ナイト流不確実性と下方硬直的インセンティヴスキーム

玉　井　義　浩

概　要

現実の報酬支払契約の多くは，純然たる「成果連動型報酬」ではなく，低位の成果に関しては固定的な「基本給」を支払う，という形態をとる．このような，固定給と変動給の組み合わせによる報酬契約を従来の標準的なプリンシパル・エージェント問題の次善解として導出するには努力と成果の間の確率的関係に特殊な仮定（尤度比が下方の成果に関して一定となる）が必要である．これに対し本稿は，エージェントが，確率分布そのものがよくわからないという意味での，より高次の不確実性（ナイト流不確実性）に直面し，epsilon-contamination と呼ばれる複数の確率分布から成る集合についての Maximin の期待効用の最大化を図る場合には，より一般的な主観確率分布に関して下方に硬直的な報酬契約が次善解として自然に導き出されることを示したものである．エージェントが抱くナイト流不確実性の度合いが強まるほど，固定給の対象となる成果の範囲が広がる一方，変動給部分の賃金増加率は高まる，という結果が得られる．

キーワード

ナイト流不確実性，プリンシパル-エージェント問題，モラルハザード，固定給，変動給

1. 序

非対称情報下でのエージェントの側のモラルハザードを含むプリンシパル-エージェント問題（P-A 問題）の典型例に於いては，エージェントの選好がリスク回避的である場合には完全情報下での最善の報酬契約（固定給）はエージェントの怠業を招いてしまうものの，エージェントの努力と成果の間の確率的関係が単調尤度比条件など一定の条件を満たす場合には，成果の多寡に正相関した変動給契約によってエージェントの怠業を抑制した

次善の契約が締結可能である，というのが標準的な結論であった．

しかし，現実の報酬支払契約の多くは純然たる「成果連動型報酬」ではなく，低位の成果に関しては固定的な「基本給」を支払う，という形態をとる．例えばストックオプションを織り交ぜた企業経営者の報酬契約や，就業から日の浅い保険外交員の賃金契約がそれにあたる．また，景気変動に応じた賃金調整をボーナスの調整によって行っていたかつての日本企業の慣行も，基本給と変動給の組み合わせの一種と理解することも出来る．

これらの実例を，P–A 問題の解として導出することは，尤度比が部分的に成果に関して一定となる部分をもつような確率分布を想定すれば可能である．しかしながら，この場合，固定給部分の発生を単に確率分布の形状のみに帰すことになり，その経済学的解釈が不自然となる．寧ろ，経済主体，とりわけエージェントの側が，努力と成果の間の確率的関係そのものがよくわからないという，より高次の不確実性（いわゆるナイト流不確実性）に直面しており，契約ごとに，エージェントの直面する不確実性の程度が異なるために固定給部分の構成比が変わる，と考えた方が自然である．

本稿は，従来の期待効用理論に基づく P–A 問題（そこでは，「努力しても高い成果が実現するとは必ずしも保証されない」という意味での不確実性を扱ってはいるものの，努力と成果の間の攪乱的な要因の（主観的）確率分布は依頼者・代理人双方ともわかっている，という形で定式化が行われてきた）を，確率分布そのものがよくわからないという意味での不確実性（ナイト流不確実性，または，Ambiguity）に経済主体が直面している場合に拡張した場合に，固定給（基本給）と変動給（歩合給）の組み合せが次善均衡として得られることを示したものである．より具体的には，純然たる変動給が次善均衡となるような，通常のエージェンシー問題（努力と成果の間の確率的関係に関し単調尤度比条件が成立している）に，ごくわずかにエージェントの側のナイト流不確実性が加わっただけで，固定給（基本給）と変動給（歩合給）の組み合せが次善均衡として得られる，という事を明らかにしたものである．つまり，現実に多く観察される基本給と変動給を混合した報酬契約が，エージェントの側がナイト流不確実性に直面している場合の P–A 問題の解として，自然に導かれる，という事を示す．

近年，ナイト流不確実性に直面する経済主体の選好順序の公理化が様々な形で実現している．代表的なものに，Gilboa and Schmeidler（1989）の Maximin 期待効用，Schmeidler（1989）の Choquet 期待効用による表現がある．前者は，単一の確率分布に基づく von Neumann-Morgenstern（vNM）型期待効用ではなく，複数の確率測度の集合から経済主体にとって最悪の事態をもたらすような測度を用いた期待効用，後者は非加法的測度（確率測度の満たす性質のうち，加法性のみ緩めたもの）を用いた Choquet 積分を用いた期待効用で表現される．また，Schmeidler の特殊例として，Nishimura and Ozaki（2002）及

び Kojima (2004) によって公理が与えられた ε-contamination と呼ばれる確率測度の集合を用いた Maximin 期待効用による表現がある．

これらの公理化を受け，ナイト流不確実性の下でのエージェンシー問題を扱った研究に Ghirardato (1994) がある．これは単一の依頼者と単一の代理者とが得られた成果をどのように分けるかを分析したものであるが，依頼者・代理者双方とも同一の非加法的確率測度による Choquet 積分で利得を評価する（依頼者・代理者双方が同程度の不確実性に直面している）という定式化である．そして，興味深い数値例として，インセンティヴ・スキームが成果と「負の相関」をする例が示されている．

一方，本稿で扱うエージェンシー問題は Ghirardato (1994) と基本設定が同様であるものの，ナイト流不確実性の定式化が異なる．不確実性に直面しているのはプリンシパル・エージェントのうち，エージェントのみという非対称的な状況で，エージェントが利得を確率測度の集合 ε-contamination を用いた Maximin 期待効用で利得を評価する場合を分析している．得られた主要な結論は以下のとおりである．エージェントがナイト流の不確実性に直面している場合，次善の意味での最適なインセンティヴ・スキームは，固定給と変動給の組み合わせ，すなわち，比較的低い成果については成果の多寡に関わらず固定給を支払い，ある成果を超える成果を上げた場合については，その多寡に連動した変動給を支払う，という形のものになる．その固定給の対象となる成果の範囲は，代理者の直面する不確実性が大きいほど大きくなる．しかし，固定給の範囲が大きくなるにつれ，エージェントの側のモラル・ハザードの問題が深刻となるため，エージェントへ実行させることの出来る努力水準は低下する．エージェントのモラルハザードを防止し，努力へのインセンティヴを高めるために，不確実性の度合いが大きくなり固定給の範囲が増大するのと引換えに，変動給部分の報酬の増加率は大きくなる．

報酬の下限が平坦な固定額となる例は，本稿のような定式化のほかにも，Townsend (1979) 以下の一連の非対称情報に伴う有限責任ルールのモデルがある．本稿は Townsend (1979) とは異なり，成果の額についてはプリンシパル・エージェント双方とも観察可能かつ立証可能である．プリンシパルの取り分も Townsend (1979) とは異なり，成果の額の全域に於いて単調増加となる（成果が増え続ける限り，プリンシパルの取り分も大きくなり続ける）．

本稿の以下の構成は次のとおりである．第 2 節で主要モデルを述べる．第 3 節で，不確実性の度合いと固定給・変動給の組み合わせの関係についての数値例および比較静学を紹介し，第 4 節で結論を述べる．

2. ナイト流不確実性下のエージェンシー問題

2.1 モデルの概要

ここで議論するエージェンシー問題は，単一のプリンシパル（例えば企業）と単一のエージェント（例えば労働者）との間の契約に関するもので，エージェントのモラルハザードの問題のみに焦点を絞った標準的なものである（異なるタイプのエージェントが混在し，そのタイプを依頼者が識別できないという，逆選択の問題が絡んだ一般的なエージェンシー問題とは異なる）．すなわち，プリンシパル（企業）は個々のエージェント（労働者）（そのタイプは既知）へ何らかの設備を提供，それを労働者が企業の下で用いることにより，何らかの経済的価値（成果：Outcome）が生み出される．この成果を企業と労働者との間でどのように分け合うか（どのような成果が上がった場合にどれだけ労働者へ報酬を払うか）を予め契約で決める．

労働者が生み出しうる成果 x は正の実数の尺度で数値化可能で，$x_1 < x_2 < ... < x_n$ の n 種類の数値をとる．これらのうち，どの成果が実際に実現するかは，労働者の努力によって決まる側面と，努力とは無関係の「運」「不運」によって決まる側面の二つがある．企業は成果 x の値を客観的かつ立証可能な形で知る事ができるが，労働者の努力水準を観察することができない．そこで労働者は，企業の目を盗んで努力を怠るインセンティヴをもつという，モラルハザードが発生し得る．努力が観察不能なために，労働者への報酬は観察可能な成果に対して支払われることになる．x_i という成果に対する報酬を w_i とおく．

企業と労働者は，以下の手番で行動する．まず企業がベクトル $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)$（インセンティヴ契約あるいはインセンティヴ・スキーム）を労働者に示す．労働者はこの $\mathbf{w}$ を受けて，契約を締結するか否かを決める．締結した後，労働者は努力を提供し，その後，これに運・不運の確率的要因が加わって成果が決まる．そして，予め決められた $\mathbf{w}$ にしたがって，w_i が労働者に支払われ，残りの $x_i - w_i$ が企業の取り分となる．

なお，企業と労働者のもつ情報についてまとめると以下のようになる．

1. 企業には労働者の努力水準が観察不能であるが，その他の情報，労働者の生産性・選好（リスクと不確実性に対する態度）は，企業と労働者が共通に等しい情報をもつ（Common Knowledge である）．
2. 労働者は自分の努力水準は知っており，この私的情報の面では企業に対し，情報優

位の立場にある．しかし労働者は努力と成果の間の関係にまつわる不確実性について，企業と異なる選好をもつ．

1. より，ここでは労働者のタイプがわからないために発生する逆選択の問題は存在せず，Holmstrom (1979)，Grossman and Hart (1983)，Rogerson (1985) 等の一連の研究で分析された，モラルハザードの側面だけを専ら問題としたエージェンシー問題を分析することになる．2. の「不確実性についての企業と労働者の間で不確実性についての選好が異なる」とは，従来の一般的なエージェンシーモデルに於ける「リスク」についての選好の違い（企業はリスク中立的，労働者はリスク回避的等々）ではなく，「不確実性」についての選好が企業・労働者間で異なることを指す．

以下，この点について詳述する．

2.2 労働者の直面する不確実性

一方，労働者の目的関数は以下の形態をとる．

$$EU^{\varepsilon}(a) = (1-\varepsilon)\left\{\sum_{i=1}^{n} U(w_i)\pi_i(a) - c(a)\right\} + \varepsilon\left\{\min_i U(w_i) - \overline{c}\right\} \tag{1}$$

ここで，$U(w_i)$ は vNM 型期待効用理論に於ける効用インデックス（$U' > 0, U'' < 0$）である．また，a は努力の尺度で，$a \in [0,1]$ とする．$c(a)$ は a という水準の努力を提供するためのコストを表す関数，$\overline{c}$ は努力コストが取りうる最大値を表す．また，関数 $\pi_i(a)$ は労働者が a という努力を採った場合に成果 x_i が生じる確率を表す．

この労働者の目的関数の特徴は，$\varepsilon(\in [0,1))$ の項の存在である．(1) 式は，通常の期待効用関数と異なり，$(1-\varepsilon)$ 対 ε のウェイトで分布 π_i 及び賞品空間上のありとあらゆる確率分布を合成した確率分布の"集合"（ε-contamination）によって算出した Maximin の期待効用となる．すなわち，通常の期待効用関数は単一の確率分布間の選好順序を表し，いかなる賞品（インセンティヴスキーム）$\{w_i\}$ についても単一の確率分布で期待効用を算出するが，(1) に於いては，インセンティヴ・スキーム毎に，集合 ε-contamination の中から最悪の数値を与えるものを選び取って算出された (1) 式右辺の値を以て Lottery Act 間の選好順序を記述しようというのである[1)]．極めて大雑把に言えば，確率分布が $\pi_i(a)$ となることに関し ε の度合い懐疑的で，その部分に関しては常に最悪の状態を念頭に置くエージェント（労働者）を想定している．

1) より正式には，賞品空間上の期待効用を表す (1) 式ではなく，状態空間から賞品空間上の確率分布の集合への写像（Lottery Act）を明示し，状態空間上の確率測度を用いた期待効用関数で Lottery Act 間の選好順序が表現されるが，一定の操作で (1) 式に帰着させる事ができる．詳細は玉井 (2004) 参照．

（1）式は Gilboa and Schmeidler（1989）による Maximin Expected Utility 関数を，確率分布の集合を ε-contamination に特定化したものとみなす事ができる．また，Schmeidler（1989）に於ける，非加法的測度を用いたショケ（Choquet）積分による期待効用関数の一種とみなすこともできる．そして，パラメータ ε は Dow and Werlang（1992）に於ける "ambiguity level" に対応する．

ここで，$U(w), \pi(a), c(a)$ について，以下を仮定する．

仮定 1　（1）$U(w)$ は定義域は (w_0, ∞) を定義域とする強増加強凹関数である．ただし，w_0 は任意の実数である．

（2）$\lim_{w \to w_0} U(w) = -\infty$.

仮定 2

i）単調尤度比（Monotone Likelihood Ratio（MLR））　$\cdots \frac{\pi_i'(a)}{\pi_i(a)}$ がすべての $a \in [0,1]$ について i の増加関数.

ii）累積分布関数の凸性（Convexity of Distribution Function: CDF）　…累積分布関数 $\sum_{i=1}^{m} \pi_i(a)$ が，すべての $m = 1, 2, ..., n$ について a の凸関数.

iii）　すべての $j = 1, 2, ..., n$ について，$\pi_j(a) > 0$.

仮定 3（c の凸性）　$c(\cdot)$ の定義域は A，$c' > 0, c'' > 0$，c の値域は有界閉区間.

2.3　企業の最適化問題

労働者と異なり，企業はリスク中立的かつ，不確実性は一切もっておらず，したがって，リスク中立的な vNM 型期待効用の最大化を図るものとする．また，労働者が，(1) のように表現できるような不確実性に関する選好をもっている，という事も企業は知っている．すると企業の最適化問題は，労働者の選好順序が（1）で表されることを考慮しつつ（労働者の直面するナイト流不確実性を考慮しつつ）自らの期待効用を最大化するようなインセンティヴ・スキームと労働者に採らせる努力水準を考えることになる．よって企業の最適化問題は

$$\max_{a,\mathbf{w}} G(\mathbf{w},a) \equiv \sum_{j=1}^{n}(x_j - w_j)\pi_j(a) \tag{2}$$

$s.t.$

$$EU^{\varepsilon}(\mathbf{w},a) \equiv (1-\varepsilon)\left\{\sum_{j=1}^{n} U(w_j)\pi_j(a) - c(a)\right\} + \varepsilon\left\{\min_{\mathbf{w}} U(w_j) - \bar{c}\right\}$$

$$\geq \underline{U} \tag{3}$$

$$EU^{\varepsilon}(\mathbf{w},a) \geq EU^{\varepsilon}(\mathbf{w},a') \quad \forall a' \in A \tag{4}$$

制約条件（3）は，このインセンティヴスキームの下で代理契約を結ぶことが，労働者にとって他で得られる効用機会 $\underline{U}$ と同様かそれ以上の効用を得る事を意味するための条件（Individual Rationality 条件）であり，以下これを IR 条件と略記する．一方，制約条件（4）は，インセンティヴ・スキーム $\mathbf{w}$ の下で労働者が自発的に努力水準 a をとる（$\mathbf{w}$ によって a を実行させる事が可能（implementable）である）ための条件（Incentive Compatibility 条件）であり，以下これを IC 条件と略記する．

2.4 解の存在

Grossman and Hart（1983）はこの企業の問題を 2 段階に分離，すなわち，（1）各 a について，労働者にその行動（努力（a））を実行させることのできるインセンティヴ・スキームのうち，最も費用の低い（したがって労働者にとっての報酬額の期待値の低い）ものの集合を求めるということをすべての a について行い，（2）その中で最も企業の期待利得の高いものが最適解となる，という具合に分離し，最適解の存在を証明した．本稿における問題（2）においても，企業の目的関数が成果と報酬に分割可能な形となっているために，同様の二段階化が可能である．ただ一点，労働者がナイト流不確実性に直面している分，IR 制約と IC 制約が微分不能点をもつという点が Grossman and Hart の問題と異なる．しかし，基本的に IR 制約と IC 制約を満たすようなインセンティヴ・スキームの集合が凸集合であることが容易にわかるので，問題の基本構造は Grossman and Hart と同様である．従って，Grossman and Hart（1983）より，上記仮定 1〜3 の下で解の存在が保証される．

2.5 1 階条件からの接近

仮に企業の問題（2）〜（4）の厳密な IC 制約（4）が労働者の効用最大化の 1 階条件

と同値であるならば，企業の問題の解としてのインセンティヴ・スキームを簡便・実用的に見出すことが可能となる．すなわち，(4) を

$$\frac{\partial}{\partial a}EU^{\varepsilon}=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{\sum_{j=1}^{n}U(w_j)\pi_j'(a)-c'(a)\right\}=0 \tag{5}$$

で置き換えた問題（以後，これを「緩和された問題」と呼ぶことにする）を解くことが，元来の「厳密な問題」を解くことと同値であるならば，置き換えて解いた方が簡便である．

Rogerson (1985) は緩和された問題による置き換えが可能となるための十分条件として，確率分布が単調尤度比条件（MLRC）と凸性条件（CDFC）を満たしている事，を挙げたが，これらの条件が，労働者が ε-contamination によるナイト流不確実性に直面している場合でも依然としてこれらの条件が緩和された問題の有効性を保証するための十分条件となる．

その主要な論理の流れは以下のとおりである．緩和された問題の IC 条件は厳密な問題のそれを含む，より緩やかな条件であるので，厳密な問題の解は緩和された問題の解の中に含まれる．そこで，緩和された問題の解としての Incentive Scheme の集合（当然，厳密な問題の解も含まれる）の元の満たす性質を調べる．もしその性質を満たす解（Incentive Scheme）の集合に限って，緩和された IC 条件と厳密な IC 条件とが同値であるのであれば，緩和された問題を解くことと厳密な問題を解くこととが同値となる．

そこで，まず緩和された問題を解いて，厳密な問題の解の候補を絞り込む．ただしこの場合，労働者のナイト流不確実性に固有の問題に注意が必要である．(3) に min が存在することにより，IR 条件が微分不能点をもつからである．これは，労働者が真の分布が何であるかについて確信を抱けず，部分的に，常に最悪のシナリオ（確率分布が，報酬が最低額になってしまうような成果を確率 1 で上げてしまうようなものかもしれない）を考慮することによる．

例えば固定給のインセンティヴ・スキーム $w_j=w \quad \forall j\in\{1,...,n\}$ があったとする．このとき，ある j についてのみ，w_j を少し上げる場合と下げる場合を考える．w_j のみ少し上げても，「報酬の最低額」は依然として w のままである．しかし，w_j のみ少し下げる場合は「報酬の最低額」が w_j となる．そこで，w_j を w から上げる場合と下げる場合で，労働者の限界効用が全く異なる．

以上のことを考慮する上で，以下の補題が有用である．

補題1 IR制約

$$(1-\varepsilon)\left\{\sum_{i=1}^{n} U(w_i)\pi_i(a) - c(a)\right\} + \varepsilon\left\{\min_{w_i} U(w_i) - \overline{c}\right\}$$

を満たす $\mathbf{w}$ の集合を $A(a)$ とおく．

実際，$A(a)=B(a)$ が成立する．ただし，

$$B(a) \equiv \cap_{j=1}^{n} B_j(a)$$

であり，$B_j(a) \equiv \left\{\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n | (1-\varepsilon)\left\{\sum_{i=1}^{n} U(w_i)\pi_i(a) - c(a)\right\} + \varepsilon\{U(w_j) - \overline{c}\} \geq \underline{U}\right\}$

証明 すべての $i=1,...,n$ について

$$\begin{aligned} &\mathbf{w} \in A(a) \\ \Rightarrow\ &(1-\varepsilon)\left\{\sum_{i=1}^{n} U(w_i)\pi_i(a) - c(a)\right\} + \varepsilon\{U(w_j) - \overline{c}\} \\ &\geq (1-\varepsilon)\left\{\sum_{i=1}^{n} U(w_i)\pi_i(a) - c(a)\right\} + \varepsilon\left\{\min_{w_i} U(w_i) - \overline{c}\right\} \\ &\geq \underline{U} \end{aligned}$$

（最初の不等号は自明，二番目の不等号は $\mathbf{w} \in A(a)$ より従う）．よって，$\mathbf{w} \in A(a) \Rightarrow \mathbf{w} \in B(a)$ である．

一方，$\mathbf{w} \in B(a)$ であるなら

$$(1-\varepsilon)\left\{\sum_{i=1}^{n} U(w_i)\pi_i(a) - c(a)\right\} + \varepsilon\{U(w_j) - \overline{c}\} \geq \underline{U}$$

が全ての j について成立．よって，$w_j = \min w_i$ なる j についても成立．よって，$\mathbf{w} \in B(a) \Rightarrow \mathbf{w} \in A(a)$ である． Q.E.D.

この補題1より，ε-contamination の下では，IR制約は n 個の制約，$\mathbf{w} \in B_j(a)$, $j = 1,2,...,n$ の組となるので，IR制約（3）を書き換えて緩和された問題を以下のように表現することができる．すなわち，

$$\max_{\mathbf{w},a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - w_i)\pi_i(a) \tag{6}$$

$s.t.$

$$(1-\varepsilon)\left\{\sum_{i=1}^{n} U(w_i)\pi_i(a) - c(a)\right\} + \varepsilon\{U(w_j) - \overline{c}\} \geq \underline{U} \qquad \forall j = 1,2,...,n \tag{7}$$

and （5）

IR 制約 "群"（7）のうち，添え字 j についての制約，$\mathbf{w} \in B_j(a)$ を IR_j とおく．制約 IR_j に関するラグランジュ乗数を $\alpha_j, j = 1, 2, ..., n$ とおき，IC 制約（5）についてのラグランジュ乗数を μ とおくと，この緩和された問題の Kuhn-Tucker 条件は，以下のようになる．

$$-\pi_i(a) + (1-\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)U'(w_i)\pi_i(a) + \varepsilon\alpha_i U'(w_i) + \mu U'(w_i)\pi'_i(a) = 0, \quad \forall i = 1, ..., n \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - w_i)\pi'_i(a) + \mu\left\{\sum_{i=1}^{n}U(w_i)\pi''_i(a) - c''(a)\right\} = 0 \tag{9}$$

$$\alpha_j\left[(1-\varepsilon)\left\{\sum_{i=1}^{n}U(w_i)\pi_i(a) - c(a)\right\} + \varepsilon\left\{U(w_j) - \bar{c}\right\} - \underline{U}\right] = 0 \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n}U\left(w_i\right)\pi'(a) - c'(a) = 0 \tag{11}$$

$$\alpha_i \geq 0 \; \forall i = 1, ..., n \tag{12}$$

添え字の集合 I を $I \equiv \{1, 2, ..., n\}$ と定義し，ある Incentive Scheme $\mathbf{w}$ についての報酬支払いの最小値を $\underline{w}$ とおく．$w_j = \underline{w}$ なる j からなる集合（I の部分集合で，最悪の報酬の対象となる状態）を，$I_{min}(\mathbf{w})$ とおく．その補集合 $I \setminus I_{min}$ を I^c_{min} とおく．

IR_j の定義から明らかなように n 本の不等式で表される IR 制約（IR_j）のうち，有効なものは $j \in I_{min}$ なる j についてのものだけであり，$j \in I^c_{min}$ なる j については IR_j は有効でない．よって，相補条件（10）と（12）より，

$$\alpha_j \geq 0 \quad \text{if} \quad j \in I_{min}$$
$$\alpha_j = 0 \quad \text{if} \quad j \in I^c_{min}$$

よって，$\lambda \equiv \sum_{j=1}^{n}\alpha_j$，$\theta_j \equiv \frac{\alpha_j}{\lambda}$ と定義し，移項して整理すると，上記の条件（8）〜（12）は以下のように整理できる．

$$\begin{cases} \text{If} \quad j \in I_{min}, & \frac{1}{U'(\underline{w})} = \lambda(1-\varepsilon)\left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{\theta_j}{\pi_j}\right) + \mu\frac{\pi'_j}{\pi_j} \\ & \text{ただし，} \sum_{j\in I_{min}}\theta_j = 1, \; \theta_j \geq 0 \\ \text{If} \quad j \in I^c_{min}, & \frac{1}{U'(w_i)} = \lambda(1-\varepsilon) + \mu\frac{\pi'_i}{\pi_i} \end{cases} \tag{13}$$

$$\sum_{i\in I}(x_i - w_i)\pi'_i(a) + \mu\left\{\sum_{i\in I}U(w_i)\pi''_i(a) - c''(a)\right\} = 0 \tag{14}$$

$\lambda \equiv \sum_{j\in I}\alpha_j$ は，全ての IR 制約群,IR_j が一斉に緩んだ場合の企業の限界効用に相当する．

なお，μ の符号について，以下が成立する．

補題 2　仮定 3 の i,iii, および仮定 4 の下，$\mu > 0$ である．

証明　証明は，緩和された問題の有効性を仮定せずに $\mu > 0$ であることを証明した Jewitt（1988）の手法を，労働者の側に ε-contamination に基づくナイト流不確実性が存在する場合に援用して行うことが出来る．詳細は玉井（2004）参照．

この補題と（13）～（14）より，以下が成立する．

命題 1　仮定 3 が成立する場合，緩和された問題の解としてのインセンティヴ・スキームは，ある閾値 $m = \{1, ..., n-1\}$ について，$\forall j \leq m, w_j = \underline{w}$（固定給），$\forall j > m$ なる j については $\underline{w} < w_{m+1} < w_{m+2} < \cdots < w_n$ という成果連動型の変動給，というものになる．

証明　変動給の部分が $j \in I \backslash I^c_{min}$ なる j について単調増加となるのは，補題 2 と（13）より直ちにしたがうので，命題の証明としては，$j \leq m$ ならば必ず $j \in I_{min}$，さもなくば必ず $j \in I^c_{min}$ となるような m が存在する事が示されれば十分である．そのためには，任意の $j, i \in I$ について，$j \in I_{min}$ かつ $i \in I^c_{min}$ であれば必ず $j < i$ となることが示されればよい．そしてそれは，（13）及び U の関数形に関する仮定 2 よりしたがう．　Q.E.D.

以上で，単調尤度比条件が成立する場合の緩和された問題の解としての 次善のインセンティヴ・スキームが，ある成果よりも低い成果については固定給，それを超える部分については成果に正相関した変動給を支払うという性質をもつことがわかったが，これは非減少列であるので，Rogerson（1985）と同様，X_A 上の確率分布が凸関数であれば，緩和された問題で労働者が自発的に選択する努力水準が，もともとの厳密な問題の IC 制約をも満たしている事が言える．

3. 不確実性と，固定給の対象となる成果の範囲

前節までの議論で，労働者が ε の度合いだけ，真の確率測度が何であるかについての確信がもてない場合に，次善のインセンティヴ・スキームが，ある成果以下の成果については固定給，それを超える成果について成果連動型の変動給，という形になることが示された．本節では，不確実性の度合いのパラメータ ε の大きさと，固定給の対象となる成果の範囲の関係についての簡単な比較静学を行い，一つの数値例を示す．

労働者の不確実性の度合いεの値が上昇すると，固定給（基本給）の対象となるような成果の範囲が広がる．つまり，固定給支払いの対象となる成果の上限（閾値）のx_mの番号mが大きくなり，生じうる成果の比較的広範囲の成果にわたって，固定給が支払われるようになり，変動給部分の比率が低くなる．ただし，容易に推測できるように，固定給の比率の上昇は，労働者の怠業のインセンティヴを高めるというモラル・ハザード問題の深刻化につながるため，労働者へ実行させる事のできる努力水準は低下する．

3.1　固定給の範囲

この節では固定給の上限となる成果の番号mの大きさ（固定給の範囲の大きさ）がどのような要因で決まるかを検討する．緩和された問題の1階条件（13）より，mに於いて

$$(1-\varepsilon)\lambda+\mu\frac{\pi'_m}{\pi_m}\leq\frac{1}{U'(\underline{w})}<(1-\varepsilon)\lambda+\mu\frac{\pi'_{m+1}}{\pi_{m+1}} \tag{15}$$

が成立する．また，$\sum_{j\in I_{min}}\theta_j=1$であることから，（13）の$j\in I_{min}$についての合計をとると，

$$\frac{1}{U'(\underline{w})}=(1-\varepsilon)\lambda\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1}{\sum_{j\in I_{min}}\pi_j(a)}\right)+\mu\sum_{j\in I_{min}}\frac{\pi'_j}{\pi_j}\frac{\pi_j}{\sum_{j\in I_{min}}\pi_j} \tag{16}$$

を得る．

この（16）式の最後の項$\sum_{j\in I_{min}}\frac{\pi'_j}{\pi_j}\frac{\pi_j}{\sum_{j\in I_{min}}\pi_j}$は，尤度比$\frac{\pi'_j}{\pi_j}$の，$j$が固定給の対象となる$I_{min}$にあることを所与とした，条件付期待値である．以下これを，$E\left(\frac{\pi'_j}{\pi_j}\middle| j\in I_{min}(m)\right)$と表記する．$I_{min}(m)$は，$I_{min}$のうち，特に，固定給の範囲の上限の成果の番号が$m$であるような集合（$I_{min}=\{1,...,m\}$）を意味する．

このことを考慮し，（16）を（15）へ代入すると，固定給の上限mは，以下の不等式を満たす自然数となる．

$$\begin{aligned}\mu\left[\frac{\pi'_m}{\pi_m}-E\left(\frac{\pi'_j}{\pi_j}\middle| j\in I_{min}(m)\right)\right]&\leq\lambda\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\sum_{j\in I_{min}}\pi_j}\\&<\mu\left[\frac{\pi'_{m+1}}{\pi_{m+1}}-E\left(\frac{\pi'_j}{\pi_j}\middle| j\in I_{min}(m)\right)\right]\end{aligned} \tag{17}$$

この不等式（17）の最左辺を$L(m)$，不等号で挟まれた項を$C(m)$，最右辺を$R(m)$とおく．

$C(m)$の分数部分は不確実性の度合いεの，固定給を得る確率に対する相対的な比率であり，$R(m)$の鍵括弧内は尤度比の限界的増加を表す．

単調尤度比（特に，本稿の場合は尤度比が単調“強”増加）及び条件付期待値の性質か

ら，$L(m), R(m)$ 共に閾値 m について単調強増加であり，特に $L(1) = 0$ である．一方，$C(m)$ は仮定3の iii より，m について単調強減少である．更に，条件付期待値の性質から，$L(j+1) < R(j) \quad \forall j \in I$ も成立することから，(17) を満たす $m \in I_{min}$ が必ず存在する．

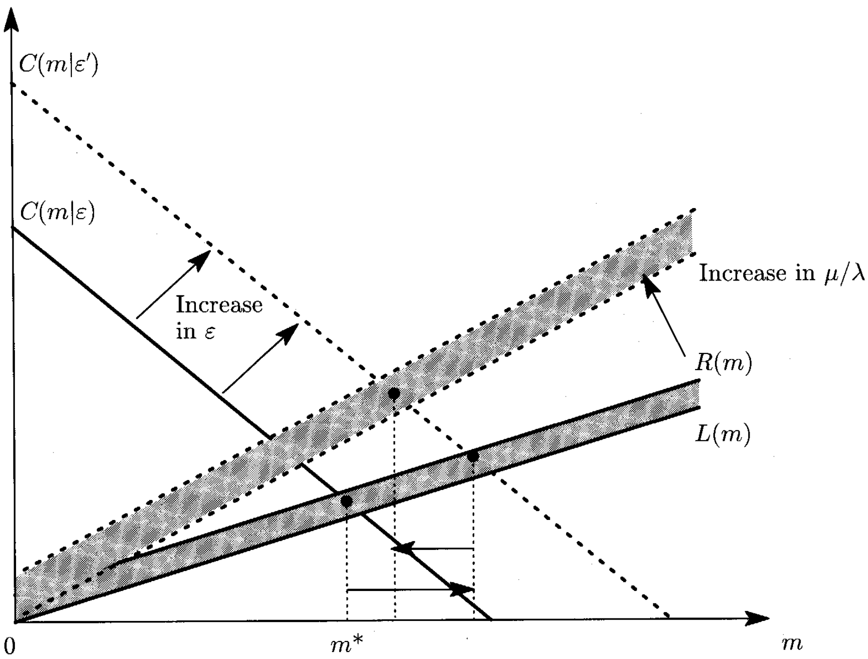
3.1.1 ε の増大の影響

まずナイト流の不確実性が全く存在しないケース（$\varepsilon = 0$ の場合）を考える．この場合，(17) と整合的なのは，$m = 0$ の場合のみである．すなわち，成果の全域にわたり，次善のインセンティヴ・スキームは完全な成果連動型の変動給となる．

一方，ナイト流不確実性が存在する場合（ε の値が正の場合），(17) を満たす m（最適な，固定給の上限）は2以上の値を取りうる．また，λ と μ の値を所与とする限り，ε の値が大きいほど，最適な閾値 m は大きくなる，すなわち，固定給の範囲が広がる．

下図に於いて，$L(m)$ と $R(m)$ に挟まれた領域と $C(m)$ とが交わるような自然数 m が，(17) を満たす最適な，固定給の上限 m^* であるが，ε の上昇によって $C(m)$ 全体が上方へシフトするため，λ と μ を固定して考えると ε の増大は m^* を上昇させる．

ところが，固定給の範囲の増大は，変動給部分を所与とすると，労働者の努力のインセンティヴを削いでしまう．そこで，IC 制約がきつくなる結果，μ の値は上昇する．一方，他の効用機会 $\underline{U}$ を一定とすれば，不確実性の上昇は労働者の効用を下げるため，IR 制約もきつくなり，λ の値も上昇する．したがって，μ/λ の値が ε の上昇によって増加するのか減少するのかについては不分明である．しかし，仮に μ 上昇の影響の方が深刻な場合，



図に於ける様に μ/λ の上昇によって $L(m)$ と $R(m)$ に挟まれた領域が左上方にシフトする．これは最適な m^* を下げる（固定給の範囲を下げる）要因となる．

3.2　不確実性と努力水準

労働者の外部効用機会 $\underline{U}$ の値を所与とし，不確実性パラメータ ε の値が増大した場合には，次善の賃金契約から引き出せる労働者の努力水準は低下する．その事を示す前に，以下の補題に言及する．すなわち，ε の増大に伴い賃金スキームを変更する場合，プリンシパル（企業）は①固定給部分（$w_1 = w_2 = \cdots w_m = \underline{w}$）を一律・同額変更する② w_1, w_2, w_{m-1} を一律・同額変化させ，w_m は w_1, w_2, w_{m-1} と同額か，それ以上の値になるように変更する，のいずれかである．

補題 3　ある $\varepsilon, \underline{U}$ について，$I_{min} = \{1, ..., m\}$ が最適である場合，ε の限界的な変化に対する最適な賃金スキームの変更に於いて，

$$\begin{cases} dw_1 = dw_2 = \cdots dw_m = d\underline{w} \\ \text{または} \\ dw_1 = dw_2 = \cdots dw_{m-1} = d\underline{w} \quad \text{かつ } dw_m \geq d\underline{w} \end{cases}$$

証明　プリンシパルにとっての賃金契約変更の限界的費用は，プリンシパルの期待利潤の全微分より，

$$-dG = \sum_{i \in I} \pi_i(a) dw_i - \sum_{i \in I} (x_i - w_i) \pi'(a) da$$

である．一方，エージェント（労働者）にとって賃金契約変更の限界的便益は，労働者が賃金契約（$\mathbf{w}$）について自らにとって最適な a を常に選択している事を考慮すると，包絡線定理より，

$$dEU^{\varepsilon} = (1 - \varepsilon) \sum_{i \in I} U'(w_i) dw_i + \varepsilon U'(\underline{w}) d\underline{w}$$

である．ここで，$d\underline{w}$ は，I_{min} に属する i についての賃金変更のうち，最小のものを表す．

(8) の両辺に dw_i を乗じて $i \in I$ について和を取ると，

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i\in I}\pi_i(a)dw_i+\\
&\lambda(1-\varepsilon)\sum_{i\in I}U'(w_i)\pi_i(a)dw_i+\left(\sum_{i\in I^P_{min}}\theta_i\right)\varepsilon U'(\underline{w})d\underline{w}\\
&+\lambda\varepsilon\sum_{i\in I_{min}\setminus I^P_{min}}\theta_i U'(\underline{w})dw_i\\
&+\mu\sum_{i\in I}U'(w_i)\pi'_i(a)dw_i=0 \qquad (18)
\end{aligned}
$$

ここで，I^P_{min} は I_{min} の要素のうち，$dw_i = d\underline{w}$ となるものからなる I_{min} の部分集合である．

$i \in I_{min}$ なる w_i についての一律・同額の賃金変更の場合，$I^P_{min} = I_{min}$ であるので，(18) の右辺第 2 項と第 3 項の和は労働者の効用の変化，dEU^ε に等しい．

また，単調尤度比条件より，$\theta_m \geq 0,\quad \theta_1, \theta_2, ..., \theta_{m-1} > 0$ であるが，$\theta_i \neq 0$ なる i について一律・同額でない賃金変更を行うと，$dw_i > d\underline{w}$ であることに注意して，(18) より，(18) 右辺の第 2 項と第 3 項の和 $> dEU^\varepsilon$ となってしまい，(18) 式の含意は

$$
\begin{aligned}
dG+\lambda dEU^\varepsilon(1+\sigma)=0 \quad &(\sigma \text{ は } dEU^\varepsilon \text{ と同符号})\\
\Leftrightarrow \frac{-dG}{dEU^\varepsilon}&=\lambda(1+\sigma)
\end{aligned}
$$

((18) 式の第 5 項は IC 制約の全微分と (9) より $\sum_{i\in I}(x_i - w_i)\pi'_i(a)da$ に等しい) となる．つまり，$\theta_i \neq 0$ なる i について一律・同額でない賃金変更を行うと，そうでない賃金変更に比べ，プリンシパルにとって，エージェントの効用 1 単位あたりのコストが必ず高くなってしまう．従って，補題がしたがう． Q.E.D.

補題 4 労働者の効用関数が $U(w) = \ln(w)$ であり，確率分布関数に関して $\pi''_i(a) = -f(a)\pi'_i(a)$ が成り立つ ($f(a)$ は a についての正値の関数) とき，$da/d\varepsilon < 0$ である．

証明 (8) の両辺に dw_i を乗じ，$i \in I$ について総和を取ると，

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i\in I}\pi_i(a)dw_i+\lambda\left\{(1-\varepsilon)\sum_{i\in I}U'(w_i)dw_i+\varepsilon U'(\underline{w})d\underline{w}\right\}\\
&+\mu\sum_{i\in I}U'(w_i)\pi'_i(a)dw_i=0 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

IC 制約の全微分より，

$$
\sum_{i\in I}U'(w_i)\pi'_i(a)dw_i+\left\{\sum_{i\in I}U(w_i)\pi''_i(a)-c''(a)\right\}da=0 \qquad (20)
$$

これを（19）の第3項へ代入し，更にIR制約の全微分及びIR制約より（19）の第2項が $\frac{\lambda}{1-\varepsilon}\left[\underline{U}-(U(\underline{w})-\overline{c})\right]d\varepsilon$ であることに注意すると，(19) は

$$\sum_{i\in I}\pi_i(a)dw_i-\sum_{i\in I}(x_i-w_i)\pi_i'(a)da$$
$$=\frac{\lambda}{1-\varepsilon}\left[\underline{U}-(U(\underline{w})-\overline{c})\right]d\varepsilon \tag{21}$$

また，(13) の両辺に $\pi_i(a)$ を乗じて $i\in I$ について総和を取ると，一般に確率分布関数について $\sum_{i\in I}\pi_i'(a)=0$ が成立するから，

$$\lambda=\sum_{i\in I}w_i\pi_i(a)$$

が成立する．これの全微分 $d\lambda=\sum_{i\in I}\pi_i(a)dw_i+\sum_{i\in I}w_i\pi'(a)da$ を考慮すると，(21) は結局，

$$d\lambda-\sum_{i\in I}x_i\pi_i'(a)da=\frac{\lambda}{1-\varepsilon}\left[\underline{U}-(U(\underline{w})-\overline{c})\right]d\varepsilon \tag{22}$$

を得る．一方，IC制約の全微分に，(8) の全微分を代入して dw_i を消去し，$da=0$ とおくと，U が対数関数の場合，

$$\left[(1-\varepsilon)\sum_{i\in I}U'(w_i)\pi_i'(a)+\varepsilon U'(\underline{w})\frac{\sum_{i\in I_{min}}\pi_i'(a)}{\sum_{i\in I_{min}}\pi_i(a)}\right]d\lambda$$
$$+\sum_{i\in I}\frac{\{\pi_i'(a)\}^2}{\pi_i(a)}U'(w_i)d\mu$$
$$=\lambda\left[\sum_{i\in I}U'(w_i)\pi'(a)-U'(\underline{w})\frac{\sum_{i\in I_{min}}\pi_i'(a)}{\sum_{i\in I_{min}}\pi_i(a)}\right]d\varepsilon \tag{23}$$

単調尤度比条件と限界効用逓減より，$d\lambda$ の係数は負，$d\mu$ の係数は正，右辺の $d\varepsilon$ の係数は正である．以上（22）と（23）より，仮に $da=0$ とおいた場合，$d\lambda/d\varepsilon>0, d\mu/d\varepsilon>0$ である．これを，a に関する1階条件（9）の全微分を $da=0$ とおいたものに代入すると，確率分布関数が $\pi''(a)=-f(a)\pi'(a)$ という性質を満たす場合，2階条件も加味すると $d\lambda>0, d\mu>0$ の下では符号が負になる．これは ε 増大後に労働者に増大前と同じ a を課すことの企業にとっての限界費用が限界利潤を上回ることを意味するので，ε 増大後は $da<0$ が最適となる．

Q.E.D.

3.3　数値例1　$n=3$ の場合

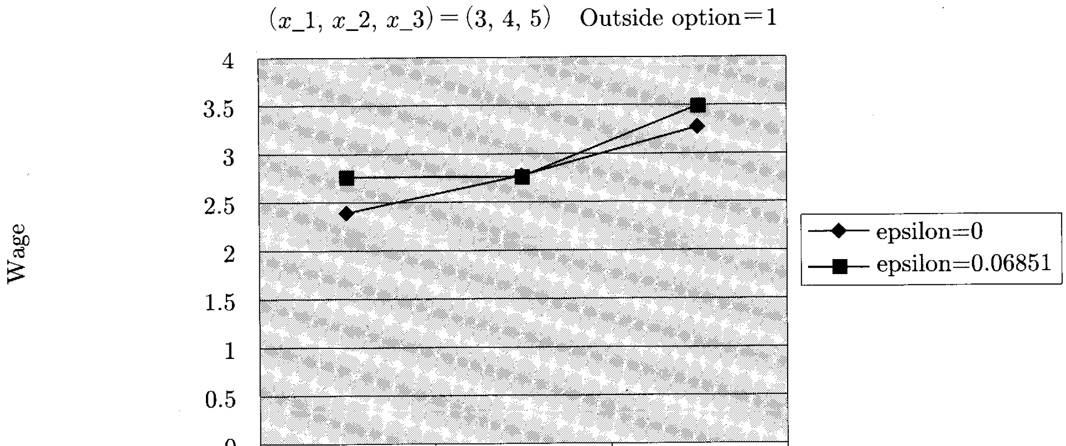
固定給が発生する最も簡単な例として，成果の値が3種類しかない場合の計算例を挙げる．ここでは，仮定1〜3を満たす効用関数，分布関数，費用関数の例として，

$$U(w) = \ln(w) \tag{24}$$

$$\pi_j(a) = \frac{2}{n(n+1)}\left\{\sqrt{a}j + (1-\sqrt{a})(n+1-j)\right\} \tag{25}$$

$$c(a) = 1 - \sqrt{1-a^2} \tag{26}$$

を用い，$n = 3, \underline{U} = 1$ とした．ε が 7% 程度で，固定給が発生する．



	w1	w2	w3
epsilon=0	2.382	2.7679	3.2656
epsilon=0.06851	2.7561	2.7561	3.4823

Outcome

3.4　数値例 2　n が極めて多数の場合

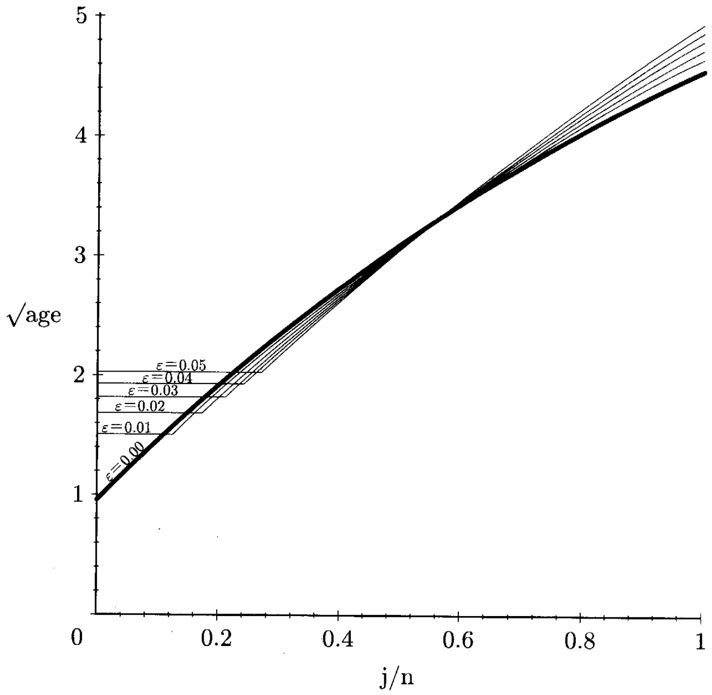
以下は n を無限に大きく取った場合の極限に於ける，閾値 m を画す条件（17）を加味したインセンティヴスキームの計算例である．すなわち，上記（25）に於ける確率分布で描かれる問題は，$x_j = b + l\left(\frac{j}{n}\right)$ という変換を行なって n が極めて大きな数である場合には，成果 x が区間 $[b, b+l]$ 上の実数値をとり，x の確率密度関数が $g(x,a) \equiv 2\left[\sqrt{a}\left(\frac{x-b}{l}\right) + (1-\sqrt{a})\left(1-\frac{x-b}{l}\right)\right]$ である場合の問題で以て近似できる．以下の表は，このような連続分布での近似と U の関数形の特定化で得られた計算例である．ここでは $\underline{U}$ の値を 1 に，また，x の区間を $[b, b+10]$ にとっている（企業がリスク中立的であるので，b の値の多寡は結果に影響を及ぼさず，x の取り得る値の範囲 l が影響する）．

ε の値の大きい程，固定給の範囲 $\lim_{n\to\infty} m/n$ は拡大するが，労働者に実行させることのできる次善の努力水準は低下する．

ε	$\lim_{n\to\infty}(m/n)$	λ	μ	a
0.00	0.0000	3.102	1.031	0.3528
0.01	0.1221	3.12	1.0785	0.3401
0.02	0.1723	3.141	1.1201	0.3310
0.03	0.2102	3.1645	1.1596	0.3232
0.04	0.2416	3.189	1.1979	0.3163
0.05	0.2688	3.2145	1.2357	0.30999

ここで注目すべきは，たった1パーセント不確実性が発生しただけで，下方12パーセント以上の相対順位の成果が固定給の対象となることである．

以下の図は，上の表の数値例で示された，連続分布で近似したインセンティヴ・スキームの形状である（$t = j/n$ である）．外部での効用機会を一定に基準化すると，不確実性 ε の上昇は固定給の対象となる成果の範囲を広げるだけでなく，固定給の金額（基本給）も上昇させる．しかし，手厚い基本給は労働者の側のモラルハザードの原因ともなるため，変動給部分の賃金上昇率は大きくなる．



4. 結　語

企業はナイト流不確実性に直面していないものの，労働者にとっては努力と成果の間の確率的な関係についての確信が一部分（ε の度合い）崩れ，労働者がいわばナイト流不確

実性に直面している場合，労働者の努力水準を企業がコントロールできない状況下での次善の意味でのインセンティヴ・スキームは，固定給と変動給を組み合わせたものとなる．すなわち，比較的低い成果については基本給を保証し，ある成果を超えた段階から成果の多寡に応じて報酬に差をつける，という形のインセンティヴ・スキームが次善均衡となる．固定給から変動給へ移行する成果の境界は，不確実性のパラメータ ε の値が大きい場合には上方にずれる．すなわち，労働者の直面する不確実性がより深刻になるほど，固定給の対象となる成果の範囲が広がり，その固定給の金額（基本給）も上昇する．

ナイト流の不確実性に直面する労働者にとっては，不確実性に直面していない労働者に比して，「最悪の報酬」は極めて重要な関心事となる．「報酬の下限」が限界的に上昇することの限界効用は，その他の報酬額が限界的に上昇することによる限界効用を上回る．したがって，不確実性の大きな労働者を契約に引き寄せるためには，企業は，変動給の中位ないし上位の報酬支払額を上げるよりも，まず報酬の下限を引き上げることによった方が，報酬支払い費用を低く抑えることができる．こうして報酬の下限からまず引き上げられることによって，固定給部分が発生する．しかし，手厚い基本給は同時に労働者のモラル・ハザードをも生む．そこで，ε が大きい場合，手厚い基本給と引き換えに変動給部分の賃金上昇率は大きくなる．

本稿の分析は，一般に観察される基本給と変動給の組み合わせによるインセンティヴスキームが，モデルへのナイト流不確実性の導入によって極めて自然に導かれることを示した．ただし，ここでは一人の企業と一人の労働者の間の契約のみ扱っている．これを労使の団体交渉のように，複数の労働者との間の契約に拡張することも考えられる．また，本稿で扱った情報の不完全性は，専ら企業が労働者の努力水準を観察ないしコントロールできない，という，労働者のモラルハザードである．モラルハザードだけでなく，企業が労働者のタイプ，とりわけ，ε の値を不完全にしか知らない場合や，企業自身も不確実性に直面している場合のインセンティヴスキームの分析は，今後の研究課題である．

参考文献

玉井義浩（2004）「基本給と歩合給の混合による賃金契約と，エージェントのナイト流不確実性」『商経論叢』第 40 巻 2 号（神奈川大学）．

Anscombe, F. J. and R. J. Aumann (1963), “A Definition of Subjective Probability” *Annals of Mathematical Statistics 34*, pp.199-205.

Ghirardato, P. (1994), “Agency Theory with Non-Additive Uncertainty” *mimeo*, available at http://web.econ.unito.it/gma/ghiro.html.

Gilboa, I. (1987) “Expected Utility with Purely Subjective Non-Additive Probabilities,” *Journal of Mathematical Economics* 16, pp.65-88.

Grossman, S.J. and O.D.Hart (1983) "An Analysis of the Principal-Agent Problem" *Econometrica* 51, No.1, pp.7-45.

Holmstrom, B. (1979) "Moral hazard and Observability" *Rand Journal of Economics*, 1983, pp.74-91.

Jewitt, I. (1988) "Justifying the First-order Approach to Principal-Agent Problems," *Econometrica* 56, pp.1177-90.

Knight, F. (1921) "Risk, Uncertainty and Profit" Boston: Houghton Mifflin.

Kojima, H. (2004) "ε-contamination and Comonotonic Independence Axiom" mimeo.

Mirrlees, J. (1975) "The Theory of Moral Hazard and Unobservable Behavior—Part I," mimeo, Nuffield College, Oxford.

Nishimura, K. G. and H. Ozaki (2002) "An Axiomatic Approach to ε-contamination", *Discussion Paper Series, University of Tokyo*, 2002-CF-183.

Rogerson, W. P. (1985) "The First-Order Approach to Principal-Agent Problems," *Econometrica* 53, No.6, pp.1357-1367.

Savage, L. (1954) *The Foundations of Statistics.* John Wiley, New York.

Schmeidler, D. (1989) "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity", *Econometrica* 57, No.3 pp.571-587.