

東京大学 大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成20年度
修士論文

流れのあるプラズマにおけるテアリング モード安定性の漸近接続法による解析

2009年2月提出

指導教員 古川 勝 准教授

076213 中津 智世

目次

第1章	序論	1
1.1	核融合エネルギー	1
1.2	プラズマ閉じ込め	2
1.3	トカマク装置	3
1.4	平衡と安定性	5
1.5	テアリングモード不安定性	6
1.6	抵抗性簡約化 MHD 方程式	7
1.7	本研究の動機	11
第2章	漸近接続法による解析	15
2.1	内部層と外部領域	15
2.1.1	外部領域	15
2.1.2	内部層	16
2.2	シア流のない場合	19
2.2.1	内部層	19
2.2.2	外部領域	22
2.3	シア流のある場合	27
2.3.1	内部層	28
2.3.2	外部領域	31
2.4	外部接続条件について	34
第3章	テアリングモード成長率	35
3.1	シア流のない場合	36
3.2	シア流のある場合	37
3.2.1	Alfvén 速度よりも遅い (sub-Alfvénic) シア流の場合	37
3.2.2	Alfvén 速度を超える (super-Alfvénic) シア流の場合	39
3.3	シア流によるテアリングモード成長率変化のまとめ	43
第4章	不安定化メカニズム解析	44
4.1	モード構造 (固有関数)	44
4.1.1	シア流のない場合	44
4.1.2	Sub-Alfvénic シア流のある場合	50
4.1.3	Super-Alfvénic シア流のある場合	55
4.2	内部層において発生するジュール熱	64

4.3	摂動磁場と摂動速度場の変化	66
4.4	エネルギー分配	74
第 5 章	結論	77
付 録 A	数値計算関連	80
付 録 B	文献 [1] との記号対応	86
付 録 C	シア流なしコード計算と, シア流あり小極限コード計算との整合性	90

第1章 序論

1.1 核融合エネルギー

最近，以前にも増して地球環境保護への動きが活発になり，ニュースなどでも毎日のように流れるようになった．以前より，化石燃料の枯渇を懸念し，石油に代わる代替エネルギーの研究や実用化に向けた取り組みが盛んにおこなわれてきていたが，最近では枯渇問題に地球温暖化ガスとされる二酸化炭素排出量削減の流れが加わり，さらに代替エネルギーに注目が集まるようになってきている．環境基準を満たし，かつ石油から完全に代替できるような強大なエネルギー源として研究されてきた方法に核融合エネルギーが挙げられる．

核融合とは，水素やヘリウムなど軽い元素の原子核同士が融合する原子核反応であり，太陽の中心部で起こっている反応である．なお，太陽の主成分は水素、ヘリウムである．原子核同士が融合した際に生じる質量欠損により得られるエネルギーを核融合エネルギーと呼ぶ．現在の原子力発電で用いられている反応は，ウランなどの重い元素の原子核が2つの原子核に分裂する核分裂反応である．核分裂のエネルギーは分裂の際に生じる質量欠損により得られる．

太陽中心で発生した核融合エネルギーは、100 万年かけて太陽表面に輸送され，おもに光のエネルギーとして宇宙空間に放出している．その中のわずかなエネルギーが地球に降り注ぐことで我々地上の生命が維持されている．

したがって，地上で安定した核融合反応を起こす設備を作ること 地上に太陽を作るこ

と できれば，非常に優秀なエネルギー源となることができるのである．必要とする燃料は，海水中の重水のみであり，実質的に燃料枯渇などの心配もない．

1.2 プラズマ閉じ込め

原子核は正の電荷をもつため，核融合反応が起きるには Coulomb 障壁を乗り越える必要がある．そのためには，相当なエネルギーを与えて原子核を加速してやらねばならない．そのためには1億 以上の温度を必要とするが，この温度下では燃料となる軽い元素は原子核と電子が電離したプラズマ状態になっている．プラズマとは，中性化された電離ガスのことを指す．

核融合炉では，高密度プラズマのエネルギーを十分に反応できるだけの時間，閉じ込めることが必要である．具体的に言うと，密度とエネルギー閉じ込め時間の積 $n\tau_E$ はほぼ $1.5 \sim 3.0 \times 10^{20} m^{-3}$ 、温度は $10 \sim 20 keV$ 必要とされる．よって満たすべき核融合積 $n\tau_E T$ の値は，およそ $3.0 \times 10^{21} m^{-3} s keV$ である．さらに具体的に言うと， $10^{20} m^{-3}$ 前後のイオン密度において必要とされるのは1秒程度である．

このような高温プラズマは，通常の方法による閉じ込めが不可能であるので，別の閉じ込め方法が必要となる．天体と同じように巨大な重力で閉じ込めることができるなら簡単に実現できそうであるが，重力定数はきわめて小さく，重力は働かないに等しい．プラズマは磁力線に巻きついて運動することから，磁場によるプラズマ閉じ込めが主流となっている．

1.3 トカマク装置

10keV にも加熱されたプラズマでは、たとえば重水素イオンの熱速度は 1000km/s にもなる。したがって核融合反応を十分起こすために、プラズマを 1 秒間閉じ込めようとすると円筒容器の長さは 1000km 以上必要であり、非現実的である。そこで、円筒の形をドーナツ状にすることにより、磁場に巻きついたプラズマを無限軌道上（トーラス）に閉じ込めることができる。国際熱核融合実験炉 ITER(International Thermonuclear Experimental Reactor) に代表されるトカマク (tokamak) 装置では、プラズマはトーラス状に流れるプラズマ電流による磁場に加え、トーラスに巻かれたコイルで作られる電流方向（トロイダル方向）の磁場との合成磁場で閉じ込められる。図 1.1 にトーラスの概要図を示す。

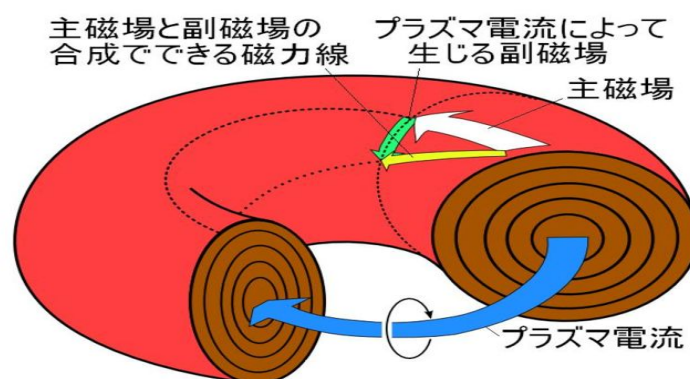


図 1.1: トーラス概要図

トーラスでは、大円周方向をトロイダル方向、小円周方向をポロイダル方向と呼ぶ。磁場に巻きついた荷電粒子はトーラスの上下を通過することにより、電荷分離を避けることができる。また、トーラス内の磁場の方向が断面の半径の関数でねじれるように設計されている。この磁場のねじれを磁気シアと呼び、副半径（ポロイダル方向）とともにらせん

状磁力線のピッチ角が変化している。図 1.2 は，トーラスにおける磁気シアのイメージである。

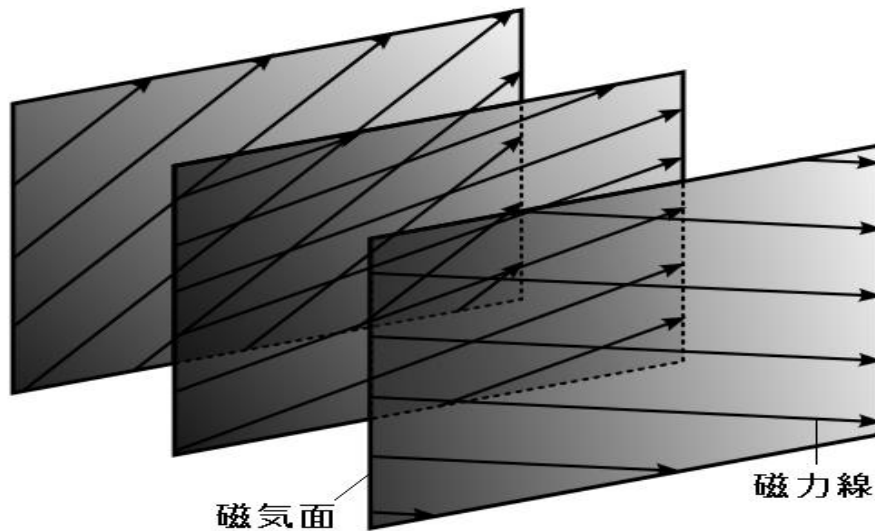


図 1.2: 磁気シア：磁気面ごとの磁力線のねじれ

このねじれた磁場は，入れ子状に層をなしており，この層を磁気面と呼ぶ。各磁気面においては，磁気ポテンシャルが一定 ($\psi(\mathbf{r}) = \text{const.}$) となり，磁力線はその面上に存在する．よって磁気面は $\nabla\psi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B} = 0$ を満たす。また，トカマクにおいては，安定性の指標の役割を果たす安全係数 q という値が存在する。一般論でいえば，高い q 値は高い安定性を示す。各磁力線は各々 q 値を持ち，その磁気面上でらせんを描きながらトーラスを周回する。トロイダル角 Φ のところで磁力線がポロイダル断面上のある位置にあったとし，磁力線がトーラスを $\Delta\Phi$ 動いて元のポロイダル断面に戻ったとする。この場合，磁力線の q 値は

$$q = \frac{\Delta\Phi}{2\pi}$$

と定義される。たとえば，磁力線がトーラスをちょうど 1 周して出発点に戻る場合は $q = 1$

である。もし、 $q = \frac{m}{n}$ (m, n は整数) であると磁力線は m 回トロイダル方向に、 n 回ポロイダル方向にまわってトーラスを移動すると出発点に一致し、連結する（閉じる）。このように q が有理数となる磁気面のことを有理面と呼び、非常に重要な意味を持つ場所である。有理面の重要性については 1.5 節で述べる。本研究においては、この有理面近傍における物理の議論を行う。

1.4 平衡と安定性

核融合実現に向けたプラズマ閉じ込めの問題において、「平衡」「安定性」は大きな問題である。

平衡とは、すべての力学的な力が均衡して、時間的に不変な状態を指す。平衡は、小さな摂動が減衰されるか増幅されるかによって安定か不安定か判別される。

平衡状態が安定な平衡でない場合、わずかな擾乱が種となってプラズマ中の波動のいくつかのモードは不安定となり、振幅が指数関数的に増大してプラズマの閉じ込め状態が失われる。

プラズマにあるモードの擾乱を加えたとき、それが安定（減衰）か不安定（成長）かを調べることは重要である。この解析手段としては、擾乱が小さく平衡状態からのずれが 1 次の微小量であるとして線形化近似を用いる (2.1 節)。プラズマには数えきれないほどの不安定性が存在し、そのうち電磁流体力学 (MHD: MagnetoHydroDynamics) で取り扱える不安定性を MHD 不安定性、または巨視的不安定性と呼ぶ。本研究で取り上げるテアリングモードは、MHD 不安定性のうち抵抗性モードに属する不安定モードである。

1.5 テアリングモード不安定性

磁力線はプラズマの運動に凍りつくが，一般的にプラズマ中では荷電粒子間の衝突があるため，抵抗は有限でありそのため磁力線はプラズマからずれることができる (2.1 節)．よって，有限の電気抵抗を持つ磁化プラズマ中では，波数ベクトルが磁場 B に垂直となる位置を持つ Alfvén 波が，磁力線のつなぎ換えを伴って不安定化することがあり，これがテアリングモード不安定性と呼ばれている．ここで，Alfvén 波とは，磁場に巻きついたイオンの慣性力による磁力線の振動が磁場方向に伝播する波動のことである．

テアリングモードは，有理面近傍に磁気島構造をつくり，その変形した磁場に沿ってエネルギーの急速な輸送が起こるため，トーラス径方向への輸送を増加させることになる．テアリングモードは，トカマクにおけるプラズマ閉じ込めにおいて深刻な問題を呈している不安定性のひとつである．図 1.3 に，磁力線のつなぎかえ（リコネクション）のイメージと，それに伴って生成される磁気島のイメージを示す．

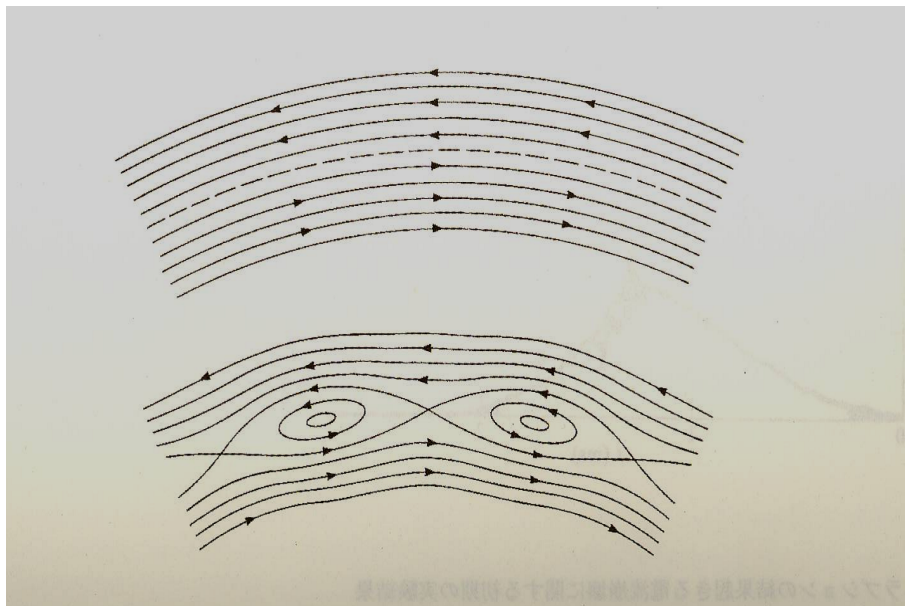


図 1.3: 磁力線のつなぎかえと磁気島のイメージ図 [16]

テアリングモードの解析において有理面に注目するのは、有理面が次の2つの大きな特徴を持つからである。

1. トーラスにおいて、磁力線に平行方向の波数 $k_{\parallel} = 0$ つまり $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ 、平衡磁場 \mathbf{B}_0 に垂直な伝播ベクトルが存在する点は $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = \frac{m}{r} B_{\theta} - \frac{n}{R} B_z = \frac{n}{R} B_{\theta} \left(\frac{m}{n} - q \right) = 0$ 、すなわち $q = \frac{m}{n}$ なる有理面に対応する。ここで、 r はトーラス小半径、 R は大半径を示す。この伝播ベクトルにより、磁力線はプラズマからスリップすることができ、有理面近傍において磁力線のつなぎ換え（リコネクション）が起こり磁気島（図 1.3）がつくられることになる
2. 有理面近傍では関数の変化が鋭くなり、2 階微分など高次の微分の項の効果が無視できなくなる。

1.6 抵抗性簡約化 MHD 方程式

抵抗性領域におけるプラズマの運動の支配方程式として、抵抗性 MHD 方程式が用いられる。

ここで、電磁流体力学 (MHD) とは、プラズマを 1 流体で記述するモデルの名称である。大アスペクト比近似による、変化の速い方向と遅い方向への空間分解により、変化の速い磁場に垂直方向の運動に注目すると、この方程式群は簡約化され、簡約化された方程式のことを抵抗性簡約化 MHD 方程式と呼ぶ。まずはじめに、簡約化される前の抵抗性低 β ($\beta = \frac{\text{プラズマ圧力}}{\text{磁気圧}}$) MHD 方程式は次のようなものである：

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \nabla p \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}. \quad (1.2)$$

(1.1) 式は運動方程式 , (1.2) 式は磁場の誘導方程式である .

ここで , p はプラズマ圧力, B は外部磁場, \mathbf{B} は磁場 , \mathbf{v} は流速 , \mathbf{j} は電流 , η は電気抵抗 , μ_0 は真空透磁率である . また , 本研究では非圧縮 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) の円柱プラズマを用いてテアリングモードの解析を行う .

それぞれの物理量は次元を持っているため , その大きさや単位は対象とする現象によって異なる . ここで , 一般的な議論を行うため , それぞれの物理量を次の代表的な値によって規格化し , 無次元量とする作業を行う (無次元化) . 質量密度 ρ^* , 磁場 B^* , 磁気圧 $p^* = \frac{B^{*2}}{\mu_0}$, システム長 a 、速さを Alfvén 速度 $v_A = \frac{B^*}{\sqrt{\mu_0 \rho^*}}$ 、時間を $t^* = \frac{a}{v_A}$, 電気抵抗 $\eta^* = \mu_0 v_A a$ で規格化を行う .

規格化後の (1.1) 式 , (1.2) 式はそれぞれ

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \nabla p, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.4)$$

となる . 以降 , ρ , \mathbf{v} , \mathbf{B} , η , p は , 規格化を行った後の各物理量を示すことにする .

荷電粒子は磁力線に巻きついて運動するため , その巨視的構造はしばしば渦の形態をとる . よって , (1.3) 式は , 両辺の回転 (curl) をとって、渦度に対する方程式にしておく :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{U}) \right] = \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]. \quad (1.5)$$

ここで , $\mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{v}$ は渦度であり , 渦度方程式は渦度場の時間発展を表す式である .

(1.4) 式は , 磁場の誘導方程式である .

η は小さい ($10^{-13} \sim 10^{-14}$ オーダー) ので , プラズマの大部分の領域では (1.4) 式の右辺第 2 項は無視できるが、解が急激に発散していくような特異性を持つ領域では、2 階微分など微分階数の高い項の効果が無視できない . (1.4) 右辺第 2 項において η が小さくと

も， $\nabla^2 B$ が大きくなり，この項の効果が残ることになる．この右辺第 2 項は磁場の拡散項であり，特異性を持つ領域では小さな抵抗でも磁場の拡散が可能であり，プラズマの運動からスリップすることができる．これにより，磁力線のつなぎ換えが起こり不安定化するモードがテアリングモードである．

静電ポテンシャル ϕ ，ポロイダル磁束関数 ψ という Clebsch ポテンシャル表記を導入し，磁場 \mathbf{B} は

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \hat{z} + B_0\hat{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial r} \\ B_0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

速度場 \mathbf{v} は，

$$\mathbf{v} = \hat{z} \times \nabla\phi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \phi \quad (1.7)$$

とする．なお，座標系は円柱座標を用いる．

この表記により，元の抵抗性 MHD 方程式群のベクトル場 \mathbf{B} , \mathbf{v} を非圧縮ベクトル場にし，(1.3)，(1.4) 式の未知変数を 2 つのベクトルポテンシャル ϕ と ψ に簡略化する．さらに，空間的に変化の速い方向（平衡磁場に垂直方向）と，ゆっくりとした方向（平衡磁場に平行方向）にスケール分離し，そのスケール分離パラメタに逆アスペクト比（ $\epsilon = \frac{a}{R_0} \ll 1$ ）を用いることで，抵抗性 MHD 方程式を簡約化すると次のように書ける：

$$\frac{dU}{dt} = -\nabla_{\parallel} J, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\nabla_{\parallel}\phi + \eta J. \quad (1.9)$$

ここで， $U = \nabla_{\perp}^2 \phi$ は渦度， $J = \nabla_{\perp}^2 \psi$ は電流， ∇_{\perp} は 0 次の磁場に垂直方向の空間微分とし，各演算子は $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [\phi, \cdot]$ ， $\nabla_{\parallel} := \epsilon \frac{\partial}{\partial z} - [\psi, \cdot]$ ， $[f, g] = \hat{z} \cdot \nabla f \times \nabla g = \frac{1}{r} (\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial r})$ ， $\epsilon = \frac{a}{R_0}$ は逆アスペクト比， R_0 はプラズマ大半径である．

この連立方程式を，簡約化抵抗性 MHD 方程式 (Reduced MHD equation) と呼ぶ．

プラズマの MHD 安定性の問題は，平衡状態からの微小擾乱がどのようになるかを調べることに還元できる．この解析手段として，擾乱が小さく平衡状態からのずれが微小であるとし，線形化近似を行う．

線形の波動現象を解析する場合，フーリエ級数への分解を用いて，波を固有モードに分解すると，各モードの分散関係が得られ，それにより波動現象を解析することができる．エルミート（自己共役）演算子によって記述される波動現象では，各モードは直交，つまり独立しており，それらを足し合わせることで波の運動を記述できる．しかし，非エルミート演算子によって記述される波動現象では，モード同士が直交しないため，各モードを独立に扱えない．つまり，フーリエ展開を用いてモード分解しても，他モードとのエネルギーのやりとりが起こっている可能性があるため，モード分解による現象の解析が難しくなる．流れのないプラズマの MHD 線形安定性はエルミート作用素で記述されるため，MHD 方程式の解について時間的にフーリエ展開を用い，それによりスペクトル分解された各モードを足し合わせることで波の運動を記述できる．しかし，流れを持つプラズマの MHD 線形安定性は，非エルミート作用素で記述され，モードの直交性が保証できない．それにもかかわらず，非エルミート系の問題にフーリエモードを仮定して MHD 線形安定性を議論する場合も多い．非エルミート系で $\gamma = -i\omega$ の時間依存性を仮定することは，ある限定された特解を求めていることにすぎないのであるが，そのような特解が存在するのか，またシア流がある場合でも固有モード解析が有効であるのかなどの情報を得る目的で意味のある解法だと言える．本研究においても摂動項に対し，次のような時間・空間依存性を仮定する：

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(r) \\ \tilde{\psi}(r) \end{pmatrix} e^{\gamma t + i(m\theta - \frac{n}{R_0}z)} . \quad (1.10)$$

本研究では，問題は γ を固有値とする固有値問題に帰着し， γ の実部が正となる（時間とともに指数関数的に増幅する）不安定モードを観測することになる．なお表記としては，ある物理量 A に対して、平衡量を A_0 、平衡状態からのずれに対し 1 次の摂動量を \tilde{A} と記す（物理量 A は $A = A_0 + \tilde{A}$ という形で書き表すことができる）．

線形化された抵抗性簡約化 MHD 方程式は

$$\gamma \begin{bmatrix} \nabla_{\perp}^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (in\epsilon + \frac{im\psi_0'}{r})\nabla_{\perp}^2 - \frac{imJ_0'}{r} \\ in\epsilon + \frac{im\psi_0'}{r} & \eta\nabla_{\perp}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

となる．ここで，プライムは r 微分を表し，摂動量 $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ は ϕ, ψ での表記に置き換えた．以降特記のない限りこの表記に従う．

1.7 本研究の動機

プラズマには，未だ解明されていない物理的問題が数多く残っている．特に，前節でも触れたように，プラズマが流れを持つ場合の問題は，その支配方程式の持つ非エルミート（非自己共役）性などによってさらに複雑になり，数学的に難しい性質を持つ．

プラズマが流れを持つのは，特別な場合ではなく，自然界にあるプラズマの多くは流れを持っている．トカマクでも，静かに閉じ込めていたはずのプラズマが，自発的に流れを生起し，閉じ込めによくも悪くも影響を与えることが分かってきている [22]．特に，シアのある流れは，プラズマの不安定モードのいくつかに対し安定化効果があるという研究結果もある [13],[14]．しかし，テアリングモードに対しては，Alfvén スピードに対し，十分にゆっくりとしたシア流はモードを不安定化させる効果を持つという研究結果がある [2][4][10][12]．本研究では，シア流のあるプラズマにおけるテアリングモードの解析を，

漸近接続法（後述）を用いて境界条件を導出し，固有値問題として数値的に解くことにより，その不安定化メカニズムを検証することを目的とする．テアリングモード自体は1960年代より研究が行われている [3] 古い研究テーマであるが，近年新古典テアリングモードにおける種磁気島の問題などから，再び古典的なテアリングモードに対するシア流の効果について注目されるようになってきており，本研究でも古典的な問題を取り上げるに至った．

テアリングモードの解析によく用いられる方法は2つある：

- プラズマ全域において抵抗性 MHD 方程式を解く
- プラズマを、抵抗の効いてくる有理面近傍（内部層）とそれ以外の理想的に扱える領域（外部領域）に分け、それぞれの支配方程式における解を漸近接続することによって分散関係を得る

このような方法が主流である．

シア流の効果を組み入れた論文では，[5][7][8] が前者の方法にて数値的に，[2][4][6][9] が後者の方法にて解析的に解かれている．

数値計算で解く場合には前者の方法が用いられてきており，後者の方法で数値計算を行ったケースはほとんど存在しなかった．漸近接続では，内部層の座標を有理面を0とし，外部領域へ向かい無限大となる座標に変換する．よって漸近接続法を用いて数値計算を行う難点は，内部層にて外部領域に近づく領域，つまり無限遠方で数値計算ノルムが発散してしまうことにある．この問題に関しては，[1] によって解決され，シア流の存在しない場合における漸近接続を用いた数値解が得られた．[1] と本研究での固有関数との対応関係を付録 B に示す．シア流のある本研究においては，[1] での方法論は用いておらず，ノルムの発散については言及していない．

[2] [4] は本研究と同様，漸近接続法を利用し，内部層内のシア流を考慮して解析的に解かれた論文である．本研究との違いは，[2] [4] とともに，シア流の大きさに応じて，内部層方程式のオーダリングをその都度変えて計算している点，また [4] においては，外部領域シア流効果を無視した（シア流のない場合と同じ）境界条件を用いている点が挙げられる．本研究においては，外部解にもシア流効果を残し，それが内部解とつながることを確認しており，この事実はシア流の大きさに関係なく成り立つ．よって，シア流の大きさを問わず，場合分けをせずとも数値解を得られる点は他先行研究とは違い，本研究での手法の利点と言える．

本研究では，漸近接続法を用いたが，外部領域接続条件を考える際に，シア流存在時においても内部解と外部解がきちんと接続することも証明し，そのような接続条件を用いたことにより，

シア流存在下での数値計算

外部領域に対するシア流の影響を固定することにより，内部層内のみの流れによるテアリングモードの挙動を見ること

を可能にした．

なお，漸近接続法を用いて数値計算を行うことのメリットとしては，内部層内のみを解けばよいので，プラズマ全域で解く場合に比べて CPU 時間が短縮されることや，薄い内部層での物理を捉えられるような領域・周波数スケールの引き伸ばしを行っているため，より詳細なテアリングモードの描写ができることなどがある．

第 2 章に本研究における漸近接続法の具体的な使用方法について，第 3 章にテアリングモードの不安定性成長率のシア流に伴う変化について，第 4 章にテアリングモードのシア流に伴うモード構造変化や，モード内のエネルギー分配の変化から成長率変化の物理的メ

カニズムを検討する .

第2章 漸近接続法による解析

1.5 節で述べたように、有理面近傍では関数の変化が鋭くなり、2 階微分など高次の微分の項の効果が無視できなくなる。このような領域を内部層とし、それ以外の有理面の適当な近傍を除いた領域を外部領域とする。

2.1 内部層と外部領域

2.1.1 外部領域

第1章で述べたとおり、プラズマ中で抵抗の効いてくる領域は有理面近傍の薄い領域であり、また抵抗不安定性における現象は、MHD の特徴的時間に比べて十分にゆっくりしているので ($\tau_R^{-1} \ll \gamma \ll \tau_A^{-1}$; $\tau_R = \frac{a^2}{\eta}$, $\tau_A = \frac{a}{v_A}$ はそれぞれ抵抗拡散時間、Alfvén 時間)、プラズマの大部分では電気抵抗と慣性の効果を落として考えてよい。

外部領域におけるプラズマは、慣性力と電気抵抗の効果を落とした理想 MHD 方程式、つまり (1.11) 式において左辺と、右辺の電気抵抗 η のかかった項を落とした方程式 (Newcomb 方程式 (2.1)) にて記述できる。

$$\left[-i\epsilon \left(-n + \frac{m}{q} \right) \nabla_{\perp}^2 - \frac{imJ_0'}{r} \right] \psi = 0. \quad (2.1)$$

ここで, 円柱座標より $\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{m^2}{r^2}$ である. (2.1) 式は Newcomb 方程式と呼ばれ, $q = \frac{m}{n}$ となる有理面にて特異性を持つ方程式である.

2.1.2 内部層

内部層方程式

内部層においては, 関数の特異性により (1.11) 式において高次の微分を含む項 (抵抗 η の項) が無視できない. また, 方程式の性質上, プラズマの慣性はいくら小さくとも無視できない. よって, この領域においては, 以下に示すように内部層のオーダリングパラメタによって適切な座標変換, および座標引き伸ばしを行うことによって, 有理面近傍におけるプラズマの振る舞いを捉える支配方程式が望まれる. このような方程式を内部層方程式 (Innerlayer equation) と呼び, 以下にその導出を示す.

(1.11) 式を有理面 $r = r_S$ の近傍で Taylor 展開すると,

$$\left[\gamma + im \left(\frac{v_{\theta}}{r} \right)'_S x \right] \nabla_{\perp}^2 \phi = \frac{im(\nabla_{\perp}^2 \phi_0)'}{r_S} - im \left(\frac{B_{\theta}}{r} \right)'_S x \nabla_{\perp}^2 \psi - \frac{imJ'_{0S}}{r_S}, \quad (2.2)$$

$$\left[\gamma + im \left(\frac{v_{\theta}}{r} \right)'_S x \right] \psi = -im \left(\frac{B_{\theta}}{r} \right)'_S x \psi + \eta \nabla_{\perp}^2 \psi \quad (2.3)$$

となる.

ここで, $x = r - r_S$ は有理面を 0 とする径方向座標, 添え字 s は有理面において値を評価することを意味し, プライムは r 微分, B_{θ} は (1.6) 式, v_{θ} は (1.7) 式による.

有理面は非常に薄いため, 有理面のオーダリングパラメタを用いて, 空間と周波数スケールの引き伸ばしを行う. 仮に, そのようなオーダリングパラメタを次のように置くことにする:

$$x = \delta^{-\alpha} X, \quad (2.4)$$

$$t = \delta^{-\beta} T. \quad (2.5)$$

x, t はそれぞれ引き伸ばす前の径方向座標とタイムスケールであり, X, T はそれぞれ引き伸ばし後のそれらとする. 図 2.1 は引き伸ばし前の座標系と, 引き伸ばし後の内部層座標系のイメージである.

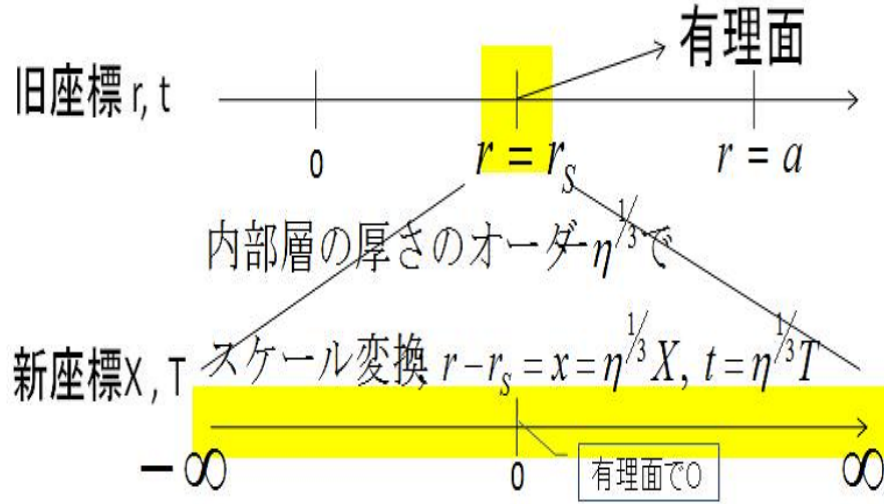


図 2.1: 内部層オーダーを用いた変数引き伸ばしによる座標変換

(2.2), (2.3) 式の x, t を X, T で置き換えると,

$$\left[\delta^\beta \frac{\partial}{\partial T} + im \left(\frac{v_\theta}{r} \right)'_s \delta^{-\alpha} X \right] \delta^{2\alpha} \frac{d^2 \phi}{dX^2} = \frac{im(\nabla^2 \phi)'}{r_s} - im \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_s X \delta^\alpha \frac{d^2 \psi}{dz^2} - \frac{im J'_{0s}}{r_s}, \quad (2.6)$$

$$\left[\delta^\beta \frac{\partial}{\partial T} + im \left(\frac{v_\theta}{r} \right)'_s \delta^{-\alpha} X \right] \psi = -im \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_s X \delta^\alpha \phi + \eta \delta^{2\alpha} \frac{d^2 \psi}{dX^2}. \quad (2.7)$$

ここで $\alpha = -\beta$ と選ぶと, 元の (1.1) 式でいうところの左辺第 1 項 (γ の項), 左辺第 2 項

(対流微分項)，右辺第 1 項 (Alfvén 項) が釣り合う．よって，

$$\left[\Gamma + im \left(\frac{v_\theta}{r} \right)'_S X \right] \frac{d^2 \phi}{dX^2} = -im \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_S X \frac{d^2 \psi}{dX^2}. \quad (2.8)$$

一方，(2.7) 式の各項が釣り合うためには，電気抵抗 $\eta = \delta^{-3\alpha}$ とすればよい． $\delta = \eta$ とすると， $\alpha = \frac{1}{3}$ となり、内部層のオーダーは抵抗 η の $\frac{1}{3}$ 乗ということが分かる．各項を釣り合わせた (2.7) 式は，

$$\left[\Gamma + im \left(\frac{v_\theta}{r} \right)'_S X \right] \Psi = -im \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_S X \Phi + \frac{d^2 \Psi}{dX^2} \quad (2.9)$$

となる． Γ ， Φ ， Ψ は，それぞれ内部層対応の成長率，摂動静電ポテンシャル，摂動磁束関数の表記とする．

平衡状態でのポロイダルシア流がない場合には，(2.8), (2.9) 式において $v_\theta = 0$ とし，シア流の効果を組み入れる場合には， v_θ を残せばよい．

さらに，簡単のため，定数 $m \left(\frac{v_\theta}{r} \right)'_S$ ， $m \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_S$ を規格化することを考える．

$$\begin{aligned} \Gamma &= c_1 \hat{\Gamma} \\ X &= c_2 \hat{X} \end{aligned} \quad (2.10)$$

とおき，定数 $m \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_S$ が 1 となるような $\hat{\Gamma}$ ， \hat{X} の組を見つけると同時に，現方程式で 2 箇所に現れているシアパラメタ (磁気シア $m \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_S$ ，平衡シア流 $m \left(\frac{v_\theta}{r} \right)'_S$) を，磁気シアに対するシア流の大きさの比 $A = \frac{m \left(\frac{v_\theta}{r} \right)'_S}{m \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_S}$ で表せるように規格化する．

結果，(2.10) のように書ける c_1 ， c_2 は $(c_1, c_2) = \left(m \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_S^{\frac{2}{3}}, \left(m \left(\frac{B_\theta}{r} \right)'_S \right)^{-\frac{1}{3}} \right)$ のように見付き，それを用いて内部層方程式を書き換えると，

$$(\gamma + iAX) \frac{d^2 \Phi}{dX^2} = -iX \frac{d^2 \Psi}{dX^2}, \quad (2.11)$$

$$(\gamma + iAX) \Psi = -iX \Phi + \frac{d^2 \Psi}{dX^2}. \quad (2.12)$$

となる．(2.11), (2.12) 式を合わせて「内部層方程式」と呼ぶ．シア流のない場合の内部層方程式は, $A=0$ としたものとなる．

2.2 シア流のない場合

2.2.1 内部層

(2.12) 式より, シア流がない場合の内部層方程式を書き下しておくとし,

$$\gamma \frac{d^2 \Phi}{dX^2} = -iX \frac{d^2 \Psi}{dX^2}, \quad (2.13)$$

$$\gamma \Psi = -iX \Phi + \frac{d^2 \Psi}{dX^2}. \quad (2.14)$$

となる．

以降, 内部層におけるモード成長率 Γ は, γ に置き換えることにする．

内部層方程式において理想領域に対応する無限遠点に近づいていくとき, すなわち $|X| \rightarrow |\infty|$ のとき, (2.13), (2.14) 式の右辺第 1 項が大きくなり, 慣性項と電気抵抗の項の効果が小さくなっていくため, 外部領域の支配方程式である *Newcomb* 方程式に近づいてゆく．つまり, 式として理想領域に自然に接続していくことが分かる．

外部領域への漸近解の導出

内部層方程式 (2.13), (2.14) は, X について 4 階の微分方程式であるので, 4 つの線形独立解を持つ．内部層方程式では, 無限遠点 $|X| \rightarrow |\infty|$ は不確定特異点になっており, その漸近解は $\exp(\alpha x^2)$ で成長する解, $\exp(-\alpha x^2)$ で減衰する解 (α は $Re(\alpha) > 0$ なる定数) と, 外部解と同じ指数を持つ, すなわち外部解に接続される 2 つのベキ解からなる [17]．よって, 内部層方程式の解には無限遠点にて $\exp(\alpha x^2)$ で成長しないことが要請されるが,

この条件を満たす解は無限遠点にて2つのべき解の重ね合わせを漸近解として持つ．このような漸近解を求めていくことを考える．

内部層方程式の，外部領域への漸近解がどのような形になるのかを求めるため，次のようなべき級数を仮定する：

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 X^\alpha \left(1 + \frac{\Phi_1}{X} + \frac{\Phi_2}{X^2} + \cdots \right), \\ \Psi &= X^\beta \left(1 + \frac{\Psi_1}{X} + \frac{\Psi_2}{X^2} + \cdots \right).\end{aligned}\tag{2.15}$$

ここで， Φ_j, Ψ_j (j ：整数) は任意の定数とする． Ψ 式の全体にかかるべき定数 Ψ_0 は， Φ と Ψ の線形独立性を利用し，(2.15) 式の両辺を定数 Ψ_0 で割ることにより形式上消えている．(2.15) 式を内部層方程式 (2.13), (2.14) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}& \gamma \Phi_0 \left[\alpha(\alpha+1)X^{-\alpha-2} + (\alpha+1)(\alpha+2)\Phi_1 X^{-\alpha-3} + \cdots \right] \\ &= -i \left[\beta(\beta+1)x^{-\beta-1} + (\beta+1)(\beta+2)\Psi_1 X^{-\beta-2} + \cdots \right]\end{aligned}\tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}& \gamma (X^{-\beta} + \Psi_1 X^{-\beta-1} + \Psi_2 X^{-\beta-2} + \cdots) \\ &= -i [\Phi_0 (X^{-\alpha+1} + \Phi_1 X^{-\alpha} + \Phi_2 X^{-\alpha-1} + \cdots) \\ &+ \Phi_0 [\alpha(\alpha+1)X^{-\alpha-2} + (\alpha+1)(\alpha+2)\Phi_1 X^{-\alpha-3} + \cdots]]\end{aligned}\tag{2.17}$$

内部層において $|X| \rightarrow |\infty|$ では，(2.14) 式は理想 Ohm 則に近づいていく．(2.17) 式で左辺第1項と，右辺第1項が最低次で釣り合うように次数を $\beta = \alpha-1$ と選ぶと，(2.16), (2.17) 式は次のようになる：

$$\begin{aligned}& \gamma \Phi_0 \left[\alpha(\alpha+1)X^{-\alpha-2} + (\alpha+1)(\alpha+2)\Phi_1 X^{-\alpha-3} + \cdots \right] \\ &= -i [(\alpha-1)\alpha x^{-\alpha} + \alpha(\alpha+1)\Psi_1 X^{-\alpha-1} + (\alpha+1)(\alpha+2)\Psi_2 X^{-\alpha-2} \cdots]\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma \left(X^{-\alpha+1} + \Psi_1 X^{-\alpha} + \Psi_2 X^{-\alpha-1} + \dots \right) \\
&= -i \left[\Phi_0 (X^{-\alpha+1} + \Phi_1 X^{-\alpha} + \Phi_2 X^{-\alpha-1} + \dots) \right. \\
&\quad \left. + \Phi_0 \left[\alpha(\alpha+1) X^{-\alpha-2} + (\alpha+1)(\alpha+2) \Phi_1 X^{-\alpha-3} + \dots \right] \right] \quad (2.19)
\end{aligned}$$

(2.19) 式の最高次オーダー $(-\alpha+1)$ 乗の項より, $\alpha = 0, -1$ という 2 つの α が求まり, それぞれの α に対し, (2.18), (2.19) 各式において同次の項の係数を比較していくことにより, 各定数 Φ_j, Ψ_j が求まる. それらを (2.15) 式に代入すると, $\alpha = 0$ に対し:

$$\begin{aligned}
\Psi &= X + \Psi_1 + \dots \\
\Phi &= i\gamma \left(1 + \frac{\Phi_1}{X} + \frac{\Phi_2}{X^2} + \dots \right), \quad (2.20)
\end{aligned}$$

$\alpha = 1$ に対し:

$$\begin{aligned}
\Psi &= 1 - \frac{\gamma^2}{3} \frac{1}{X} + \dots \\
\Phi &= i\gamma \left(\frac{1}{X} - \frac{\gamma^2}{3} \frac{1}{X^2} + \dots \right) \quad (2.21)
\end{aligned}$$

と求まる. (2.21), (2.21) は, 外部解に接続されるベキ解であり, 内部層無限遠点ではこの 2 つのベキ解の重ね合わせが漸近解となる. ベキ解の重ね合わせは次のように書ける:

$$\Psi = 1 - \frac{\gamma^2}{3} \frac{1}{X} + \dots + a^\pm X + \dots \quad (2.22)$$

$$\Phi = i\gamma \left[\frac{1}{X} - \frac{\gamma^2}{3} \frac{1}{X^2} + \dots + a^\pm + \dots \right]. \quad (2.23)$$

a^\pm は, 2 つのベキ解の混合比とし, この比が内部層と外部領域を接続させるパラメタとなる. 次章にて出てくるが, 内部に漸近してくる外部解は, 確定特異点まわりで大きい

解と小さい解の重ね合わせで表現される．これらの解の混合比パラメタと，先ほど求めた内部層での漸近解の混合比パラメタが等しくなるように接続することが必要なのである．

2.2.2 外部領域

有理面まわりの漸近解

Newcomb 方程式 (2.1) において，有理面は確定特異点であり，有理面に漸近していく解は有理面のまわりで Frobenius 級数解の形で表せる．有理面の位置を $r = r_S$ と書くことにする．以降、有理面における物理量を表す際はその物理量に対し、添え字 S をつける．(2.1) 式を $r = r_S$ のまわりで Taylor 展開し， x のべきごとに整理すると，

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\frac{1}{q} \right)'_S r_S \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-1} + \epsilon \left[\left(\frac{1}{q} \right)'_S [r_S \psi_1(\alpha + 1) + \alpha] \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} \right)''_S r_S \alpha(\alpha - 1) \right] x^\alpha + \cdots \\ - [J_{0S}' x^\alpha + (J_{0S}' \psi_1 + J_{0S}'') x^{\alpha+1} + \cdots] = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる．

ここで，Taylor 展開は以下に従う：

$$\begin{aligned} x &= r - r_S \\ \frac{1}{q} &= \left(\frac{1}{q} \right)_S + \left(\frac{1}{q} \right)'_S x + \cdots \\ J_0' &= J_{0S}' + J_{0S}'' x + \cdots \end{aligned} \quad (2.25)$$

また，確定特異点である有理面に近づく解の形を決めるため， ψ については次のべき級数展開を仮定する：

$$\psi = \psi_0 x^\alpha (1 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \cdots) \quad (2.26)$$

ψ_n は定数であり、 $\psi_0 = 1$ と選ぶ。

(2.24) 式の Frobenius 解は，自乗可積分でない「大解」と，自乗可積分な「小解」からなっており，確定特異点である有理面のまわりで大解と小解の重ね合わせで書ける．具体的には，

$$\psi = \underbrace{1 + (\psi_1 + \frac{1}{r_S})x \ln |x| + \cdots}_{\text{大解}} + \underbrace{A^\pm (x + \psi_1 x^2 + \cdots)}_{\text{小解}} \quad (2.27)$$

となる．

また，理想 Ohm 則 $\psi \propto x\phi$ という関係より，

$$\phi = \underbrace{\frac{1}{x} + (\psi_1 + \frac{1}{r_S}) \ln |x| + \cdots}_{\text{大解}} + \underbrace{A^\pm (1 + \cdots)}_{\text{小解}} \quad (2.28)$$

ここで， A^\pm は大解と小解の混合比を調整する定数である． \pm は，有理面 $x = 0$ を挟んで正側と負側の値とする．内部層で理想領域に漸近する解 (2.23) を求めた時に触れたが，この大解と小解の混合比は外部領域における，内部層への「接続データ」となる重要なパラメタなのである．

外部領域における大解と小解の混合比は，内部層左右での磁場勾配のジャンプで定義される量：

$$\Delta' = \frac{\frac{d\psi}{dr} \Big|_{r_S+\delta}}{\psi(r_S)} \quad (2.29)$$

により決定される．ここでは，(2.29) の分母に constant- ψ 近似を用いている．これは，有理面は非常に薄いので，全域で見た時に有理面の左右から有理面に近づいてくる ψ の値は同じとみなすという仮定である．図 2.2 に，摂動磁場のプラズマ全体での解 B_r の形を示す．有理面における外部磁場勾配のジャンプの様子がイメージできる．

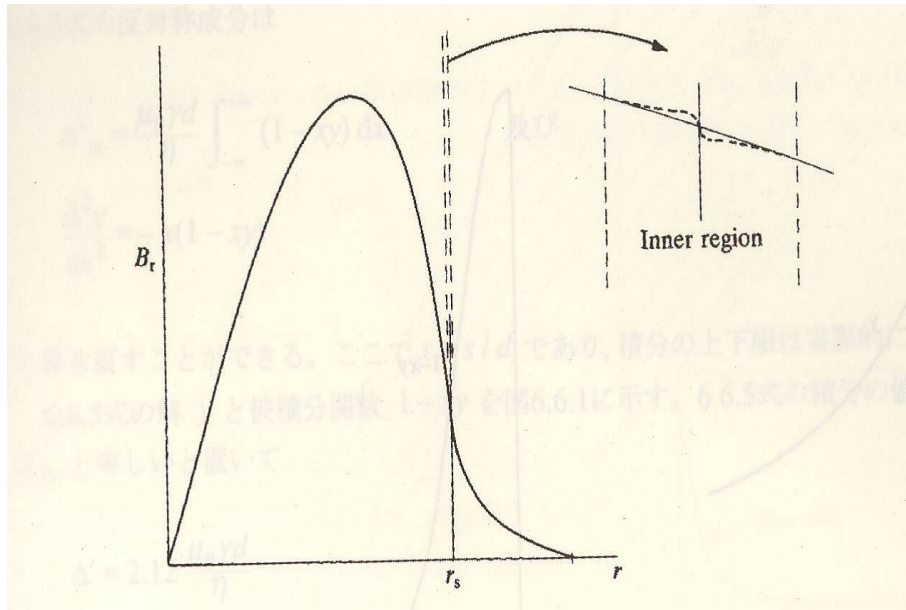


図 2.2: B_r の典型的な様子 [16]

(2.27) を (2.29) に代入すると，

$$\begin{aligned}\Delta' &= \frac{\frac{d\psi}{dr} |_{r_s+\delta}}{\psi(r_s)} \\ &= \frac{A^+ - A^-}{\psi(r_s)}\end{aligned}\tag{2.30}$$

これを，漸近接続の際のパラメタとして用いる．

外部領域における漸近解とのマッチング

内部層における外部領域への漸近解 (2.23) と，外部領域における内部層への漸近解 (2.27) が求まったので，ここではいよいよそれらを滑らかに接続していく．

便利のため，再度書き下しておくと，

内部層での漸近解は，

$$\begin{aligned}\Psi &= 1 - \frac{\gamma^2}{3} \frac{1}{X} + \cdots + a^\pm X + \cdots \\ &\approx 1 + \cdots + a^\pm X + \cdots ,\end{aligned}\tag{2.31}$$

$$\Phi = i\gamma \left[\frac{1}{X} + \cdots + a^\pm + \cdots \right] .\tag{2.32}$$

外部領域での漸近解は，

$$\begin{aligned}\psi &= 1 + \left(\psi_1 + \frac{1}{r_S} \right) x \ln |x| + \cdots + A^\pm (x + \psi_1 x^2 + \cdots) \\ &\approx 1 + \cdots + A^\pm (x + \cdots) ,\end{aligned}\tag{2.33}$$

$$\phi = \frac{1}{x} + \cdots + A^\pm (1 + \cdots) .\tag{2.34}$$

であった．なお，内部解 (2.23) における右辺第 2 項，外部解 (2.27), (2.28) における右辺第 2 項 $\left(\psi_1 + \frac{1}{r_S} \right) x \ln |x|$ は，有理面 ($x = 0$) に近づく極限をとると 0 に近づくため，ここでは残さなかった．

(2.31), (2.33) 式より，内部解と外部解の主要項の次数が同じであり，パラメタの調節によってスムーズな接続が可能であることが分かる．

外部層での漸近解（外部解と呼ぶ）の座標系を，内部層のものさしに揃えるため， $x = \eta^{\frac{1}{3}} X$ を用いて引き伸ばすと，

$$\psi = 1 + \cdots + A^\pm (\eta^{\frac{1}{3}} X + \cdots) \tag{2.35}$$

となる．(2.23) と (2.35) を比較すると，

$$a^\pm = A^\pm \eta^{\frac{1}{3}} \tag{2.36}$$

という関係式を得る．内部層の接続データと，外部領域の接続データとの関係式である．

ここで，外部領域の接続データ Δ' を用いる．(2.30), (2.36) より，

$$\begin{aligned}\Delta' &= A^+ - A^- \\ &= \eta^{-\frac{1}{3}}(a^+ - a^-).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Φ は奇関数， Ψ は偶関数という仮定を用いると，内部層において $\Psi(-\infty) = \Psi(\infty)$ となる．これより $a^+ = -a^-$ が求まるので，(2.37) の関係とあわせて，

$$\begin{aligned}\Delta' &= \eta^{-\frac{1}{3}}(a^+ - a^-) \\ &= 2\eta^{-\frac{1}{3}}a^+\end{aligned}\tag{2.38}$$

という関係が得られる．

また， ϕ についても，外部解と同じ漸近形 (2.34) で理想領域に近づくことを要請するので，内部層の遠方解 (2.32) が $\Phi = \Phi_\infty \left(\frac{c}{X} + 1 \right)$ となるような振幅 c を選ぶとき，比較により $c = \frac{1}{A^+}$ を得る．(2.38) とあわせて，

$$c = \frac{2}{\Delta'}$$

という接続データが求まり，本研究では c を外部パラメタとして用いることにする．以上より，本研究において内部層方程式を固有値問題として数値的に解くための理想領域側の境界条件には，

$$\Psi = \Psi_\infty \left(1 + \frac{X}{c} \right)\tag{2.39}$$

$$\Phi = \Phi_\infty \Psi_\infty \left(\frac{c}{X} + 1 \right)\tag{2.40}$$

を用いる．

Φ_∞, Ψ_∞ は定数であり，両辺に Ψ_∞ を掛けているのは，数値計算上の調整のためである．

数値計算の上では c を適当に与えることにする，つまり，外部状況を一旦固定し内部層内状況のみでのテアリングモード変化を見ることができる解法ということになる．

2.3 シア流のある場合

本研究ではトカマク/円柱プラズマを想定しているため，もともと磁気シアが存在する．その設定に，さらにシア流 $v_\theta = r\Omega(r)$ を加えたときにテアリングモードが受ける影響を調べる．

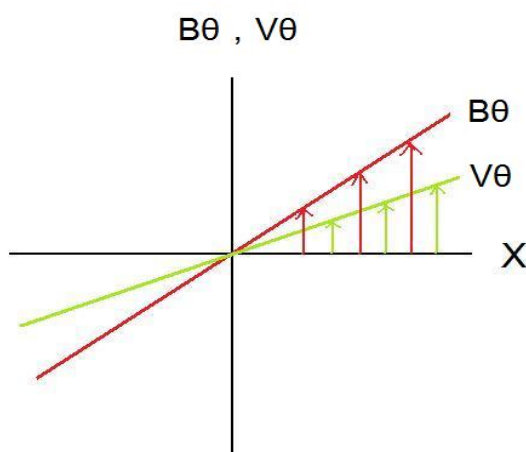


図 2.3: 内部層における平衡磁気シア B_θ と平衡シア流 v_θ の関係イメージ

図 2.3 は，内部層における磁気シアとシア流の関係概要図である．内部層は非常に薄い
ため，各シアは内部層領域において線形とみなせる．シア流は $v_\theta = X\Omega_S'$ という形で残
り，有理面 ($X = 0$) において 0 となる．このような設定は，十分に一般的である．なぜ
なら，円柱配位においては，プラズマ端を固定する境界条件の場合，有理面での流れが 0

となるような回転座標系に移ることができるためである．つまり，これはモードの実周波数をシフトさせることに対応する．よって，本研究では上述のシア流を用いて議論する．

2.3.1 内部層

内部層方程式

平衡状態で、ポロイダルシア流 v_θ の効果を組み込んだ場合の内部層方程式は、(2.11), (2.12) 式のとおりである．再度書き下しておくと、

$$(\gamma + iAX) \frac{d^2 \Phi}{dX^2} = -iX \frac{d^2 \Psi}{dX^2},$$

$$(\gamma + iAX) \Psi = -iX \Phi + \frac{d^2 \Psi}{dX^2}.$$

$|X| \rightarrow |\infty|$ のとき、シア流のない場合と違い、右辺第 1 項 (Alfvén 項) だけでなく、左辺第 2 項 (対流微分項) も同じように大きくなる．よって、シア流が存在する場合には、外部領域の支配方程式や解との接続性を考慮せねばならない。

外部領域への漸近解の導出

シア流のない場合と同様，次のようなベキ級数を準備する：

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 X^\alpha \left(1 + \frac{\Phi_1}{X} + \frac{\Phi_2}{X^2} + \cdots \right), \\ \Psi &= X^\beta \left(1 + \frac{\Psi_1}{X} + \frac{\Psi_2}{X^2} + \cdots \right). \end{aligned} \tag{2.41}$$

これらをシア流のある場合の内部層方程式 (2.11), (2.12) に代入すると，

$$\begin{aligned}
& iA\alpha(\alpha+1)\Phi_0X^{-\alpha-1} + \Phi_0[\gamma\alpha(\alpha+1) + iA\Phi_1(\alpha+1)(\alpha+2)]X^{-\alpha-2} \\
& + \Phi_0[\gamma\Phi_1(\alpha+1)(\alpha+2) + iA\Phi_2(\alpha+2)(\alpha+3)]X^{-\alpha-3} + \dots \\
& = -i\beta(\beta+1)X^{-\beta-1} - i(\beta+1)(\beta+2)\Psi_1X^{-\beta-2} \\
& - i(\beta+2)(\beta+3)\Psi_2X^{-\beta-3} + \dots, \tag{2.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& iA\Psi_0X^{-\beta+1} + \Psi_0(\gamma + iA\Psi_1)X^{-\beta} + (\gamma\Psi_1 + iA\Psi_0\Psi_2)X^{-\beta-1} + (\gamma\Psi_2 + iA\Psi_0\Psi_3)X^{-\beta-2} \\
& = -i\Phi_0X^{-\alpha+1} - i\Phi_0\Phi_1X^{-\alpha} - i\Phi_0\Phi_2X^{-\alpha-1} - i\Phi_0\Phi_3X^{-\alpha-2} + \dots \\
& + \beta(\beta+1)\Phi_0X^{-\beta-2} + (\beta+1)(\beta+2)\Psi_1X^{-\beta-3} \\
& + (\beta+2)(\beta+3)\Psi_2X^{-\beta-4} + \dots
\end{aligned}$$

となる．

前節で述べたように，今度は $|X| \rightarrow \infty$ で (2.12) 式において，左辺第 2 項と，右辺第 1 項が釣り合うようになると考えられる．(2.43) においてそのような釣り合いになるように次数を選ぶと， $\alpha = \beta$ となる．シア流のない場合の次数の釣り合いは $\beta = \alpha - 1$ であったので，シア流の効果が入ったことで漸近解の次数が 1 次ずれることが予想できる．

$\alpha = \beta$ を (2.42), (2.43) 式に代入し整理すると次のようになる：

$$\begin{aligned}
& iA\alpha(\alpha+1)\Phi_0X^{-\alpha-1} + \Phi_0[\gamma\alpha(\alpha+1) + iA\Phi_1(\alpha+1)(\alpha+2)]X^{-\alpha-2} \\
& + \Phi_0[\gamma\Phi_1(\alpha+1)(\alpha+2) + iA\Phi_2(\alpha+2)(\alpha+3)]X^{-\alpha-3} + \dots \\
& = -i\alpha(\alpha+1)X^{-\alpha-1} - i(\alpha+1)(\alpha+2)\Psi_1X^{-\alpha-2} - i(\alpha+2)(\alpha+3)\Psi_2X^{-\alpha-3} + \dots, \tag{2.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& iAX^{-\alpha+1} + (\gamma + iA\Psi_1)X^{-\alpha} + (\gamma\Psi_1 + iA\Psi_2)X^{-\alpha-1} + (\gamma\Psi_2 + iA\Psi_3)X^{-\alpha-2} \\
& = -i\Phi_0X^{-\alpha+1} - i\Phi_0\Phi_1X^{-\alpha} - i\Phi_0\Phi_2X^{-\alpha-1} - i\Phi_0\Phi_3X^{-\alpha-2} + \dots \\
& + \alpha(\alpha+1)\Phi_0X^{-\alpha-2} + (\alpha+1)(\alpha+2)\Psi_1X^{-\alpha-3} + (\alpha+2)(\alpha+3)\Psi_2X^{-\alpha-4} + \dots
\end{aligned} \tag{2.44}$$

(2.43) 式の最高次項 $((-\alpha-1)$ 次オーダー) の係数と, (2.44) 式の最高次項 $((-\alpha+1)$ 次オーダー) より, $\alpha = -1, 0$ と求まり, それぞれの α に対して同次の項を比較していくことで各定数 Φ_j, Ψ_j が求まる. それらを (2.41) に代入すると, $\alpha = -1$ に対し:

$$\begin{aligned}
\Psi &= X + \Psi_1 + \dots, \\
\Phi &= -A \left[X + \left(\Psi_1 + \frac{\gamma}{iA} \right) + \dots \right],
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$\alpha = 0$ に対し:

$$\begin{aligned}
\Psi &= 1 + \frac{\gamma A}{i(1-A^2)} \frac{1}{X} + \dots, \\
\Phi &= -A \left[1 + \frac{\gamma}{iA(1-A^2)} \frac{1}{X} + \dots \right]
\end{aligned} \tag{2.46}$$

と求まる. (2.46), (2.46) は, 外部解に接続されるベキ解であり, 内部層無限遠点ではこの 2 つのベキ解の重ね合わせが漸近解となる. ベキ解の重ね合わせは次のように書ける:

$$\Psi = 1 + \frac{\gamma}{iA(\frac{1}{A^2} - 1)} \frac{1}{X} + \dots + a^\pm \left[X + \left(\Psi_1 + \frac{\gamma}{iA} \right) + \dots \right], \tag{2.47}$$

$$\Phi = -A \left[1 + \frac{\gamma}{iA(1-A^2)} \frac{1}{X} + \dots + a^\pm (X + \Psi_1 + \dots) \right]. \tag{2.48}$$

これが、シア流のある場合の内部層における外部領域に接続する漸近解の形である。シア流のない場合と同様、 a^\pm は2つのベキ解の混合比を示す。

2.3.2 外部領域

シア流を残した Newcomb 方程式

内部解とのスムーズな接続のためには、外部領域にもシア流効果を考慮する必要がある。出発点は、内部層方程式と同様、シア流効果を残した抵抗性簡約化 MHD 方程式 (1.11) 式である。これらの式で $\gamma = \eta = 0$ としたものが、次のようなシア流効果を残した Newcomb 方程式となる。

$$-\frac{im}{r} (\phi_0' \nabla_\perp^2 - U_0') \phi - \left[i\epsilon(-n + \frac{m}{q}) \nabla_\perp^2 - \frac{imJ_0'}{r} \right] \psi = 0, \quad (2.49)$$

$$-\frac{im\phi_0'}{r} - i\epsilon(-n + \frac{m}{q})\phi = 0. \quad (2.50)$$

(2.49), (2.50) 式も、有理面において特異性を持つ方程式である。

特異点まわりの漸近解

シア流のない場合と同様、有理面 $r = r_S$ のまわりでの Taylor 展開を行う。Taylor 展開は、(2.26) 式に従い、シア流についても、

$$v_\theta = v_\theta' x + \frac{v_\theta''}{2!} x^2 + \dots \quad (2.51)$$

と展開する。また、シア流がない場合と同様、 Φ, Ψ についてベキ級数

$$\begin{aligned} \psi &= x^\alpha (1 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \dots) \\ \phi &= \phi_0 x^\beta (1 + \phi_1 x + \phi_2 x^2 + \dots) \end{aligned} \quad (2.52)$$

ϕ_n, ψ_n は定数であり、 $\psi_0 = 1$ と選んでいる。

結果として、シア流を含む Newcomb 方程式の漸近解は、

$$\psi = 1 + \left(\psi_1 + \frac{1}{r_S}\right)x \ln |x| + \cdots + A^\pm(x + \psi_1 x^2 + \cdots) \quad (2.53)$$

$$\phi = \phi_0 \left[1 + \left(\psi_1 + \frac{1}{r_S}\right)x \ln |x| + \cdots + A^\pm(x + \psi_1 x^2 + \cdots) \right] \quad (2.54)$$

となる。 ψ について、シア流なしの場合の外部解 (2.33) と同じであることが分かる。

外部領域における漸近解とのマッチング

シア流がある場合において、内部層、外部領域それぞれの相手領域への漸近解が求まった。シア流がない場合と同様、それらが滑らかに接続可能であることを確認し、接続していくことを試みる。

便利のため、再度書き下しておくと、

内部層での漸近解は

$$\Psi = 1 + \cdots + a^\pm X + \cdots \quad (2.55)$$

$$\Phi = -A[1 + \cdots + a^\pm X + \cdots] \quad (2.56)$$

外部領域での漸近解は

$$\psi = 1 + \cdots + A^\pm(x + \psi_1 x^2 + \cdots) \quad (2.57)$$

$$\phi = \phi_0 \left[1 + \cdots + A^\pm(x + \psi_1 x^2 + \cdots) \right] \quad (2.58)$$

であった。なお、内部解 (2.55), (2.56) における右辺第 2 項、外部解 (2.57), (2.58) における右辺第 2 項 $\left(\psi_1 + \frac{1}{r_S}\right)x \ln |x|$ は、有理面 ($x = 0$) に近づく極限をとると 0 に近づくため、

残さなかった．

(2.55) と (2.57) 式，かつ (2.56) と (2.58) 式より，内部解と外部解の主要項の次数が同じであり，パラメタの調節によってスムーズな接続が可能であることが分かる．

シア流がない場合と同様に，

$$\begin{aligned}\Delta' &= \eta^{-\frac{1}{3}}(a^+ - a^-) \\ &= 2\eta^{-\frac{1}{3}}a^+, \\ c &= \frac{1}{A^+}\end{aligned}$$

の關係を用いると，シア流のある場合の内部層方程式を固有値問題として数値的に解くための理想領域側の境界条件

$$\Psi = \Psi_\infty \left(1 + \frac{X}{c}\right) \quad (2.59)$$

$$\Phi = \Phi_\infty \Psi_\infty \left(1 + \frac{X}{c}\right) \quad (2.60)$$

を得る．(2.60) では，シア流がない場合の境界条件 (2.40) と比べて， Φ の次数が 1 次上がり， Ψ と同次になっている．

以上より，シア流のない場合の境界条件と，シア流のある場合の境界条件は全く異なる別問題であることが分かった．ここで，シア流がない場合に求まる固有値と，シア流がある場合で $A \rightarrow 0$ としていったときに求まる固有値の収束点は異なることが示唆される．このことは，シア流のある場合の境界条件を求める際の理想 Ohm 則での項の釣り合いが破れることに起因するが，これについては付録 C にて詳細に述べる．

シア流のない場合と同様，数値計算上では c を適当に与えて解く．なお，一般的にテアリングモードが不安定になる条件 $\Delta' = \frac{2}{c} > 1$ を満たす c を与えて計算する．

2.4 外部接続条件について

外部層シア流がある場合の計算において外部条件 c を固定して解くことは、 c が与えた値であるような外部状況のときの内部層内変化を観察していると言える。要するに、この解法は、内部層内のみに存在するシア流によるテアリングモードの変化を観察することができる解法である。どのようなシア流の場合においてもある c を与えたとき、その境界条件においてそれを満たすモードがあるのかどうかを見るという立場においては、外部固定で問題を解いていくことも意味のあることである。

また、内部層内のみでのシア流を考慮することは内部層の性格上重要である。一般的に外部領域においては、 $B \cdot \nabla \gg \gamma, \eta \nabla^2, \mathbf{v} \cdot \nabla$ 、つまり磁場のエネルギーに対してシア流の効果は十分小さいと考えられるが、内部層においては磁気シアの効果がいいため、シア流のエネルギーも十分に不安定性を増大させるエネルギー源となり得るためである。

第3章 テアリングモード成長率

2章で導出した，内部層方程式と漸近条件を用いてテアリングモードの成長率 γ を求めていく．

シア流のある場合とない場合とでは，方程式自体はシア流パラメタ A を 0 にするか残すかの違いであるが，外部領域接続のための漸近解が異なっていた．よって，シア流がある場合とない場合では，用いる境界条件が異なる別問題として，2 種類の数値計算コードを作成し，固有値問題として解いた．使用した数値計算法は差分法である．数値計算パラメタは，単位長さあたりグリッド数 20，計算領域 $X_{max} = 30$ とした．これは，数値計算として十分信頼できるパラメタであることも確認済みである．

これについては付録 A にて示す．

便利のため，表 3.1 にシア流がある場合，ない場合に解いた問題設定を示す．

表 3.1: シア流のある場合とない場合における固有値問題設定

シア流がない場合	シア流がある場合
内部層方程式	
$\gamma \frac{d^2 \Phi}{dX^2} = -iX \frac{d^2 \Psi}{dX^2}$ $\gamma \Psi = -iX \Phi + \frac{d^2 \Psi}{dX^2}$	$(\gamma + iAX) \frac{d^2 \Phi}{dX^2} = -iX \frac{d^2 \Psi}{dX^2}$ $(\gamma + iAX) \Psi = -iX \Phi + \frac{d^2 \Psi}{dX^2}$
境界条件 (右端)	
$\Psi = \Psi_{\infty} \left(1 + \frac{X}{c}\right)$ $\Phi = \Phi_{\infty} \Psi_{\infty} \left(\frac{c}{X} + 1\right)$	$\Psi = \Psi_{\infty} \left(1 + \frac{X}{c}\right)$ $\Phi = \Phi_{\infty} \Psi_{\infty} \left(1 + \frac{X}{c}\right)$

固有値として γ , 固有関数として Φ, Ψ が求まる .

なお , Φ は奇関数 , Ψ は偶関数となるパリティを仮定し , 数値計算では内部層を 0 とする座標 X において正の領域で解いた .

3.1 シア流のない場合

外部接続パラメタ c , すなわち有理面をはさんだ磁場勾配を変化させたときの各 c におけるモード成長率のプロットを図 3.1 に示す . (2.29) より , c と Δ' は逆数関係にあるので , c が小さいほど , 外部磁場勾配のジャンプが大きいということである . 図 3.1 より , 外部磁場勾配のジャンプが大きいほどテアリングモード成長率 $Re(\gamma)$ は大きいということが分かる . この結果は , [1] などの数値計算結果とも一致する .

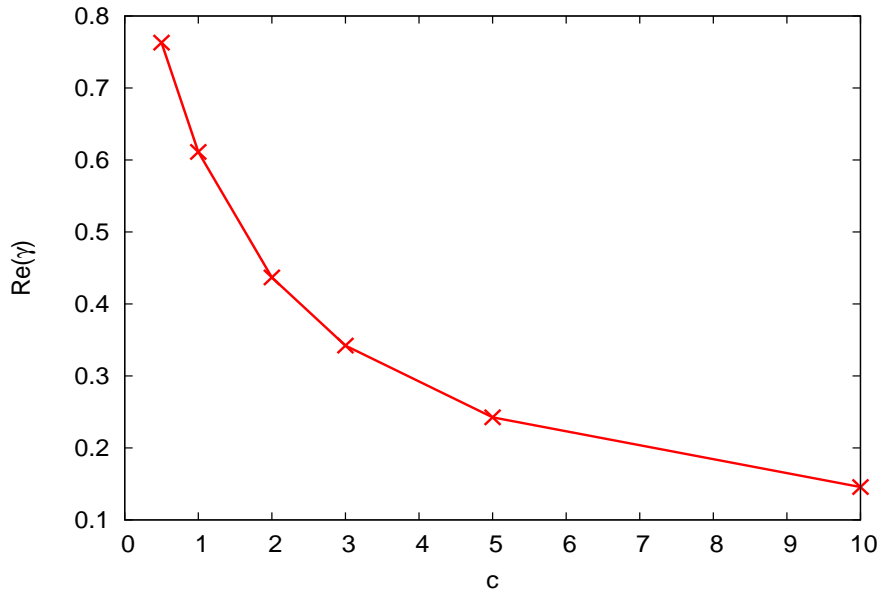


図 3.1: 外部磁場勾配ジャンプに対する成長率変化 (横軸 : $c = \frac{2}{\Delta'}$, 縦軸 : 成長率 $Re(\gamma)$)

3.2 シア流のある場合

内部層方程式を導出する際に, Taylor 展開の部分 (2.2), (2.3), (2.51) において平衡磁気シア (アルフベン速度) と平衡速度シア (シア流) は 1 次の項まで残している. 内部層の薄さを考慮すると, この近似で妥当である. よって, 平衡磁気シアと平衡速度シアは図 2.3 のように線形であり, どちらかのシアの大きさがどちらかのそれを超えるときは内部層全域において超えることになる. 本研究では, シア流パラメタ A で磁気シアと速度シアの大きさの比を表すようにしており, $A < 1$ のとき内部層全域において磁気シアに対し速度シアが小さい (*sub-Alfvénic*), $A > 1$ のとき内部層全域で速度シアが磁気シアを超える (*super-Alfvénic*) という意味合いになる.

3.2.1 Alfvén 速度よりも遅い (sub-Alfvénic) シア流の場合

ここでは, 平衡状態で $A < 1$ のシア流がある場合のモード成長率変化を追う. 図 3.2 は, 外部接続パラメタ $c = 1, 3, 5$ における, シア流パラメタ A に対するモード成長率 $Re(\gamma)$ の変化を示す.

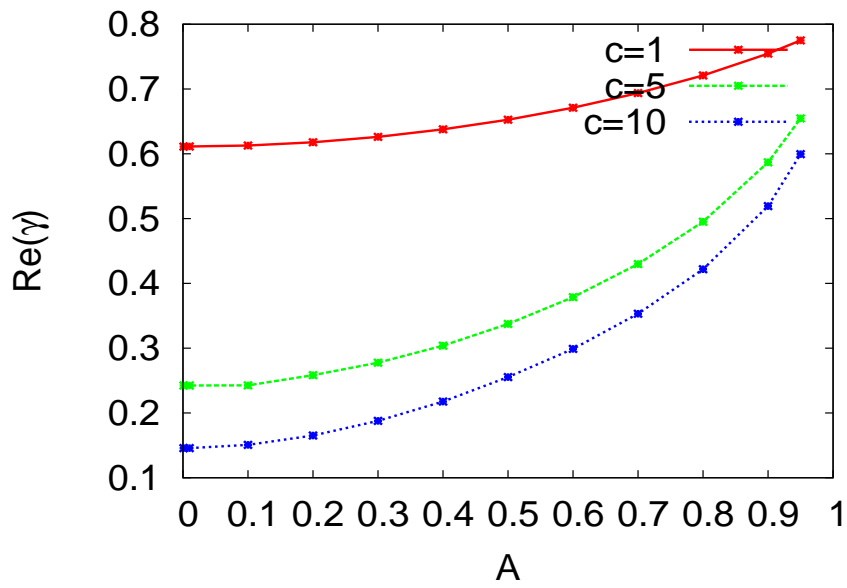


図 3.2: シア流の大きさに対する成長率変化

シア流を大きくしていくと，モード成長率は増加していく，つまり，シア流はテアリ
ングモードに対し不安定化効果を持つことが示された．また， Δ' が小さいとき，その効
果が大きい．これは，シア流効果を残した内部層方程式を解析的に解いた [2][4][11] など
の結果と一致する．

また， A に対する成長率の増加率 $\frac{d\gamma}{dA}$ を図 3.3 に示す．

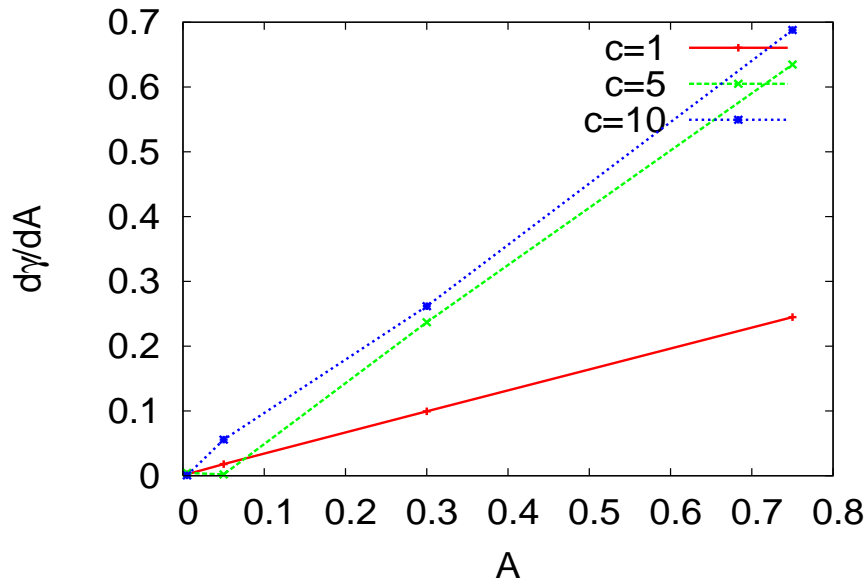


図 3.3: A に対する成長率の増加率の変化

図 3.3 を見る限り， A に対する成長率増加率はおよそ $\frac{d\gamma}{dA} \propto A$ であることが分かる．

3.2.2 Alfvén 速度を超える (super-Alfvénic) シア流の場合

ここでは，平衡状態で $A > 1$ のシア流がある場合のモード成長率変化を考える．現実的問題として，トカマクなどの磁場閉じ込めにおいては，強磁場で閉じ込められるため，ポロイダル Alfvén 速度を十分に超えるような状況は起こりえないのかもしれないが，物理的現象としてどのような結果になるのかに興味を持つことにする．

図 3.4 は，外部パラメタ $c = 1, 3, 5$ における，おもに $A > 1$ に対するモード成長率を示す．

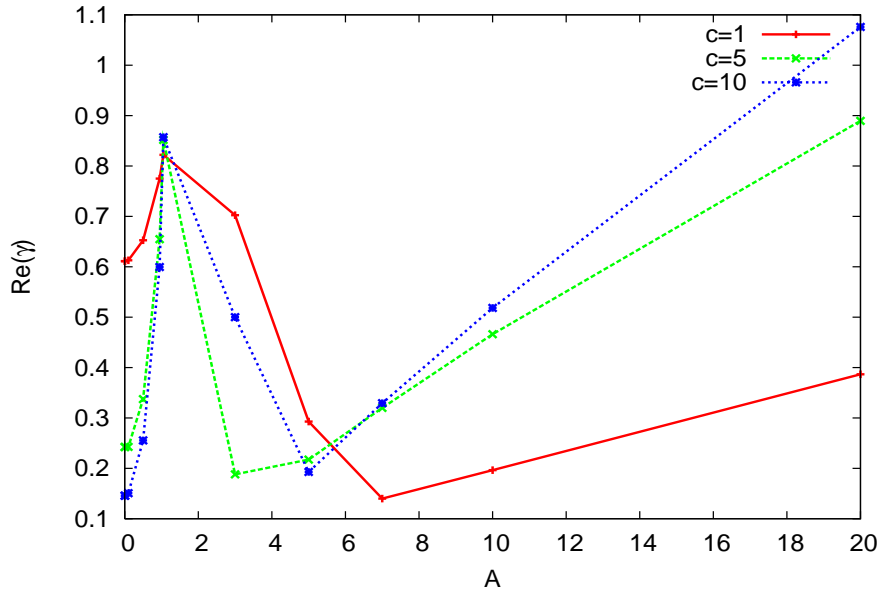


図 3.4: シア流の大きさに対する成長率変化

sub-Alfvénic なシア流を加えていった 3.2.1 節においては，モード成長率はそれに伴い増加していくことが分かったが，super-Alfvénic シア流を加えていくと， $A \geq 1$ から，一旦増加していった成長率が再び減少を始めることが分かる．そしてさらに A を大きくしていくと，一旦減少していた成長率が再び線形に増加を始める．

また，super-Alfvénic シア流を入れた計算において得られた結果より，不安定成長率を持つ，つまり $Re(\gamma) > 0$ となる不安定固有値を持つモードが複数出現しているように見受けられる．sub-Alfvénic シア流計算においては，不安定モードは必ず 1 つしか出なかった．図 3.5 は， $c = 1$ における，最大不安定固有値とその他複数出現する不安定固有値を示す．ただし，数値計算収束性（付録 A）チェックの結果から，最大不安定モード以下の不安定モードにおいては，グリッド数依存性が見受けられるため，これらのモードについてはもう少し確認が必要である．

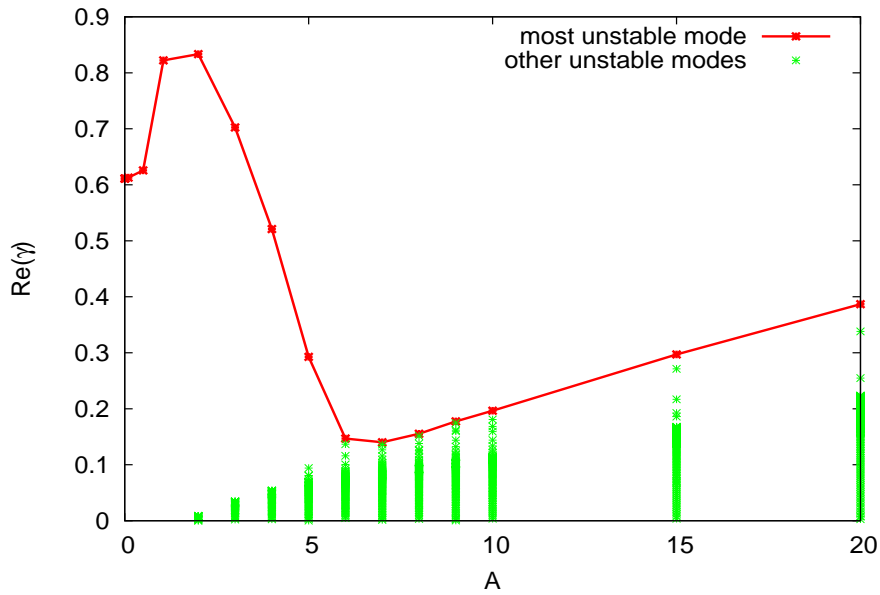


図 3.5: シア流の大きさに対する成長率変化 (横軸: A , 縦軸: 成長率 $\text{Re}(\gamma)$), *は複数の不安定固有値

図 3.5 において, 次の 2 つの理由から, $A > 1$ で出る複数の不安定モードはテアリングモードではなく, 内部層内シア流をエネルギー源とした別の不安定モードの萌芽ではないかと示唆される. というのは, 緑 (複数の不安定固有値) の最大固有値を眺めていくと, 線形に増加しており, かつ $A = 7$ 近傍で再び線形に増加を始める最大成長率 (赤線) にほぼ一直線でつながるように見えるためである. これについては, 第 4 章のモード解析において, モード構造やモード同士の関係を詳しく見ていくことにする.

また, 図 3.6 はシア流の大きさに対する実周波数を示す. シア流の増加により, 実周波数は 1 オーダー変化している. これは, 入れたシア流の大きさにほぼ比例している.

A が 10 を超えるようなシア流での計算というのはつまり，磁気シアに対し，大きさが 1 オーダー変わってしまうほどのシア流を考えていることになる．第 1 章 1.6 節において，抵抗性 MHD 方程式から抵抗性簡約化 MHD 方程式 (1.8, 1.9) を導くときに仮定したオーダーリングが壊れてしまい，そもそも式がマッチしていないという可能性もあり得るため，まだ検討が必要である．ただし，*super-Alfvénic* 領域ではオーダーに対する問題はないので，この領域で複数の不安定固有値が出る結果を得ることは事実として捉える．

3.3 シア流によるテアリングモード成長率変化のまとめ

テアリングモードに対するシア流の効果は，以下の表 3.2 のようにまとめられる．

表 3.2: シア流のある場合とない場合における固有値問題設定	
シア流の大きさ	不安定モード固有値変化
sub-Alfvénic ($A < 1$)	成長率はシア流の増加に伴い増加． つまり，モードは不安定化． 不安定固有値を持つモードは 1 つのみ．
super-Alfvénic ($A > 1$)	不安定固有値を持つモードが複数出現． 不安定モード数は，シア流の大きさに比例傾向． $A < 7$ 程度までで最大不安定成長率を持つモード（テアリングモード）の成長率は急激に減少． つまり，モードは安定化． $A > 7$ で再び，最大成長率を持つモードが成長を始めるように見えるが， これはテアリングモードの再不安定化ではなく，複数の不安定モードを出す， 流れ起因の別の不安定モードの成長の可能性． テアリングモード自体は， $A > 1$ での成長率減少を続け，安定化してきていると考えられる．

内部層内のシア流により，テアリングモードは少なからず影響を受けることが分かった．第 4 章にて，このような不安定変化のメカニズムを考察していくことにする．

第4章 不安定化メカニズム解析

第3章にて、プラズマ中にシア流があるとき、テアリングモードは影響を受けることが分かった。本章においては、sub-Alfvénic シア流でのモード不安定化、あるいは super-Alfvénic シア流での最大不安定モード安定化のメカニズムや、不安定化したときのモードの変化を様々な視点から解析していく。

4.1 モード構造 (固有関数)

4.1.1 シア流のない場合

内部層方程式 (2.13), (2.14) を固有値問題として解いた結果、固有関数 Φ , Ψ が得られる。ここで、 Φ は摂動静電ポテンシャル、 Ψ は摂動磁気ポテンシャルであった。

まず、シア流がない場合で接続条件 $c = 1$ としたときの数値計算コードによって得られた固有関数 Φ , Ψ を図 4.1, 4.2 に示す。

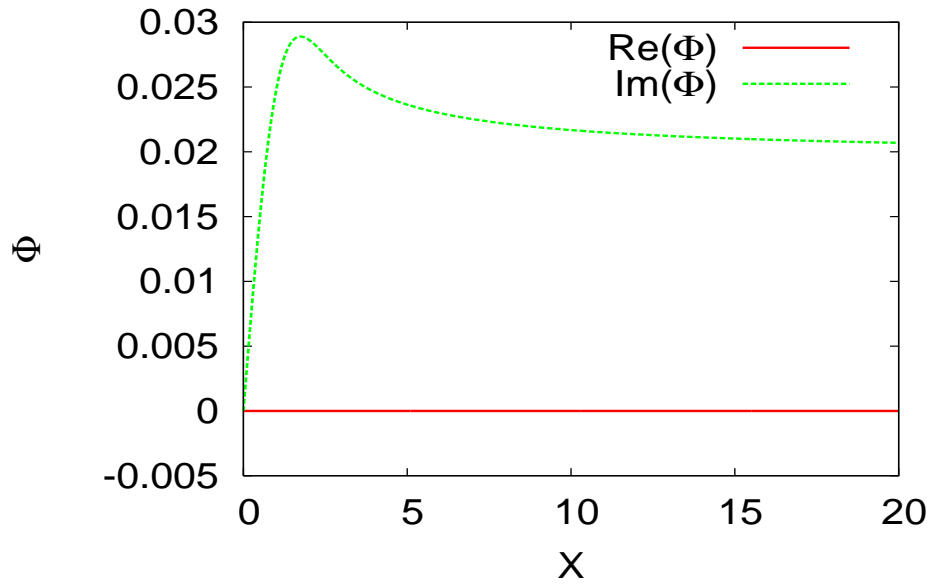


図 4.1: シア流がない場合の Φ のモード構造 ($c=1$) (横軸：内部層径方向座標 X , 縦軸：静電ポテンシャル関数 Φ)

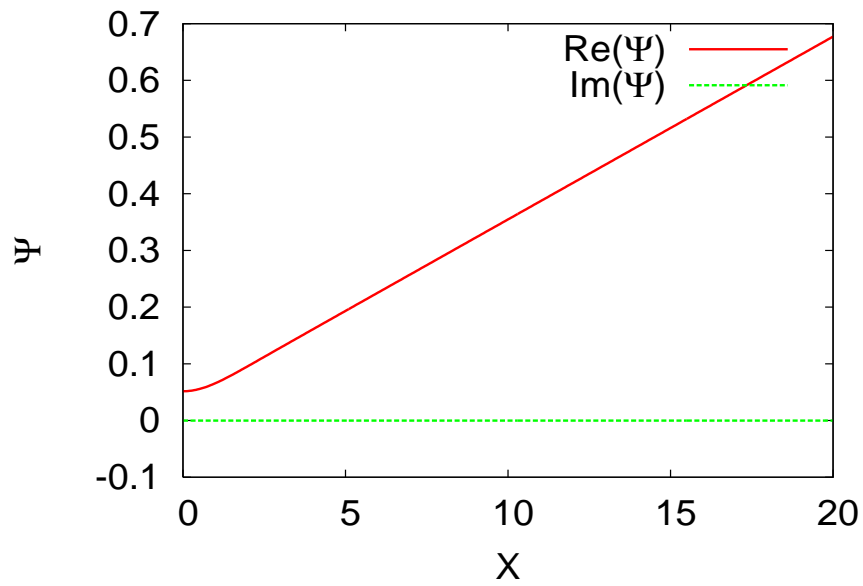


図 4.2: シア流がない場合の Ψ のモード構造 ($c=1$) (横軸：内部層径方向座標 X , 縦軸：磁気ポテンシャル関数 Ψ)

以降すべての計算において計算領域右端 ($N_{max} = 30$) で $\Psi = 1$ となるような規格化を施している．この規格化の利点は，次章にて登場する．

シア流がない場合の内部層方程式を見ると分かるように， Φ と Ψ の位相は $\frac{\pi}{2}$ ずれているので，図 4.1, 4.2 における Φ と Ψ の位相関係は正しい．

先述のとおり，テアリングモードでは，有理面をはさんで磁場勾配の大きなジャンプがある．急にジャンプが起こるためには，有理面近傍にて鋭いトロイダル方向の電流が発生しているはずであり，有理面近傍に電流シートができるのもテアリングモードの特性である．発生する摂動電流 J は， $J = \nabla_{\perp}^2 \Psi$ であり，内部層では径方向の高次微分が支配的であるため， $J = \frac{d^2 \Psi}{dX^2}$ により J を評価する．図 4.3 は，固有関数 Ψ より得られた J である．有理面 ($X = 0$) 近傍に電流が局在しているのが分かる．

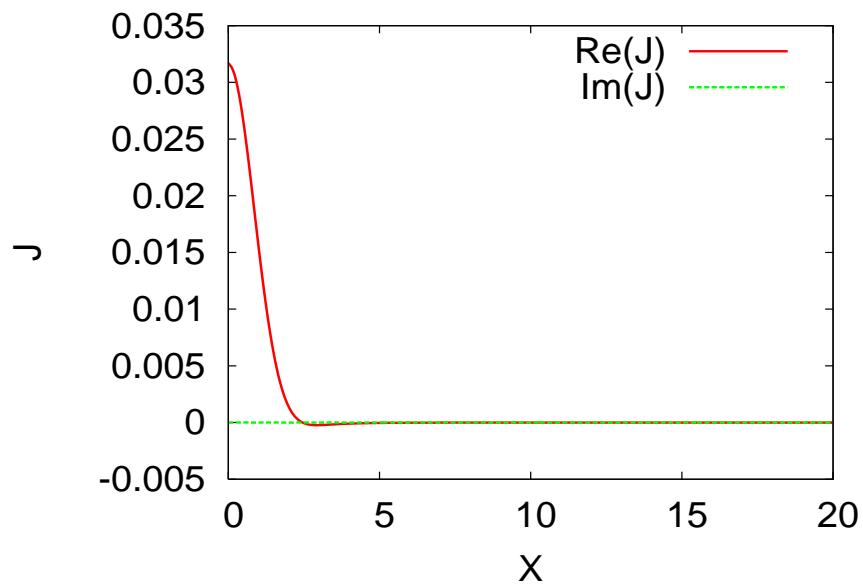


図 4.3: 内部層に発生する電流分布 ($c=1$)

続いて，電流と同様に，発生する渦度 U も $U = \nabla_{\perp}^2 \Phi$ の関係より，固有関数 Φ を用いて調べることができ，図 4.4 はその結果を示す．

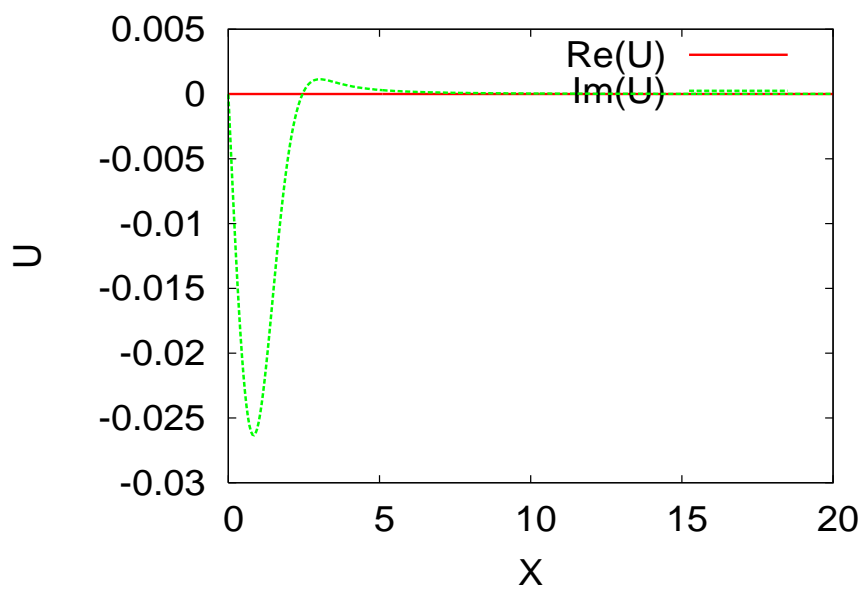


図 4.4: 内部層に発生する渦度分布 ($c=1$)

渦度に関しても，有理面ごく近傍に集中している構造が見えている．

つぎに，接続条件 c の値を変えたときの各固有関数のモード構造について載せる．

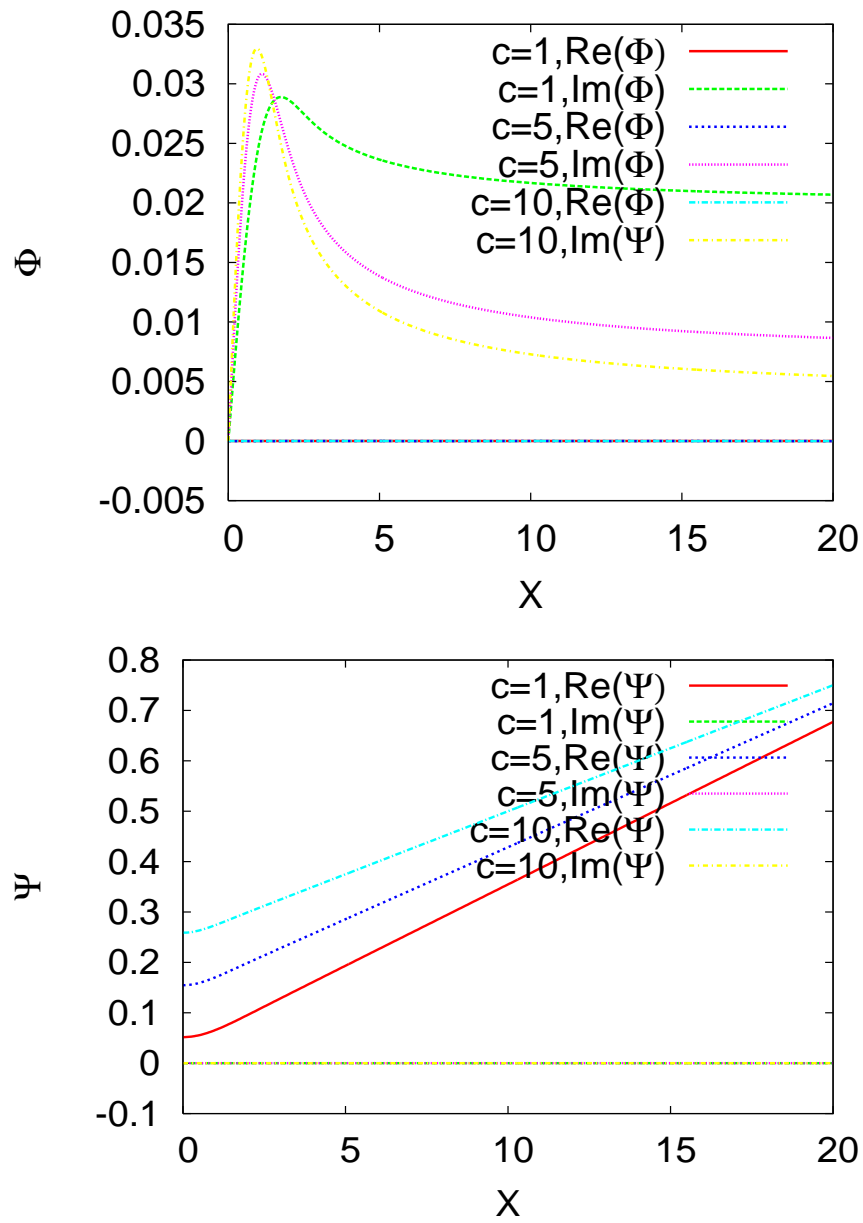


図 4.5: 各接続パラメタ c による固有関数モード構造の違い．上図は Φ ，下図は Ψ ．

Ψ は計算領域右端 (ここでは $X = 30$) で 1 となるよう規格化してある．

続いて，電流 J と渦度 U について載せる．

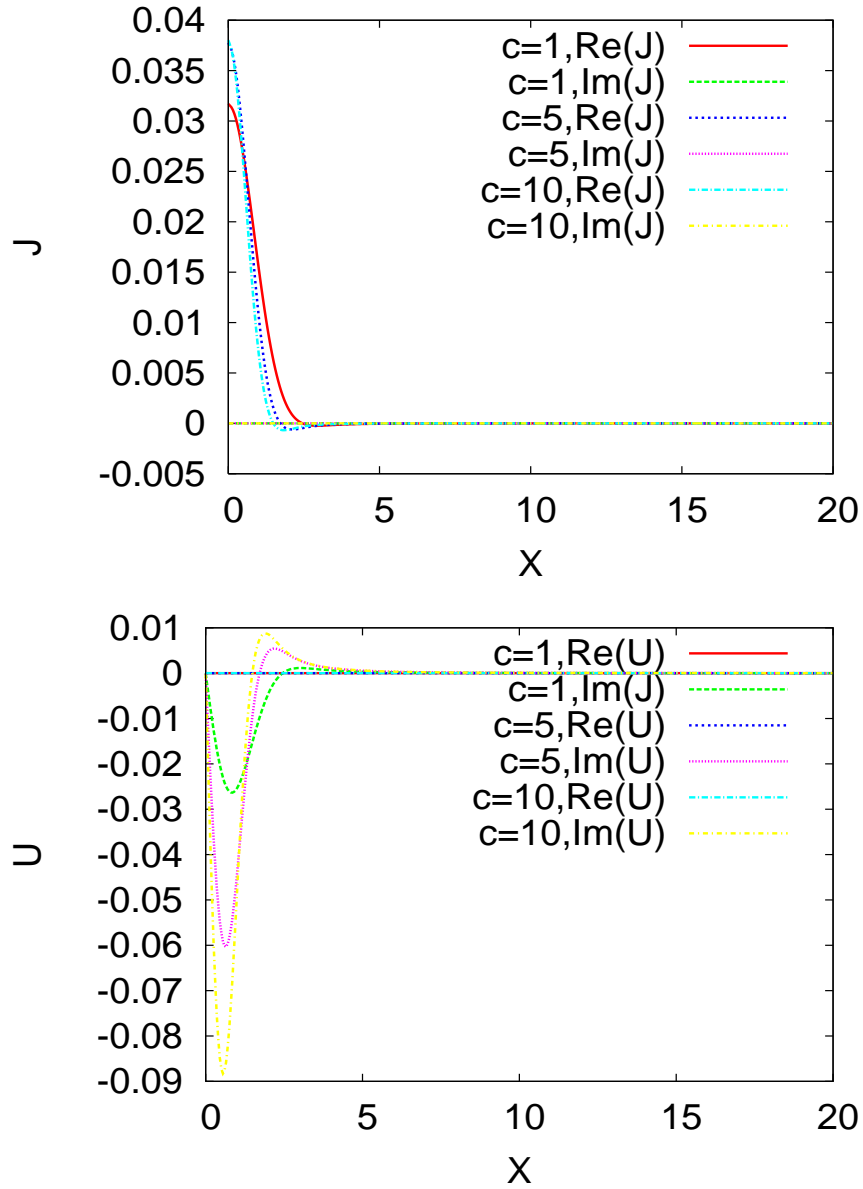


図 4.6: 各接続パラメタ c による電流，渦度のでき方の違い．上図は電流，下図は渦度．

内部層内に流れる総電流 J_{total} は，次式で評価できる：

$$J_{total} = \int_{-\infty}^{\infty} J dX = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \Psi}{dX^2} dX = \Psi_0 \frac{\frac{d\Psi}{dX} \Big|_{-\infty}^{\infty}}{\Psi_0} = \Psi_0 \Delta'. \quad (4.1)$$

Δ' の定義 (2.29) と $J = \frac{d^2 \Psi}{dX^2}$ を利用し， Ψ_0 は constant- Ψ 近似における Ψ 値を示すので，

本研究では 1 となる．

自明であるが，(4.1) 式より， Δ' が大きくなると，内部層全体に流れる総電流量も多くな

る．図 3.1 を思い出すと， Δ' の大きい，つまり本研究においては c が小さいときに成長率が大きいのであった．ここでは，各 c での計算において，右端 $\Psi = 1$ としているので，総電流を同じにして比較することはできないが，関数形を見る目的でそれぞれの c における電流 J の比較をする．なお，図 4.6 より，渦度 U の実部はシア流なしの計算においては 0 である．

図 4.6 より，外部磁場勾配のとびが小さいときほど，生じる電流の形としては内側にピーキングしていることが分かる．この図から得られる結果としては，電流がピーキングしている場合よりも，内部層広範囲に広がっている場合のほうが，テアリングモード成長率は大きいということである．

4.1.2 Sub-Alfvénic シア流のある場合

シア流効果を残した内部層方程式と漸近解（境界条件）による数値計算の解析に入る．シア流のない場合と同様に，固有関数 Φ, Ψ が求まり，各 A に対する固有関数の形状は図 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 のようになる．シア流のある場合については，特記のない限り $c = 1$ の場合の計算を行うものとする．

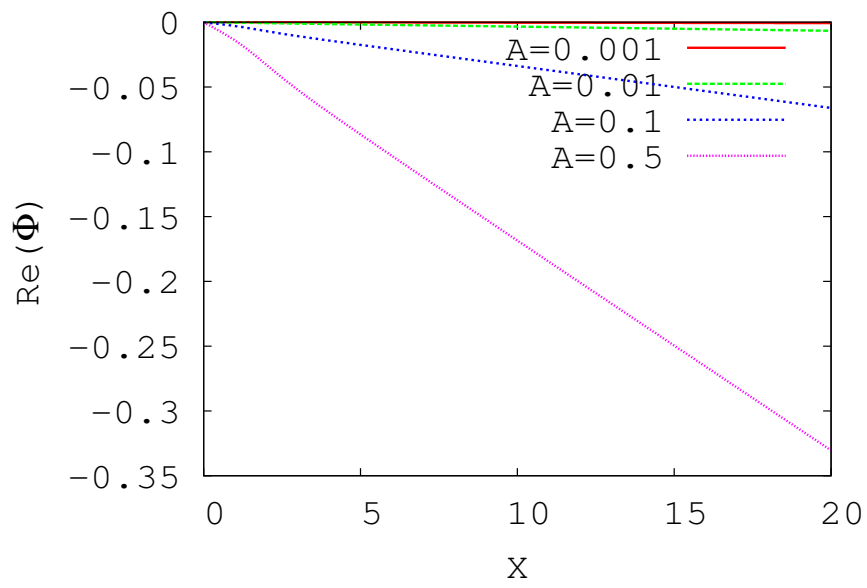


図 4.7: 各シア流の大きさにおける Φ のモード構造 (実部)

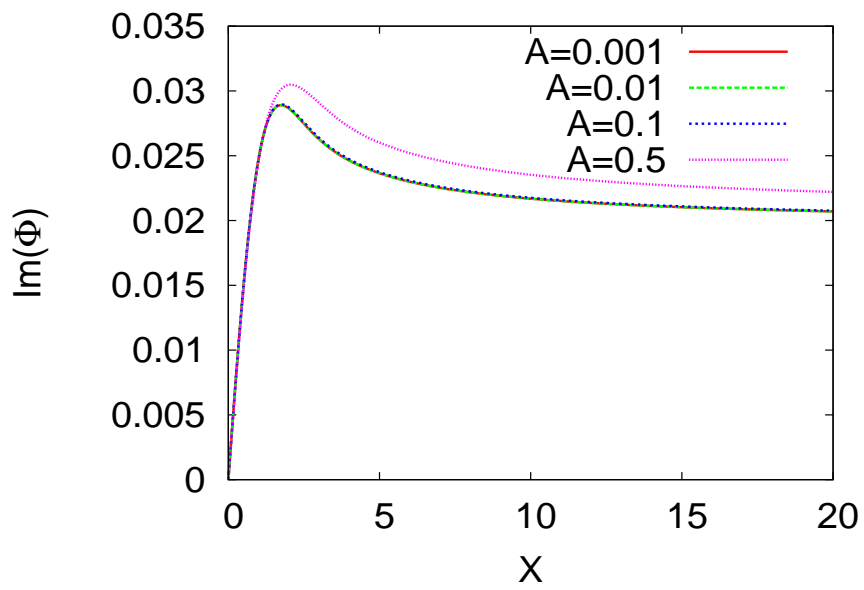


図 4.8: 各シア流の大きさにおける Φ のモード構造 (虚部)

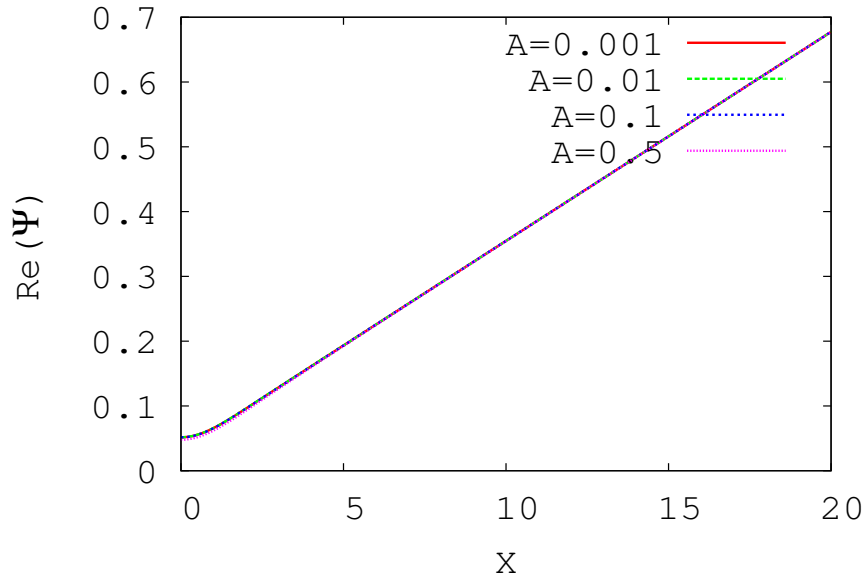


図 4.9: 各シア流の大きさにおける Ψ のモード構造 (実部)

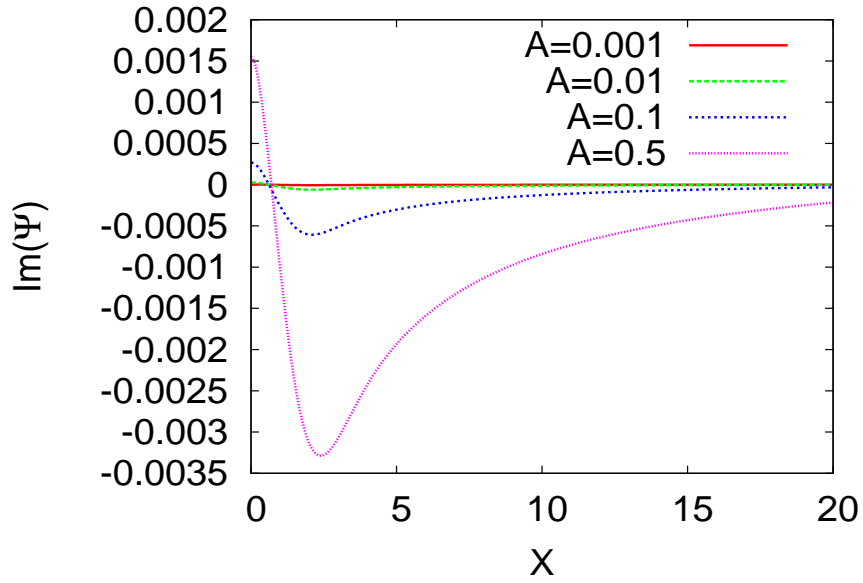


図 4.10: 各シア流の大きさにおける Ψ のモード構造 (虚部)

ここでも，計算領域右端 Ψ は 1 と固定してある．また， $c = 1$ も固定しているので，(4.1)

式において総電流 J_{total} を fix した議論ができるということである．

シア流のない場合と同様に， Φ , Ψ より得られる摂動電流 J と渦度 U についても求めて

いくと，次の図のようになる．

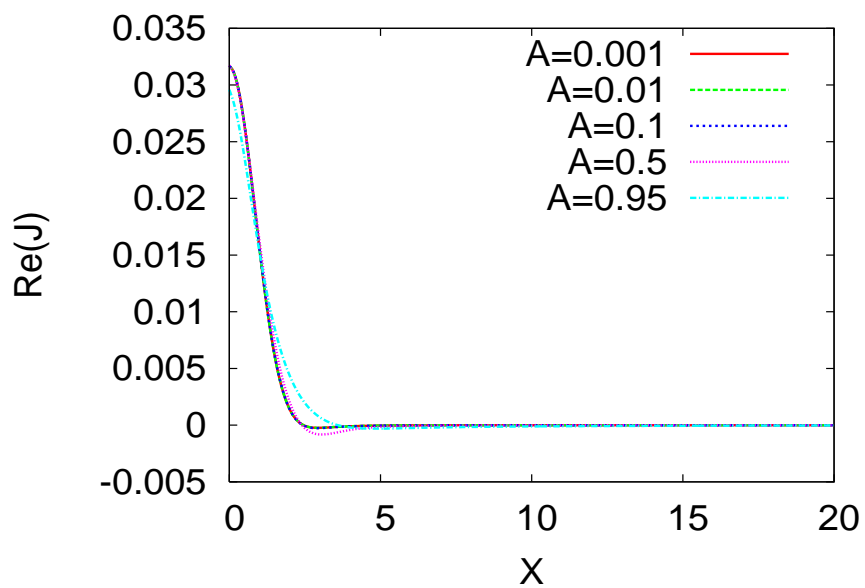


図 4.11: 内部層に発生する電流分布 (実部)

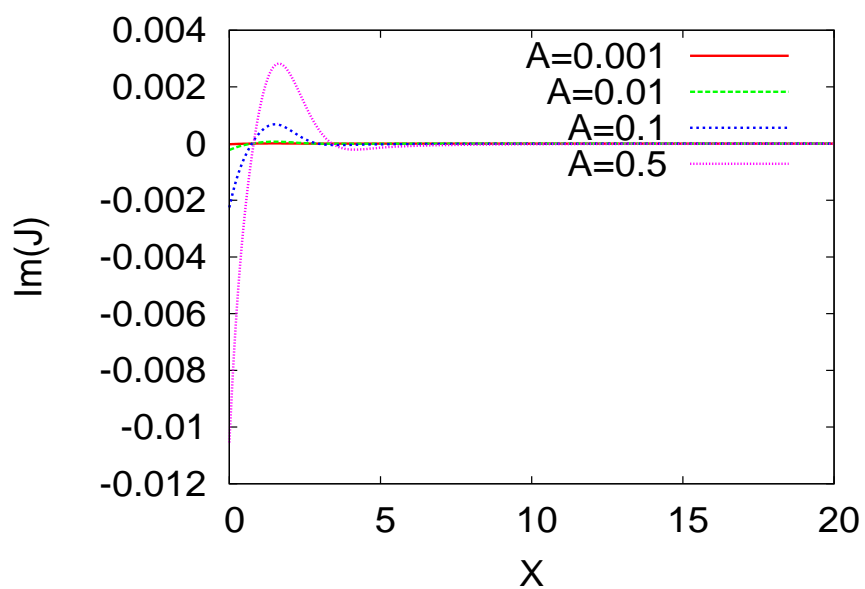


図 4.12: 内部層に発生する電流分布 (虚部)

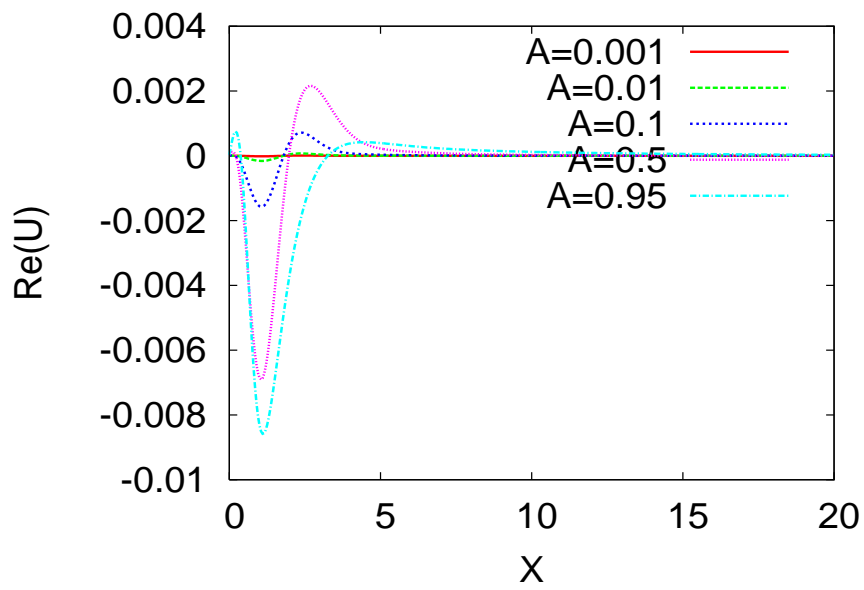


図 4.13: 内部層に発生する渦度分布 (実部)

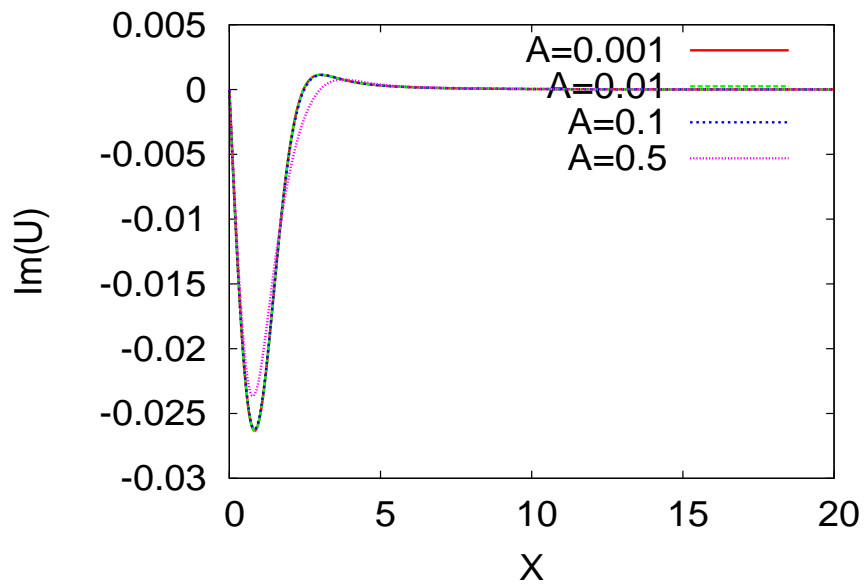


図 4.14: 内部層に発生する電流分布 (虚部)

A が 1 に近づくと、電流シート (J) は広域化しているのが分かる。このときの成長率は、増加していくのであった。以上より、sub-Alfvénic シア流増加によって、電流シートは広域化し、そのとき成長率は増加するということが分かった。

4.1.3 Super-Alfvénic シア流のある場合

平衡状態で $A > 1$ のシア流がある場合のモード構造の解析に入る．各 A に対する固有関数 Φ , Ψ の構造は図 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 のようになる．

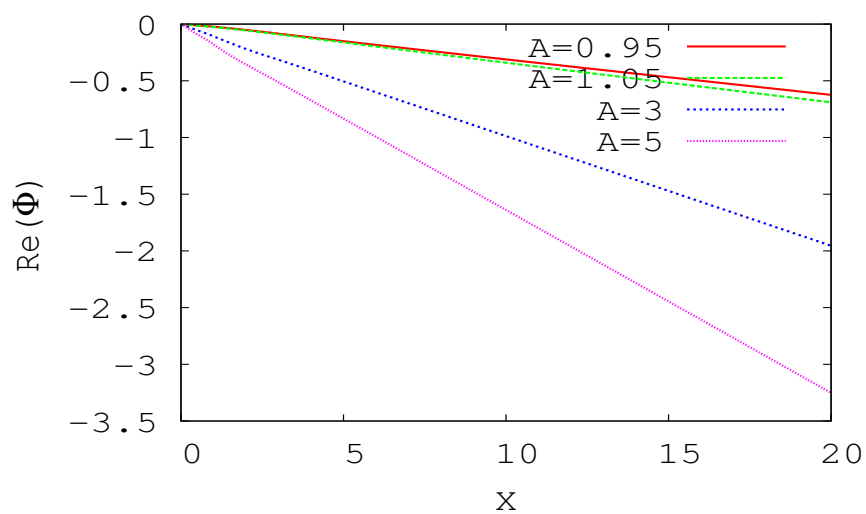


図 4.15: 各シア流の大きさにおける Φ のモード構造 (実部)

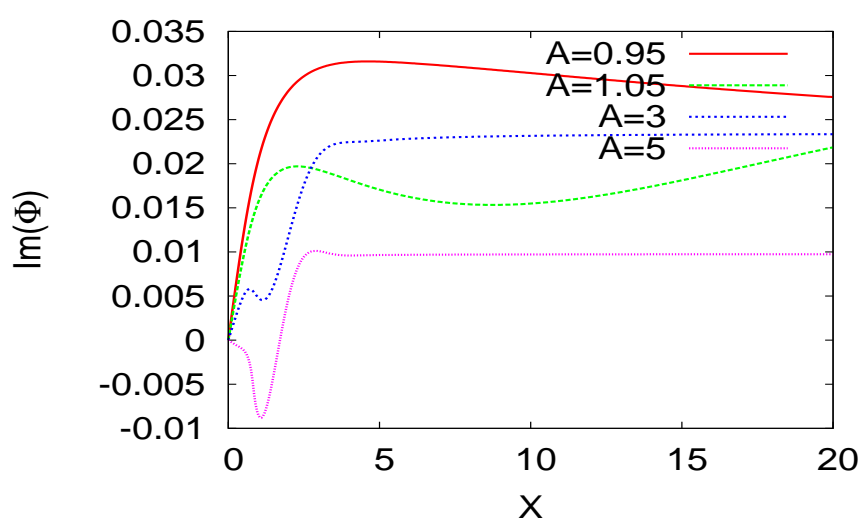


図 4.16: 各シア流の大きさにおける Φ のモード構造 (虚部)

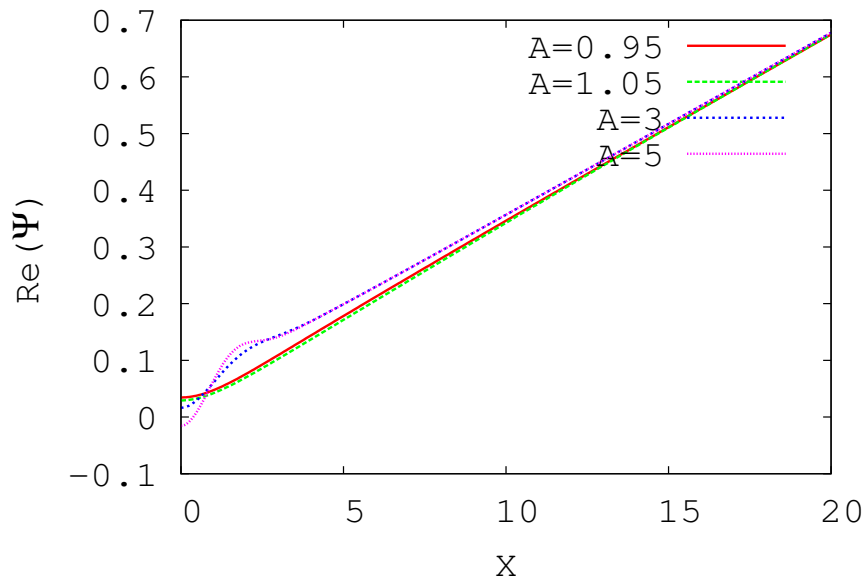


図 4.17: 各シア流の大きさにおける Ψ のモード構造 (実部)

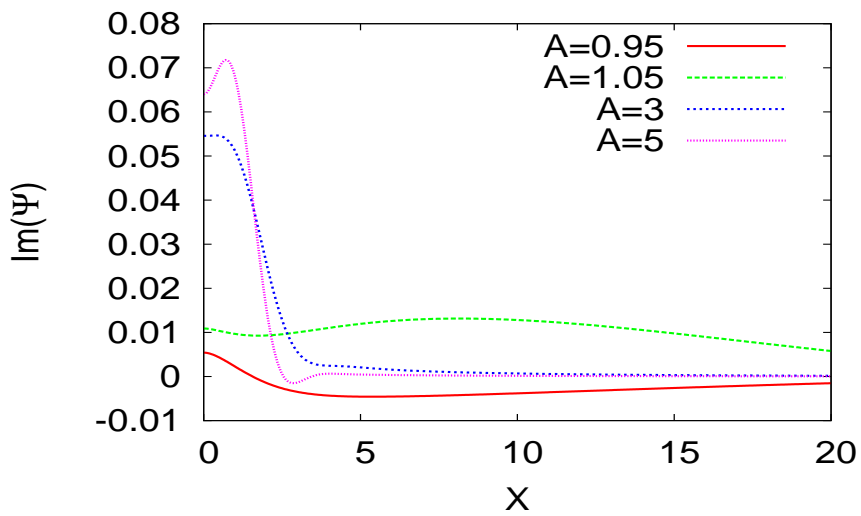


図 4.18: 各シア流の大きさにおける Ψ のモード構造 (虚部)

ここでも，計算領域右端 Ψ は 1 と固定してある．

今までと同様に， Φ , Ψ より得られる摂動電流 J と渦度 U についても求めていくと，次の図 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 のようになる．数値計算に直に現れる固有関数 Φ , Ψ はなめらかな関数であるが，そこから計算される電流 J や渦度 U は，スパイク状の構造を持つ．

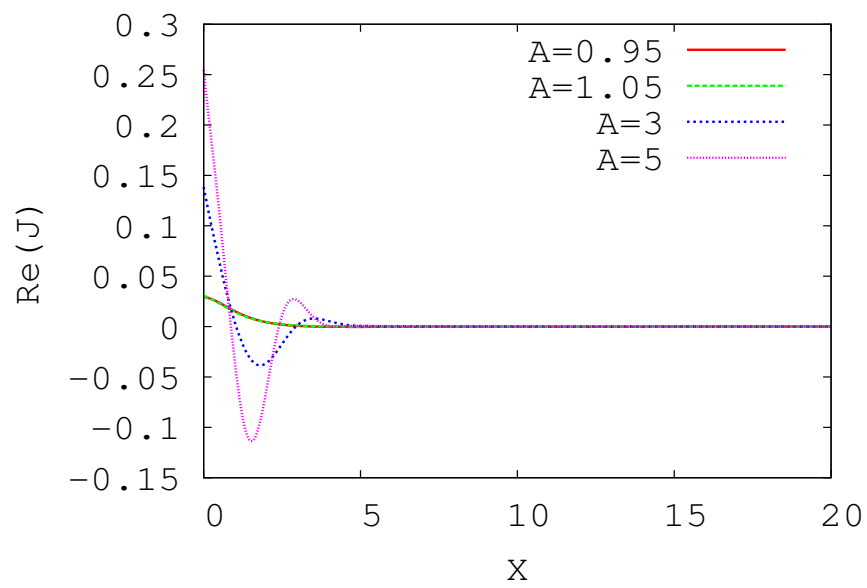


図 4.19: 内部層に発生する電流分布 (実部)

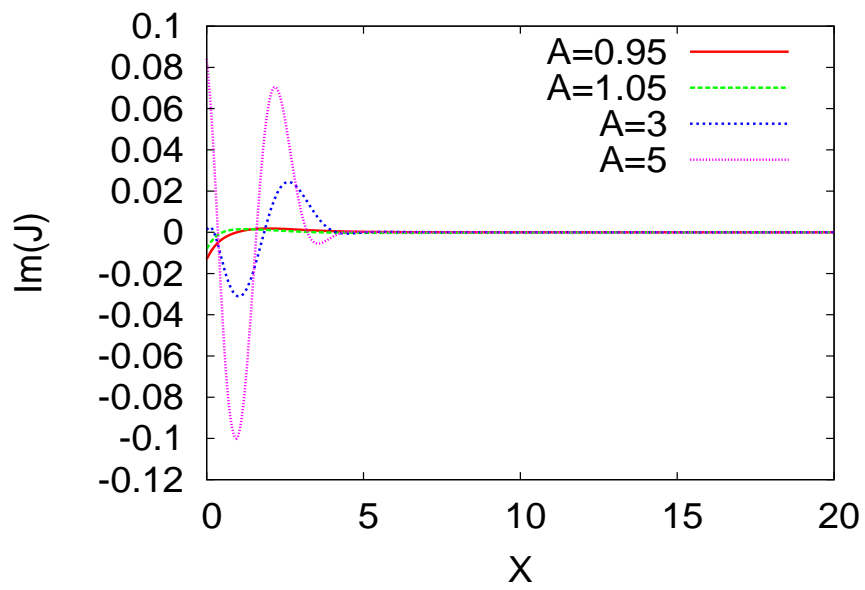


図 4.20: 内部層に発生する電流分布 (虚部)

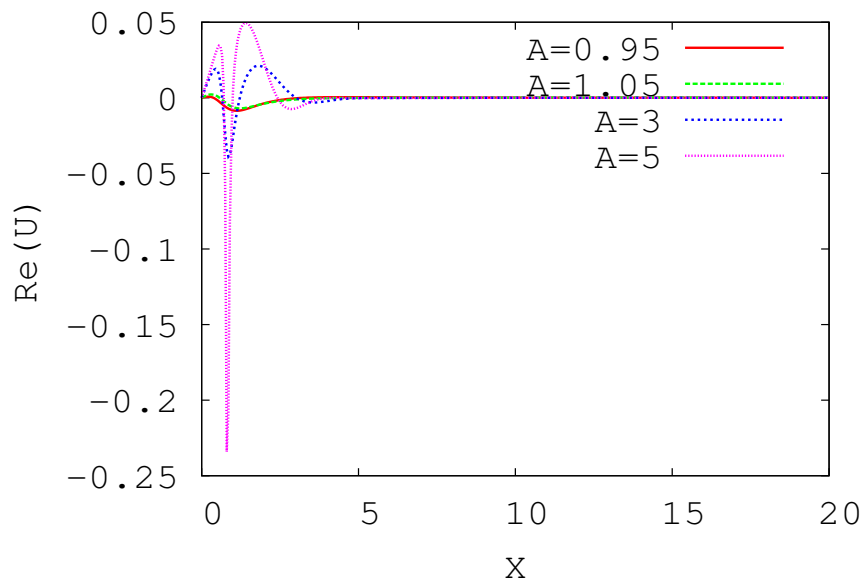


図 4.21: 内部層に発生する渦度分布 (実部)

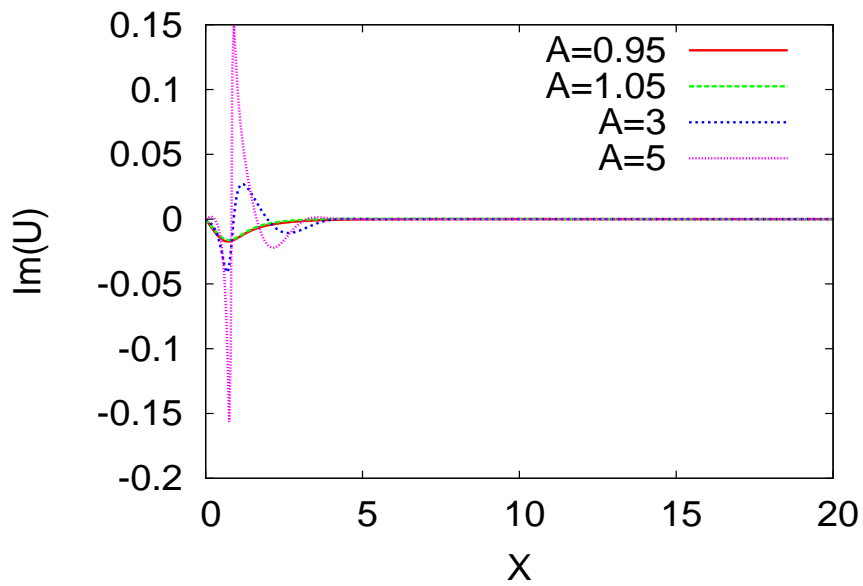


図 4.22: 内部層に発生する渦度分布 (虚部)

図 4.19, 4.20 より, $A=3$ を超えるようなシア流により, 発生する電流 J の形相が急激に変化するのが分かる. 有理面近傍にて強い電流が流れている横で, 逆向きの電流シートが出来上がっているような構造のイメージとなる. このような逆向きの電流シートができる

ためには、有理面部にできている電流シートとは逆向きの摂動磁場シアがそこに存在していなければならないことになる。また、同様トロイダル方向渦度 U も、 $A = 1$ を境にそのモード構造を劇的に変化させる。 $A > 1$ で、有理面近傍に、デルタ関数のような鋭くピーキングした渦度が発生している。

ここで重要なのは、 A が 1 より大きいシア流を与えるか、小さいシア流を与えるかによって発生する渦や磁場の分布に大きな変化が出ているということである。また、 A が 1 を超えるか超えないかにより、モード成長率も大きく変化したことを踏まえると、シア流によるモード不安定化メカニズムは、シア流の大きさ ($A > 1$ or $A < 1$) により全く異なると言うことができる。

複数の不安定モード

3.2.2 節にて、 A が 1 を超えるようなシア流を入れた計算においては不安定固有値を持つモードが複数個であるように見受けられることを述べた。複数出た不安定固有モード同士が 1 次独立でなければ、それぞれのモード間でのエネルギーのやりとりが起こり得て、結果成長率変化の原因のひとつとなっている可能性がある。初期値問題として方程式を解いたならば、各モード間のエネルギーのやりとりを捉えることができるが、固有値問題では見ることができない。本節では、①それぞれの不安定モードのモード構造と、②それらの直交性を計算することで、それらのモードの関係性を推量する。

① モード構造比較

各 A における最大不安定固有値を持つモードの電流、渦構造と、2, 3 番目に大きな不安定固有値を持つモードの電流、渦構造を比較する。

図は、それぞれ $A = 2, 5, 7$ の場合において、最大不安定固有値、2 番目に大きい不安定

固有値，3番目に大きい不安定固有値のモードの電流，渦構造を表したものである．

♠ $A = 2$

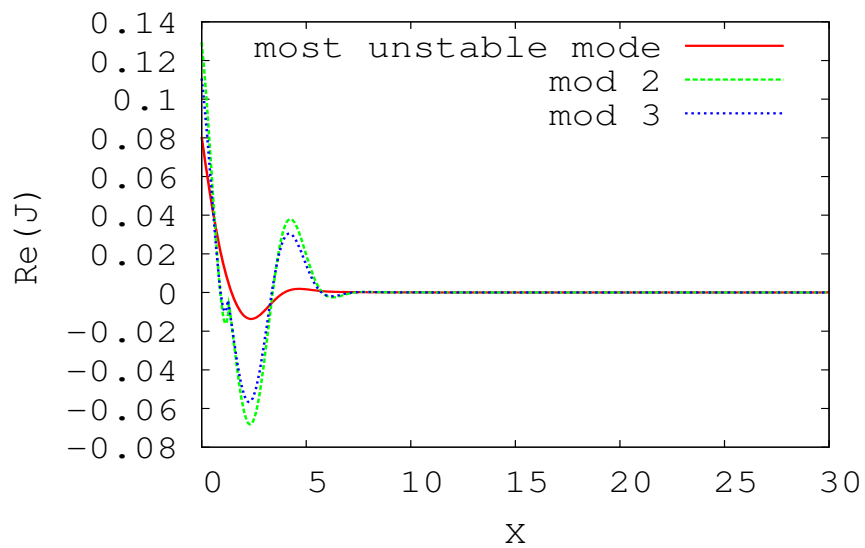


図 4.23: $A=2$ ，最大側 3 つの不安定固有モードにおける電流分布

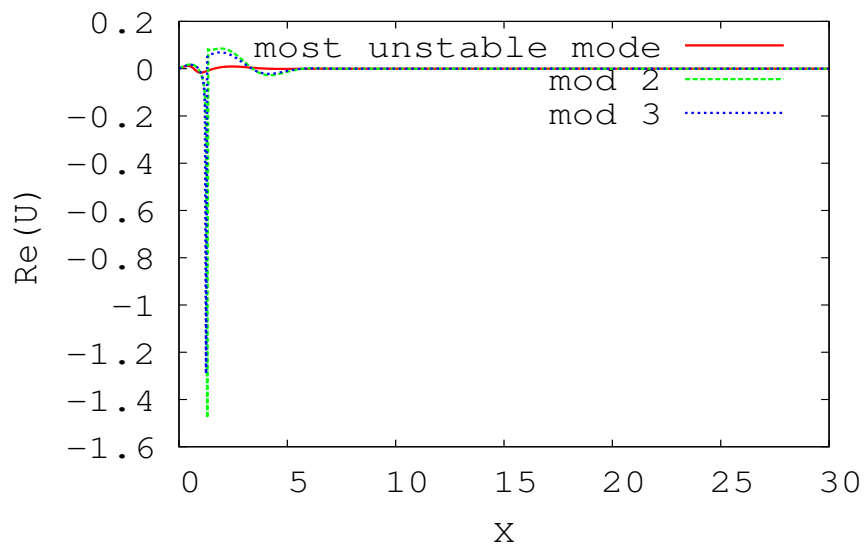


図 4.24: $A=2$ ，最大側 3 つの不安定固有モードにおける渦度

♠ $A = 5$

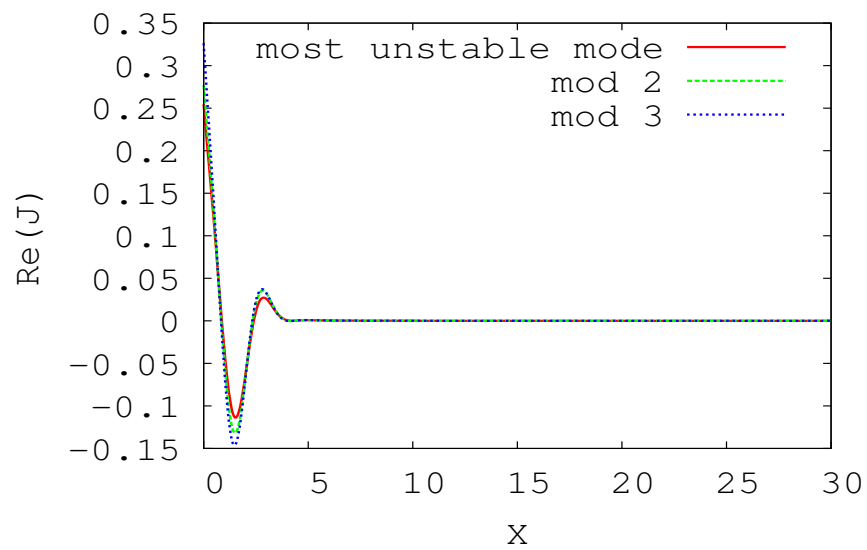


図 4.25: $A=5$, 最大側 3 つの不安定固有モードにおける電流分布

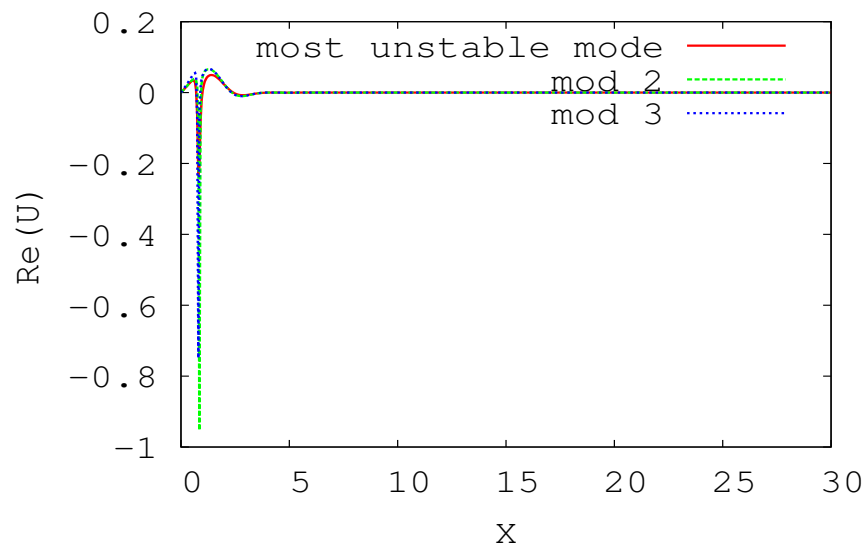


図 4.26: $A=5$, 最大側 3 つの不安定固有モードにおける渦度

♠ $A = 7$

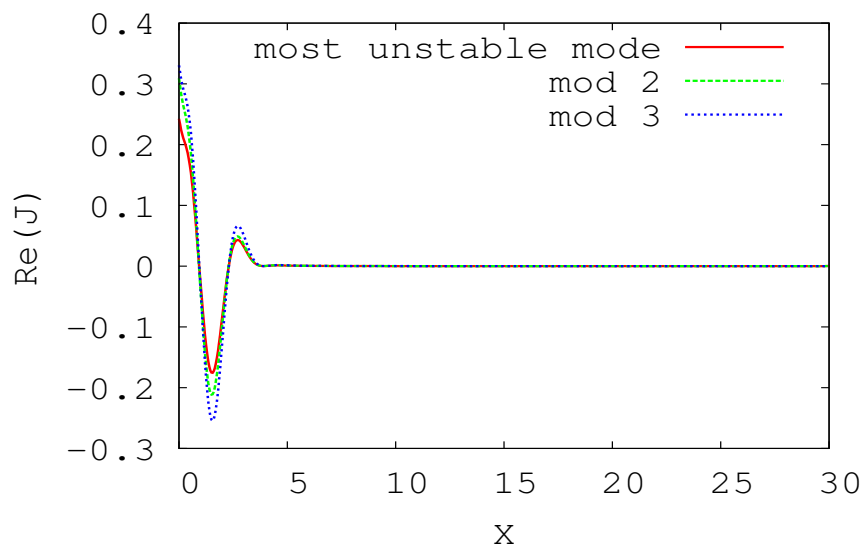


図 4.27: $A=7$, 最大側 3 つの不安定固有モードにおける電流分布

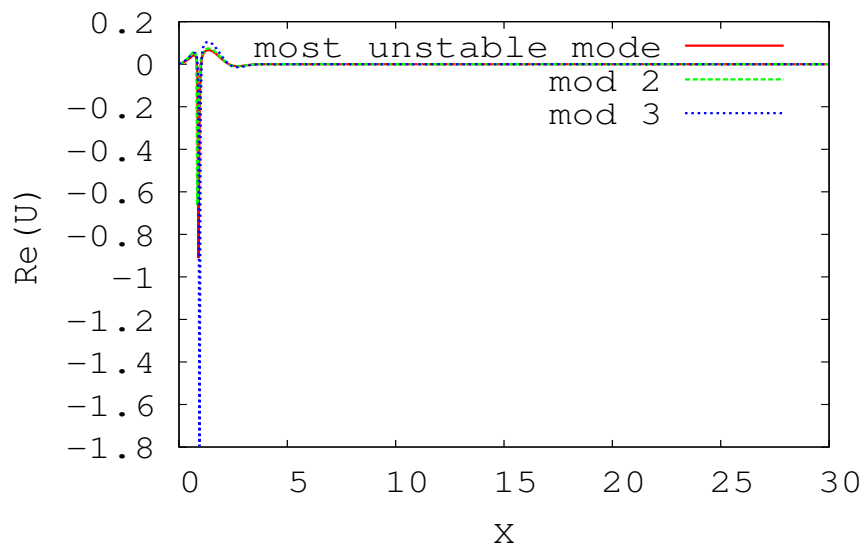


図 4.28: $A=7$, 最大側 3 つの不安定固有モードにおける渦度

どの A パラメタの固有関数をとっても，最大 3 つの不安定モードすべてのモード構造が似通っている．ただし，各図の有理面近傍部分の構造を拡大してみると，それぞれは完全に重なっているわけではないことを述べておく．3.2.2 節図 3.5 において複数の不安定固有

値が出た部分で，成長率が減少している最大不安定モード（テアリングモード）と，次点のモードは全く別のモードであるという仮定に至ったが，モード構造を見る限りでは，それぞれのモードがあからさまに違うモード構造を持っているわけではないため，全く別のモードであるとは断言しにくい．

ここでのモード構造比較で言えることは，それぞれのモード構造が似通っているため，複数の不安定モードがそれぞれ独立でない（直交していない）ことが示唆されるということである．②のモード直交性計算と照合されたい．

② モード直交性

複素ベクトル空間 \mathbb{C}^n の元であるベクトル $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ の内積は次のように定義される：

$$(z, w) = \sum_{j=1}^n z_j^* w_j. \quad (4.2)$$

ここで， $*$ は複素共役を表す．2つのベクトルが互いに1次独立であれば，内積(4.2)は0となる．

$A > 1$ シア流数値計算において出た，最大不安定固有値を持つモードの固有ベクトルを (Φ_A, Ψ_A) ，2番目に大きい不安定固有値を持つモードの固有ベクトルを (Φ_B, Ψ_B) と書くことにする．

(4.2) に従い，各 A において

$$(\Phi_A, \Psi_A)^* \begin{pmatrix} \Phi_B \\ \Psi_B \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^N (\Phi_{A1}^* \Phi_{B1} + \Phi_{A2}^* \Phi_{B2} + \dots + \Psi_{A1}^* \Psi_{B1} + \Psi_{A2}^* \Psi_{B2} + \dots) \quad (4.3)$$

を計算した結果，不安定モード同士の内積が0ではない．

①でのモード構造比較の結果と併せて，複数の不安定モード同士は直交していないことが分かった．

4.2 内部層において発生するジュール熱

テアリングモードでは、図 1.3 のように有理面をはさんで向きが逆の磁場による磁気シアが存在しているのであった。互いに向きの違う磁力線どうしが近づくと、その間に電流が流れることになる。電流は、磁場が 0 の面に沿ってシート状に分布するため、電流シートと呼ばれている。4.1 節の様々な A パラメタに対して見られた J のモード構造変化は、その電流シートの構造変化に対応する。また、内部層では電気抵抗の効果があるので、結局、内部層内では単位長さあたり

$$E_{joule} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \eta J^2 dX \quad (4.4)$$

のジュール熱エネルギーが発生することになる。本研究では、有理面で左右対称として X 正領域を解いているので、(4.4) 式の X 方向積分は $0 \rightarrow \infty$ とする。また内部層方程式導出過程において、変数引き伸ばしの際に電気抵抗 η を用いており、それ自体は変数として式に残っていないため、本研究ではすべての場合について同じ定数として考えられる。よって (4.4) のジュール熱は、純粹に発生した J の構造によって決まる。テアリングモード成長率と、発生するジュール熱には何らかの相関があると考えて、各場合におけるジュール熱発生を調べる。

各シア流パラメタに対する、内部層内ジュール熱を計算する。

外部条件を固定 ($c = 1$) して、内部層でのシア流パラメタのみ変化させているので、内部層内総電流量 $J_{total} = \Delta' \Psi_0$ は全計算において fix できる。よって、各シア流パラメタでの計算同士で単純に内部層内ジュール熱発生量の比較をすることができるのである。図 4.29 は $c = 1$ における sub-Alfvénic シア流パラメタに対するジュール熱発生量変化を、図 4.30 は、 $c = 1$ においてシア流パラメタを変化させたときの、最大不安定固有値を持つ

モードにおけるジュール熱発生量（緑線）と，成長率（赤線），複数の不安定固有値（青点）をプロットしたものである．

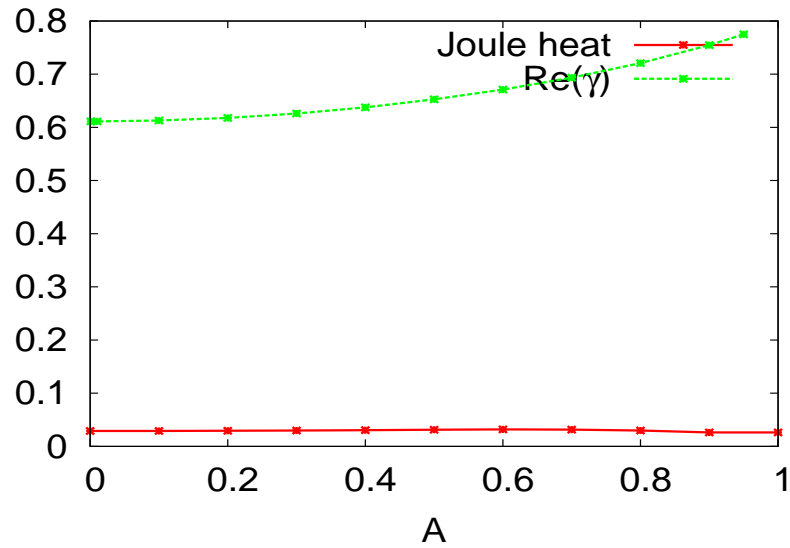


図 4.29: シア流 (sub-Alfvénic) の大きさに対するジュール熱発生量と成長率変化

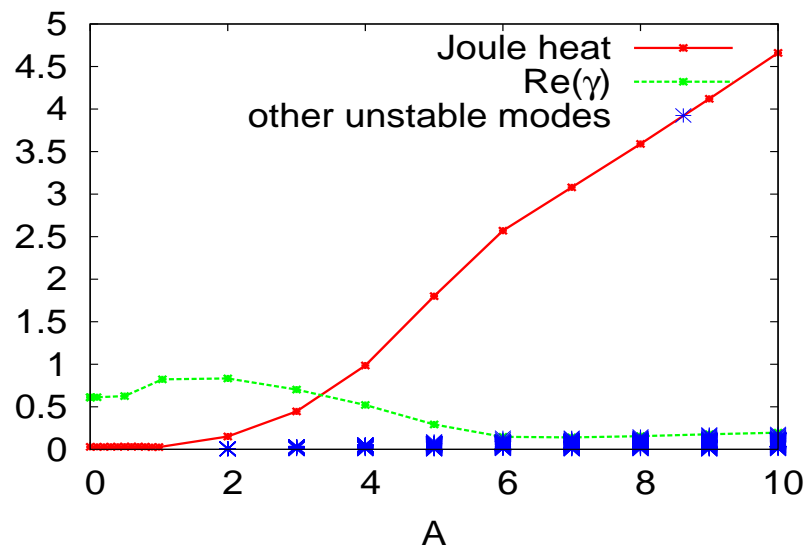


図 4.30: シア流の大きさに対するジュール熱発生量と成長率変化

Sub-Alfvénic シア流領域では，できる電流シート構造にもあまり変化がなかったため（図 4.11），シア流の増加に対してもジュール熱発生にそこまで変化はない．しかし，シ

ア流が super-Alfvénic になると，テアリングモード成長率の減少にかかわらず増加を始めるが，これは， A が 1 を超えた場合にできる電流シート構造が複雑化し，さらに振幅も増大していたことからすれば当然の結果である．また， A が 1 を超える領域での線形的な増加と言えば，青で示した複数の不安定モードの動向を思い起こさせる．これらを踏まえると， $A > 1$ で拾っている最大不安定モードは，テアリングモードではない別のモードである可能性が大きくなる．

4.3 摂動磁場と摂動速度場の変化

シア流がない場合のテアリングモードにおいて起こっている運動が，平衡シア流の影響によってどう変化していくのかをイメージとして捉えていくことにする．

シア流のない場合

空間変化には，フーリエモード

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(r) \\ \tilde{\psi}(r) \end{pmatrix} e^{\gamma t + i(m\theta - \frac{n}{R_0} z)} \quad (4.5)$$

を仮定していたので，これを用いてポロイダル断面の一部（図 4.31）を再現する．

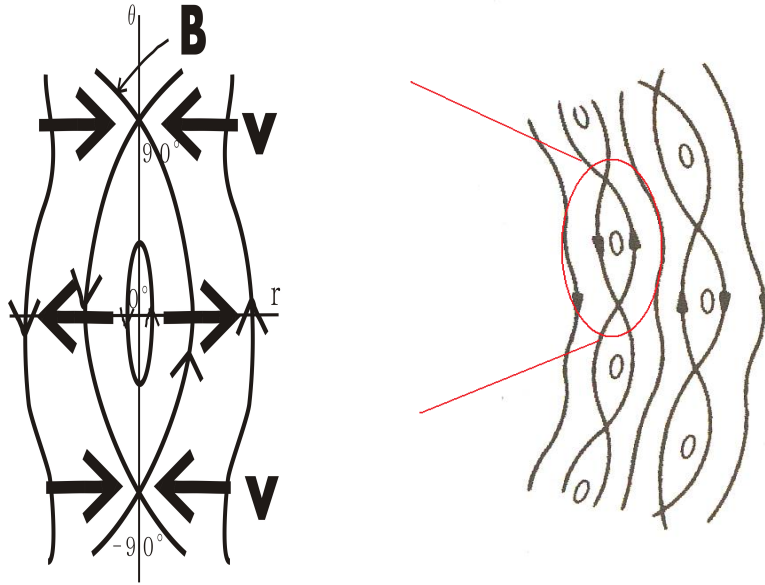


図 4.31: トカマク中のポロイダル断面一部のイメージ図．本節では，フーリエモードにより赤丸で囲ったような1周期分のデータを取り出す．左図の度数は，本節での θ 座標との対応．

横軸に径方向 (X) 座標，縦軸にポロイダル方向 (θ) をとる．大アスペクト比近似により $\frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \ll 1$ なので，トロイダル z 方向の変化はここでは無視できるとする．また，トロイダルモード数 $m = 2$ として計算しているので， $\theta = \pi$ で1周期となる．シア流がない場合の摂動磁場 B と，摂動速度場 v のベクトルは図 4.32 のようになっている．

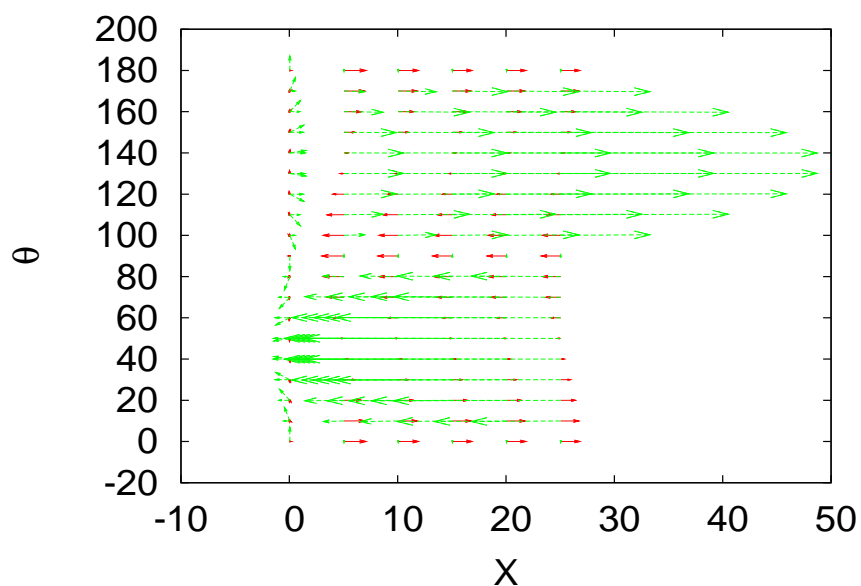


図 4.32: シア流なしの場合における B , v
縦軸: X , 横軸: ポロイダル座標, 赤矢印: v , 緑矢印: B

磁気島 (図 4.31) の X 点 ($\theta = 90^\circ$ 部分) でそのポイントをさらに押し込むような摂動流れが生じ, O 点 ($\theta = 0^\circ, 180^\circ$ 部分) から流出する構造が見えており, それにより渦の流れができる. また, その様子は次の摂動流れ場の等高線図からも分かる.

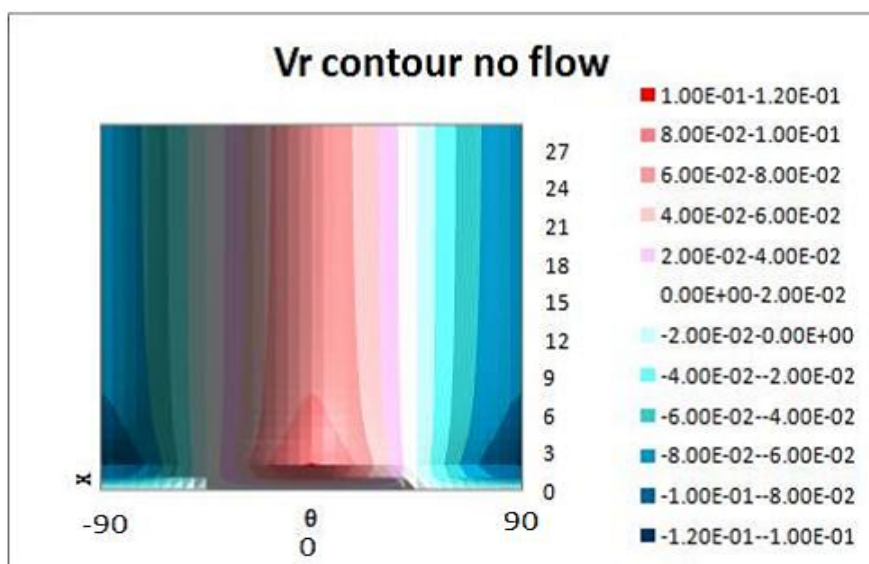


図 4.33: シア流なしの場合における摂動流れ V_r の等高線図

シア流のある場合

平衡シア流を加えていったとき，できる摂動流れや磁場の構造はどうなってゆくのだろうか．シア流のない場合と同様，摂動 B, v を， $X-\theta$ 座標に表す．図の並びは，入れたシア流の大きさがだんだん大きくなるような並びである（順番に， $A = 0.01, 0.1, 0.5, 1, 3, 5$ ）．

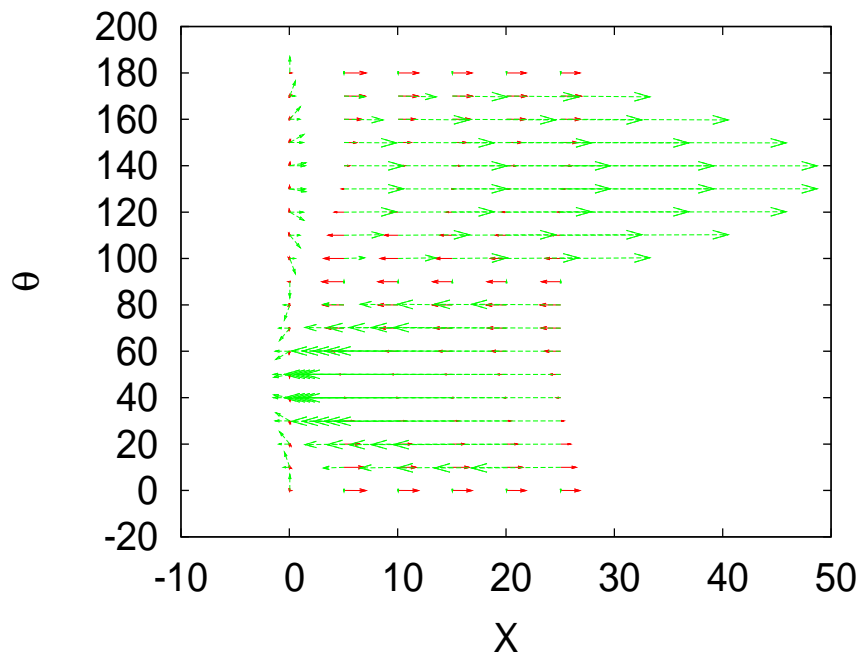


図 4.34: $A = 0.01$ の場合における B, v
縦軸: X ，横軸: ポロイダル座標，赤矢印: v ，緑矢印: B

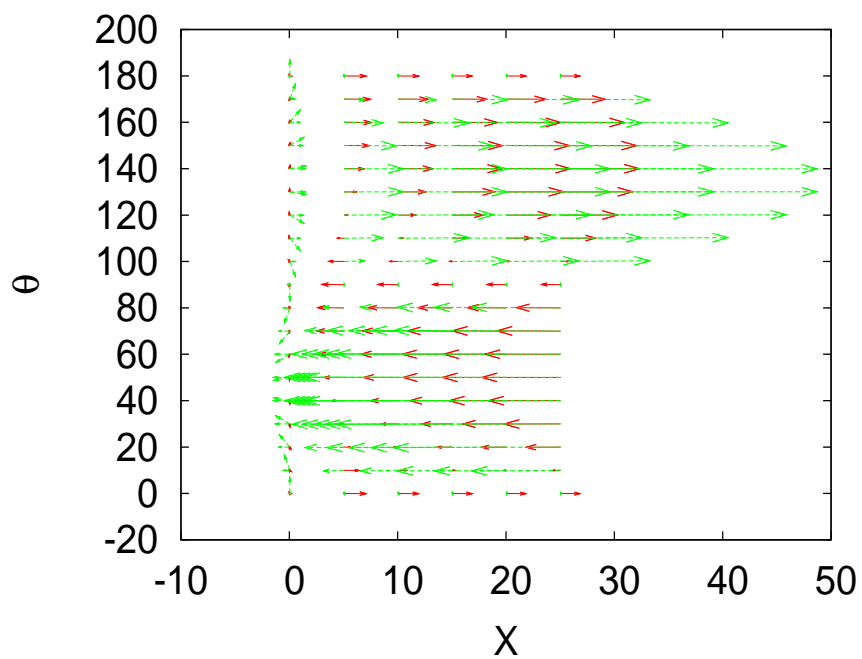


図 4.35: $A = 0.1$ の場合における B, v
縦軸: X , 横軸: ポロイダル座標, 赤矢印: v , 緑矢印: B

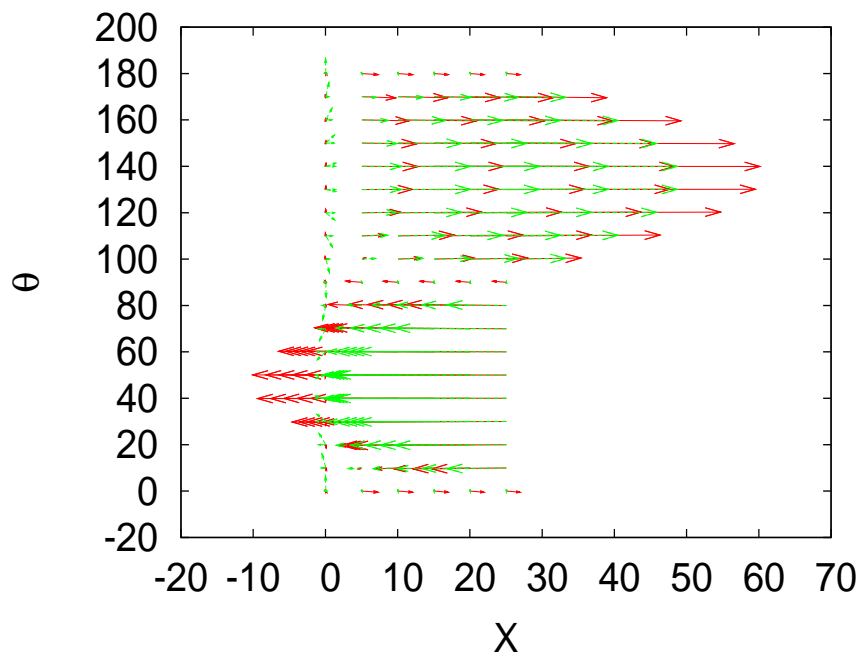


図 4.36: $A = 0.5$ の場合における B, v
縦軸: X , 横軸: ポロイダル座標, 赤矢印: v , 緑矢印: B

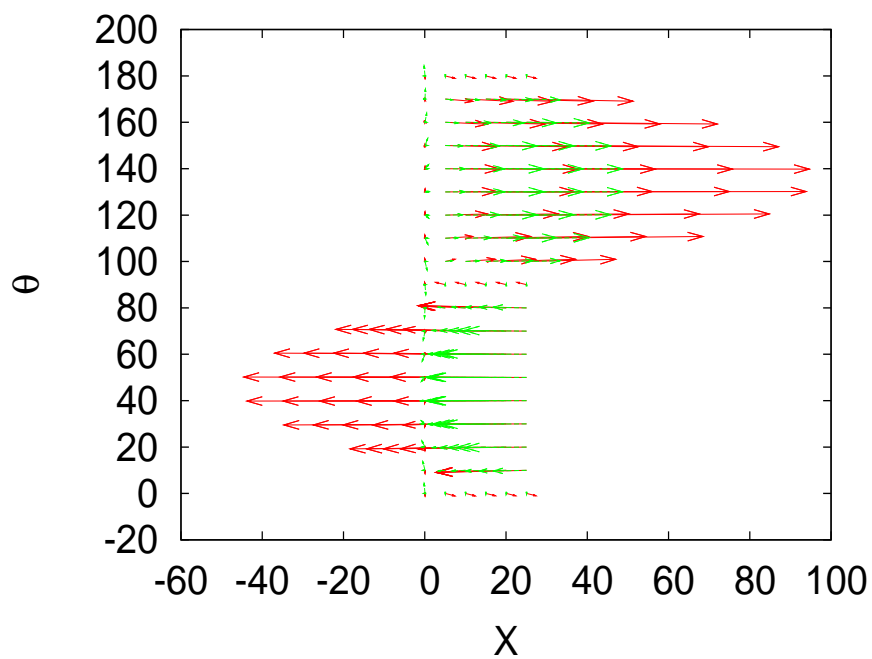


図 4.37: $A = 1$ の場合における B , v 縦軸: X , 横軸: ポロイダル座標, 赤矢印: v , 緑矢印: B

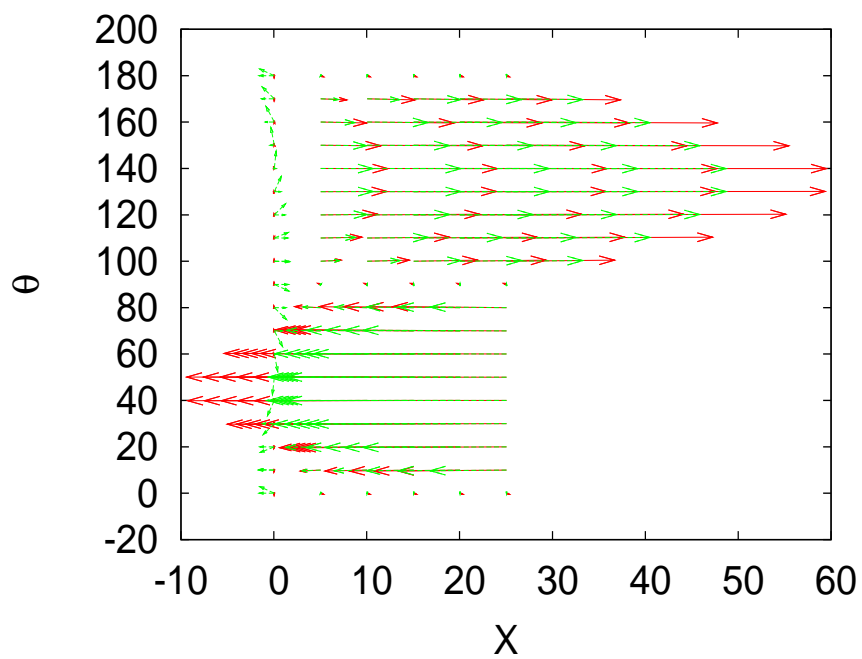


図 4.38: $A = 3$ の場合における B , v 縦軸: X , 横軸: ポロイダル座標, 赤矢印: v , 緑矢印: B

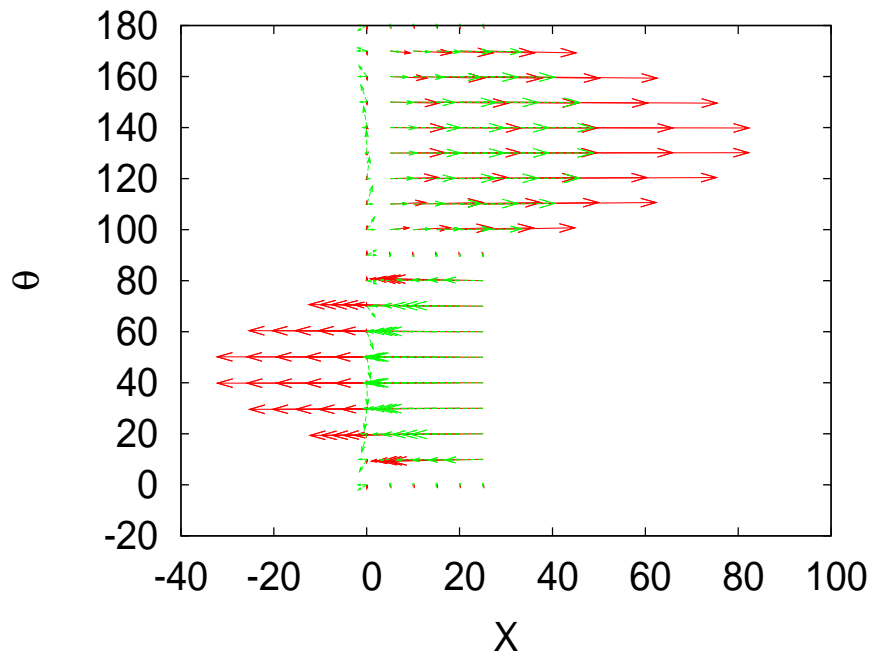


図 4.39: $A = 0.5$ の場合における B , v
縦軸: X , 横軸:ポロイダル座標, 赤矢印: v , 緑矢印: B

各シア流での計算全体を通して、摂動磁場のでき方はほとんど変化しないのに対し、摂動流れはその様相を変化させる。 A が 0.1 を超えるようになると、シア流のない場合や小さい場合のように、磁気島の X 点にあたる $\theta = 90^\circ$ 地点を押し、 O 点にあたる $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ から出ていくような摂動流れのなごりは存在するが、それ以外に X 点と O 点の間あたりから大きく流れ出る、あるいは流れ込むような大きな流れができるようになる。 A が 1 を超えるようになると、摂動磁場 B_r の位相に同調したような摂動流れが発生する。この様子は、シア流がない場合と同様、摂動流れの等高線図によっても確認できる。

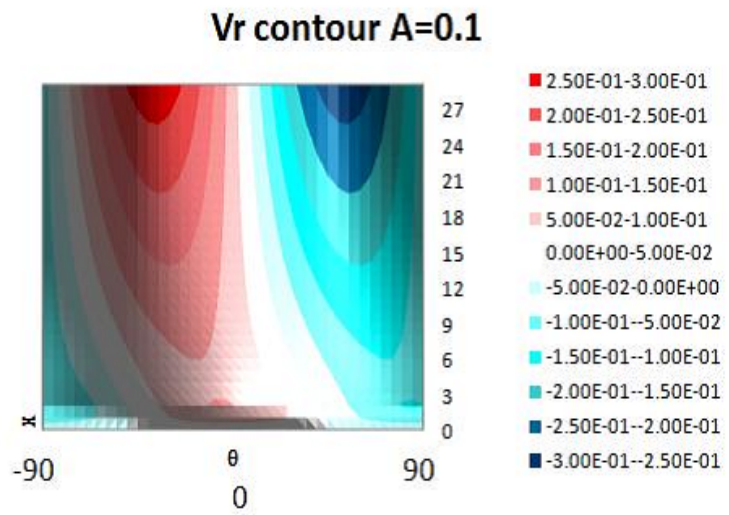


図 4.40: $A=0.1$ シア流による摂動流れ V_r の等高線図

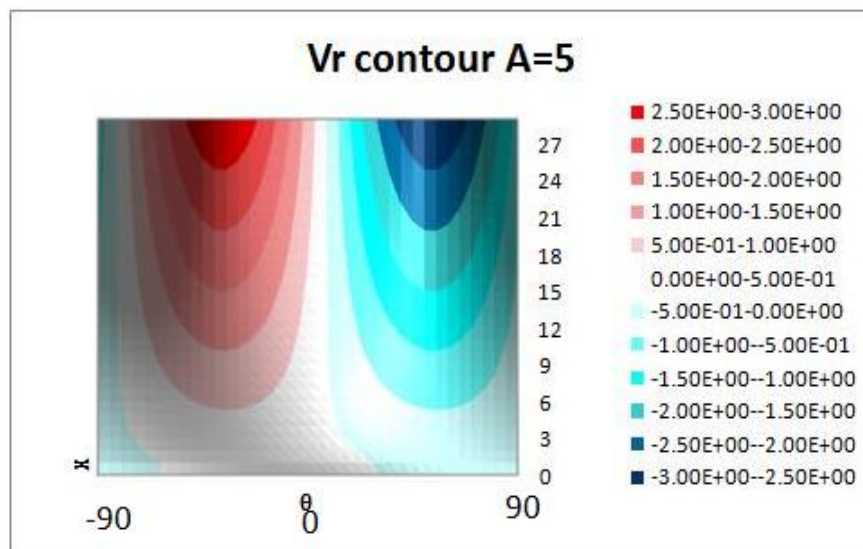


図 4.41: $A=5$ シア流による摂動流れ V_r の等高線図

4.4 エネルギー分配

テアリングモードは、磁場と流れの運動とのカップリングによって引き起こされる不安定モードだと言える。シア流の効果によって、内部層内における磁場のエネルギーと流れ場の運動エネルギーの支配関係はどのように変化するのだろうか。また、モード内エネルギー支配関係の変化と不安定性との相関はあるのだろうか。

Alfvén スケールでの規格化により、内部層内の全エネルギーは

$$E_{total} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{|B|^2}{2}}_{\text{磁場のエネルギー}} + \underbrace{\frac{|v|^2}{2}}_{\text{流体力学的運動エネルギー}} \right) dX \quad (4.6)$$

と書ける。摂動 B, v は (1.6), (1.7) 式より、

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \psi, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \phi \quad (4.8)$$

となるので、固有関数として求めた Φ と Ψ を用いて、磁場のエネルギーと流れの渦の運動エネルギーを求め、全エネルギー中における各エネルギーの占める割合

$$\frac{\int_0^\infty dX |B|^2}{\int_0^\infty dX (|B|^2 + |v|^2)}, \quad \frac{\int_0^\infty dX |v|^2}{\int_0^\infty dX (|B|^2 + |v|^2)} \quad (4.9)$$

を求める。

計算を行った結果を図 4.42 に示す。

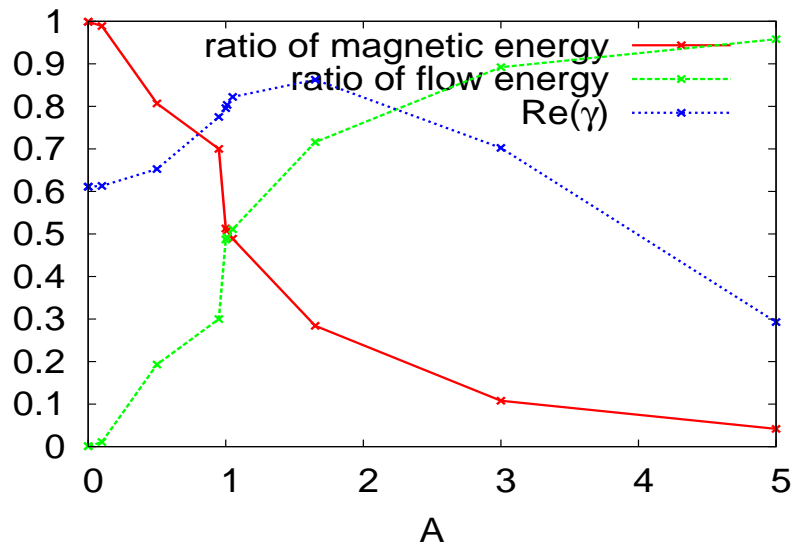


図 4.42: シア流の大きさに対する内部エネルギー分配比率の変化

赤線が磁場エネルギーの比率，緑線が渦の運動エネルギーの比率，青線は成長率の変化である．平衡は， $A = 1$ において，磁気シア (Alfvén 速度) とシア流速が同じとなるような設定である (Alfvén 共鳴) ．

図 4.42 から得られた結果としては，摂動により生じる磁場と流れも $A = 1$ を境にそのエネルギー分配比率を逆転する．そして，その分配比率が急激に変化するのは， $A = 1$ 直前の大きさのシア流を与えた場合である．この領域で成長率の増加率が上がることは，3.2.1 節にて触れているが，ここでの急激なエネルギー分配率入れ替えと，成長率の増加率増大とは相関がある可能性が指摘できる．

逆に， $A = 1$ を超えるシア流を与えた場合，さらに支配的になる流れのエネルギーに反して，成長率は減少していくことも図 4.42 より読み取れる．

まとめると，sub-Alfvénic シア流存在により生じる摂動の流れは増大し， $A = 1$ までに内部層内全エネルギーの半分を占めることになる．それに伴い，モードの成長率は大きくなるということが言える．super-Alfvénic シア流存在の場合は，それまでとは性質が一変

し、摂動流れの増加は成長率の減少を加速させる傾向となっている。

第5章 結論

本研究では，シア流のあるプラズマ中におけるテアリングモード不安定性について

- シア流がある場合の漸近接続条件を導出した
- 導いた漸近接続条件に基づき，内部層方程式の固有値問題の数値解を得た
- 漸近接続法で解くことにより，内部層内シア流の影響によるモードの変化を調べた

成長率変化のメカニズムについて得られた結果を表 5.1 にまとめる．シア流がない場合の各量を基準とした比較を行っている．

表 5.1: テアリングモードに対する平衡シア流の効果のまとめ

シア流の 大きさ	成長率	モード構造と ジュール熱発生	摂動磁場/ 速度場エネルギー
sub- Alfvénic	シア流パラメタ A に対し, 2 次関数的に 増加.	熱発生は, $A \leq 0.5$ 程度まで 成長率増加と ともに微増. モード構造は, 大きな変化は なし.	シア流のないときは, 磁場エネルギーが 全体のエネルギーの 大部分を占めていたが, 平衡シア流に伴い 摂動流れエネルギーの 割合が増加. 速度場の支配が 大きくなり, $A = 1$ にて その比が 1:1 となる
super- Alfvénic	最大成長率の 急激な減少と, 最大固有値以下 複数の 不安定固有値 が出現. 不安定モード数は シア流の大きさに 比例するように 増加し, 複数の 不安定固有値の うちの最大値も 線形に増加. テアリングモードの 再増加ではなく, 線形増加する 別の不安定モード の成長の可能性. 流れに起因する 別モードの 萌芽.	渦度, 電流 ともに sub-Alfvénic な 場合とは, 異なる 様相を呈す. 渦度は, 有理面近傍に デルタ関数の ような 鋭い構造. 電流は, 振動した 構造. 熱発生は シア流に対し 線形に 増加する ようになる.	流れ場エネルギー比率が 磁場エネルギーを逆転. $A > 1$ では 完全に 流れ場による 支配となる.

結果全体を俯瞰した結論として、次のようにまとめられる。

1. 内部層内の平衡シア流により、テアリングモードは影響を受けるが、そのモード構造や不安定化メカニズムはシア流の大きさ (Alfvén 速度より速いか遅いか) によって異なる。
2. シア流があることによって、モード内で変化 (増加) があるのは流れ場である。よって、渦の運動の変化は、モードの成長率に少なからず相関があると考えられる。本研究の結果からは、sub-Alfvénic シア流存在時には、渦の摂動流れのエネルギー増加はモードの不安定化に寄与し、super-Alfvénic シア流存在時の摂動流れのエネルギー増加は上記 1 の性質の違いにより、逆に安定化に寄与する可能性があるということが言える。
3. Super-Alfvénic シア流により、他のモードも複数不安定化している可能性がある。また、それらの不安定化モードはそれぞれが直交しておらず、互いのモード間でのエネルギーやりとりが起こっている可能性が示唆される。また、この複数の不安定モードはテアリングモードではなく、流れをエネルギー源とした別のモードである可能性もある。ただし、これについてはもう少し数値計算テストが必要である。

付 録 A 数値計算関連

本研究に用いた各数値計算結果の妥当性（収束性）を確認するため，次のチェックを行った．

1. 単位長さあたりのグリッド数を変化させたときの固有値・固有関数の収束性
2. 単位長さあたりのグリッド数は固定で，計算領域（ X 右端）を変化させたときの固有値・固有関数の収束性

まず，固有値収束性を図 A.1, A.2 に示す．どちらのテスト計算においても，固有値はよい精度で一定値に収束していることが分かる．よって，固有値に関して見る限り，シア流がある場合の固有値問題数値計算はうまく解けていると言える．

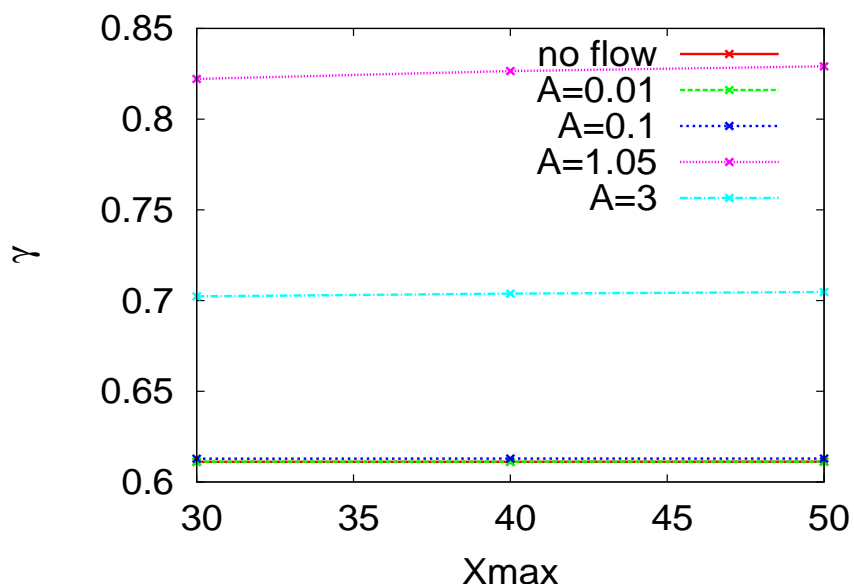


図 A.1: 単位長さあたりのグリッド数を変化させた場合

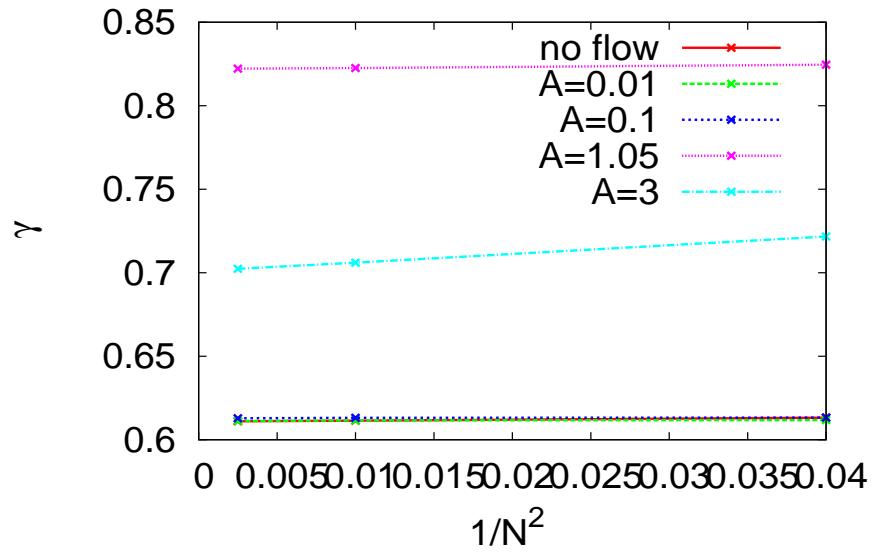


図 A.2: 計算領域を変化させた場合

固有値について，別途確認しておくべきは，super-Alfvénic 計算にて複数出現した各不安定モードの固有値収束性である．不安定側の最大固有値が収束していないということになると，super-Alfvénic シア流の場合は，計算がうまくできていないという可能性が大きくなってしまう．

$A = 1.05, 3, 5$ のシア流パラメタにおいて，成長率の大きい方から 3 つの不安定モードの固有値を，上の方法と同様のテスト計算にて確認した．

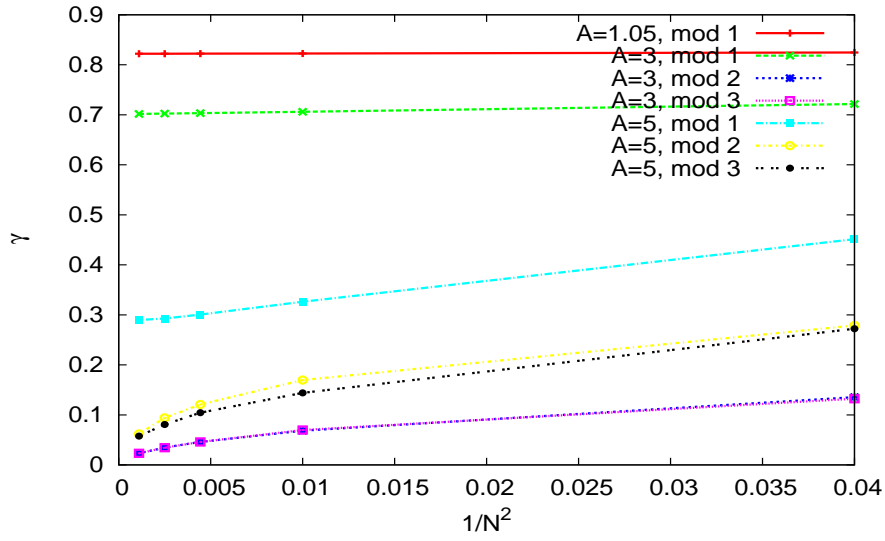


図 A.3: 単位長さあたりのグリッド数を変化させた場合

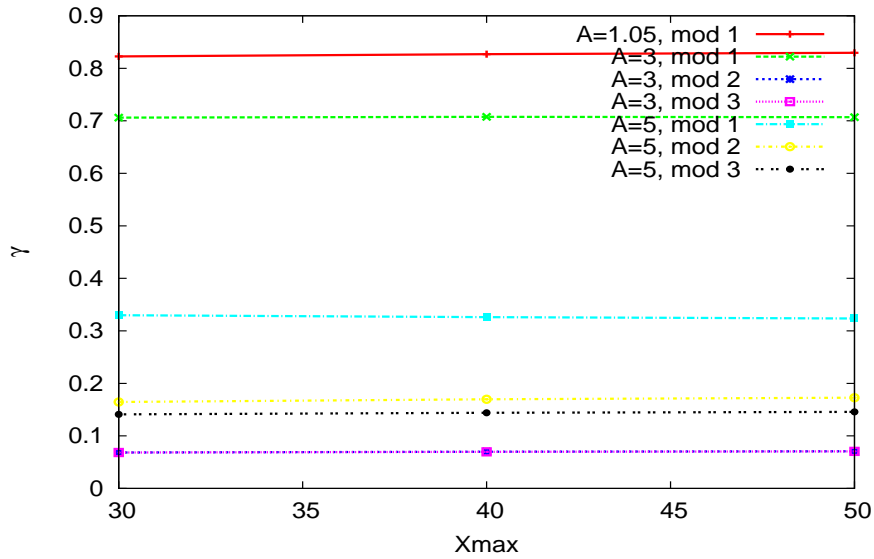


図 A.4: 計算領域を変化させた場合

最大不安定モードの固有値は，単位長さあたりのグリッド数を十分に（ここでは $N = 20$ 以上）とれば，一定値に収束している傾向が見られる．しかし，mode 2, mode 3 は 0 に収束するように見える．シア流によって発生する $\gamma = 0$ のモードが不安定側に寄る結果の意味はまだ分かっていないが，その意味を考えることも重要なことである．

次に，固有関数の形のチェックを行う．

数値計算において，上記のテスト計算を行ったとき，固有関数の形が著しく変わってしまうようなら，その数値計算は収束しているとは言えない．よって，本研究においても，きちんと数値計算できているかどうか固有関数の形のチェックも行った．図 A.5,A.6,A.7 は，単位長さあたりのグリッド数を変化させたときの各シア流パラメタによる計算の固有関数チェックである．

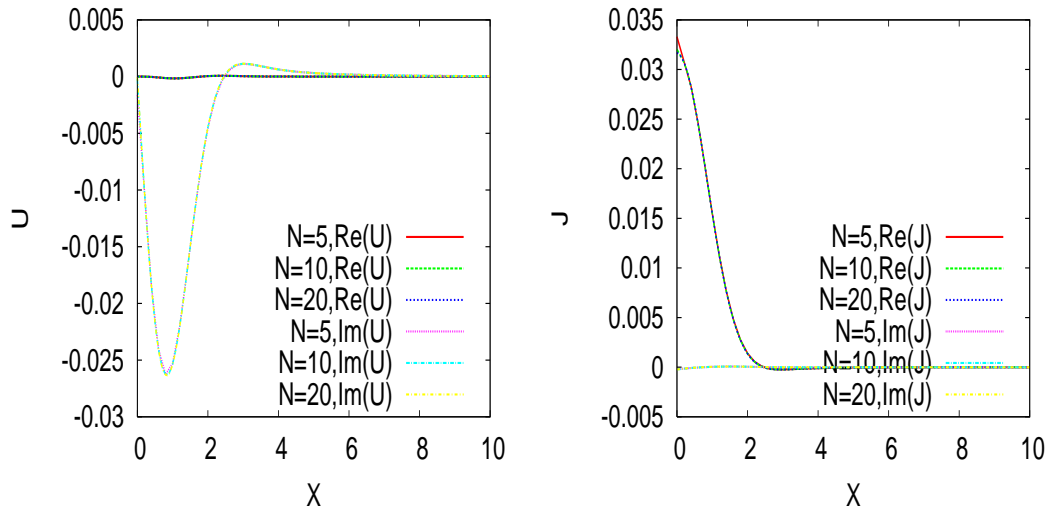


図 A.5: $A = 0.01$, 左 : U , 右 : J

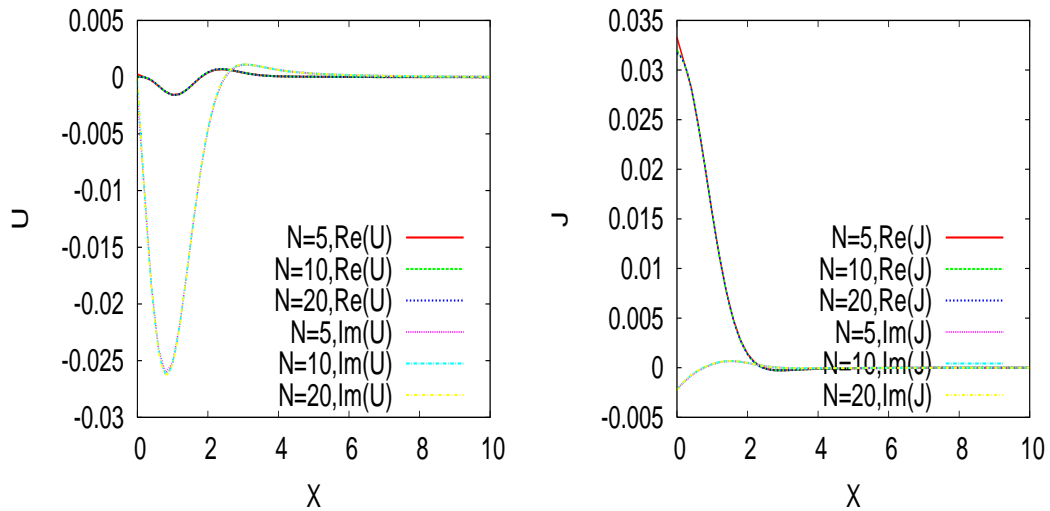


図 A.6: $A = 0.1$, 左 : U , 右 : J

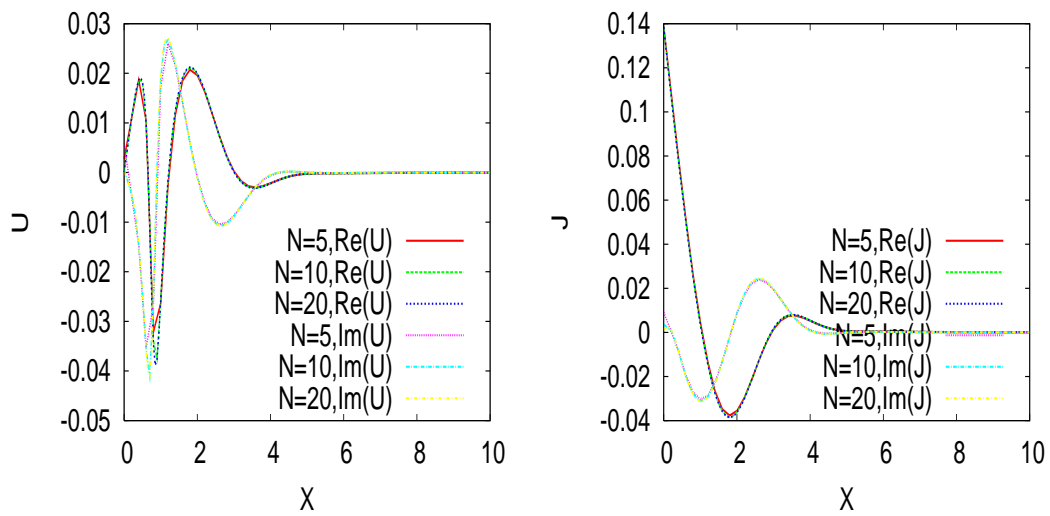


図 A.7: $A = 3$, 左 : U , 右 : J

単位あたりのグリッド数を変えた各計算において，固有関数形は完全に重なっており，数値計算は収束していると言える．

続いて，固有値の場合と同様，確認すべきは複数の不安定モードにおける，各モードでの固有関数収束性である．例として， $A = 3$ のシア流において最大不安定固有値を持つモード，2 番目に大きな不安定固有値を持つモードと 3 番目のモードについて，グリッド数変化に対する固有関数収束性を調べた結果を以下に示す．

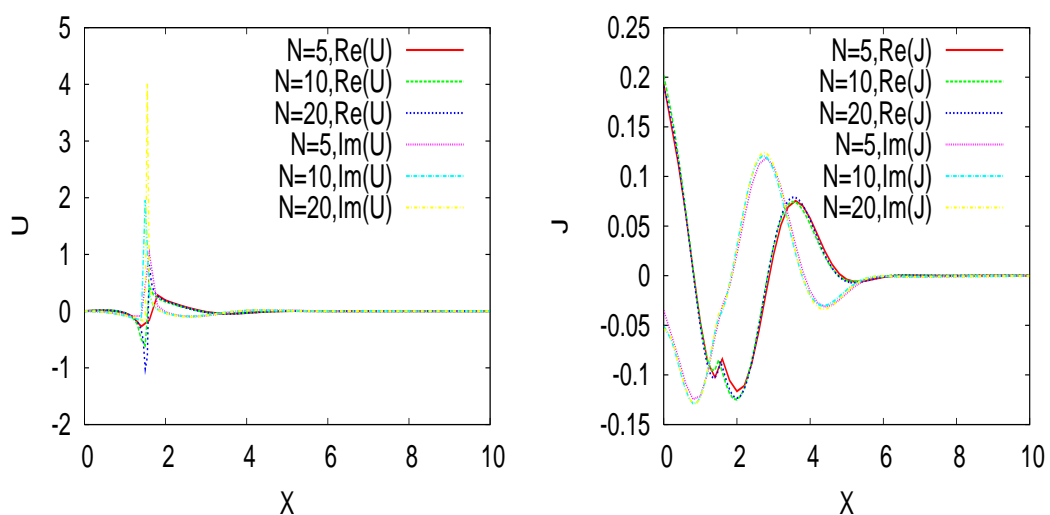


図 A.8: $A = 3$, mode 2, 左 : U , 右 : J

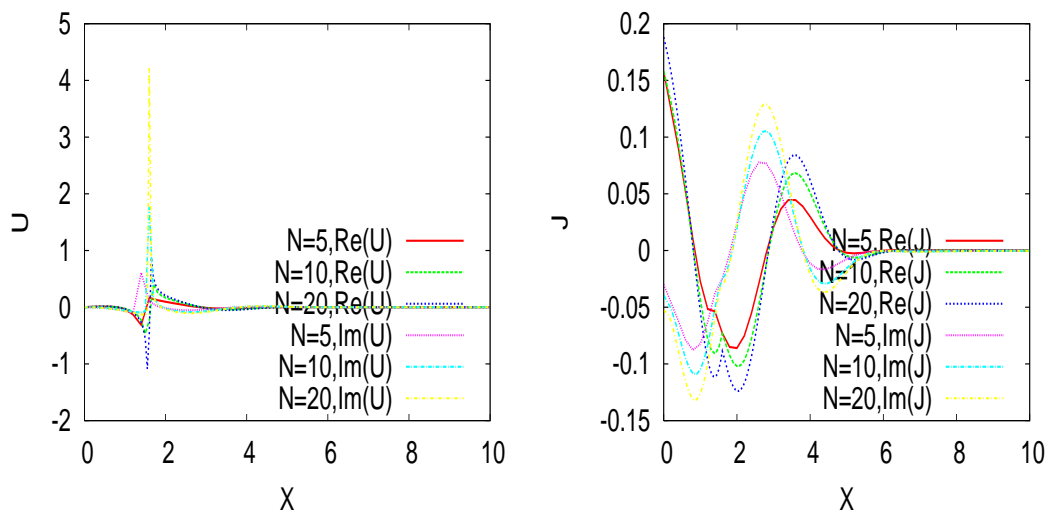


図 A.9: $A = 3$, mode 3, 左: U , 右: J

mode2, mode3 どちらもグリッド数による関数形の変化はあまりないが，振幅がグリッド数に依存しているような印象を受ける．一方，最大不安定固有値を持つモードの固有関数 (図 A.7) には，パラメタ依存性はなく，グリッド数を変えても計算結果は重なる．

計算領域を変えた計算においては，計算領域右端値 (X_{max}) が異なるため，重ねての表示にはあまり意味がないが，確認したところ，各モードでの計算結果ですべて関数形は一致した．

付 録 B 文献 [1] との記号対応

文献 [1] では，シア流のない内部層方程式を外部接続条件を与えて（既知）数値計算する手法が紹介されており，本研究においてはこの手法を応用した．[1] では，理想 Ohm 則 ((2.14) 式において電気抵抗の項を落とした式) より求まる $|X| \rightarrow \infty$ における Ψ の漸近解 $\gamma\Psi + X\Phi \sim 0$ において，左辺 $\gamma\Psi + X\Phi = \Xi$ と置き，内部層方程式を Φ と Ξ の方程式に書き換えることで， Ψ の理想領域漸近解を $\Xi = 0$ という簡単な条件に置き換える作業を行っている．ここで， Ξ は，平衡磁場に平行方向の電場を表す関数である．

これを用いてシア流のない場合の内部層方程式を書き換えると，次のようになる：

$$\begin{aligned}\gamma \frac{d^2\Phi}{dX^2} &= X\Xi, \\ \gamma\Xi &= -\frac{d^2}{dX^2}(X\Phi) + \frac{d^2\Xi}{dX^2}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

数値計算としては，この方程式を理想領域接続漸近解：

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_\infty \left(1 + \frac{c}{X}\right) \\ \Xi &= 0\end{aligned}\tag{B.2}$$

を境界条件として用いて，固有値問題として解く．

外部領域においては，理想 Ohm 則が用いられるため， $E_\parallel \propto J_\parallel$ という近似をすると， $J_\parallel = \frac{d^2\Psi}{dX^2}$ より， Ξ と Ψ は， $\Xi \sim \frac{d^2\Psi}{dX^2}$ の関係性を持つことになる．

ここで，ひとつの疑問に直面することになる．(B.1) を (B.3) の境界条件で固有値問題として解いた解 (γ, Φ_0, Ξ_0) と，第 2 章での境界条件により， Φ, Ψ 記述の内部層方程式を解いた解 (γ, Φ_1, Ψ_1) の解と同じであることは自明ではないのであるが，解いた結果の解が同じであるからくりについてである．自明ではないという理由は， $\Xi = \frac{d^2\Psi}{dX^2} = 0$ のと

き， Ψ は無数に選べるためである．

Φ, Ξ にて解いた解 (γ, Φ_0, Ξ_0) を先に持っているものとする． $\Xi_0 = \frac{d^2\Psi}{d^2X}$ より，

$$\Psi = \iint dX \Xi_0 + c_0 X + c_1 \quad (c_0, c_1; \text{const.}) \quad (\text{B.3})$$

ここで， $\iint dX \Xi_0 = \Psi_1$ (Ψ_1 は， Ψ の式で解いたときの解であり，暗に知っているものとする) とすると，第2章のシア流のある場合の Ψ 右端境界条件 (2.60) より， $\Psi_1 = \Psi_\infty \left[1 + \frac{X}{c}\right]$ であつたので，(B.3) は次のように書ける：

$$\begin{aligned} \Psi &= \iint dX \Xi_0 + c_0 X + c_1 \\ &= \Psi_1 + c_0 X + c_1 \\ &= \Psi_\infty \left[\left(1 + \frac{c_1}{\Psi_\infty}\right) + \frac{X}{c} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

ここで， Ψ は偶関数で仮定しているので， $c_0 = 0$ とした．これは， Φ, Ψ で内部層方程式を解いたときの漸近解 (2.60) において， $1 \rightarrow \left(1 + \frac{c_1}{\Psi_\infty}\right)$ で置き換えたものになっている．一方，(B.4) より，

$$\Psi_1 = \Psi - c_0 X - c_1$$

と書けるので， Φ, Ψ で解く内部層方程式 (2.14) に代入すると，

$$\begin{aligned} \gamma \Psi_1 &= -iX \Phi_1 + \frac{d^2 \Psi_1}{dX^2} \\ \Leftrightarrow \gamma (\Psi - c_0 X - c_1) &= -iX \Phi_1 + \frac{d^2 \Psi_1}{dX^2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ψ の偶関数仮定より，

$$\Leftrightarrow \gamma (\Psi - c_1) = -iX \Phi_1 + \frac{d^2 \Psi_1}{dX^2} \quad (\text{B.6})$$

定数分ずれた $\Psi - c_1$ を新たに Ψ_{new} と置くと，(B.6) は，

$$\gamma \Psi_{new} = -iX \Phi_1 + \frac{d^2 \Psi_{new}}{dX^2}, \quad \Psi_{new} = \Psi_\infty \left[\left(1 + \frac{c_1}{\Psi_\infty}\right) + \frac{X}{c} \right] \quad (\text{B.7})$$

のように書ける．

結局，解の対応関係としては，次の図 B.1 のようなイメージとなる．

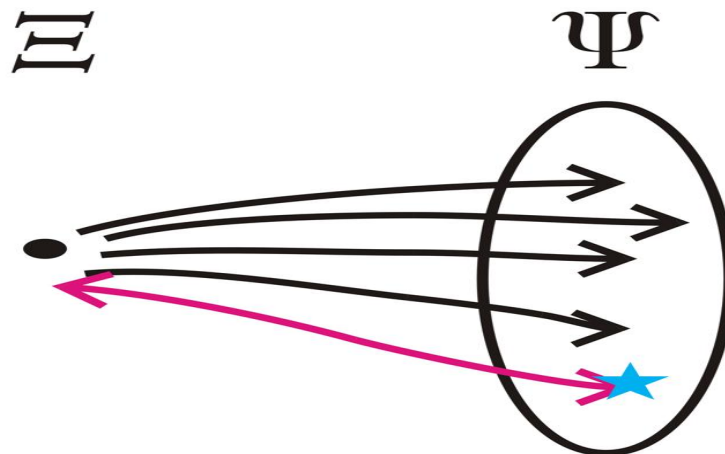


図 B.1: (Φ, Ξ) 系と (Φ, Ψ) 系の解の対応関係

記号で表すと，このような関係である．

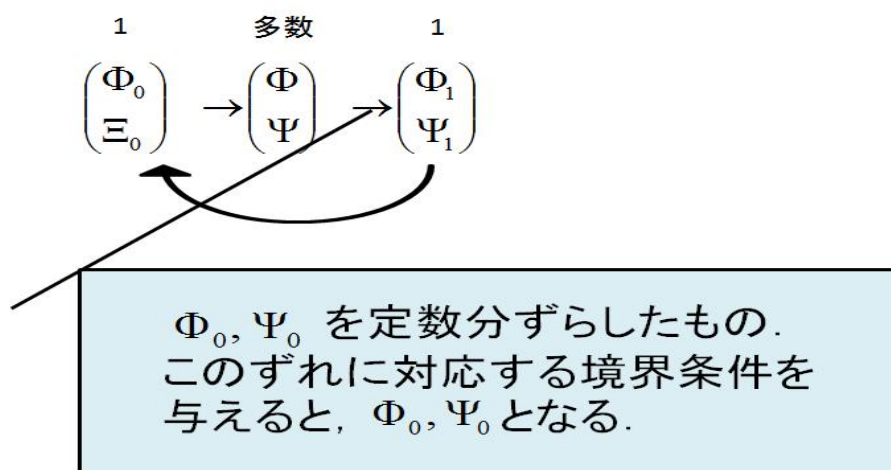


図 B.2: (Φ, Ξ) 系と (Φ, Ψ) 系の解の対応関係 (記号対応)

結局， $\Xi = 0$ という境界条件では Ψ_1 は一意に決まらず， Ξ から出てくる Ψ は，何らかの定数 (c_0, c_1) を連れている．このずれた定数分に対応する境界条件 (1 通り) を与えたとき，ちょうど Φ, Ψ で解いた解 (Φ_1, Ψ_1) と重なり，このときそれぞれの解は 1:1 対応となる．図 B.3, B.4 は， (Φ, Ξ) で書いた内部層方程式コードと， (Φ, Ψ) で書いた内部層方程式コードにて，同じ解 (成長率) を出すものの固有関数である． (Φ, Ξ) 対応のコードにおいて，ある定数のときにのみこの一致を満たした．この定数の数値自体は，パラメタによ

り変わるものであるので取り上げないが，上で述べてきたことが証明された結果である．

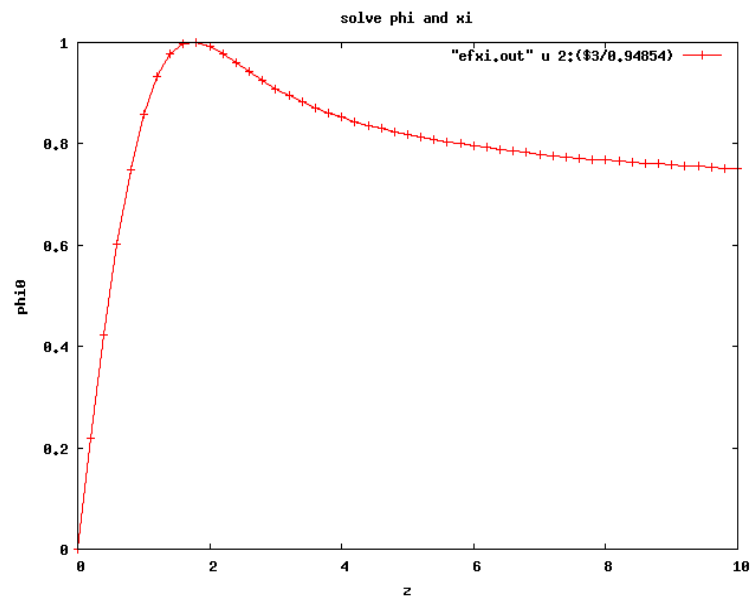


図 B.3: (Φ, Ξ) で解いた Φ

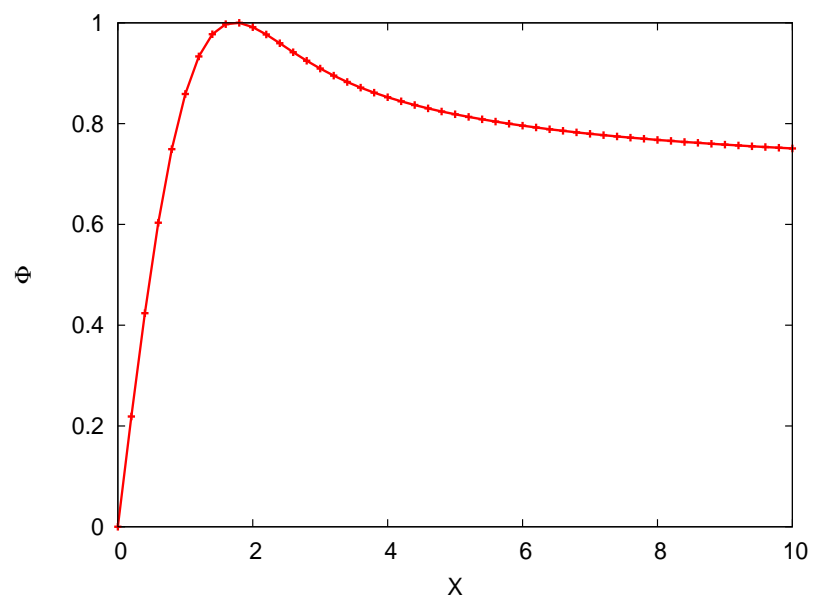


図 B.4: (Φ, Ψ) で解いた Φ

なぜ本研究にて， (Φ, Ξ) の表記を用いなかったかという点，シア流項を残した内部層方程式に Ξ の表記を用いることが有効でなかったためである．

付 録 C シア流なしコード計算と，シア流あり小極限コード計算との整合性

第2章にて導いた外部領域接続条件で，シア流がない場合と，シア流がある場合で $A \approx 0$ とした場合では， Φ の次数が1次異なり，理論的には，固有値 γ は $A = 0$ に向かってスムーズに収束していかない（シア流がない場合の γ と，シア流のある計算で $A \rightarrow 0$ としていったときの γ の収束点とが異なる）。

第2章を思い出すと，シア流を残した計算において外部領域漸近解を求める際に，外部領域の支配方程式である理想 Ohm 則における項のつりあいを考えた．要するに， $|X| \rightarrow |\infty|$ のとき，シア流のある場合では，内部層方程式での Ohm 則 (2.12)：

$$(\gamma + iAX)\Psi = -iX\Phi + \frac{d^2\Psi}{dX^2}.$$

において，左辺第2項（対流微分項）と，右辺第1項（Alfvén 項）が釣り合うという仮定を置いた．しかし， $A \rightarrow 0$ シア流では，左辺第2項は $X \rightarrow \infty$ まで計算しなければ，この仮定を満たさないことになる．本研究の数値計算では，数値計算が十分に収束すると確認される $N_{max} = 30$ にて計算を行っているため，あからさまにこの仮定が破れてしまう領域がある．たとえば， $c = 1$ ， $A = 0.001$ のとき，左辺第2項オーダーは $AX_{max} = 0.001 \times 30 = 0.03$ となる一方，数値計算により得られる γ は0.6程度であり， γ が左辺第2項よりも大きくなっている．

数値計算では，仮定の破れなど関係なく計算できてしまうのであるが，理論的に信頼できる A の計算領域を便宜上決めておこう．

先述のとおり，本研究では $N_{max} = 30$ を用いており，本研究の外部接続条件 c においては，図 C.1 のとおり γ は 10^{-1} オーダーである．これを十分超えるような A を考えると，

$A \geq 0.2$ ($AX_{max} = 0.2 \times 30 = 6$, $cf : \gamma \neq 0.6$) が妥当なラインであろう。

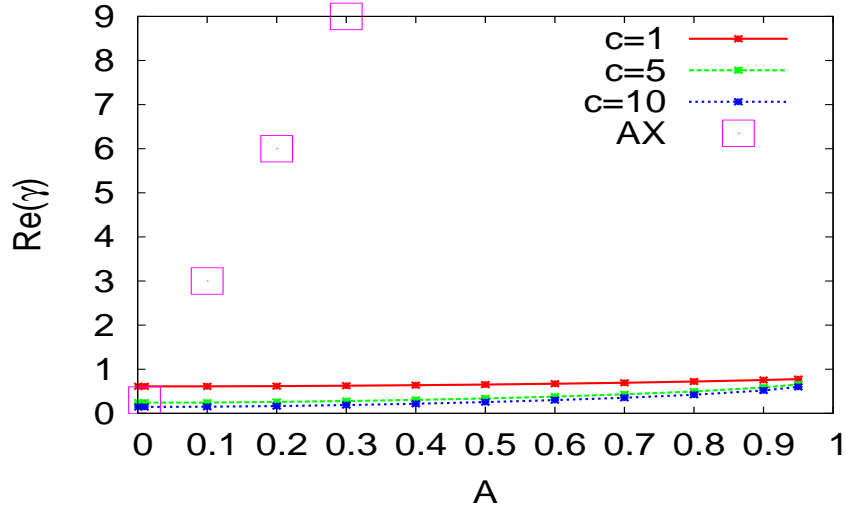


図 C.1: 成長率と対流微分項の釣り合いの関係

しかし，図 C.1 数値計算上においては，シア流がない場合の計算と，シア流がある場合で $A \rightarrow 0$ としたときの計算結果 (固有値・固有関数ともに) には，数値のとびがない．シア流がない場合の Φ 境界条件は，

$$\Phi = i\gamma\Psi_{\infty}\left(\frac{c}{X} + 1\right) \quad (C.1)$$

であり， X が大きくなったとき， $\frac{c}{X} \ll 1$ で Φ は定数に近づく境界条件である．一方，シア流を残した場合の Φ 境界条件は，

$$\Phi = -A\Psi_{\infty}\left(\frac{X}{c} + 1\right) \quad (C.2)$$

であり， X が大きくなったとき， $\frac{X}{c} \gg 1$ で Φ は線形に増加していく境界条件である．また，シア流を残した内部層方程式自体は， $A \rightarrow 0$ とすると，自然にシア流なしでの内部層方程式に近づくのであった．

本来とびがあるはずの結果がなめらかにつながっているように見えるのは，本研究での数値計算における手法によると考えられる．

本研究では，求めた境界条件を，差分法にて固有値問題を解く行列計算の際に，行列の中に組み込めるよう次のように変形している：

- シア流のない場合の境界条件 (C.1) を $\frac{d\Phi}{dX} = -i\gamma \frac{\Psi}{X^2(1+\frac{X}{c})}$,
- シア流のある場合の境界条件 (C.2) を $\frac{d\Phi}{dX} = -\frac{A\Psi}{c+X}$.

よって, $X \rightarrow \infty, A \rightarrow 0$ では, どちらも 0 に近づくため, 数値計算上ではみかけ上同じ境界条件として扱われているものと考ええる. しかし, 理論上は上記以下の大きさの A を用いての計算は, 必ずしも正しいとは言えないことを念頭に置いておく.

参考文献

- [1] S.Tokuda, *Journal of Plasma and Fusion Reserch*, Vol 77, No.3(2001), 276.
- [2] X.L.Chen, P.J.Morrison, *Phys. Fluids* **B 2**, 495(1990).
- [3] H.P.Furth, J.Killeen, M.N.Rosenbluth, *Phys. Fluids* **6**, 459(1963)
- [4] R.B.Paris, W.N-C. Sy, *Phys. Fluids* **26**, 2966(1983)
- [5] R.Coelho, E.Lazzaro, *Phys. Plasmas* **14**, 012101(2007)
- [6] D.Dobrott, S.C.Prager, J.B.Taylor, *Phys. Fluids* **20**, 1850(1977)
- [7] J.Killeen, A.I.Shestakov, *Phys. Fluids* **21**, 1746(1978)
- [8] G.Einaudi, F.Rubini, *Phys. Fluids* **29**, 2563(1986)
- [9] R.K.Pollard, J.B.Taylor, *Phys. Fluids* **22**, 126(1979)
- [10] A.Bonderson, M.Persson, *Phys. Fluids* **29**, 2997(1996)
- [11] I.Hofmann, *Phys. Plasmas* **17**, 143(1975)
- [12] S.Wang, L.C.Lee, C.Q.Wei, *Phys. Fluids* **31**, 1544(1988)
- [13] W.A.Cooper, *Phys. Plasmas Control Fusion* **30**, 1805 (1988)
- [14] M.Furukawa, Y.Nakamura, S.Hamaguchi, M.Wakatani, *Phys. Plasmas* **8**, 4889(2001)
- [15] R.D.Hazeltine, J.D.Meiss, PLASMA CONFINEMENT, Addison-Wesley Publishing(1991)
- [16] J.Wesson, Tokamaks SECOND EDITION, OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS(1997)
- [17] S.Tokuda, T.Watanabe, *JAERI-Reserch*, 96-044(1996)

- [18] 宮本健郎, プラズマ物理・核融合, 東京大学出版会 (2004)
- [19] F.F.Chen, プラズマ物理入門, 丸善株式会社 (1974)
- [20] 高部英明, さまざまなプラズマ, 岩波書店 (2004)
- [21] 吉田善章, 集団現象の数理, 岩波書店 (1995)
- [22] 吉田善章, トーラス型非中性プラズマを用いた高速流プラズマの高ベータ平衡と安定性の実験的検証, 平成 14 年度～18 年度科学研究費補助金 研究成果報告書

謝辞

本研究を進めるにあたり，多くの方にご迷惑をおかけしたことをお詫びし，また，多大なるご尽力をいただいたことを心より感謝致します．

指導教官である古川勝先生には，本当に一生頭が上がりません．何の知識も能力もなかった私に最後まで根気強く，懇切丁寧に指導くださったおかげで，なんとか形だけでも修士論文を仕上げることができました．ありがとうございましたという言葉では表しきれないほどの感謝でいっぱいです．修士論文や学会資料などの執筆ひとつとっても，古川先生ほど本腰を入れて，丁寧に添削をしていらっしゃる方は失礼ながら他には見当たりませんでした．今後，社会人として生きていく自分の基礎になる部分までしっかり鍛えていただきました．

私は，古川研究室 1 代目という，重大な役目を持って入学させていただきました．入学するまでそのことは知らなかったのですが，形式上は吉田研究室の皆様とご一緒させていただいておりましたし，あまり深く背負い込むようなことではないのかもしれなかったのですが，自分の中では，組織の 1 代目の人間はよくも悪くもその礎を作ってしまうと思っていました．研究を進めていく上で，最低限必要な知識，技術，能力を全て持ち合わせていなかった自分は，いつの間にか自身に見切りをつけ，これ以上の迷惑をかけないためにも早く出ていくべきだと考えるようになりました．それと同時に，この最低レベルの自分にできることは，古川研究室の最低基準を作ることでした．後々入ってくる後輩に，古川先生が「… というくらいアホな

奴がおったんやけどなー，なんだかんだ言うて，ここまでできるようになったんやで．だから心配しなくて大丈夫やで．」とおっしゃることのできるくらいのレベルに自分を持っていける程度の努力をしようと心に決めていました．先生の相当なヘルプをいただきながらですが，結果曲がりなりにも学会発表 2 回に耐えられる程度の研究をすることができました．今後，古川研究室の卒業最低要件は学会発表 2.5 回になりました．という冗談はさておき，本当に実りある 2 年間を過ごさせていただき，改めてありがとうございました．今後の先生のご活躍と，研究室の発展を陰ながら応援させていただきたいと思います．

形式上は違う研究室の生徒であるにも関わらず，お忙しい時間を割いて，常に的確で重要なアドバイスをいただきました吉田善章先生には，本当に感謝しております．毎週の吉田先生のアドバイスのおかげで，行き詰っていた解析が進んだこともたびたびありました．吉田先生の水準で見れば，私は相当レベルの低い生徒であり，いちいち噛み砕いて説明されるのも大変だったことかと思います．このような私にもよく分かる言葉でご説明いただいたことで，一生わからないで終わると思っていた領域の物理も，最近ようやく理解ができるようになってきました．今後，何かものを考えていくときは，吉田先生の考え方やものいいを思い出しながら，スマートにやっていきたいと思います．

日本原子力研究開発機構の徳田伸二先生には，大変お忙しい中 1 日お時間をいただき，本研究の基幹となる重要なアドバイスをさせていただきました．たった 1 日という時間の中で，あんなにも有意義に研究が進んだ日は，思い返してもそうそう有りません．プラズマ理論研究の大御所である徳田先生に研究を見ていただき，励ましていただいたことは，至極光栄なことであり，一生の思い出にしようと思います．

THE AUSTRALIAN NATIONAL UNIVERSITY からいらっしゃっていた，R.L.Dewar

先生にもお忙しい時間を割いていただき、私のつたない英語での研究説明を聞いていただき、アドバイスいただきました。私の理解の範疇を超えており、あまりアドバイスの内容に対しご期待にそえなかったのが悔しいです。Dewar 先生は、3 か月間ご滞在され、日々の行事や食事もご一緒させていただきました。いつも、気さくに声を掛けていただき、楽しい話題を提供していただきました。プラズマコミュニティで有名な論文を何本も出していらっしゃる、これまた有名な大御所の先生と一緒にの空間で過ごせて光栄でした。本当にありがとうございました。

直接、研究などでお世話になる機会はあまりなくて残念でしたが、小川雄一先生の笑顔やお言葉で、いつも楽しい気分になりました。小川先生とは研究室も離れており、お会いできる機会も多くはなかったのですが、お会いしたときはいつでも明るくにこやかに話しかけていただき、こちらまでにこやかになれました。あのようなキャラクターの方は、そうそういらっしゃらないと思います。小川研究室のさらなる発展をお祈りしております。

森川惇二助教と、斎藤晴彦助教は実験グループのリーダーで、研究面でお話することはあまりごさいませんでした。同じプラズマ研究グループの一員として、大変よくしていただきました。森川さんのお話はいつもおもしろくためになり、楽しい気分になりました。研究的な場においても、飲み会などの場においても斎藤さんの一言はかなりキレがあり、ひそかに尊敬しておりました。お二方とも、お忙しい中、私のお相手を有難うございました。

秘書の梶村さん、北山さんは私にとって生活面で大きな支えとなっておりました。慣れない土地で、周りに一切同性がいない状況での2年間、秘書さんのところにお話しにいくのが何よりの楽しみでした。ご自身のお仕事もあったでしょうに、いやな顔ひとつせず私のたわいもない無駄話につきあっていただきました。本当にあり

がとうございました。

吉田・古川・小川・岡野研究室の先輩，同期，後輩は，公私ともにこの2年間の大部分の時間を共に過ごしました。こんなに楽しい大学院生活を送れるとは思っていませんでした。研究においても，たくさんの刺激をいただき，みなさんに追いつくまでには到底及ばなくとも，自分なりに楽しみながら遂行しつづけるための活力を得ていました。まだまだ，このご縁が終わるとは思っておりません。それぞれいろんな道に進み，お会いできる機会が物理的に減ってしまうことは確かですが，今後とも何らかの機会にまたお会いして，いつものように無茶できるのを楽しみにしております。

なお，両親には，25年間の支援本当に感謝いたします。人よりも社会に出るのが遅れましたが，この2年間で得た知識やスキル，そして人脈は，とてつもなく大きく，そして今後の人生において役に立つものであると感じます。

その他，ここには書ききれなかった，お世話になったすべての方々に深くお礼申し上げます。周りにいてくださるすべての人たちのおかげで，私は，楽しくない日など存在しないくらい充実して生きることができています。

繰り返しになりますが，皆様本当にありがとうございました。

学会発表など

- － 2008 年 9 月 日本物理学会秋季大会 領域 2 口頭発表
- － 2009 年 3 月 第 14 回 NEXT(数値トカマク) 研究会 ポスター発表予定
- － 2009 年 3 月 日本物理学会年次大会 領域 2 口頭発表予定