小さいと仮定することで同様に成り立つとできる。

2.1.8 CST 要素の Total-Lagrange 定式化

仮想仕事式はいかなる応力状態にあっても

$$\int_A \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV \tag{2.82}$$

であり、座標系のとり方とは無関係に成立する。

空間固定のグローバル座標系 X_i の基底ベクトルを e_i 、平面応力状態になるようにとった局所座標系 X'_i の基底ベクトルを e'_i 、それぞれの基底で分解した \mathbf{s} 、 \mathbf{E} の成分は以下のようになる。

$$\mathbf{S} = S_{ij} e_i \otimes e_j = S_{ij} e_i \otimes e_j \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{E} &= \delta E_{ij} e_i \otimes e_j \\
&= \delta E'_{ij} e'_i \otimes e'_j \tag{2.84}
\end{aligned}$$

e'_i は以下のようにして作る。

節点 1 から 2 に向かう方向の単位ベクトルを e'_1 、すなわち

$$e'_1 = \frac{\mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}}{\|\mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}\|} \tag{2.85}$$

e'_1 と節点 1 から節点 3 に向かう方向の単位ベクトルの外積を正規化したものを e'_3 , すなわち

$$e'_3 = \frac{e'_1 \times (X^{(3)} - X^{(1)})}{\|e'_1 \times X^{(3)} - X^{(1)}\|} \quad (2.86)$$

e'_3 と e'_1 の外積から得られるベクトルを e'_2 とする.

$$e'_2 = e'_3 \times e'_1 \quad (2.87)$$

仮想仕事式は以下のように成分で表すことができる.

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_V S_{ij} \delta E_{ij} dV = \int_V S'_{ij} \delta E'_{ij} dV \quad (2.88)$$

これを離散化して、まず内力ベクトルを求める.

平面応力状態を $S'_{13} = S'_{23} = S'_{33} = S'_{31} = S'_{32}$ と仮定する. 等方の Hook 則の場合, S'_{11} , S'_{22} , S'_{12} は以下のように求められる.

$$\begin{Bmatrix} S'_{11} \\ S'_{22} \\ S'_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E'_{11} \\ E'_{22} \\ 2E'_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

直交異方性の場合

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_x \varepsilon_x + E_{xy} \varepsilon_y \\ \sigma_y &= E_{xy} \varepsilon_x + E_y \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.90)$$

ここで, E_x , E_y , E_{xy} , G は独立な係数である.
あるいは

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E'_x}{1-\nu_x \nu_y} (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E'_y}{1-\nu_x \nu_y} (\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x) \\ E'_x \nu_y &= E'_y \nu_x \\ E_x &= \frac{E'_x}{1-\nu_x \nu_y}, \quad E_y = \frac{E'_y}{1-\nu_x \nu_y} \\ E_{xy} &= \frac{E'_x \nu_y}{1-\nu_x \nu_y} = \frac{E'_y \nu_x}{1-\nu_x \nu_y} \end{aligned} \quad (2.91)$$

ここで, E'_x , E'_y は有効弾性係数であり, ν_x , ν_y は有効ポアソン比である.
内力ベクトルは,

$$S'_{ij} \delta E'_{ij} = \{\delta E'_{11} \delta E'_{22} 2\delta E'_{12}\} \begin{Bmatrix} S'_{11} \\ S'_{22} \\ 2S'_{12} \end{Bmatrix} = \{\delta \mathbf{E}'\}^T \{\mathbf{S}'\} \quad (2.92)$$

ここで局所座標系における成分と全体座標系における成分の対応を表すマトリクスを $[P]$ とする.

$$\{\delta E'\} = [P] \{\delta E\} \quad (2.93)$$

$[P]$ は以下のように導く. P_{mi} を以下のように定義する.

$$P_{mi} = e'_m \cdot e_i \quad (2.94)$$

このとき, E'_{op} と E_{kl} の関係は以下のようになる.

$$\begin{aligned} E'_{op} &= E_{kl} P_{ok} P_{pl} \\ &= E_{11} P_{01} P_{p1} + E_{12} P_{01} P_{p2} + E_{13} P_{01} P_{p3} + \\ &\quad E_{21} P_{02} P_{p1} + E_{22} P_{02} P_{p2} + E_{23} P_{02} P_{p3} + \\ &\quad E_{31} P_{03} P_{p1} + E_{32} P_{03} P_{p2} + E_{33} P_{03} P_{p3} \\ &= E_{11} P_{01} P_{p1} + E_{22} P_{02} P_{p2} + E_{33} P_{03} P_{p3} + \\ &\quad (P_{01} P_{p2} + P_{02} P_{p1}) E_{12} + (P_{02} P_{p3} + P_{03} P_{p2}) \\ &\quad E_{23} + (P_{03} P_{p1} + P_{01} P_{p3}) E_{31} \end{aligned} \quad (2.95)$$

これより,

$$\begin{aligned} E'_{11} &= E_{11} P_{11} P_{11} + E_{22} P_{12} P_{12} + E_{33} P_{13} P_{13} + \\ &\quad 2P_{11} P_{12} E_{12} + 2P_{12} P_{13} E_{23} + 2P_{13} P_{11} P_{31} \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} E'_{22} &= E_{22} P_{21} P_{21} + E_{22} P_{22} P_{22} + E_{33} P_{23} P_{23} + \\ &\quad 2P_{21} P_{22} E_{12} + 2P_{22} P_{23} E_{23} + 2P_{23} P_{21} P_{31} \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} 2E'_{12} &= E_{11} P_{11} P_{21} + E_{22} P_{12} P_{22} + E_{33} P_{13} P_{23} + \\ &\quad +(P_{11} P_{22} + P_{12} P_{21}) E_{12} + (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{22}) \\ &\quad E_{23} + (P_{13} P_{21} + P_{11} P_{23}) E_{31} \end{aligned} \quad (2.98)$$

これをマトリクス表示すると,

$$\begin{pmatrix} E'_{11} \\ E'_{22} \\ 2E'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} P_{11} & P_{12} P_{12} & P_{13} P_{13} & P_{11} P_{12} & P_{12} P_{13} & P_{13} P_{11} \\ P_{21} P_{21} & P_{22} P_{22} & P_{23} P_{23} & P_{21} P_{22} & P_{22} P_{23} & P_{23} P_{21} \\ 2P_{21} P_{21} & 2P_{12} P_{22} & P_{13} P_{23} & X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{11} \\ E_{11} \\ E_{11} \\ E_{11} \\ E_{11} \end{pmatrix}$$

$$X = P_{11} P_{22} + P_{12}$$

$$Y = P_{12} P_{23} + P_{13} P_{22}$$

$$Z = P_{13} P_{21} + P_{11} P_{23}$$

$$(2.99)$$

X, Y, Z は紙面の都合上、置いている. これを以下のように表す.

$$E' = [P] E \quad (2.100)$$

式 (2.92) における, $\{\delta \mathbf{E}\}$ は 2次元のものを用いる. つまり, 変位 \mathbf{u} を座標変換する.

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i = u'_m \mathbf{e}'_m \quad (2.101)$$

$$u_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = u'_m \mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}_j = u'_m P_{mj} \quad (2.102)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{Bmatrix} \quad (2.103)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

$$u'_m = P_{mj} u_j \quad (2.105)$$

このようにして得られた u'_3 は, $u'_3 = 0$ となる. 3節点要素だとすると, 以下のようなになる.

$$\begin{Bmatrix} u'_1(1) \\ u'_2(1) \\ u'_1(2) \\ u'_2(2) \\ u'_1(3) \\ u'_2(3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & & & \\ & P_{21} & P_{22} & P_{23} & & \\ & & & & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ & & & & P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ & & & & & & & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ & & & & & & & P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_3^{(3)} \end{Bmatrix}$$

これを以下のように表す.

$$\{\mathbf{u}'\} = [\mathbf{P}] \{\mathbf{u}\} \quad (2.106)$$

$[\mathbf{B}]$ マトリクスは 2次元のものを用いる.

$$[\mathbf{B}'^{(1)}] = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\delta u'_1}{\delta X'_1}\right) \frac{\delta N^{(n)}}{\delta X'_1} & \frac{\delta u'_2}{\delta X'_1} \frac{\delta N^{(n)}}{\delta X'_1} \\ \frac{\delta u'_1}{\delta X'_2} \frac{\delta N^{(n)}}{\delta X'_2} & \left(1 + \frac{\delta u'_2}{\delta X'_2}\right) \frac{\delta N^{(n)}}{\delta X'_2} \\ \frac{\delta u'_1}{\delta X'_2} \frac{\delta N^{(n)}}{\delta X'_1} + \left(1 + \frac{\delta u'_1}{\delta X'_1}\right) \frac{\delta N^{(n)}}{\delta X'_2} & \frac{\delta u'_2}{\delta X'_1} \frac{\delta N^{(n)}}{\delta X'_2} + \left(1 + \frac{\delta u'_2}{\delta X'_2}\right) \frac{\delta N^{(n)}}{\delta X'_1} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}'] = [[\mathbf{B}'^{(1)}][\mathbf{B}'^{(2)}][\mathbf{B}'^{(3)}]] \quad (2.107)$$

剛性マトリクスは速度型の仮想仕事式から導かれる.

$$\left(\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV \right) = \int_V \left(\dot{\mathbf{S}} : \delta \mathbf{E} + \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} \right) dV \quad (2.108)$$

ここでもグローバル座標系での成分を S_{ij} , \dot{S}_{ij} , δE_{ij} , $\delta \dot{E}_{ij}$, ローカル座標系での成分を S'_{ij} ,

$\dot{S}'_{ij}, \delta E'_{ij}, \delta \dot{E}'_{ij}$ とすると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} \int_V (\dot{\mathbf{S}} : \delta \mathbf{E} + \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}}) dV &= \int_V (\dot{S}'_{ij} : \delta E'_{ij} + S'_{ij} : \delta \dot{E}'_{ij}) dV \\ &= \int_V (\dot{S}'_{ij} : \delta E'_{ij} + S'_{ij} : \delta \dot{E}'_{ij}) dV \end{aligned} \quad (2.109)$$

初期変位項を導く. ローカル座標系での構成則を以下のように表す.

$$\begin{aligned} \dot{S}'_{ij} &= C'_{ijkl} \dot{E}'_{kl} \\ &= C'_{ij11} \dot{E}'_{11} + C'_{ij12} \dot{E}'_{12} + C'_{ij21} \dot{E}'_{21} + C'_{ij22} \dot{E}'_{22} \\ &= C'_{ij11} \dot{E}'_{11} + C'_{ij22} \dot{E}'_{22} + \frac{1}{2}(C'_{ij12} + C'_{ij21}) \cdot 2\dot{E}'_{12} \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{S}'_{11} \\ \dot{S}'_{22} \\ \dot{S}'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \frac{1}{2}(C_{1112} + C_{1121}) \\ C_{2211} & C_{2222} & \frac{1}{2}(C_{2212} + C_{2221}) \\ C_{1211} & C_{1222} & \frac{1}{2}(C_{1212} + C_{1221}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{E}'_{11} \\ \dot{E}'_{22} \\ 2\dot{E}'_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.111)$$

式(2.111)は以下のように表す.

$$\{\dot{\mathbf{S}}'\} = [\mathbf{D}'] \dot{\mathbf{E}}' \quad (2.112)$$

これを用いると, 初期変位項は以下のように表される.

$$\dot{S}'_{ij} \delta E'_{ij} = \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{P}]^T [\mathbf{B}']^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}'] \{\dot{\mathbf{u}}\} \quad (2.113)$$

次に初期応力項は、 $S'_{13} = S'_{23} = S'_{31} = S'_{32} = S'_{33} = 0$ なので、

$$\begin{aligned}
S'_{ij} \delta \dot{E}'_{ij} &= \delta F'_{ki} S'_{ij} \dot{F}'_{ij} \\
&= \delta F'_{11} \delta F'_{12} \delta F'_{13} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}'_{11} \\ \dot{F}'_{12} \\ \dot{F}'_{13} \end{Bmatrix} \\
&\quad + \delta F'_{21} \delta F'_{22} \delta F'_{23} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}'_{21} \\ \dot{F}'_{22} \\ \dot{F}'_{23} \end{Bmatrix} \\
&\quad + \delta F'_{31} \delta F'_{32} \delta F'_{33} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}'_{31} \\ \dot{F}'_{32} \\ \dot{F}'_{33} \end{Bmatrix} \\
&= \{\delta F'_{11} \delta F'_{12}\} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}'_{11} \\ \dot{F}'_{12} \end{Bmatrix} \\
&\quad + \{\delta F'_{21} \delta F'_{22}\} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}'_{21} \\ \dot{F}'_{22} \end{Bmatrix} \\
&\quad + \{\delta F'_{31} \delta F'_{32}\} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}'_{31} \\ \dot{F}'_{32} \end{Bmatrix} \\
&= \{\delta F'_{11} \delta F'_{12}\} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}'_{11} \\ \dot{F}'_{12} \end{Bmatrix} \\
&\quad + \{\delta F'_{21} \delta F'_{22}\} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}'_{21} \\ \dot{F}'_{22} \end{Bmatrix} \\
&= \{\delta \mathbf{F}'\} [\boldsymbol{\Sigma}'] \{\dot{\mathbf{F}}'\} \tag{2.114}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\sigma}'] &= \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{\Sigma}'] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\sigma}'] \\ [\boldsymbol{\sigma}'] \end{bmatrix} \tag{2.115} \\
\{\delta \mathbf{F}'\} &= \{\delta F'_{11} \delta F'_{12} \delta F'_{21} \delta F'_{22}\} \{\dot{\mathbf{F}}'\} = \{\dot{F}'_{11} \dot{F}'_{12} \dot{F}'_{21} \dot{F}'_{22}\}
\end{aligned}$$

また、

$$\delta F'_{ij} = \frac{\partial \delta x'_i}{X'_j} = \frac{\partial \delta u'_i}{X'_j} \tag{2.116}$$

$$\dot{F}'_{ij} = \frac{\partial \dot{x}'_i}{\partial X'_j} = \frac{\partial \dot{u}'_i}{\partial X'_j} \tag{2.117}$$

$$\{\delta \mathbf{F}'\} = [\mathbf{Z}'_2][\mathbf{P}]\{\delta \mathbf{u}\} \tag{2.118}$$

$$\{\dot{\mathbf{F}}'\} = [\mathbf{Z}'_2][\mathbf{P}]\{\delta \dot{\mathbf{u}}\} \tag{2.119}$$

初期応力項は以下のようになる.

$$\delta F'_{ki} S'_{ij} \dot{F}_{kj} = \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{P}] [\mathbf{Z}'_2] [\mathbf{\Sigma}'] [\mathbf{P}] \{\dot{\mathbf{u}}\} \quad (2.120)$$

第3章 非線形有限要素定式化

3.1 弾性体 [17]

Cauchy 応力 \mathbf{T} が現時刻での変形勾配 \mathbf{F} のみに依存して

$$\mathbf{T}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{F}(\mathbf{t})) \quad (3.1)$$

のように定まる物質を弾性体 (elastic material) と定義する. テンソル値関数 f は物質客観性の原理を満たさねばならないから次式が成立することが必要である.

$$\mathbf{f}(\mathbf{F}^*) = \mathbf{f}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (3.2)$$

以下では弾性体が等方である場合について考えると, 回転を表す任意の直交テンソルを \mathbf{P} として

$$\mathbf{f}(\mathbf{F}) = \mathbf{f}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}) \quad (3.3)$$

が成立せねばならない. これより等方弾性体の構成式は

$$\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{V}) \quad (3.4)$$

のように左ストレッチテンソル \mathbf{V} の関数となることが示される.

上式に物質客観性の原理を用いると, 式 (1.5.13) により次式を得る.

$$\mathbf{f}(\mathbf{V}^*) = \mathbf{f}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (3.5)$$

このような関係を満たす $\mathbf{f}(\mathbf{V})$ は等方テンソル関数 (isotropic tensor function) と呼ばれる. これは物質対称性の意味を等方とは無関係な数学上の述語であることに注意しよう. すなわち, 一般手に $g, \mathbf{g}, \mathbf{G}$ をスカラー, ベクトル, テンソル値関数としたとき, 任意の直交テンソル \mathbf{Q} に対し

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) = g(\mathbf{a}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{A}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (3.8)$$

が成立するとき, おのおの関数は等方であると呼ばれる. ただし $a, \mathbf{a}, \mathbf{A}$ はスカラー, ベクトル, テンソルを表す. 式 (1.5.34) の形の等方テンソル関数は \mathbf{V}, \mathbf{T} が対称テンソルであるとき, 一般に

$$\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{V}) = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{V} + \varphi_2 \mathbf{V}^2 \quad (3.9)$$

のように表すことができる. ただし φ_i は \mathbf{V} の主不変量のスカラー関数である.

3.2 超弾性体 [17]

時刻 t_0 および t での体積が dV および dv である体積要素の、時刻 t における内部仕事速度、すなわち等温運動における歪エネルギー速度は

$$\mathbf{T} : \mathbf{D}dv = \boldsymbol{\Pi}^T : \dot{\mathbf{F}}dV = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}dV \quad (3.10)$$

のように3組の共役な応力と歪（変形）速度のスカラ積によって表される。 $\mathbf{T} : \mathbf{D}$ は物体の現配置での単位体積あたりの歪エネルギー速度である。一方、 $\boldsymbol{\Pi}^T : \dot{\mathbf{F}}dV = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}dV$ は変形前の単位体積あたりに換算した歪エネルギー速度であり、これを \dot{W} と置くと、上式は

$$\dot{W} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}dV = \boldsymbol{\Pi}^T : \dot{\mathbf{F}}dV = \mathbf{J}\mathbf{T} : \mathbf{D} \quad (3.11)$$

のように表すこともできる。またこれより

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}}, \Pi_{ji} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}} \quad (3.12)$$

の関係をj得る。

超弾性体 (hyperelastic material) とは、上式のように変形や歪の成分によって微分されることにより共役な応力成分を生じるような弾性ポテンシャル関数 (elastic potential function) W が存在する物質として定義される。超弾性体は Green 弾性体 (Green elastic material) とも呼ばれる。本書では W を \mathbf{E} ひいては \mathbf{C} の関数 $W(\mathbf{C})$ として定式化を進めることにする。ただし、 $W(\mathbf{C})$ は C_{ij} と C_{ji} に関して対称であるものと仮定する。なお W は客観的スカラ出なければならぬから、たとえ \mathbf{F} の関数 $W(\mathbf{F})$ と見なしても、物質客観性の原理から $W(\mathbf{F}) = \mathbf{W}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F})$ が成立せねばならず、結局 \mathbf{U} ひいては \mathbf{C} の関数に帰着することが示される。

式 (3.12) は $E_{ij} = (C_{ij} - \delta_{ij})/2$ を考慮して次のように書き改められる。

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial C_{ij}} \quad (3.13)$$

以下では超弾性体が等方である場合を想定する。 \mathbf{p} が回転を表す任意の直交テンソルであるとして、 $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ の \mathbf{F} を $\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}$ で置き換えてみれば分かるように、等方弾性体では

$$W(\mathbf{C}) = \mathbf{W}(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}) \quad (3.14)$$

あるいは $\mathbf{P}^T \equiv \mathbf{Q}$ と置いて

$$W(\mathbf{C}) = \mathbf{W}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (3.15)$$

が成立することが要請される。これより W は等方 (スカラ値テンソル) 関数でなければならない。よって \mathbf{C} およびそれを \mathbf{Q} だけ回転した $\mathbf{C}' \equiv \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T$ の固有値が等しいことから、それを λ_i と表すことにして次式が得られる。

$$W(\mathbf{C}) = \mathbf{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (3.16)$$

更に λ_i は \mathbf{C} の主不変量 I_c, II_c, III_c の関数として

$$\lambda_i = \lambda(I_c, II_c, III_c) \quad (3.17)$$

と表されるから, これを式 (??) も代入して, 結局 W は

$$W(\mathbf{C}) = W(I_c, II_c, III_c) \quad (3.18)$$

のように \mathbf{C} の主不変量の関数として与えられることになる.

以上の議論により式 (3.13) は

$$S_{ij} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_c} \frac{\partial I_c}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial II_c} \frac{\partial II_c}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial III_c} \frac{\partial III_c}{\partial C_{ij}} \right) \quad (3.19)$$

と表すことができる. これに以下のように導かれる関係式

$$\frac{\partial I_c}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial II_c}{\partial C_{ij}} = I_c \delta_{ij} - C_{ij} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial III_c}{\partial C_{ij}} &= III_c \delta_{ij} - I_c C_{ij} + C_{ik} C_{kj} \\ &= III_c (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \end{aligned} \quad (3.22)$$

を代入すると次式を得る.

$$S_{ij} = 2 \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial I_c} + \frac{\partial W}{\partial II_c} \delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial II_c} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_c} III_c (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \right) \right\} \quad (3.23)$$

上式を Cauchy 応力に書き換えて表示すると \mathbf{B} の関数として次式を導くことができる.

$$T_{kl} = \frac{2}{J} \left\{ \frac{\partial W}{\partial III_B} III_B \delta_{kl} + \left(\frac{\partial W}{\partial I_B} + \frac{\partial W}{\partial II_B} \right) B_{kl} - \frac{\partial W}{\partial II_B} B_{ki} B_{il} \right\} \quad (3.24)$$

あるいは, Cayley-Hamilton の定理を用いて,

$$T_{kl} = \frac{2}{J} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial II_B} II_B + \frac{\partial W}{\partial III_B} III_B \right) \delta_{kl} + \frac{\partial W}{\partial I_B} B_{kl} - \frac{\partial W}{\partial II_B} III_B (\mathbf{B}^{-1})_{kl} \right\} \quad (3.25)$$

以上の定式化は, もし非圧縮性が仮定されるなら, 次のように修正される. すなわち, 主不変量のうち $III_c = III_B$ は 1 (定数) となるから, 弾性ポテンシャル W は $I_c = I_B, II_c = II_B$ のみの関数となること, および $J = 1$ を考慮して, 式 (1.5.56), (1.5.57) は次のようになる.

$$T_{kl} = -p \delta_{kl} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_B} + \frac{\partial W}{\partial II_B} \right) B_{kl} - 2 \frac{\partial W}{\partial II_B} B_{ki} B_{il} \quad (3.26)$$

$$T_{kl} = \left(-p + 2 \frac{\partial W}{\partial II_B} II_B \right) \delta_{kl} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_B} B_{kl} - 2 \frac{\partial W}{\partial II_B} (\mathbf{B}^{-1})_{kl} \quad (3.27)$$

ただし、 p は境界 nbvbfde 条件から定まる不定圧力である。また、これより次式を導くことができる。

$$S_{ij} = -p(C^{-1})_{ij} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial III_C} I_C\right)\delta_{ij} - 2\frac{\partial W}{\partial III_C} C_{ij}$$

ゴム状の物質は超弾性体として取り扱われ得ることが多い。非圧縮性の場合、弾性ポテンシャル W として次の形がよく用いられる。

$$W = c_1(I_C - 3) + c_2(III_C - 3)III_C = 1 \quad (3.28)$$

上式は Mooney によって提案され、しばしば Mooney-Rivlin 体と呼ばれる。係数 c_1, c_2 は一般に実験により定められる。歪が微小なときは $2(c_1 + c_2)$ が Hooke 則における横弾性係数 G 、 $6(c_1 + c_2)$ が縦弾性係数 E に相当することが示せる。また上式において $III_C = 1$ (完全非圧縮) の拘束をはずし、代わりに静水圧による歪エネルギー関数 $W_H(III_C)$ を第一式右辺に加える場合もある。一方、Mooney-Rivlin 体のほかに、やはり大きな歪を生じる非圧縮性ゴム状物質に対する弾性ポテンシャルとして

$$W = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{a_n} (\Lambda_1^{a_n} + \Lambda_2^{a_n} + \Lambda_3^{a_n} - 3) \quad (3.29)$$

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = 1 \quad (3.30)$$

が知られている。ただし、 Λ_i はストレッチテンソル $U (= C^{\frac{1}{2}})$ の主値である。上式は Ogden によって提案され、Ogden 体と呼ばれる。これを C の主値 $\Lambda_i (= \Lambda_i^2)$ を用いて表せば

$$W = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{a_n} (\lambda_1^{\frac{a_n}{2}} + \lambda_2^{\frac{a_n}{2}} + \lambda_3^{\frac{a_n}{2}} - 3) \quad (3.31)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (3.32)$$

となる。係数 μ_n, a_n は実験により定められるとされるが、もし

$$\mu_1 = 2c_1, a_1 = 2 \quad (3.33)$$

$$\mu_2 = -c_2, a_2 = -2 \quad (3.34)$$

$$\mu_3 = 0, a_3 = 0 \quad (3.35)$$

と置けば、Mooney-Rivlin 体の式 (1.5.61) 式に帰着することが容易に確認できる。

3.3 仮想仕事原理

境界値問題は弱形式にすると、次のような二つの形式に表すことができる。

$$\int_V \mathbf{t}'_0 \mathbf{S} : \delta \mathbf{t}'_0 \mathbf{E} dV = \int_{S_t} \mathbf{t}'_0 \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho'_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (3.36)$$

$$\int_{t_v} {}^t \mathbf{S} : \delta {}^t \mathbf{E} d^t \mathbf{v} = \int_{t_{s_t}} {}^t \mathbf{t}^* \cdot \delta u d^t \mathbf{s} + \int_{t_v} \rho {}^t \mathbf{g}^* \cdot \delta u d^t \mathbf{v} \quad (3.37)$$

式(9)と式(10)の間には、本質的な差はなく単に基準配置の違いのみである、幾何学非線形性を考慮した有限要素法ではこのどちらかの式を離散かして解くことになる。時刻 t' の道状態の仮想仕事式をLagrange表記するに当って、時刻0の初期配置を参照(X 座標を使用)するか、増分を開始する時刻 t の配置を参照(t_x 座標を使用)するかを選択が、構成式の形を考慮した効率上の観点から行われることになる。式(9)はUpdated-Lagrange仮想仕事理論に基づいた平衡方程式、式(10)はTotal-Lagrange仮想仕事理論に基づいた平衡方程式である。どちらを用いて定式化するかは、構成式の形を考慮して効率の観点から行う。

3.3.1 total Lagrange 法

時刻0の現配置を基準とする時刻 t での仮想仕事式は次式で与えられる。

$$\int_V {}^t \mathbf{S} : \delta {}^t_0 \mathbf{E} dV = {}^t \delta R = \int_{S_t} {}^t \mathbf{t}^* \cdot \delta u dS + \int_V \rho {}^t_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta u dV \quad (3.38)$$

δR は外力の仮想仕事、それを構成する \mathbf{t} は公称表面力ベクトル、 ρ_0, \mathbf{g}^* は初期配置の単位体積あたりに換算した物体力ベクトルである。幾何学的非線形問題では一般的には外力は変形に依存するものである。変形に依存しない特別な例としては、分布する表面力に代えて一定の集中力が、また物体力項については、 ρg ではなく重力加速度のように \mathbf{g} が外部から指定される場合が考えられる。なお外力が変形に依存してその大きさや方向を変化させるとき、それらを従動力と呼ぶ。

ここで、仮に ${}^t_0 \dot{\mathbf{S}}$ が4階テンソル ${}^t_0 \mathbf{C}$ と ${}^t_0 \dot{\mathbf{E}}$ により

$${}^t_0 \dot{\mathbf{S}} = {}^t_0 \mathbf{C} : {}^t_0 \dot{\mathbf{E}} \quad (3.39)$$

のように表せるとする。これを用いて次のように接線剛性マトリックス ${}^t_0 \mathbf{K}$ が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V {}^t_0 \dot{\mathbf{S}} : \delta {}^t_0 \mathbf{E} dV + \int_V {}^t_0 \mathbf{S} : (\delta {}^t_0 \mathbf{E}) dV &= \int_V ({}^t_0 \mathbf{C} : {}^t_0 \dot{\mathbf{E}}) : \delta {}^t_0 \mathbf{E} dV + \int_V {}^t_0 \mathbf{S} : (\delta {}^t_0 \mathbf{E}) dV \\ &= \delta U^{T^t_0} \mathbf{K}_L \dot{\mathbf{U}} + \delta U^{T^t_0} \mathbf{K}_{NL} \dot{\mathbf{U}} \\ &= \delta U^{T^t_0} \mathbf{K} \dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

ただし

$${}^t_0 \mathbf{K} = {}^t_0 \mathbf{K}_L + {}^t_0 \mathbf{K}_{NL} \quad (3.41)$$

$${}^t_0 \mathbf{K}_L = \sum_e \int_{V_e} {}^t_0 \mathbf{B}_{L0}^T {}^t_0 \mathbf{D}_0^t {}^t_0 \mathbf{B}_L dV_e \quad (3.42)$$

$${}^t_0 \mathbf{K}_{NL} = \sum_e \int_{V_e} {}^t_0 \mathbf{B}_{NL0}^T {}^t_0 \mathbf{S}_0^t {}^t_0 \mathbf{B}_{NL} dV_e \quad (3.43)$$

3.3.2 updated Lagrange 法

時刻 t の現配置を基準とする時刻 t' での仮想仕事式は次式で与えられる.

$$\int_{t_v} {}^{t'}\mathbf{S} : \delta {}_t^t \mathbf{E} d^t \mathbf{v} = {}^{t'} \delta \mathbf{R} = \int_{t_{st}} {}^t \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d^t s + \int_{t_v} \rho^t \mathbf{g}^* \cdot \delta \mathbf{u} d^t \mathbf{v} \quad (3.44)$$

構成式

$$\begin{aligned} {}_t^t \dot{\mathbf{S}} &= {}_t^t \mathbf{C} : {}_t^t \dot{\mathbf{E}} \\ &= {}_t^t \mathbf{C} : \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.45)$$

を用いて離散化すると, 次のように接線剛性マトリックス ${}_t^t \mathbf{K}$ が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{t_v} {}_t^t \dot{\mathbf{S}} : \delta {}_t^t \mathbf{E} d^t \mathbf{v} + \int_{t_v} \mathbf{T} : (\delta {}_t^t \mathbf{E}) \cdot d^t \mathbf{v} &= \int_{t_v} ({}_t^t \mathbf{C} : {}_t^t \dot{\mathbf{E}}) : \delta {}_t^t \mathbf{E} d^t \mathbf{v} + \int_{t_v} \mathbf{T} : (\delta {}_t^t \mathbf{E}) \cdot d^t \mathbf{v} \\ &= \delta \mathbf{U}^T {}_t^t \mathbf{K}_L \dot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T {}_t^t \mathbf{K}_{NL} \dot{\mathbf{U}} \\ &= \delta \mathbf{U}^T {}_t^t \mathbf{K} \dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

ただし

$${}_t^t \mathbf{K} = {}_t^t \mathbf{K}_L + {}_t^t \mathbf{K}_{NL} \quad (3.47)$$

$${}_t^t \mathbf{K}_L = \sum_e \int_{t_{v_e}} {}_t^t \mathbf{B}_{Lt}^T \mathbf{D}_t^t \mathbf{B}_{Lt} d^t \mathbf{v}_e \quad (3.48)$$

$${}_t^t \mathbf{K}_{NL} = \sum_e \int_{t_{v_e}} {}_t^t \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{T}_t^t \mathbf{B}_{NL} d^t \mathbf{v}_e \quad (3.49)$$

3.4 Newton-Raphson 法

一般に, 偏微分方程式の境界値問題の弱形式を有限要素離散化すると以下のように表すことができる.

$$\text{find } \mathbf{u} \in \mathbf{V}_h \text{ such that} \quad (3.50)$$

$$\delta \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{Q}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{F}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{V}_h \quad (3.51)$$

ただし \mathbf{V}_h は許容関数全体の空間 \mathbf{V} を有限要素離散化したもので, $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ である. また, \mathbf{Q}, \mathbf{F} はそれぞれ内力ベクトル, 外力ベクトルと呼ばれる.

式 (3.51) が成立するための必要十分条件は,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (3.52)$$

であり, 式 (3.52) は平衡方程式と呼ばれている.

次に, 外力ベクトル \mathbf{F} に対して $\{\mathbf{F}^k\}$ を

$$0 = \mathbf{F}^1 \ll \mathbf{F}^2 \ll \dots \ll \mathbf{F}^n = \mathbf{F} \quad (3.53)$$

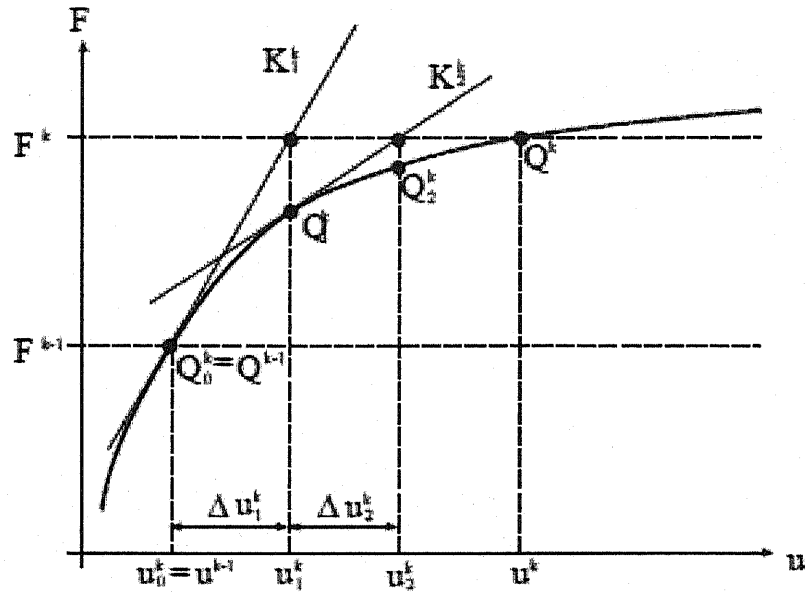


図 C.1: Newton-Raphson 法 概念図

Fig. 3.1: Newton-Raphson 法 概念図

のように定める。増分型の Newton-Raphson 法は、

$$Q(u^k) = F^k \quad (3.54)$$

なる u^k を u^{k-1} をもとに順次 j 求めていく方法である。

u^{k-1} が定まっているとき、次のような手順で u^k を求める。まず

$$u_0^k = u^{k-1} \quad (3.55)$$

$$Q_0^k = Q(u_0^k) \quad (3.56)$$

$$K_1^k = \left. \frac{\partial Q}{\partial u} \right|_{u=u_0^k} \quad (3.57)$$

とする。K は接線剛性マトリックスと呼ばれている。ここで、

$$K_1^k \Delta u_1^k = F^k - Q_0^k \quad (3.58)$$

$$u_1^k = u_0^k + \Delta u_1^k \quad (3.59)$$

のように u_1^k を定めると、 u_0^k よりも u_1^k の方が u^k に対するよい近似となる。以下、 u_{i-1}^k が得られたとき、

$$Q_{i-1}^k = Q(u_{i-1}^k) \quad (3.60)$$

$$K_i^k = \left. \frac{\partial Q}{\partial u} \right|_{u=u_{i-1}^k} \quad (3.61)$$

$$K_i^k \Delta u_i^k = F^k - Q_{i-1}^k \quad (3.62)$$

$$\mathbf{u}_i^k = \mathbf{u}_{i-1}^k + \Delta \mathbf{u}_i^k \quad (3.63)$$

のように \mathbf{u}_i^k を求めることを繰り返す. \mathbf{u}_{i-1}^k よりも \mathbf{u}_i^k の方が \mathbf{u}^k に対するよい近似となっており, 条件を整っていれば \mathbf{u}_i^k は \mathbf{u}^k に, $\|\mathbf{F}^k - \mathbf{Q}_i^k\|$ は 0 にそれぞれ収束する. しかし, 厳密に $\|\mathbf{F}^k - \mathbf{Q}_i^k\| = 0$ となることはないので, コンピュータで計算を行う場合は, 適当な収束判定で計算を打ち切る.

第4章 横等方超弾性構成モデル [4]

4.1 緒言

本研究の目的は心臓の僧帽弁と大動脈弁の合理的な解析であり、僧帽弁と大動脈弁は異方性を持つ超弾性体だと考えられる。ところが、現 DKT シェル要素は等方性弾性体モデルに基づいた要素であるため、解析の合理化に現 DKT シェル要素に超弾性体モデルに基づいて定式化を試みた。現 DKT シェル要素の定式化に用いる仮想仕事原理は Updated-Lagrange 仮想仕事原理であるが、大変形問題解析の合理化のために本研究は Total-Lagrange 仮想仕事原理を膜要素に組み込んで DKT シェル要素の定式化を試みた。

4.2 非圧縮横等方超弾性モデル

4.2.1 僧帽弁

本研究の目的は心臓の僧帽弁および大動脈弁の合理的な解析である。僧帽弁とは、心臓の左心房と左心室の間にある弁であり、左心室と左心房の間にある非常に重要な部分である。左心房が収縮すると同時に開いて左心室へと血液を送り込み、また左心室が収縮すると同時に閉じて左心房へ血液が逆流しないように働いている。僧帽弁は前葉と後葉からなり、前葉は後葉より遥かに大きい。前葉と後葉のどちらも輪環と腱索と接触し、腱索はまた乳頭と接触する。これらを僧帽弁系と呼び、心臓収縮期に、心室が収縮する際血液が心房に逆流するのを防いでいる。それゆえ、血液逆流を防ぐために極めて重要な役割を果たす。心臓の病変を正しく評価するためには、正常な心臓とその構成組織を理解しなければならない。ほとんどすべての生体軟組織（例えば：心筋、筋腱、心臓弁、動脈）は異方性と粘弾性的な強い非線形性を示す材料である。生体状態下に生体軟組織は大変形をし、それに異なる構成要素たちが複雑な連成を行う。このような複雑な生体挙動、生体内外においての異なる応答反応を示す生体軟組織を、実現可能な材料モデルと関連パラメータで同一化することはいまだに大きな挑戦となっている。

May-Newman と Yin は僧帽弁解析用横等方材料法則を提案した。彼らの材料法則は、豚の僧帽弁組織を用いて 2 軸テンソル実験を行った、実験データに基づいている。この研究により、僧帽弁前葉と後葉は、どちらも異方性と強い非線形性を示すことが分かった。

異方性を持つ材料の大変形解析に適用できるため、生体軟組織の解析に超弾性構成モデルは理想なモデルになる。今まで、異なる材料モデルを用いていくつか僧帽組織用流体解析を行われてきた。(e.g. Kunzelman et al, Einstein et al, Votta et al., Dal Pan et al.), この中のいくつかは、構成モデルを有限要素解析コードに組み込んだ。Holzapfel et al は生

体膜構造解析用モデルを有限要素に実装した。Weiss et al は非圧縮横等方超弾性モデルを有限要素に実装した。Sun と Sacks は Fung モデルを実装した。

本章は心臓の異方性を考慮した非圧縮横等方超弾性モデルに基づいて、応力および応力・歪関係を表す4階の弾性マトリックスを導出した。この応力テンソルと弾性テンソルを現DKTプログラムに組み込んで解析を試みた。この横等方超弾性定式化はHolzapfel[11]のモデルに基づいてある。僧帽弁用構成モデルはMay-Newman と Yin [1] と Holzapfel et al.[12]のモデルを用いた。

4.2.2 平面応力状態仮定

柔軟な生体組織を解析する時、三次元有限要素は多く使われている。一般的に、柔軟な生体組織は非圧縮性だと考えられ、この拘束条件から解析には混合有限要素法を用いる。しかし、ある生体組織は非常に強い面内変形と弱い面外変形の特徴を示すので、平面応力状態を仮定して解析するのは考えられる。このような薄膜組織は膜要素を用いて解析するのも好都合だと考えられる

4.2.3 Kinematics

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

非圧縮性条件によって、 $J = \det F = \sqrt{\det C} = 1$ から、 C_{33} は下式のように計算できる。

$$C_{33} = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)^{-1} \quad (4.2)$$

4.2.4 非圧縮横等方材料

繊維によって補強された材料にとって、応力変化は変形テンソル F のほか、繊維方向 $a_0(X)$ にもよる。 $a_0(X)$ は X 点の繊維方向を表す。変形後の現時刻での繊維方向は $a(X) = F(X)a_0(X)$ である。繊維方向に沿った繊維ストレッチ λ は下式のように表すことができる。

$$\lambda^2 = a_0 \cdot (F^T F) a_0 = a_0 \cdot C a_0 \quad (4.3)$$

横等方材料の歪エネルギー関数 ψ は

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(C, a_0 \otimes a_0) \quad (4.4)$$

C は 4 階の弾性テンソルである。歪エネルギー関数 ψ は五つの変数で表すことができる。

$$\tilde{\psi}(C, a_0 \otimes a_0) = \psi^*(I_1, \dots, I_5) \quad (4.5)$$

I_1, I_2, I_3 は等方弾性体による変数である。 I_4, I_5 は

$$I_4 = a_0 \cdot a_0, I_5 = a_0 \cdot a_0 \quad (4.6)$$

非圧縮横等方弾性体の歪エネルギーは下式のように表すことができる。

$$\tilde{\psi} = \psi(I_1, I_2, I_4, I_5) + p(J - 1) \quad (4.7)$$

しかし、スカラー p は Lagrange 不定乗数である。

4.2.5 応力テンソルと弾性テンソル

非圧縮横等方弾性体の応力テンソルと弾性テンソルは式 (4.7) から導出できる。第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル S は下式のように導出できる。

$$S = 2 \sum_{i=1, i \neq 3}^5 \frac{\partial \psi}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial C} + pC^{-1} \quad (4.8)$$

Cathy 応力テンソルは $\sigma = FSF^T$ である。応力成分 S_{33} は 0 なので、式 (4.8) から p が次のように導出できる。

$$p = -2 \sum_{i=1, i \neq 3}^5 \frac{\partial \psi}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial C_{33}} C_{33} \quad (4.9)$$

この中、 C_{33} は式 (4.2) で与えられている。

応力テンソル S から弾性テンソル C は下式のように導出できる。

$$C = 4 \sum_{i,j=1, i,j \neq 3}^5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_j} \frac{\partial I_i}{\partial C} \otimes \frac{\partial I_j}{\partial C} + 2C^{-1} \otimes \frac{\partial p}{\partial C} + 2p \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} \quad (4.10)$$

4.3 僧帽弁解析用歪エネルギー関数

二種の僧帽弁解析用歪エネルギー関数

May-Newman と Yin は豚の僧帽弁組織を用いて2軸テンソル実験を行い、その実験データの比較検討から次のような僧帽弁解析用歪エネルギー関数を提案した。実験データに強い非線形性を示した。下式の歪エネルギー関数は変数 I_1, I_4 において仮定したものである。

$$\psi(I_1, I_4) = \bar{c}_0 \left[\exp^{\bar{c}_1(I_1-3)^2 + \bar{c}_2(\sqrt{I_4}-1)^4} - 1 \right] \quad (4.11)$$

この中、 $\bar{c}_i = 0, 1, 2$ は材料パラメーターである。

Holzappel et al. は上式の構成モデル似たような関数を提案した。

$$\psi(I_1, I_4) = c_0 \left[\exp^{c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_4-1)^4} - 1 \right] \quad (4.12)$$

なお $c_i, i = 0, 1, 2$ は材料パラメーターである。

4.3.1 応力・歪関係とその線形化

今回、上文の歪エネルギー関数 (4.12) を用いて、僧帽弁解析のための応力・歪間関係を導出した。

基準配置における繊維方向を a_0 として、変形後の現配置における繊維方向を a とするとそれぞれは下式のように表すことができる。

$$[a_0] = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$[a] = \begin{bmatrix} F_{11} \cos \theta + F_{12} \sin \theta \\ F_{21} \cos \theta + F_{22} \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

θ は繊維方向と基底座標 e_1 の間における角度を表す。

以上より、 $\psi_1, \psi_4, \psi_{11}, \psi_{14}, \psi_{44}$

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \quad (4.15)$$

$$\psi_4 = \frac{\partial \psi}{\partial I_4}, \quad (4.16)$$

$$\psi_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_1}, \quad (4.17)$$

$$\psi_{14} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_4}, \quad (4.18)$$

$$\psi_{44} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_4}, \quad (4.19)$$

の成分は以下のように導出できる.

$$\psi_1 = 2c_0 c_1 (I_1 - 3) \exp^{c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_4-1)^4} \quad (4.20)$$

$$\psi_4 = 2c_0 c_2 (I_4 - 1) \exp^{c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_4-1)^4} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= 2c_0 c_1 \exp^{c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_4-1)^4} \\ &+ 4c_0 c_1^2 (I_1 - 3)^2 \exp^{c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_4-1)^4} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\psi_{14} = 4c_0 c_1 (I_1 - 3) c_2 I_4 - 1 \exp^{c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_4-1)^4} \quad (4.23)$$

$$\psi_{44} = 2c_0 c_2 [1 + 2c_2 (I_4 - 1)^2] \exp^{c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_4-1)^4} \quad (4.24)$$

以上の式により、第2 Piola-Kirchhoff 応力テンソルは次のように表すことができる.

$$\mathbf{S} = 2\psi_1 \mathbf{1} + 2\psi_4 \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + p \mathbf{C}^{-1} \quad (4.25)$$

平面応力状態において第2 Piola-Kirchhoff 応力テンソルの成分 $S_{i3} = 0, i = 1, 2, 3$ から p は以下のように導出できる.

$$p = -2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{33}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial C_{33}} \right) = -2\psi_1 C_{33} \quad (4.26)$$

なお、 $\frac{\partial I_1}{\partial C_{33}} = 1, \frac{\partial I_4}{\partial C_{33}} = 0$.

弾性テンソルは次のように導出できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= 4\psi_{11} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\psi_{14} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) + 4\psi_{44} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \\ &+ 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial p}{\partial \mathbf{C}} + 2p \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

なお、 $\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = 1, \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ を用いた. $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{C}}, \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}$ の成分は下式に示す.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right)_{IJKL} = -\frac{1}{2} (C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{JK}^{-1}) \quad (4.28)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial C}\right)_{IJ} = \frac{\partial p(C_{11}, C_{22}, C_{33})}{\partial C_{IJ}} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial C_{11}} &= -4c_0c_1((1 - C_{22}C_{33}^2) \\ &+ (I_1 - 3)[2c_1(I_1 - 3)(1 - C_{22}C_{33}^2) + 2c_2(I_4 - 1)a_{01}^2] - (I_1 - 3)C_{22}C_{33}) \\ &C_{33}\exp^{c_1(I_1-3)^2+c_2(I_4-1)^2} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial C_{22}} &= -4c_0c_1((1 - C_{22}C_{33}^2) \\ &+ (I_1 - 3)[2c_1(I_1 - 3)(1 - C_{22}C_{33}^2) + 2c_2(I_4 - 1)a_{02}^2] - (I_1 - 3)C_{11}C_{33}) \\ &C_{33}\exp^{c_1(I_1-3)^2+c_2(I_4-1)^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial C_{12}} &= -4c_0c_1(2C_{12}C_{33}^2 \\ &+ (I_1 - 3)[4c_1(I_1 - 3)C_{12}C_{33}^2 + 4c_2(I_4 - 1)a_{01}a_{02}] \\ &+ 2(I_1 - 3)C_{12}C_{33}) \\ &C_{33}\exp^{c_1(I_1-3)^2+c_2(I_4-1)^2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.3.2 応力テンソルと弾性テンソル成分

薄膜解析の際に平面応力状態を仮定するので、必要な応力成分は以下の三つになる。

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11}, \sigma_{12} \\ \sigma_{21}, \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

具体的な成分を書き下ろすと以下のようなになる。

$$\sigma_{11} = 2\psi_1 B_{11} + 2\psi_4 a_1 a_1 + p \quad (4.34)$$

$$\sigma_{12} = 2\psi_1 B_{12} + 2\psi_4 a_1 a_2 \quad (4.35)$$

$$\sigma_{22} = 2\psi_1 B_{22} + 2\psi_4 a_2 a_2 + p \quad (4.36)$$

第2Piola-kirchhoff 応力と Cauchy 応力の関係式は：

$$\sigma = \mathbf{FSF}^T \quad (4.37)$$

弾性テンソルの一般的なマトリックス形式は

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111}, C_{1122}, C_{1112} \\ C_{2211}, C_{2222}, C_{2212} \\ C_{1211}, C_{1222}, C_{1212} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

簡潔に表示するため、弾性テンソルのマトリックス成分を次のように表示する。

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11}, D_{12}, D_{13} \\ D_{12}, D_{22}, D_{23} \\ D_{13}, D_{23}, D_{33} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

具体的な成分を展開すると以下のようになる。

$$D_{11} = 4\psi_{11} + 8\psi_{14}a_1^2 + 4\psi_{44}a_1^4 + 2(C^{-1})_{11} \frac{\partial p}{\partial C_{11}} - C_{11}^{-2} \quad (4.40)$$

$$D_{12} = 4\psi_{11} + 4\psi_{14}(a_1^2 + a_2^2) + 4\psi_{44}a_1^2a_2^2 + 2(C^{-1})_{11} \frac{\partial p}{\partial C_{22}} - C_{12}^{-2} \quad (4.41)$$

$$D_{13} = 4\psi_{14}a_1a_2 + 4\psi_{44}a_1^3a_2 + 2(C^{-1})_{11} \frac{\partial p}{\partial C_{12}} - C_{11}^{-1}C_{12}^{-1} \quad (4.42)$$

$$D_{21} = 4\psi_{11} + 4\psi_{14}(a_1^2 + a_2^2) + 4\psi_{44}a_1^2a_2^2 + 2(C^{-1})_{22} \frac{\partial p}{\partial C_{11}} - C^{-1}_{21}C^{-1}_{21} \quad (4.43)$$

$$D_{22} = 4\psi_{11} + 8\psi_{44}a_2^2 = 4\psi_{44}a_2^4 + 2C^{-1}_{22} \frac{\partial p}{\partial C_{22}} - C_{22}^{-1}C^{-1}_{22} \quad (4.44)$$

$$D_{23} = 4\psi_{14}a_1a_2 + 4\psi_{44}a_1a_2^3 + 2C^{-1}_{22} \frac{\partial p}{\partial C_{12}} - C^{-1}_{21}C^{-1}_{22} \quad (4.45)$$

$$D_{31} = 4\psi_{14}a_1a_2 + 4\psi_{44}a_1^3a_2 + 2C^{-1}_{12} \frac{\partial p}{\partial C_{11}} - C^{-1}_{11}C^{-1}_{22} \quad (4.46)$$

$$D_{32} = 4\psi_{14}a_1a_2 + 4\psi_{44}a_1a_2^3 + 2C^{-1}_{12} \frac{\partial p}{\partial C_{22}} - C^{-1}_{12}C^{-1}_{22} \quad (4.47)$$

$$D_{33} = 4\psi_{44}a_1^2a_2^2 + 2C^{-1}_{12} \frac{\partial p}{\partial C_{12}} - \frac{1}{2}(C^{-1}_{11}C^{-1}_{22} + C^{-1}_{12}C^{-1}_{21}) \quad (4.48)$$

第5章 解析

5.1 緒言

本章で前章までの理論，手法をもとにして修正後のDKT要素を用いて行った解析と修正前のDKT要素を用いて行った解析結果を述べ，それらを比較検討し修正後要素適合性の評価を行う．本章の概要は以下の通りである．

- 解析モデルおよび解析条件
本解析で用いたモデル，および各種条件を示す．
- 解析結果
各種条件においての解析結果を示した．はじめに修正前のDKTシェル要素を用いて解析をし，その結果から適合性と問題点を述べ，次に修正後のDKT要素を用いて解析をし，それと修正前のDKT要素の解析結果との比較検討を行った．
- 考察
解析結果から得られた考察を示した．

5.2 解析モデルおよび解析条件

5.2.1 解析モデル

今回の解析は修正前後のDKTシェル要素の適合性の評価に使う．8要素10節点の要素を使って単純引張，単純曲げ，ローリングアップおよび周期的に引張，曲げ，モーメント荷重をかける解析を行った．解析モデルは下図に示す．

5.2.2 パラメータ

本節では，解析モデルに用いるパラメータを示す．解析モデルは表(5.1)に示したように8要素と10節点，各節点は6自由度を持ち，総計60自由度を持つ．荷重は表(5.2)に示したように二種類があり，一つは一回だけかける単純荷重で，二つは繰り返してかける荷重である．前者の増分回数は50回にし，後者には25周期，一周期につき40増分回数にした．ヤング率とポアソン比および厚さは表(5.3)に示した．境界条件として節点1と節点2を固定し節点9と節点10において荷重を加えた．

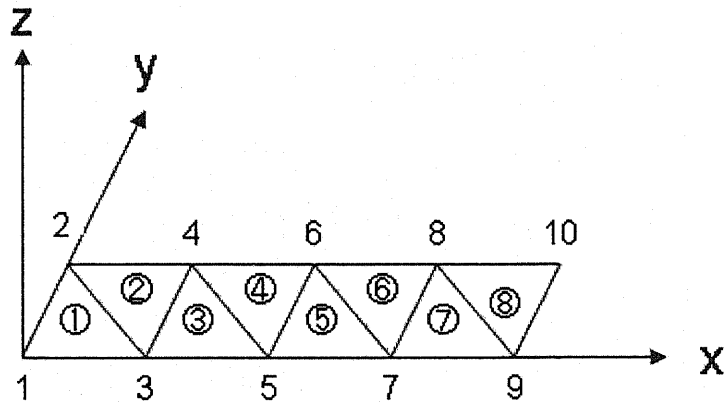


Fig. 5.1: 解析モデル

要素数	総節点数	総自由度数
8	10	60

表 5.1: モデルデータ表

5.3 解析結果

5.3.1 解析手法

8要素10節点60自由度を持つモデルを用いて、単純荷重（引張，曲げ，モーメント）と繰り返し荷重（引張，曲げ，モーメント）の二種の解析を行った。単純荷重解析から修正前のDKTシェル要素の適合性を検証した。しかし、繰り返し荷重をかけるような応力は経路に依存する解析には誤差が溜まってくることが分かった。それに、Holzapfel et al.が提案した横等方超弾性モデルに基づいて導出した応力と4階弾性テンソルを膜要素に組み込んで修正したDKTシェル要素を用いて繰り返し荷重解析を行って修正後DKTシェル要素は正しい面内応力評価を示したことが分かった。

	増分回数	1周期増分回数	周期回数
単純荷重	50	50	1
繰り返し荷重	1000	40	25

表 5.2: 荷重データ表

ヤング率	ポアソン比	厚さ
$0.07 \times 10^{12} Pa$	0.3	0.1×10^{-3}

表 5.3: 材料データ表

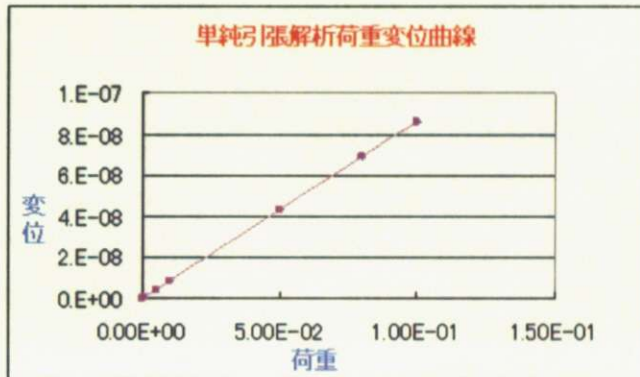


Fig. 5.2: 単純引張解析

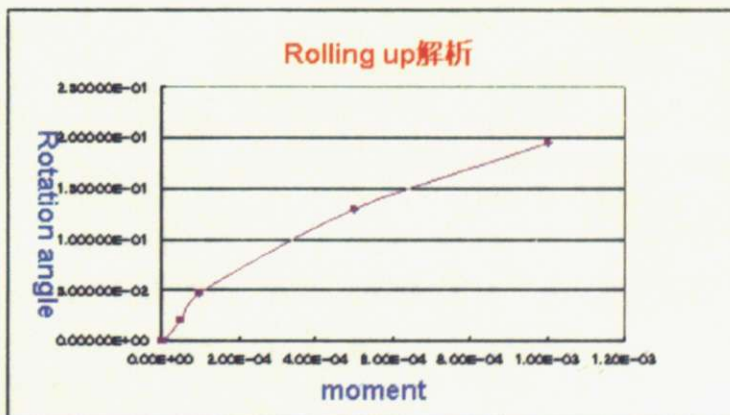


Fig. 5.3: Rolling up 解析 2

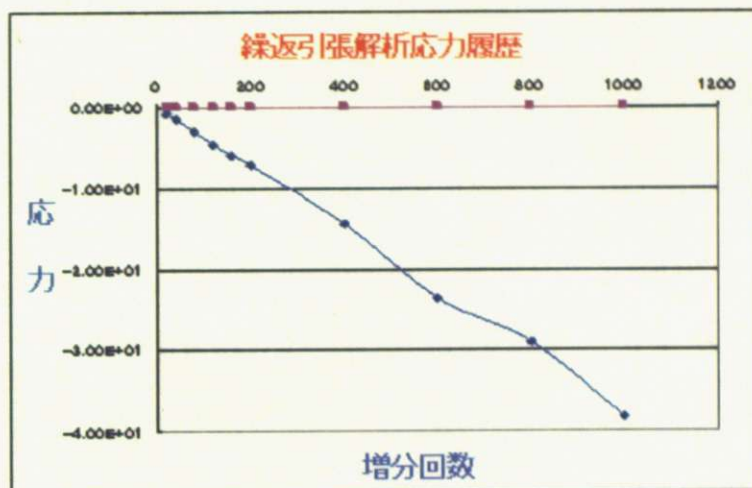


Fig. 5.4: 応力評価比較 1

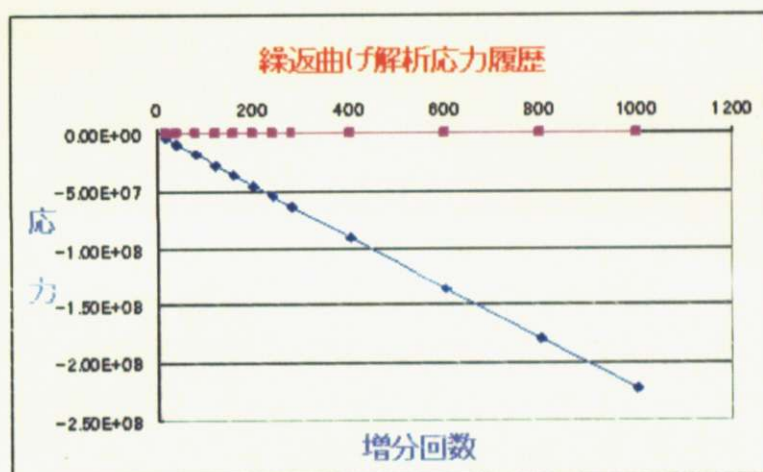


Fig. 5.5: 応力評価比較 2

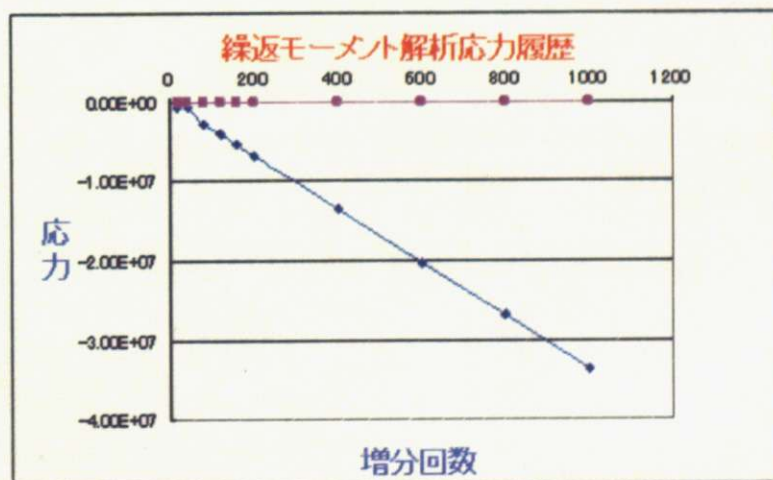


Fig. 5.6: 応力評価比較 3

5.4 考察

まず、修正前のDKT要素を使って単純引張(図5.2)、Rolling up(図5.3)解析をした。グラフから分かるように、解析解と理論解はほぼ一致してあるため、修正前のDKTシェル要素は単純な荷重への評価は適切であると考えられる。ただし、修正前のDKT要素は応力増分を足し合わせて応力の計算を行うため、応力は経路に依存する場合の変形解析には不適切だになるのだと考えた。そこで次のような、応力は経路に依存してくる解析—繰り返し荷重を課す解析を行った。(図5.4),(図5.5),(図5.6)のピンク色の曲線は修正前のDKTシェル要素を用いて解析した結果です。グラフ曲線に示してあるように、増分回数を1000回、40回増分を一周期として、合計25周期の繰り返し荷重解析結果から分かるように、面内応力は増分回数が増えるにしたがって誤差が溜まっていくことがわかった。

そこで次に修正後のDKTシェル要素を使って同じ繰り返し荷重解析を行った。その結果を修正前要素の結果と比べた、(図5.4),(図5.5),(図5.6)はその比較図である。グラフからでも見られるように修正後の要素で行った解析には応力は増分増加に影響されず、0に戻っていたため、修正後のDKTシェル要素は応力評価において適切だと検証できた。

第6章 結論

6.1 僧帽弁用横等方超弾性モデルの取り入れ

Holzapfel et al. が提案した僧帽弁用横等方超弾性モデルに基いて導出した応力テンソルと4階弾性テンソルをDKT要素に組み込み、応力積分経路に依存する解析にも適切に評価できるようにDKTシェル要素を修正した。

6.2 膜要素の total-Lagrange 定式化

修正前DKTシェル要素の定式化に用いる仮想仕事原理は Updated-Lagrange 仮想仕事原理であるが、大変形問題解析の合理化のために本研究は Total-Lagrange 仮想仕事原理を膜要素に組み込んでDKTシェル要素を定式化し、プログラムに実装した。

6.3 応力評価比較検証

応力積分経路に依存する解析一繰り返して荷重をかける解析を行い、その結果を修正前DKTシェル要素と比較して、修正後DKTシェル要素は応力積分経路によらず正しい応力評価を示したことが検証できた。

6.4 今後の課題

DKTシェル要素の精確度をより高めるために、今後以下の点を改善する必要があると考えられる。

- 実際にDKTシェル要素を用いて僧帽弁と大動脈弁の解析を試み、DKTシェル要素の適合性を検証する。
- 他要素での解析結果との比較検討によりDKTシェル要素の適合性を検証する

謝辞

本研究は多くの方々のご指導とご協力により完成したものであり、ここで感謝の言葉を述べさせていただきます。

指導教官の渡邊浩志講師のご指導があったから本論文が初めて完成できたものだと思います。頭の悪い私にいつも辛抱よく丁寧にご指導いただき、本当に有難う御座いました。

久田俊明教授には生活面にも研究面にも大変お世話になりました。私は東京での生活を無事送ってこられたのも論文を無事書上げられたのも久田教授が暖かく見守ってくれたからです。

また元研究員の陳 媛さんに研究、世間話など多くの面でお世話になりました。有難う御座いました。

研究員の岡田純一さん、鷲尾巧さんに研究について色々とアドバイスをいただきました。

博士課程の瀬尾 欣也さんと同級生の黒川 洋さんにも研究面に色々とお世話になりました。

同級生の黒川さん、田中さん、堀本さん、杉安さん、飯倉さん、梅谷さん、二年間を共に歩いてきたあなたたちに感謝します。充実で楽しい二年間でした。

共同研究をしてきた学部 4 年の渡邊 駿介さんと一緒に研究を頑張ってきました。辛い思いもありましたが、色々と楽しかったので有難う御座いました。

最後に、ずっと支えてきてくれた両親、妹、親友の Y.L.さん、D.M.さん、B.X.さんに感謝します。

2008 年 2 月 19 日

張 舒荔

付録A 付録A

有限要素法を用いて薄いシェルの曲げ問題の解析を行う時、解が非常に硬くなることが知られている。要素分割を細かくするに従い解は収束傾向を示すものの、理論解をえるには非現実的な数の要素分割を行わなければならない。これは一般に Locking と呼ばれる。物理的な特性から membrane locking と shear locking の二種類に分けられる。以下この二種の Locking 現象について具体的に説明する。

A.1 Membrane Locking

曲面要素において、低次形状関数を用いて要素内の面内変位場を表す場合、面内変位に関する形状関数の次数が低いため、純曲げの問題に対して中立面におけるひずみが 0 にならないで膜内の変形エネルギーが過剰に評価される現象は、membrane locking と呼ばれる。

membrane locking のメカニズムを説明するため、図 A.1 に示す curved beam 要素を考える。Beam の形状関数 $w(x)$ で表せる。

$$w/L = O(e), \quad w_{,x} = O(e), \quad w_{,xx} = O(e^2)$$

ここで e は微小量、 L は要素の長さである。

よって、次式のような変形速度関係を満たす。

$$D_x = \dot{\epsilon}_x^{mid} + y\dot{\gamma}_x$$

$$\dot{\epsilon}_x^{mid} = V_{x,x} + w_x' V_{y,x}$$

$$\dot{\kappa}_x = -V_{y,xx}$$

ここで、 V_x, V_y は x, y 方向の変形速度、コンマ、は、以降の変数に関する微分、 D_x は歪変形速度を示す。

要素内の変形速度場は形状関数で次式のように表せる。(古典的な有限要素法では三次形状関数で横向変位場を表す)

$$V_x = V(x)\xi$$

$$b_y = \dot{\phi}_1 L(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) + \dot{\phi}_2 L(\xi^3 - \xi^2)$$

$$\xi = x./L$$

ここで ξ_l は各節点の相対回転角度であり、各節点の絶対回転角度 θ_l と速度 V_{y2}^t, V_{y1}^t で表すと、次式のようになる。

$$\dot{\phi}_I = \dot{\theta}_I - \frac{1}{L}(V_{y2}^t - V_{y1}^t)$$

おじ名形状関数で現時刻での要素形状を表すこともできる。(曲面要素だから)

$$w = \phi_1 L(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) + \phi_2 L(\xi^3 - \xi^2)$$

$V_{x,x}$ は定数, $w_{,x}, V_{y,x}$ は二次式であるため、式A.3で得られたひずみ変形速度 ϵ_x は四次式になる。構造理論では、三次関数で表す変形速度場により得られた中立面の引っ張りひずみ変形速度は二次関数であるため、有限要素理論により得られた中立面の引っ張りひずみ変形速度の次数と不一致になり、純曲げの問題において、中立面の引張ひずみ速度 $\cot \epsilon_x$ が0にならない。つまり、外力の仕事の相当の一部は引張変形に費やしてしまい、曲げ剛性マトリックスは剛になり、有限要素法で求めた変形は実の変形より小さくなる。このような現象が membrane locking と呼ばれる。面内変位場の形状関数を高次にすることにより、membrane locking 現象を回避することができる。

平面要素においては、 $V_{x,x}, w_{,x}$ は定数, $V_{y,x}$ は二次式であるため、 ϵ_x は二次式になり、構造理論により得られる中立面の引張ひずみ変形速度の次数は有限要素理論によるものと一致するため、membrane locking 現象が生じない。

A.2 Shear Locking

Reissner-Mindlin 型の板に横方向加重 p (単位面積に相当する加重) を与えると、板のポテンシャルエネルギー Π は

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_A k^T \mathbf{D}_b k dA + \frac{1}{2} \int_A \gamma^T \mathbf{D}_s \gamma dA - \int_A w p dA \\ &= U_b + U_s - \int_A w p dA \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

となる。ここで k は板の曲率ベクトル、 γ は面外せんだんひずみである。

式(A.10)の右第一項 U_b は板の曲げによるひずみエネルギーであり、次式のように表せる。

$$U_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} f \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \frac{\partial \beta_x}{\partial y}, \frac{\partial \beta_y}{\partial x}, \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)$$

式(A.10)の右第二項 U_s は面外せん断変形によるひずみエネルギーであり、次式のように表示できる。

$$U_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right)^2 \right]$$

よって、板の面外せん断変形によるひずみエネルギー U_s と板の曲げによるひずみエネルギー U_b の比は

$$\frac{U_s}{U_b} = \frac{6k}{(1+\nu)h^2} \frac{(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x)^2 + (\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y)^2}{f(\frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \frac{\partial \beta_x}{\partial y}, \frac{\partial \beta_y}{\partial x}, \frac{\partial \beta_y}{\partial y})}$$

となる。ここで $\alpha = 6k/(1+\nu)/h^2$

板が非常に薄い場合は、Kirchhoff 板理論が成り立つので、式

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \beta_x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \beta_y$$

により、 $U_s/U_b = 0$ が成り立つ。

一方、degenerated 要素で有限要素解析を行うと、板が非常に薄い ($h \rightarrow 0$) 場合は、 $\alpha \rightarrow \infty$ なので、式(A.13)から見ると、要素内の任意の小領域では、式

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \rightarrow 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \rightarrow 0$$

を満たさなければならない。

実際に有限要素解析を行う時は、形状関数を用いて w, β_x, β_y を表し、要素の剛性マトリックスを計算する。もし仮定した形状関数で表した w, β_x, β_y が要素内の任意の小領域で式(A.15)を満たさないなら、得られた要素剛性は実の剛性より大きくなり、解が固くなる。このような現象は Shear Locking と呼ばれる。

目 次

1.1	非伸張性 cosserats 表面の形状 [7]	5
1.2	drilling 自由度を持つ三角形膜要素	9
1.3	共回転法	10
1.4	DKT 板曲げ要素の概要	14
1.5	DKT シェル要素の概要	15
1.6	DKT12 シェル	17
1.7	DLTP 要素の構成	19
1.8	DKL 要素の自由度 (a) 最初において (b) 最後において	20
1.9	面積座標	20
2.1	Kirchhoff-Love 平板の変位	22
2.2	β_x, β_y の正方向の定義	24
2.3	3 節点の DKT 板曲げ要素	28
2.4	3 節点-DKT 板曲げ要素の配置	29
2.5	三角形面積座標及び CST 要素	35
2.6	$\lambda - \eta$ 座標	35
3.1	Newton-Raphson 法 概念図	54
5.1	解析モデル	64
5.2	単純引張解析	65
5.3	Rolling up 解析 2	65
5.4	応力評価比較 1	66
5.5	応力評価比較 2	66
5.6	応力評価比較 3	66

表 目 次

5.1	モデルデータ表	64
5.2	荷重データ表	64
5.3	材料データ表	65

参考文献

- [1] M. Fafard , G. Dhatt and J.L. Batoz: “A NEW DISCRETE KIRCHHOFF PLATE/SHELL ELEMENT WITH UPDATED PROCEDURES” *Computers and Structures* Vol.31. No.4.pp. 591-606(1989)
- [2] 張衛紅 東京大学大学院機械情報工学専攻博士論文 2002年
- [3] 半谷, 平板の基礎理論彰国社(1995)
- [4] V.Port et al., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 71, 987-1008 (2007)
- [5] V.Prot,B.Skallerud and G.A.Holzappel: “Transversely isotropic membrane shells with application to mitral valve mechanics. Constitutive modelling and finite element implementation” *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 71 987-1008(2007)
- [6] Henry T. Y. Yang , S. Saigal , A. Masud and R. K. Kapania: “A survey of recent shell finite elements”, *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 47, pp. 101-127, (2000).
- [7] J.C.SIMO and D.D.FOX: “ON A STRESS RESULTANT GEOMETRICALLY EXACT SHELL MODEL. PART I FORMULATION AND OPTIMAL PARAMETRIZATION”, *Comput.Methods Appl. Mech. Engng* 72, pp. 267-304, (1989).
- [8] Edward L. Wilson and Adnan Ibrahimbegovic: *Finite Elements in Analysis and Design* 7,pp. 229-241, (1990).
- [9] T.Belytschko, C.S. Tsay and W.K.Liu : A STABILIZATION MATRIX FOR THE BILINEAR MINDLIN PLATE ELEMENT *Comput.Methods Appl. Mech. Engng* 29,pp. 313-327, (1981).
- [10] Carlos A. Felippa: “A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms” *Comput.Methods Appl. Mech. Engng* 192,pp. 2125-2168, (2003)
- [11] Peyman Khosravi, Rajamohan Ganeman, Ramin Sedaghati: “An effect facet shell element for corotational nonlinear analysis of thin and moderately thick laminated composite structures” *Computers and Structures* (2007)
- [12] J. L. Batoz , C. L. Zheng and F. Hammadi: “Formulation and evaluation of new triangular, quadrilateral, pentagonal and hexagonal discrete Kirchhoff plate/shell elements” *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 52,pp. 615-630, (2001)

- [13] Jean-Louis Batoz Kraus-Jurgen Bathe and Lee-Wing Ho: A STUDY OF THREE-NODE TRIANGULAR PLATE BENDING ELEMNETS *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 15, 1771-1812 (1980)
- [14] Fumio Kikuchi: On a Finite Element Scheme Based on the Discrete Kirchhoff Assumption *Numer. Math* 24, 211-231 (1975)
- [15] Shen Wu , Guangyao li and Te Belytschko: A DKT shell element for dynamic large deformation analysis *COMMUNICATIONS IN NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING* 21 651-674 (2005)
- [16] 久田俊明: 「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」, 丸善 (1992).
- [17] 久田俊明, 野口裕久: 「非線形有限要素法の基礎と応用」, 丸善 (1995).
- [18] J.L. Meek , S.Ristic: “Large displacement analysys of thin plates and shell using a flat facet finite element formulation” *Comput. Methods Appl. Mech Engng* 145 285-299 (1997)
- [19] Peter Noe Poulsen and Lars Damkilde: “A FLAT TRIANGULAR SHELL ELEMENT WITH LOOF NODES” *Int.J.Numer.Meth.Engng.* vol39, 3867-3887 (1996)
- [20] K.J.Bathe,Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall,(1982)
- [21] D.Chapelle and K.J.Bathe,”Fundamental Considerations For the Finite Element Analysis of Shell Structures”, *Computers & Structures*,Vol. 66, pp. 19-36,(1998)
- [22] H.C. Park,”An Efficient Assumed Strain Element Model With Six DOF Per Node For Geometrically Non-linear Shells”, *Int.J.Numer. Meth. Engng.*, Vol. 3, pp. 275-290,(1971)
- [23] J.L.Batoz,K.J. Bathe and L.W. Ho,”Application of Higher Order Corotational Stretch Theories to Nonlinear Finite Element Analysis”, *Computers & structures*, Vol. 10, pp. 175-182
- [24] K.J.Bathe and L.W. Ho,”A Simple and Effective Element For Analysis of General Shell Structures”, *Computers & Structures*, Vol.13,pp.673-681,(1981)
- [25] G.Dhatt,L.Marcotte and Y.Matte,”A New Triangular Discrete Kirchhoff Plate/Shell Element”,*Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 453-470,(1986)
- [26] G.A. Wempner, J.T. Oden and D.A. Dross,”Finite Element Analysis of Thin Shells”,*J. Engng. Mech. Div. ASCE*, Vol. 94, pp. 1273-1294
- [27] W.J. chen and Y.K. Cheung, ”Refined Triangular Discrete Kirchhoff Plate Element for Thin Bending, Vibration and Buckling Analysis”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 41, pp. 1507-1525, (1998)

- [28] I. Katili, "A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Plate Theory And Assumed Shear Strain Fields-Part I: An Extended DKT Element For Thick-Plate Bending Analysis", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 36, pp. 1859-1883,(1993)
- [29] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, P. Papadopoulos and E. Onate, "Plate Bending Elements With Discrete Constraints: New Triangular Elements", *Computers & Structures*, Vol. 35, pp. 505-522,(1990)
- [30] J.L. Batoz and G. Dhatt, Development of two simple shell elements.*AIAA Jnl* 10, 237-238(1972)