

# 大瀧モデルの均衡解について

田 中 淳 平\*

## 概 要

大瀧 (2005) などで提示された「大瀧モデル」の均衡解の頑健性を検討する。家計の効用関数 (の消費の部分) がコブダグラス型の場合、貨幣の非中立性を満たすケインズ的な均衡が成立することが大瀧教授によって示されているが、効用関数を対数線形型に変えるだけでその性質が大きく変化し、貨幣の中立性を満たす非ケインズ的な均衡が成立することを明らかにする。さらに、大瀧モデルを静学化すると効用関数がコブダグラス型の場合はそもそも均衡解が存在しなくなることを示し、オリジナルの大瀧モデルはそのような解の存在しない静学モデルを動学的に拡張してしまっている可能性があることを指摘する。

### キーワード

世代重複モデル, 貨幣の非中立性, ケインズ経済学のミクロ的基礎

## 1. はじめに

ケインズ経済学のミクロ的基礎づけの問題は、様々な論者によって論じられてきたマクロ経済学の重要なトピックスの一つであるが、その最近の成果の一つに大瀧教授の一連の研究 (例えば、大瀧 (2005), 大瀧 (2006), Otaki (2007), 大瀧 (2011) など) を挙げるができる。大瀧教授の目的は、不均衡モデルやニューケインジアンモデルのようにアドホックに価格硬直性を仮定することなく、ケインズ的な不完全雇用均衡を動学的一般均衡モデルを用いて表現することであり、そこで提示されたモデル (以後、大瀧モデルと呼

---

\* 北九州市立大学経済学部准教授 Eメール: j-tanaka@kitakyu-u.ac.jp

本稿の作成にあたって、東京大学の大瀧雅之教授にコメントをいただいたことに感謝する。言うまでもなく、本稿に含まれる誤りは筆者の責任に帰する。

ぶ) は、確かに一見するとその目的を達成しているように見える。では、大瀧モデルは本当にケインズ経済学のミクロ的基礎づけに成功していると言えるのか。本稿の目的はこの点を検討することにある。

大瀧モデルは世代重複的な貨幣経済モデルを土台として、財市場における独占的競争と労働市場における労使交渉を想定した動学的一般均衡モデルであるが、すでに大瀧教授によって示されているように、家計の効用関数（の消費の部分）がコブダグラス型の場合<sup>1)</sup>、物価水準の均衡経路が名目貨幣量とは独立に決定され（=貨幣の非中立性が成立し）、任意に固定された物価の初期値の下で、ケインズ的な性質を持った均衡解が生じる。まず第2節でこの結果を詳しく再述する。

問題は、そのような均衡解は果たして頑健なものなのか、という点である。第3節では、家計の効用関数をコブダグラス型から対数線形型へと変えるだけで、均衡解の性質が大きく変化し、今度は貨幣の中立性を満たす非ケインズ的な均衡が成立することを明らかにする。

なぜ効用関数を変えただけでそのような違いが生じるのだろうか。第4節では大瀧モデルを静学モデルへと単純化したモデルを用いてその点を考察する。ここでは、大瀧モデルを静学化すると効用関数がコブダグラス型の場合はそもそも均衡解が存在しなくなることを明らかにし、第2節で提示されたオリジナルの大瀧モデルは、そのような解の存在しない静学モデルを動学的に拡張してしまっているがゆえに不自然な性質<sup>2)</sup>の均衡解が導かれている可能性があることを指摘する。最後に第5節で本稿を締めくくる。

## 2. 大瀧モデルの均衡解：効用関数がコブダグラス型の場合

この節では、家計の効用関数（の消費の部分）がコブダグラス型に設定されたオリジナルの大瀧モデルを説明し、その均衡解を導出する。大瀧モデルは離散時間の世代重複モデルであり、各世代は若年期と老年期の2期間生きる。各世代の家計は同質的で、その家計総数を1に基準化する（すなわち各世代の家計は  $[0, 1]$  区間に連続的に存在している）。財市場は独占的競争的で、差別化された消費財が  $[0, 1]$  区間に連続的に存在しており、

---

1) 大瀧(2011)では効用関数の消費の部分がホモセティックであるようなより一般的な効用関数を用いられているが、本稿の目的はそれを対数効用型に変えるだけで均衡解の性質が一変することを示すことにあるので、以下では議論の分かりやすさを重視して効用関数の消費部分がコブダグラス型の場合と対数効用型の場合を対比させる形で議論を進めていく。

2) オリジナルの大瀧モデルでは、家計数(=人口)や企業の生産性、名目貨幣量などが時間を通じて一定であるにもかかわらず、均衡において物価水準が一定となるような定常解が存在しない。

第  $i$  財は第  $i$  企業によって独占的に供給される。労働市場ではある種の労使交渉が行われ、企業が労働者（＝若年家計）に留保賃金を提示し、若年家計がそれを受け入れる状況が想定される。若年期から老年期への貯蓄手段としては貨幣のみが想定され、若年家計は老年家計から貯蓄目的で貨幣を受け取り、自らが老年になった時、今度は財と引き換えに貨幣を若年世代へと手渡す。

本稿の目的は、効用関数の設定を変えたとき均衡解がどう変化するかを検討することにあるので、モデル設定はなるべくシンプルなのが望ましい。したがって、本稿では政府部門を捨象し、かつ名目貨幣量  $M$  は時間を通じて一定と仮定する。

以下、各経済主体の最適化行動を定式化し、その結果生じる市場均衡を導出する。

(世代  $t$  の行動)

世代  $t$ （＝期間  $t$  における若年世代）の効用最大化問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \text{Max}_{c_t^y(i), c_{t+1}^o(i)} \quad & U_t = (C_t^y)^\alpha (C_{t+1}^o)^{1-\alpha} - \beta L_s \\ \text{s.t.} \quad & \int_0^1 p_t(i) c_t^y(i) di + M_t^d = W_t L_s + \Pi_t, \quad \int_0^1 p_{t+1}(i) c_{t+1}^o(i) di = M_t^d \\ & (C_t^y \equiv \left[ \int_0^1 [c_t^y(i)]^{(\eta-1)/\eta} di \right]^{\eta/\eta-1}, \quad C_{t+1}^o \equiv \left[ \int_0^1 [c_{t+1}^o(i)]^{(\eta-1)/\eta} di \right]^{\eta/\eta-1}) \end{aligned}$$

ここで、 $p_t(i)$  は期間  $t$  における財  $i$  の名目価格、 $c_t^y(i)$  は期間  $t$  に若年家計が消費する財  $i$  の量、 $c_{t+1}^o(i)$  は期間  $t+1$  に老年家計が消費する財  $i$  の量、 $M_t^d$  は名目貨幣需要、 $W_t$  は名目賃金、 $L_s$  は労働供給、 $\Pi_t$  は名目利潤、 $C_t^y$ （および  $C_{t+1}^o$ ）は CES 型のサブ効用 (sub-utility) を意味する。サブ効用内の  $\eta$  は代替の弾力性で、 $\eta > 1$  を想定する。

この定式化から明らかなように、若年家計は労働者として企業に労働を供給して賃金を稼ぐと同時に、企業の所有者として利潤を受け取る。労働供給に関しては、家計は働く ( $L_s=1$ ) か、働かない ( $L_s=0$ ) かのどちらかを選択するものとする。そして、効用を最大にするように所得を若年期消費と（老年期消費に備えての）貨幣保有に振り分ける。

よく知られているように、この最適化問題は二段階に分けて解くことができ、第一段階においては、各財への支出総額を所与として、サブ効用を最大にするような各財の消費量（＝需要関数）を導出する。したがって、若年期の第  $i$  財の需要関数を求める問題、およびその解は以下ようになる（老年期の第  $i$  財の需要関数も全く同様に求められるので説明は省略する）。

$$\text{Max}_{c_t^y(i)} \quad C_t^y = \left[ \int_0^1 [c_t^y(i)]^{(\eta-1)/\eta} di \right]^{\eta/\eta-1} \quad \text{s.t.} \quad \int_0^1 p_t(i) c_t^y(i) di = E_t^y \quad (E_t^y : \text{所与})$$

大瀧モデルの均衡解について

$$(1) \quad c_t^y(i) = \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\eta} \frac{E_t^y}{P_t}, \quad P_t C_t^y = E_t^y \quad \left( P_t \equiv \left[ \int_0^1 [p_t(i)]^{1-\eta} di \right]^{1/(1-\eta)} \right)$$

この結果をふまえて、第二段階の問題は次のように定式化される。

$$\text{Max}_{C_t^y, C_{t+1}^o} U_t = (C_t^y)^\alpha (C_{t+1}^o)^{1-\alpha} - \beta L_s \quad \text{s.t.} \quad P_t C_t^y + M_t^d = W_t L_s + \Pi_t, \quad P_{t+1} C_{t+1}^o = M_t^d$$

家計が働く場合は  $L_s=1$  とおいてこの問題を解けばいいので、その場合の最適計画と間接効用関数はそれぞれ以下のようになる。

$$(2) \quad P_t C_t^y = \alpha [W_t + \Pi_t], \quad M_t^d (= P_{t+1} C_{t+1}^o) = (1-\alpha) [W_t + \Pi_t]$$

$$U_t^J = \frac{A(W_t + \Pi_t)}{(P_t)^\alpha (P_{t+1})^{1-\alpha}} - \beta \quad \left( A \equiv \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} \right)$$

他方、働かない場合は  $L_s=0$  とおいて上の問題を解けばいいので

$$(3) \quad P_t C_t^y = \alpha \Pi_t, \quad M_t^d (= P_{t+1} C_{t+1}^o) = (1-\alpha) \Pi_t$$

$$U_t^{NJ} = \frac{A \Pi_t}{(P_t)^\alpha (P_{t+1})^{1-\alpha}}$$

が成立する。したがって  $U_t^J = U_t^{NJ}$  を満たす名目留保賃金は以下のようになる。

$$(4) \quad W_t^R = A^{-1} \beta (P_t)^\alpha (P_{t+1})^{1-\alpha}$$

大瀧 (2005) の第2章では、この  $W_t^R$  を労働者 (= 若年家計) の威嚇点としたナッシュ交渉を定式化し、名目賃金が (労働者の交渉力の分だけ)  $W_t^R$  よりも高くなるようなモデルを検討しているが、そのような交渉過程を捨象しても大瀧モデルの基本特性に変化はないことから、大瀧 (2006) 以降はもっぱら、企業が  $W_t^R$  を労働者に提示し、労働者がそれを受け入れる状況 (= 労働者の交渉力がゼロの状況) を想定したモデルが用いられている<sup>3)</sup>。本稿でもそれに従い、名目賃金は (4) で決まる状況を想定する。

(世代  $t-1$  の行動)

世代  $t-1$  (= 期間  $t$  における老年世代) の効用最大化問題は次のように定式化される。

3) 大瀧 (2011, 第1章) では、この  $W_t^R$  が成立する状況を「(不完全雇用の) ワルラス均衡」と呼んでいるが、その呼び方は適切とは言いがたい。本文中で述べたように、この  $W_t^R$  が成立する状況はナッシュ交渉解の極限的なケース (= 家計の交渉力がゼロのケース) と理解すべきであり、この解と (大瀧モデルの設定の下での) ワルラス均衡は一般には一致しない (ただし、労働の不効用を意味する  $\beta$  が十分に大きい場合、両者は一致する)。

$$\text{Max}_{c_t^o(i)} \quad C_t^o = \left[ \int_0^1 [c_t^o(i)]^{(\eta-1)/\eta} di \right]^{\eta/\eta-1} \quad \text{s.t.} \quad \int_0^1 p_t(i) c_t^o(i) di = M$$

すなわち、老年世代は働かず、サブ効用  $C_t^o$  を最大にするように若年期から持ち越した貨幣  $M$  を各財の消費に振り分けるので、第  $i$  財の需要関数は以下ようになる。

$$(5) \quad c_t^o(i) = \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\eta} \frac{M}{P_t}, \quad P_t C_t^o = M$$

(企業の行動)

財  $i$  は企業  $i$  によって独占的に供給されるので、企業  $i$  の利潤最大化問題は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Max}_{p_t(i)} \quad & \Pi_t(i) = p_t(i) y_t(i) - W_t^R l_t(i) \\ \text{s.t.} \quad & y_t(i) = l_t(i), \quad y_t(i) = c_t^y(i) + c_t^o(i) = \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\eta} \left( C_t^y + \frac{M}{P_t} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $y_t(i)$  は企業  $i$  の期間  $t$  における生産量、 $l_t(i)$  は企業  $i$  の期間  $t$  における労働投入量を意味している。すなわち、企業  $i$  は線形の生産関数と、財  $i$  に対する集計需要関数(これは (1) と (5) から導かれる) を制約として、自らの利潤を最大するように財  $i$  の価格を決定する。したがって最適価格は以下のようになる。

$$(6) \quad p_t(i) = P_t = \frac{\eta}{\eta-1} W_t^R$$

企業  $i$  の設定する財  $i$  の最適価格は添え字  $i$  には依存しないので、 $p_t(i) = P_t$  が成立する点に注意せよ。また、(1)、(5) および  $p_t(i) = P_t$  より、以下が成立する。

$$(7) \quad c_t^y(i) = C_t^y, \quad c_t^o(i) = C_t^o = \frac{M}{P_t}, \quad y_t(i) (= y_t) = C_t^y + \frac{M}{P_t}$$

(市場均衡)

以上で各経済主体の行動を論じ終えたので、市場均衡を導出しよう。まず、(4) と (6) から、物価水準の動学に関して以下が成立する。

$$(8) \quad P_{t+1} = \mu P_t \quad \left( \mu = \left( A^{-1} \beta \frac{\eta}{\eta-1} \right)^{-1/(1-\alpha)} \right)$$

したがって、このモデルにおいて粗インフレ率 ( $=P_{t+1}/P_t$ ) は名目貨幣量  $M$  とは独立に決定され、しかも、一般に  $\mu \neq 1$  なので、このモデルには (物価水準  $P_t$  が通時的に一定という意味での) 定常解が存在せず、物価は上昇し続けるか、もしくは下落し続けるかのどちらかになることが分かる。さらに、このモデルには物価に関する横断性条件 (= 終点条件) が存在しないため物価の初期値を任意に定めることができる。以下では、初期時点 (= 期間  $t$ ) の物価を任意に  $\bar{P}$  と定めることにしよう。このとき、期間  $t$  の均衡において完全雇用が成立しなくなることを次のように示すことができる。

まず、期間  $t$  において完全雇用が成立する (= すべての若年家計が  $L_s=1$  を選択する) と仮定して議論を進めてみよう。この場合、供給サイドから見た各企業の生産量は以下のようになる。

$$l_t(i) = y_t(i) = 1$$

他方、需要サイドから見た生産量は (7) の第3式より

$$y_t(i) = c_t^y(i) + c_t^o(i) = C_t^y + \frac{M}{\bar{P}}$$

と書ける。ここで、 $C_t^y$  は (2) および貨幣の需給均衡条件  $M_t^d = M$  より

$$C_t^y = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{M}{\bar{P}}$$

と表せるので、結局、需要サイドから見た生産量は

$$y_t(i) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{M}{\bar{P}}$$

となり、これは供給サイドから見た生産量  $y_t(i) = 1$  とは一般に一致しないので、期間  $t$  の物価が任意の値に固定されたとき、「完全雇用が成立する」という仮定が矛盾を生むことが示された。

では、このモデルの均衡生産量 (不完全雇用均衡) はどのような水準に決まるのか。この点を検討するため、若年家計の内、働く家計の割合を  $x$  ( $0 < x < 1$ ) とおこう。このとき、供給サイドから見た各企業の生産量は

$$l_t(i) = y_t(i) = x$$

となり、一方、需要サイドから見た生産量は先ほどの同様

$$y_t(i) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{M}{\bar{P}}$$

と表せる (詳細な導出過程は付録1を見よ) ので、均衡における各企業の生産量は

$$x = \frac{1}{1-\alpha} \frac{M}{\bar{P}}$$

となる<sup>4)</sup>。したがって、確かにこの均衡において貨幣の非中立性が成立し、名目貨幣量の増加はその乗数倍の生産量の増加を生み出すことが確認できるのである。

### 3. 大瀧モデルの均衡解：効用関数が対数線形型の場合

前節で、大瀧モデルではアドホックに価格硬直性を仮定することなく、貨幣の非中立性を満たすケインズ的な不完全雇用均衡を導きうることを確認した。問題は、果たしてその結論が頑健なものなのかという点である。この節では家計の効用関数を

$$(9) \quad U_t = \alpha \log C_t^y + (1-\alpha) \log C_{t+1}^o - \beta L_s$$

と変更するだけで、もはや前節の結論が成立しなくなることを明らかにする。

家計の効用関数が(9)で与えられる場合、世代 $t$ の効用最大化問題の第一段階の結果は前節と同様、以下で与えられる。

$$(10) \quad c_t^y(i) = \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\eta} C_t^y$$

一方、第二段階の問題は、働く場合 ( $L_s = 1$ ) の最適計画と間接効用はそれぞれ

$$(11) \quad P_t C_t^y = \alpha [W_t + \Pi_t], \quad M_t^d (= P_{t+1} C_{t+1}^o) = (1-\alpha) [W_t + \Pi_t]$$

$$U_t^J = \log \left[ \frac{A(W_t + \Pi_t)}{(P_t)^\alpha (P_{t+1})^{1-\alpha}} \right] - \beta \quad (A \equiv \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha})$$

となり、働かない場合 ( $L_s = 0$ ) の最適計画と間接効用はそれぞれ

$$(12) \quad P_t C_t^y = \alpha \Pi_t, \quad M_t^d (= P_{t+1} C_{t+1}^o) = (1-\alpha) \Pi_t$$

$$U_t^{NJ} = \log \left[ \frac{A \Pi_t}{(P_t)^\alpha (P_{t+1})^{1-\alpha}} \right]$$

4) したがって、解の有意性のためには初期時点の物価水準は  $\bar{P} > M/(1-\alpha)$  を満たすものでなければならない。なお、その結果生じる失業は、「その賃金で働きたいのに働けない」という非自発的な性質のものではなく、「その賃金なら働いても働かなくても同じなので働かない」という自発的な性質のものである点に注意が必要である。

となるので、名目留保賃金は以下のようなになる。

$$(13) \quad W_t^R = (e^\beta - 1)\Pi_t$$

したがって、効用関数対数線形型の場合は、留保賃金は物価ではなく利潤に比例する形になる。これは（働かずとも得られる）名目利潤が大きいほど、企業が高い留保賃金を提示しないと家計が働く気を起こさないからである。

なお、世代  $t-1$  や企業の行動は前節と同じなので、その結果のみを再掲しておく。

$$(14) \quad c_t^o(i) = \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\eta} \frac{M}{P_t}, \quad P_t C_t^o = M$$

$$(15) \quad p_t(i) = P_t = \frac{\eta}{\eta-1} W_t^R$$

$$(16) \quad c_t^y(i) = C_t^y, \quad c_t^o(i) = C_t^o = \frac{M}{P_t}, \quad y_t(i) (= y_t) = C_t^y + \frac{M}{P_t}$$

最後に市場均衡を検討しよう。まず、(13) と (15) から以下が成立する。

$$(17) \quad P_t = \frac{\eta}{\eta-1} (e^\beta - 1)\Pi_t$$

効用関数対数線形型の場合も、前節と同様、期間  $t$  の均衡において一般に完全雇用が成立しないことを背理法を用いて証明することができる。完全雇用が成立する（=すべての若年家計が  $L_s = 1$  を選択する）と仮定すると、各企業の生産量は供給サイドから

$$(18) \quad l_t(i) = y_t(i) = 1$$

となる。他方、需要サイドから見た生産量は (16) より

$$y_t(i) = c_t^y(i) + c_t^o(i) = C_t^y + \frac{M}{P_t}$$

と表せるが、前節と同様、 $C_t^y$  は (11) および貨幣の需給均衡条件  $M_t^d = M$  から

$$C_t^y = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{M}{P_t}$$

と書けるので、結局、以下が成立する。

$$(19) \quad y_t(i) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{M}{P_t}$$

したがって、(18) と (19) より完全雇用が成立するためには



$$\frac{M}{P_t} = 1 - \alpha$$

が満たされなければならないが、(11) の第2式 (=貨幣需要)、(13)、(17) および均衡条件  $M_t^d = M$  より、一般に

$$\frac{M}{P_t} = (1 - \alpha) \frac{\eta - 1}{\eta} \frac{e^\beta}{e^\beta - 1} \quad (\neq 1 - \alpha)$$

となるので、完全雇用が成立するという仮定は矛盾することが分かる<sup>5)</sup>。

では、不完全雇用下における均衡生産量はどのような水準に決まるのか。前節と同様、若年家計の内、働く家計の割合を  $x$  ( $0 < x < 1$ ) とおくと、供給サイドから見た生産量は

$$(18) \quad l_t(i) = y_t(i) = x$$

となる一方、需要サイドから見た生産量は先ほどの同様

$$(19) \quad y_t(i) = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{M}{P_t}$$

となることを示すことができる (導出の仕方は付録1を見よ)。また、この場合の貨幣需要関数は

$$(20) \quad M_t^d = (1 - \alpha) \frac{\eta - 1}{\eta} \frac{xe^\beta + (1 - x)}{e^\beta - 1} P_t$$

と計算でき (導出の仕方は付録2を見よ)、これに均衡条件  $M_t^d = M$  を加味することで

$$(21) \quad \frac{M}{P_t} = (1 - \alpha) \frac{\eta - 1}{\eta} \frac{xe^\beta + (1 - x)}{e^\beta - 1}$$

が成立する。したがって、(18)、(19)、(21) より、均衡における各企業の生産量は

$$x = \frac{\eta - 1}{e^\beta - 1}$$

となり、この場合、均衡生産量は名目貨幣量  $M$  には依存しないことが分かる<sup>6)</sup>。また、均衡における実質残高は

5) たまたま  $e^\beta = \eta$  が成立する場合に限り、均衡において完全雇用が成立する。しかし、このモデルには常に  $e^\beta = \eta$  を成立させるようなメカニズムは存在しないので、一般には完全雇用は成立しない。

6) 各企業の生産量  $x$  を導出するよりシンプルな方法は以下のとおり。このモデルにおいて各企業の利潤  $\Pi_t(i)$  は、利潤の定義式、生産関数、および最適価格 (6) より、 $\Pi_t(i) = P_t y_t(i) / \eta$  となる。これと (17) から、ダイレクトに  $y_t(i)$  ( $= x$ )  $= (\eta - 1) / (e^\beta - 1)$  が得られる。この方法を指摘していただいた大瀧教授に感謝する。なお、解の有意性のためには  $e^\beta > \eta$  が満たされていなければならない。

$$\frac{M}{P_t} = (1-\alpha) \frac{\eta-1}{e^\beta - 1}$$

となり、物価は名目貨幣量に比例する（＝貨幣の中立性が成立する）ことも確認できる。したがって、この均衡解は生産量が完全雇用以下の水準にあるとはいえ、その性質は新古典派的な均衡に近いと考えられる。以上、効用関数をコブダグラス型から対数線形型に変えるだけで、均衡解の性質が根本的に変化することが明らかになった。

#### 4. 静学モデルでの再検討

ここまで、大瀧モデルの効用関数をコブダグラス型から対数線形型に変えるだけで、均衡解の性質が大きく変化することを見てきた。なぜこのような結果が生じるのか。この点に関する筆者の見解は、そもそもオリジナルの大瀧モデル（＝効用関数がコブダグラス型のケース）で考察されている均衡解はある意味で特異な性質のものだから、というものである。第2節で示したように、オリジナルの大瀧モデルでは、家計数（＝人口）や各企業の生産性、名目貨幣量などがすべて通時的に一定であるにもかかわらず、定常解が存在しない（＝均衡物価水準が通時的に一定にならない）という不自然な結果が成立する。この不自然さは、大瀧モデルを静学モデルへと単純化し、その均衡を検討することでいっそう浮き彫りになる。以下、大瀧モデルの静学版を検討しよう。

各家計は同質的で、その総数を1に基準化する（すなわち家計は  $[0, 1]$  区間に連続的に存在している）。家計の効用最大化問題は以下のようなになる。

$$\text{Max}_{c_i, M^d} U = (C)^\alpha \left( \frac{M^d}{P} \right)^{1-\alpha} - \beta L_s \quad \left( C \equiv \left[ \int_0^1 (c_i)^{(\eta-1)/\eta} di \right]^{\eta/\eta-1} \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \int_0^1 p_i c_i di + M^d = WL_s + \Pi + M$$

ここで各記号の意味はこれまでと同様である。家計は労働者として賃金を稼ぐと同時に企業の所有者として利潤を受け取り、さらに期首に名目貨幣量を  $M$  を賦与されている。そして、それらを自らの効用を最大にするように各財への支出と期末に持ち越す貨幣  $M^d$  とに振り分ける。静学モデルなので、貨幣需要を生み出す仕掛けとして貨幣効用モデル (money in the utility) を仮定している。

以前と同様、この問題は二段階に分けて解くことができ、第一段階の解は以下のようなになる。

$$(24) \quad c_i = \left( \frac{p_i}{P} \right)^{-\eta} \frac{E}{P}, \quad PC = E \quad \left( P \equiv \left[ \int_0^1 (p_i)^{1-\eta} di \right]^{1/1-\eta}, \quad E \equiv \int_0^1 p_i c_i di \right)$$

また、第二段階の問題は

$$\text{Max}_{C, M^d} \quad U = (C)^\alpha \left( \frac{M^d}{P} \right)^{1-\alpha} - \beta L_s \quad \text{s.t.} \quad PC + M^d = WL_s + \Pi + M$$

となるので、家計が働く場合 ( $L_s=1$ ) の最適計画と間接効用は

$$PC = \alpha [W + \Pi + M], \quad M^d = (1-\alpha) [W + \Pi + M]$$

$$U^J = \frac{A(W + \Pi + M)}{P} - \beta \quad (A \equiv \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha})$$

となり、家計が働かない場合 ( $L_s=0$ ) の最適計画と間接効用は

$$PC = \alpha [\Pi + M], \quad M^d = (1-\alpha) [\Pi + M]$$

$$U^{NJ} = \frac{A(\Pi + M)}{P}$$

となる。したがって留保賃金は以下のようになる。

$$(25) \quad W^R = A^{-1} \beta P$$

次に、企業  $i$  の利潤最大化問題は以下のように定式化される。

$$\text{Max}_{p_i} \quad \Pi_i = p_i y_i - W^R l_i \quad \text{s.t.} \quad y_i = l_i, \quad y_i = c_i = \left( \frac{p_i}{P} \right)^{-\eta} C$$

したがって、企業  $i$  の設定する最適価格は以下のようになる。

$$(26) \quad p_i (= P) = \frac{\eta}{\eta-1} W^R$$

しかし、(25) と (26) を同時に満たす物価  $P$  と留保賃金  $W^R$  の組み合わせは ( $P = W^R = 0$  以外は) 存在しないので、効用関数がコブダグラス型の場合、この静学モデルには解が存在しないことが分かる。

以上の結果から推察できることは、オリジナルの大瀧モデルに定常解が存在しないという不自然な結果は、その静学版にそもそも解が存在しないという結果に対応したものではないか、ということである。そうであれば、オリジナルの大瀧モデルは解が存在しない静学モデルを動的的に拡張したモデルということになり、静学モデルには現れない非定常解 (8) が存在するとはいえ、モデルの妥当性自体に疑問の余地が生じることになる。

ちなみに効用関数が対数線形型の場合、すなわち

$$U = \alpha \log C + (1-\alpha) \log \left( \frac{M^d}{P} \right) - \beta L_s$$

で与えられる場合、以下の結果が成立することを確認できる（導出の詳細は付録3を参照せよ）。

- ・ 名目留保賃金は、 $W^R = (e^\beta - 1)[\Pi + M]$
- ・ 均衡において完全雇用は成立しない
- ・ 均衡における各企業の生産量は、 $x = \frac{(\eta - 1)\alpha}{(e^\beta - 1)[(1 - \alpha)\eta + \alpha]}$
- ・ 均衡において貨幣の中立性が成立する

これらの結果は第3節で検討したその動学版の諸結果と正確に対応しており、ゆえに効用関数が対数線形型の場合は、導かれる均衡解の性質は静学モデルと動学モデルとで一致することが分かる。こうした点からも、オリジナルの大瀧モデルの非定常解(8)はかなり特殊な性質のものではないかと推察されるのである。

## 5. おわりに

大瀧モデルはケインズ経済学の新たなミクロ的基礎付けに関する興味深い試みであるが、それが基礎付けに成功していると言えるためには、貨幣の非中立性や乗数効果といったモデルのケインズ的な性質が、多少のモデル設定の変更とは関係なく頑健に成立する必要がある。しかし本稿で明らかにしたように、大瀧モデルでは効用関数の想定をコブダグラス型から対数線形型へと変えただけでそうしたケインズ的な特性が失われるという点で頑健性が満たされておらず、この意味でこのモデルはケインズ経済学の基礎付けとしては必ずしも成功していないのではないかと、というのが筆者の見解である。

### 付録1

この付録1では、第2節（および第3節）のモデルにおいて、若年家計のうち働く家計の割合を  $x$  ( $0 < x < 1$ ) としたとき、需要サイドから見た各企業の生産量が

$$(A.1.1) \quad y_t(i) = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{M}{P}$$

と表せることを示す。

世代  $t$  の家計の行動から検討する。(1), (2) および  $p_t(i) = P_t$  から、家計が働く場合 ( $L_s = 1$ ) は以下が成立する。

$$c_{t,J}^y(i) = C_{t,J}^y$$

$$P_t C_{t,J}^y = \alpha [W_t^R + \Pi_t], \quad M_{t,J}^d = (1 - \alpha) [W_t^R + \Pi_t] \rightarrow C_{t,J}^y = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{M_{t,J}^d}{P_t}$$

ここで、各記号の添え字の  $J$  は、それが働いている家計の変数であることを意味している。一方、(1)、(3) および  $p_t(i) = P_t$  から、家計が働かない場合 ( $L_s = 0$ ) は以下が成立する。

$$c_{t,NJ}^y(i) = C_{t,NJ}^y$$

$$P_t C_{t,NJ}^y = \alpha \Pi_t, \quad M_{t,NJ}^d = (1-\alpha) \Pi_t \quad \rightarrow \quad C_{t,NJ}^y = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{M_{t,NJ}^d}{P_t}$$

ここで、各記号の添え字の  $NJ$  は、それが働いていない家計の変数であることを意味している。

したがって、第  $i$  財に対する世代  $t$  の集計需要  $c_t^y(i)$  は以下のようになる。

$$c_t^y(i) \equiv x c_{t,J}^y(i) + (1-x) c_{t,NJ}^y(i) = x C_{t,J}^y + (1-x) C_{t,NJ}^y = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{M_t^d}{P_t}$$

ここで、 $M_t^d$  は世代  $t$  の集計貨幣需要で  $M_t^d \equiv x M_{t,J}^d + (1-x) M_{t,NJ}^d$  である。さらに均衡においては  $M_t^d = M$  が成立するので、 $c_t^y(i)$  は以下のように書き直すことができる。

$$(A.1.2) \quad c_t^y(i) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{M}{P_t}$$

次に、世代  $t-1$  の家計の行動であるが、(5) および  $p_t(i) = P_t$  より、前の期（期間  $t-1$ ）に働いた家計の第  $i$  財の老年期消費と、前期に働かなかった家計の第  $i$  財の老年期消費はそれぞれ以下のようになる。

$$c_{t,J}^o(i) = \frac{M_{t-1,J}^d}{P_t}, \quad c_{t,NJ}^o(i) = \frac{M_{t-1,NJ}^d}{P_t}$$

ここで、 $x M_{t-1,J}^d + (1-x) M_{t-1,NJ}^d \equiv M$  であることに注意すると、第  $i$  財に対する世代  $t-1$  の集計需要  $c_t^o(i)$  は以下のようになる。

$$(A.1.3) \quad c_t^o(i) \equiv x c_{t,J}^o(i) + (1-x) c_{t,NJ}^o(i) = \frac{M}{P_t}$$

したがって、(A.1.2) と (A.1.3) より、需要サイドから見た生産量は

$$y_t(i) = c_t^y(i) + c_t^o(i) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{M}{P_t}$$

となり、これに  $P_t = \bar{P}$  を代入することで (A.1.1) が成立する。

## 付録 2

この付録 2 では、第 3 節の (22) 式を導出する。(11)、(12)、(13) より、働く家計の貨幣需要  $M_{t,J}^d$  と働かない家計の貨幣需要  $M_{t,NJ}^d$  はそれぞれ以下のようになる。

$$M_{t,J}^d = (1-\alpha) e^\beta \Pi_t, \quad M_{t,NJ}^d = (1-\alpha) \Pi_t$$

大瀧モデルの均衡解について

したがって世代  $t$  の集計貨幣需要  $M_t^d$  は (17) を用いることで

$$M_t^d \equiv xM_{t,J}^d + (1-x)M_{t,NJ}^d = (1-\alpha) \frac{\eta-1}{\eta} \frac{xe^\beta + (1-x)}{e^\beta - 1} P_t$$

と計算でき、よって (22) が導かれる。

### 付録 3

ここでは、効用関数を対数線形型に設定した静学版大瀧モデルの均衡解を導出する。

家計の効用最大化問題の第一段階は、本文中で議論した効用関数がコブダグラス型の場合と同様であり、各財の需要関数は (24) となる (以下、その結果を再掲しておく)。

$$(A.3.1) \quad c_i = \left( \frac{p_i}{P} \right)^{-\eta} C \quad (P \equiv \left[ \int_0^1 (p_i)^{1-\eta} di \right]^{1/(1-\eta)})$$

効用最大化の第二段階については、家計が働く場合 ( $L_s=1$ ) の最適計画と間接効用関数は

$$(A.3.2) \quad PC = \alpha [W + \Pi + M], \quad M^d = (1-\alpha) [W + \Pi + M]$$

$$U^J = \log \left[ \frac{A(W + \Pi + M)}{P} \right] - \beta \quad (A \equiv \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha})$$

となり、働かない場合 ( $L_s=0$ ) の最適計画と間接効用関数は

$$(A.3.3) \quad PC = \alpha [\Pi + M], \quad M^d = (1-\alpha) [\Pi + M]$$

$$U^{NJ} = \log \left[ \frac{A(\Pi + M)}{P} \right]$$

となるので、留保賃金は以下のようになる。

$$(A.3.4) \quad W^R = (e^\beta - 1) [\Pi + M]$$

次に、各企業の利潤最大化問題は、効用関数がコブダグラス型の場合と全く同じであり、最適価格は (26) で与えられる (以下、その結果を再掲しておく)。

$$(26) \quad p_i = P = \frac{\eta}{\eta-1} W^R$$

したがって、(A.3.4) と (26) より以下が成立する。

$$(A.3.5) \quad P = \frac{\eta}{\eta-1} (e^\beta - 1) [\Pi + M]$$

最後に、市場均衡を導出する。まず、均衡において完全雇用が成立しないことを背理法を用いて証明しよう。完全雇用が成立する場合 (すなわちすべての家計が  $L_s=1$  を選択する場合)、各企業の生産量は供給サイドから

$$l_i = y_i = 1$$

となる。他方、需要サイドから見ると、(A.3.1),  $p_i = P$  および (A.3.2) より

$$y_i = c_i = C = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{M^d}{P}$$

と表せるが、(A.3.2), (A.3.4), (A.3.5) より

$$M^d = (1-\alpha) \frac{\eta-1}{\eta} \frac{e^\beta}{e^\beta-1} P$$

が成立するので、結局、需要サイドから見た各企業の生産量は

$$y_i = \alpha \frac{\eta-1}{\eta} \frac{e^\beta}{e^\beta-1} \quad (\neq 1)$$

となり、完全雇用が成立するという仮定は矛盾を生むことが分かる。

次に、若年家計の内、働く家計の割合を  $x$  ( $0 < x < 1$ ) とおいて均衡生産量を導出しよう。

この場合、供給サイドから見た各企業の生産量は

$$(A.3.6) \quad l_i = y_i = x$$

となる。一方、需要サイドから見た生産量は付録1と同様の手順を踏むことで

$$y_i = c_i = xc_{i,J} + (1-x)c_{i,NJ} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{M^d}{P} \quad (\text{ここで, } M^d \equiv xM_J^d + (1-x)M_{NJ}^d)$$

となるが、(A.3.2), (A.3.3), (A.3.4), (A.3.5) より

$$M^d = (1-\alpha) \frac{\eta-1}{\eta} \frac{xe^\beta + (1-x)}{e^\beta-1} P$$

が成立するので、需要サイドから見た生産量は

$$(A.3.7) \quad y_i = \alpha \frac{\eta-1}{\eta} \frac{xe^\beta + (1-x)}{e^\beta-1}$$

と表わすことができる。したがって、(A.3.6) と (A.3.7) より均衡における生産量  $x$  と実質貨幣残高  $M/P$  はそれぞれ

$$x = \frac{(\eta-1)\alpha}{(e^\beta-1)[(1-\alpha)\eta+\alpha]}, \quad \frac{M}{P} = \frac{(\eta-1)(1-\alpha)}{(e^\beta-1)[(1-\alpha)\eta+\alpha]}$$

となり、これより、均衡においては貨幣の中立性を満たす不完全雇用解が成立することが分かる。

## 参考文献

- 大瀧雅之 (2005) 『動学的一般均衡のマクロ経済学』 東京大学出版会  
(2006) 「乗数理論のミクロ的基礎について」 社会科学研究, 第 57 卷, 第 5・6 合併号  
(2011) 『貨幣・雇用理論の基礎』 劉草書房
- Otaki, M. (2007) “The Dynamically Extended Keynesian Cross and the Welfare-improving Fiscal Policy”,  
*Economics Letters*, Vol.96, pp23-29