消費の生涯効用関数が相似拡大的である場合の Otaki (2007) モデルの性質

大　瀧　雅　之

1. はじめに

田中 (2014) では Otaki (2007) およびその拡張版である大瀧 (2011) の批判が為され,「基本方程式」(加藤 2011) が成立しない場合として，消費の生涯効用関数が対数関数となる場合について,「反例」が挙げられている．田中氏はこれをもって，筆者が構築した理論が極めて脆弱な根拠しか持たないと批判する．

本稿では，この批判に答えるために，相似拡大性を前提とした場合の基本方程式を書き下し，その性質を検討する．その結果

(ｉ) 一次同次の場合を除く相似拡大的な生涯効用関数の場合には，名目留保賃金決定に名目利潤が関与する．

(ⅱ) しかし田中氏が「反例」として挙げている, 名目留保賃金が名目利潤に正比例するケースは厳密に，一次同次関数を相似拡大関数に変換する関数 f が対数関数である場合に限られる．

(ⅲ) 一般に生涯物価指数 $\psi(P_1, P_2)$ の上昇による名目留保賃金の直接的上昇圧力を，実質利潤の低下に伴う名目留保賃金の低下圧力が完全に相殺してしまう（田中氏の「反例」はまさにこれに該当するが）ことはなく，名目留保賃金には名目利潤のみならず，生涯物価指数 $\psi(P_1, P_2)$ が独立に影響を与える．特に f が冪関数であり，かつ，名目留保賃金が十分小さな値を取るとき，加藤の意味での「基本方程式」が成立し，Otaki (2007)，大瀧 (2011) での議論が，相似拡大的な生涯効用関数のもとでも，展開できることが明らかにされる．

本稿の構成は, 以下の通りである．第二節では田中氏のモデルとの対比を意識しながら，筆者が展開してきた理論を，相似拡大関数へ書き下し，その性質を検討する．第三節は結

論である．

2. モデル

当該家計の生涯消費関数を，生涯消費に関し相似拡大的であり，かつ労働とは加法分離的でかつ労働時間の調整は生じないものとする．なおこれらの仮定の妥当性については，Otaki（2015）の Section2 で論じておいたので，それを参照いただきたい．これらの仮定の下で，当該家計の生涯効用関数 U は，

$$U \equiv f\left(u\left(c_1, c_2\right)\right) - \delta_1 \cdot \alpha \tag{1}$$

と定義できる．（c_1，c_2）は現在および将来の合成財の消費量である．α は定められた労働時間から生ずる労働の不効用であり，δ_1 は定義関数であり，働いた時に 1 失業時に 0 の値をとる．

このとき生涯消費に関する間接効用関数 IU は，

$$IU \equiv f\left(\frac{W + \Pi}{\psi\left(p_1, p_2\right)}\right) \tag{2}$$

と書くことができる．ここで（P_1，P_2）は各期の合成財に関する物価指数であり，ψ は一次同次関数である．W と Π はそれぞれ一人当たりの名目賃金と分配される名目利潤を表している．ここで (1) と (2) を用いることで, 名目留保賃金 W^R は以下のように定義される．すなわち，

$$f\left(\frac{W^R + \Pi}{\psi\left(p_1, p_2\right)}\right) - f\left(\frac{\Pi}{\psi\left(p_1, p_2\right)}\right) = \alpha \tag{3}$$

である．f は単調増加の連続関数であることしか分かっていないから，ここで無限回微分可能であるとして，かつ α が十分小さく対応する W^R も十分 0 に近いとして，(3) の左辺を $W^R = 0$ の周りで，一次の項までテイラー展開しよう．

すると，

$$W^R = \frac{\alpha \cdot \psi\left(p_1, p_2\right)}{f'\left(\frac{\Pi}{\psi\left(p_1, p_2\right)}\right)} \tag{4}$$

という名目留保賃金に関する公式が得られる．

確かに，(4) から明らかなように，一次同次の場合（f' が定数の場合）とは異なり，より一般的な相似拡大関数の場合には，名目利潤 Π が留保賃金の決定に影響を与える様が看取できる．さらに所得の限界効用が逓減すると仮定するならば，すなわち $f'' < 0$ とすれば，

名目利潤の上昇は，余暇の効用を高めることを通じて，家計が要求する名目留保賃金を上昇させることもわかる．

さて田中氏が想定しているように，が対数関数であるとしよう．このとき（4）は，

$$W^R = \alpha \Pi \tag{5}$$

となり，確かに名目留保賃金は名目利潤に正比例し，生涯物価指数$\psi(P_1, P_2)$とは無関係となり，「基本方程式」は成立しなくなる．この限りで田中氏の主張は正しい．しかし問題はこれからである．田中氏はfが対数関数の場合に，「基本方程式」が成立しないことを以て，筆者の理論が一般性を持たないとしている．

だが逆に氏の主張が一般性を持つなら，（5）の性質を持つ関数が数多存在しなければならない．経済学的に表現すれば，（4）に見られるように，他の条件を一定とすれば，生涯物価指数$\psi(P_1, P_2)$の上昇にスライドして名目留保賃金には上昇圧力がかかる．これを打ち消すのが（4）に見られる実質利潤の低下であり，これが余暇の機会費用を高めることを通じて，名目留保賃金の上昇に歯止めをかけるのである．fが対数関数であると，たまたまこの効果が完全に打ち消し合い，（5）のような式が現れるのである．

因みに，名目留保賃金の物価スライド圧力と実質利潤低下の余暇の機会費用低下圧力が釣り合うのは，（4）から明らかなように，fが $\dfrac{1}{\psi}$ に関する微分方程式

$$\frac{1}{\psi} = \frac{1}{f'\left(\dfrac{\Pi}{\psi}\right)} \Leftrightarrow f'\left(\frac{\Pi}{\psi}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{\psi}} \tag{6}$$

の解でなければならない．容易に分かるように（6）の解は，

$$f\left(\frac{\Pi}{\psi}\right) = \Pi \cdot \ln \frac{1}{\psi} \tag{7}$$

となりfは対数関数となる．言い換えれば，田中氏の例，すなわち名目留保賃金が生涯物価指数から独立となるのは，氏が提示したfが対数関数の場合に限られるのである．したがって，わずか一例をもってして，筆者の提示した理論が脆弱であると主張することは，些か誇張ではなかろうか．

筆者の主張をさらに補強するために，取り扱いが平易である冪関数の場合を考えよう．すなわち，

$$f(x) \equiv x^{\beta}, \beta > 0 \tag{8}$$

の場合である．この時名目留保賃金の決定式（4）は，

$$W^R = \frac{\alpha}{\beta}\Pi^{1-\beta}\left[\psi\left(p_1, p_2\right)\right]^{\beta} \tag{9}$$

となる．最大化された均衡名目利潤Π^*は，（8）から，

$$\Pi^* = \frac{\eta^{-1}}{1-\eta^{-1}}W^R = \frac{\eta^{-1}}{1-\eta^{-1}}\frac{\alpha}{\beta}\left[\Pi^*\right]^{1-\beta}\left[\psi\left(p_1, p_2\right)\right]^{\beta} \tag{10}$$

を満足するから（労働の限界生産力を簡単化のために 1 としている），結局

$$\Pi^* = \left[\frac{\eta^{-1}}{1-\eta^{-1}}\frac{\alpha^{*}}{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}\cdot\psi\left(p_1, p_2\right) \tag{11}$$

である．ここでηは合成財を構成する個別財の需要の価格弾力性である．

（11）を（9）へ代入すると，

$$W^R = \Pi^* = \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}\left[\frac{\eta^{-1}}{1-\eta^{-1}}\right]^{\frac{1}{\beta}-1}\cdot\psi\left(p_1, p_2\right) \tag{11}$$

という具合に，この場合の名目留保賃金が定まる．$\beta=1$が一次同次関数の場合であり，確かに「基本方程式」を導く際の留保賃金に一致していることが分かる．したがって独占的競争下にある企業の利潤最大化条件から，関数 が冪関数である場合の「基本方程式」が

$$p_1 = \eta^{1-\frac{1}{\beta}}\left[\frac{\alpha}{\beta\left[1-\eta^{-1}\right]}\right]^{\frac{1}{\beta}}\cdot\psi\left(p_1, p_2\right) \tag{12}$$

として導出できる．この際パラメータβは任意の正数であるから，田中氏の「反例」よりは大分広いクラスで，「基本方程式」が成立していることが確認できる．

3. 結論

以上をまとめれば，田中氏の提示した「反例」は，一次同次関数から相似拡大関数への拡張に用いられる関数がf対数関数である場合に限られており，筆者が構築した理論体系に大きな影響を与えるとは考えにくい．効用関数のクラスを相似拡大的なものへ拡張すると，利潤の分配効果について非線形性が生ずるため，一般的な議論をすることは困難と言ってよい．しかしここでは，fが取り扱いの容易な冪関数であれば，任意の冪関数について「基本方程式」が保存されることを示すことができた．これは一つの収穫といってよいだろう．筆者にこのような機会を提供してくれた，田中氏に感謝する．

参考文献

［1］ 大瀧雅之（2011）．『貨幣・雇用理論の基礎』，勁草書房.

［2］ 加藤　晋（2011）．「書評　貨幣・雇用理論の基礎（大瀧雅之著）」『社会科学研究』第 63 巻 3,4 合併号 pp.145-151

［3］ 田中淳平（2014）.「大瀧モデルの均衡解について」，『社会科学研究』第 66 巻第 2 号.

［4］ Otaki, M.（2007）. “The dynamically extended Keynesian cross and the welfare-improving fiscal policy.” Economics Letters 96, pp.23-29.

［5］ Otaki, M.（2015）. Keynesian Economics and Price Theory：Re-orientation of a Theory of Monetary Economy. Springer（forthcoming）.