

高感度レーザー干渉計による巨視的力学系の  
標準量子限界の研究

指導教員 三尾典克 准教授

平成 21 年 1 月 提出

東京大学大学院  
新領域創成科学研究科物質系専攻  
学生証番号 氏名  
076147 森 匠

東京大学 大学院新領域創成科学研究科  
基盤科学研究系物質系専攻

平成20年度

修士論文

高感度レーザー干渉計による巨視的力学系の  
標準量子限界の研究

2009年1月27日提出  
指導教員：三尾 典克 准教授

076147：森 匠

# 目次

第1章	はじめに	4
第2章	量子力学と標準量子限界	7
2.1	不確定性原理	7
2.1.1	不確定性原理と計測限界	7
2.1.2	電磁場の量子化	7
2.1.3	コヒーレント状態と光子数揺らぎ	8
2.2	レーザー干渉計の標準量子限界	9
2.2.1	検出ショットノイズ(散射雑音)	10
2.2.2	free mass の SQL	11
2.2.3	振動子の変位計測における SQL	14
2.3	熱雑音	15
2.4	SQL の観察に必要な要素	16
2.4.1	共振周波数付近での SQL	16
2.4.2	共振から外れた場所での SQL	17
2.5	特殊な実験手法	18
2.5.1	変位雑音フリー干渉計 (DFI)	18
2.5.2	squeezed 光を用いた検出ショットノイズの低減	18
第3章	振動子の力学特性	19
3.1	振動子の損失	19
3.1.1	残留ガスの影響	19
3.1.2	振動子の支持部分からの損失	19
3.1.3	内部損失	20
3.1.4	thermoelastic damping	20
3.2	音叉型水晶振動子	20
3.2.1	実験に用いた振動子	20
3.2.2	音叉型水晶振動子を用いた精密計測	21
3.3	片持ち梁の振動特性	22
3.3.1	外力に対する応答	22
3.3.2	換算質量	23
3.3.3	共振とその減衰振動	24
3.4	水晶振動子の力学特性	24
3.4.1	理論値	24
3.4.2	室温での Q 値	24
3.4.3	Q 値の温度依存性	26
3.5	水晶振動子による SQL の可能性	29
3.5.1	Q 値からの考察	29
3.5.2	熱雑音との比較	29

3.5.3	課題	31
<b>第 4 章</b>	<b>光共振器の理論</b>	<b>33</b>
4.1	Fabry-Perot 共振器	33
4.1.1	平面波	33
4.1.2	Gaussian beam	35
4.1.3	鏡による損失	35
4.1.4	Fabry-Perot 共振器による光強度の増強	35
4.1.5	Fabry-Perot 共振器と SQL	36
4.2	誤差信号取得法	37
4.2.1	周波数変調	37
4.2.2	復調	37
4.3	共振器にはたらく雑音	38
4.3.1	光の強度雑音	38
4.3.2	光の周波数雑音	39
4.3.3	地面振動	40
4.3.4	残留ガスによる雑音	40
<b>第 5 章</b>	<b>微小光共振器の変位感度測定</b>	<b>41</b>
5.1	光学系・電気系	41
5.1.1	全体図	41
5.1.2	レーザー	42
5.1.3	微小長光共振器	42
5.1.4	電気系	42
5.2	共振器長の制御	45
5.2.1	共振器長	45
5.2.2	finesse の測定	45
5.2.3	鏡の損失	45
5.3	変位感度測定	46
<b>第 6 章</b>	<b>まとめ・今後の展望</b>	<b>47</b>
<b>付 録 A</b>	<b>巨視的振動の量子性</b>	<b>49</b>
A.1	平均熱量子数の減衰	49
A.2	熱浴との相互作用	49
<b>付 録 B</b>	<b>回折理論</b>	<b>52</b>
B.1	Fraunhofer 回折の導出	52
B.2	単スリット回折	53
<b>付 録 C</b>	<b>光バネ (Optical spring)</b>	<b>55</b>
C.1	静的な光バネ	55
C.2	動的な光バネ	56

# 第1章 はじめに

量子力学は、その本質において、計測という行為が対象に与える影響が不可避であることを主張する。すなわち、極限的な感度を必要とする計測においては、計測そのものの反作用も考慮されなければならない。それは、特に本研究で扱うようなマクロな力学系<sup>1</sup>の変位や振動の精密計測を目標とする分野においては、近年までは殆ど無視することが可能であった。

本研究の背景としては、まず、重力波検出のための超微小変位計測技術の急速な発達を挙げることができる。

重力波検出実験は、1960年代、Weberによる共振型検出器によってその先鞭が付けられた<sup>1,2)</sup>。現在では世界各地に大型の Michelson 干渉計型検出器が建設され、稼働中である<sup>2</sup>。極限的な雑音の低減技術により、その変位感度は  $10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  にも及ぶ。しかし未だに重力波そのものの直接検出には至っておらず、更なる感度向上を目指して様々な要素技術の改善が現在も行われている。

そしてその結果、最終的にはほぼ全検出周波数領域 (10 Hz - 1 kHz 程度) において系の感度を決定すると言われているのが、レーザーからの光子発生が確率過程であることに起因する揺らぎである。すなわち、ここにおいては光の持つ量子性によって系の感度が支配されることになる。光の持つ揺らぎが系の雑音となる過程については、輻射圧雑音と検出ショットノイズと呼ばれる2つのメカニズムが考えられている。

輻射圧雑音とは、光子数の揺らぎが光の運動量揺らぎとなり、鏡の位置を揺らしてしまうことによる雑音である。光強度の平方根に比例して大きくなると言われているが、未だに実験的な確認はなされていない。

これに対して、検出ショットノイズとは光検出時の光の位相雑音として与えられる雑音である。これは光強度の平方根に比例して小さくなることが知られている。

よって、これら二つの雑音は、ある光強度に対して最小化される。これが標準量子限界 (Standard Quantum Limit, SQL) と呼ばれる点である。この感度はちょうど光子の数  $N$  と位相  $\phi$  に対する不確定性原理

$$\Delta N \Delta \phi \geq \frac{1}{2} \quad (1.1)$$

から直接導かれる感度限界である。すなわち、SQL とは、干渉計測においてはセンサである光によってもたらされる雑音を最小化した計測であると言える。

SQL という概念自体は数十年前に提唱されたものであるが<sup>7,8)</sup>、未だ実験的な実証はなされていない。それは光の持つ運動量が極めて微小な量であり、その揺らぎが未だに実験的に確認されていないことに起因する。しかし、次世代型の重力波検出器<sup>3</sup>の感度は SQL のレベルを目標としており、早期の SQL の実現、そしてそこで生じる物理の検証が求められている状況である。

では、輻射圧雑音を観察し、SQL を達成するには何が求められるのか考えてみよう。輻射圧とはレーザーと鏡の運動量相互作用であるため、確認するにはまず

- 力学系に照射される光を強くすること

<sup>1</sup>本論文内において、力学系とは力学的な自由度によってその運動を記述できる、所謂機械的な振動子を指す。

<sup>2</sup>重力波検出器の現状について詳しくは文献 (TAMA<sup>3)</sup>, LIGO<sup>4)</sup>, VIRGO<sup>5)</sup>, GEO<sup>6)</sup> など。) を参照いただきたい。

<sup>3</sup>LCGT<sup>9)</sup>, Advanced LIGO<sup>10)</sup> など

- 力学系の質量をできる限り小さく抑えること

が必要であると考えられる。また、感度を上げる上では熱雑音との関連から力学系の機械的損失が小さいことが必須であり、光源についても、極限的な安定化を行う必要があると考えられる。

まず、力学系に照射される光を強めることについては、力学系を極微小かつ高反射率の鏡として Fabry-Perot 共振器を組むことが有効である。

また、力学系の質量を小さくすることについては、半導体などの機械部品の小型化のための技術の進歩に支えられた、微細加工技術 (Nano Electro-Mechanical Systems, NEMS) の発達<sup>11)</sup>により、近年技術的に大きく進歩した。光の波長以下の精度で力学系を設計し、 $\mu\text{g}$  から  $\text{ng}$  のオーダーの力学的振動子を作製することが可能となっている。石英や水晶、ダイヤモンドなどといった内部損失の小さな材料を用いることで、微小でありながら  $Q$  値にして  $10^4$  以上の、非常に力学特性の良い振動子が作製され、SQL は実験的に観察可能なパラメータで取り扱えるようになってきた。90 年代の後半以降、微小振動子を鏡として用いた、干渉計の SQL 観察は大きなトピックとなっている<sup>12,13,14,15)</sup>。

また、SQL の観察にとどまらず、微小鏡と光共振器を組み合わせることにより観察が可能となる現象として<sup>16)</sup>。

- 光による、特定の機械振動モードの熱エネルギーの増幅・減衰<sup>14,17)</sup>
- 光による、力学系のバネ定数の操作<sup>18)</sup>
- 光の場の量子非破壊計測 (Quantum Nondemolition Detection, QND)<sup>8,19)</sup>
- 力学系の量子的な振動準位、特にその基底状態の観察<sup>20,21)</sup>

などが提案され、いくつかは実験的に実証されている。

また、Fabry-Perot 共振器を用いた方法以外にも、光と力学系の相互作用を強める方法として

- トロイド型微小光共振器を用いる方法<sup>22)</sup>
- 微小の膜を Fabry-Perot 共振器内に挿入する方法<sup>23)</sup>

などが近年提案され、実験が行われている。

輻射圧と鏡の運動をカップリングさせることにより多くの物理が実現しようとしており、ここに "cavity optomechanics" とでも呼ぶべき分野が生まれようとしている。

輻射圧と物質の相互作用については、原子物理においては数十年前から大きなトピックの 1 つであった。しかし、マクロな力学系に対する物理としては、専ら理論家の対象であった。実験を眼目においた議論が行われるようになったのは、極めて最近のことである。これは、今まで述べてきたように、

- 重力波検出などの超精密計測分野の発展
- 機械構造の微小化に支えられた、NEMS 技術の発展

という 2 つの分野の交叉点として生まれたものだという点を改めて強調しておく。

## 本論文の構成

本論文は、レーザー干渉計の標準量子限界を達成するために必要な力学系・光学系について理論的な枠組みを構成し、またそれらについて実証を行う構成をとっている。

- 非常に高い機械的  $Q$  値を持つ微小振動子を用いた
- 低温下での
- Fabry-Perot 共振器の作成

という大まかな戦略は先行研究とそれほど変わらない。

本実験の特徴としては、フロアの雑音レベルを極限まで下げることにより、振動子の共振周波数から大きく外れた場所で SQL を達成を目指す点にあることをまず述べておく。

第 2 章においては不確定性原理から標準量子限界の定式化を行い、必要な要素について主に定性的に考察する。その後には本研究の位置付けについて述べる。続いて第 3 章では、干渉変位計測の対象となる力学系について、その候補としての音叉型水晶振動子について取り扱う。振動子の力学について簡単にまとめた後、水晶振動子の力学特性に関する報告を行う。その後、SQL に向けたパラメータの最適化を考察する。第 4 章、第 5 章は光学系に関するものである。第 4 章においてその理論について触れ、SQL に対して光学系から与えられるいくつかの設計指針を述べる。第 5 章では実際の SQL 観察の構成に近い光学系を設計し、その感度についての実証を試みる。

## 第2章 量子力学と標準量子限界

### 2.1 不確定性原理

#### 2.1.1 不確定性原理と計測限界

まず、不確定性原理から与えられる計測限界の存在について簡単に述べる<sup>8, 24, 25</sup>。

量子力学においては、物理量  $A$  は自己共役 (Hermite) 演算子  $\hat{A}$  で表される。二つの演算子  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  は一般には交換せず、 $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  でその交換関係が定義される。特に、位置演算子  $\hat{q}$  と運動量演算子  $\hat{p}$  は

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.1)$$

を満たす。物理量の揺らぎの大きさを

$$\Delta A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \quad (2.2)$$

と書くと、2つの物理量の揺らぎに関して

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \frac{1}{4} |[\hat{A}, \hat{B}]|^2 \quad (2.3)$$

が成り立つ (Schwarz の不等式)。よって、式 (2.1) より  $q$  と  $p$  に関しては

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.4)$$

が得られる。これは、この2つの物理量を同時に任意の精度で計測することが不可能であることを表す (Heisenberg の不確定性原理)。直感的に言えば、計測の技術向上によって計測の感度がこの不確定性原理に抵触するレベルに達したとき、このような関係性が定める感度限界について考慮する必要が生じると言える。

#### 2.1.2 電磁場の量子化

体積  $V = L^3$  の真空を考える。Coulomb ゲージの下で Maxwell 方程式の正準量子化を行うと、その電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\sqrt{\frac{1}{2V}} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\Omega_{\mathbf{k}}}{\epsilon_0}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \quad (2.5)$$

と書ける<sup>26, 27</sup>。 $\mathbf{k}$  は以下を満たす。

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z) \quad (n_x, n_y, n_z \text{ は整数}) \quad (2.6)$$

また、 $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$  ( $\sigma = 1, 2$ ) は、波数  $\mathbf{k}$  に垂直な二つの偏光を表す単位ベクトルである。電場の振幅に対応する演算子  $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ 、 $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$  は、交換関係

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (2.7)$$



を満たす，光子数状態  $|N_{\mathbf{k}}\rangle$  の生成消滅演算子である．電磁場の Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.8)$$

と書ける．すなわち，量子化された電磁場は調和振動子の集合として記述することができる．

今後は簡単のため添え字を省略し，単色波として記述する．また，光子数が十分に大きいことを仮定しておく，光子数演算子  $\hat{N}$  と位相演算子  $\hat{\phi}$  によって

$$\hat{a} = e^{i\hat{\phi}} \sqrt{\hat{N}} \quad (2.9)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{N}} e^{-i\hat{\phi}} \quad (2.10)$$

という記述が可能である．ただし， $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  を満たすように  $\sqrt{\hat{N}}$  と位相因子の順序を選んだ．更に，式 (2.7) との整合性を考えることで，

$$[\hat{\phi}, \hat{N}] = -i \quad (2.11)$$

が必要であることが分かる．式 (2.3)(2.11) より，光子の数と位相に関する不確定性原理

$$\Delta N \Delta \phi \geq \frac{1}{2} \quad (2.12)$$

を得る．

### 2.1.3 コヒーレント状態と光子数揺らぎ

光子数状態や位相状態を用いて，コヒーレント状態と呼ばれる，振幅や位相が十分に定まった古典的なイメージに近い波を記述することが可能である<sup>26,28</sup>．コヒーレント状態は，非可換な2つの物理量に対する不確定性を最小にする状態であり，ここでその導入としては，天降りではあるが消滅演算子  $\hat{a}$  の固有状態として定義する．

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.13)$$

コヒーレント状態を数状態  $|N\rangle$  で展開する．まず，

$$\langle N|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \langle N-1|\alpha\rangle = \frac{\alpha^2}{\sqrt{N(N-1)}} \langle N-2|\alpha\rangle \quad (2.14)$$

$$= \dots = \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} \langle 0|\alpha\rangle \quad (2.15)$$

より，

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |N\rangle \langle N|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} |N\rangle \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} \quad (2.16)$$

を得る． $\langle 0|\alpha\rangle$  は，規格化条件

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2N}}{\sqrt{N!}^2} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2} = 1 \quad (2.17)$$

によって決定される． $\langle 0|\alpha\rangle$  が実数となるように位相を選べば，

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.18)$$

が成り立つことが示される．これより， $|\alpha\rangle$  における  $|N\rangle$  の分布確率  $\Pi(N)$  は

$$\Pi(N) = |\langle N|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} \quad (2.19)$$

と，平均値  $|\alpha|^2$  を持つ Poisson 分布の形で与えられることが分かる．Poisson 分布の統計的性質<sup>29)</sup> によって，以下のことが言える．

- $|\alpha|^2$  が光子数の期待値  $\langle N \rangle$  に等しい．
- 個々の光子は互いに相関を全く持たない．
- 光子数の揺らぎは次式で与えられる．

$$(\Delta N)^2 \simeq \langle N \rangle \quad (2.20)$$

また，コヒーレント状態が光子数と位相の不確定性の積を最小にすることを示しておく． $N$  と  $\phi$  をその期待値の回りで Taylor 展開し，揺らぎ  $\delta N = N - \langle N \rangle$ ， $\delta\phi = \phi - \langle \phi \rangle$  の 2 次まで残すと， $\hat{a}$  の期待値は

$$\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle = e^{i\langle \phi \rangle} \sqrt{\langle N \rangle} \langle \alpha | \left[ 1 - \frac{1}{2}(\delta\phi)^2 - \frac{1}{8\langle N \rangle^2}(\delta N)^2 + \frac{i}{2\langle N \rangle} \delta\phi \delta N \right] | \alpha \rangle \quad (2.21)$$

と書ける． $\alpha$  を，位相因子に  $\theta$  を用いて  $\alpha = \sqrt{N}e^{i\theta}$  と置く．このとき式 (2.13)(2.21) より

$$-\frac{1}{2}(\Delta\phi)^2 - \frac{1}{8\langle N \rangle^2}(\Delta N)^2 + \frac{1}{4\langle N \rangle} = 0 \quad (2.22)$$

$$\theta = \langle \phi \rangle + \frac{1}{4\langle N \rangle} \langle \alpha | \delta\phi \delta N + \delta N \delta\phi | \alpha \rangle \quad (2.23)$$

が成り立つ．更に式 (2.20)(2.22) より

$$(\Delta\phi)^2 = 1/4(\Delta N)^2 \quad (2.24)$$

が得られ，確かにコヒーレント状態では不確定性が最小になっていることが示された．また，式 (2.23) より，光子数が十分に大きければ  $\theta \simeq \langle \phi \rangle$  が成り立つ．すなわち，光子数が大きい極限では位相揺らぎが小さくなり，位相が確定した状態に近付くと言える．こうして，位相が確定した電磁波は，多数の光子がコヒーレント状態にあると考えることができ，古典波動論で取り扱いが可能であることが示された．

## 2.2 レーザー干渉計の標準量子限界

ここでは，特に本論文の関心領域であるレーザー干渉計型の変位計測について，先の不確定性原理が与える感度限界を詳しく見ていく<sup>30,25)</sup>．

まず，レーザーの強度  $P$  に対して，計測時間  $\tau$  ( $= 1/2\Delta f$ ) でその揺らぎを考えると，式 (2.20) より

$$\langle \delta P^2 \rangle \simeq \frac{(\hbar\Omega\delta N)^2}{\tau} = 2P\hbar\Omega\Delta f \quad W^2 \quad (2.25)$$

が得られる．計算上はスペクトル密度で考えることが多い<sup>1)</sup>．

$$\sqrt{\langle \delta P^2 \rangle} \simeq \sqrt{2P\hbar\Omega} \quad W/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.26)$$

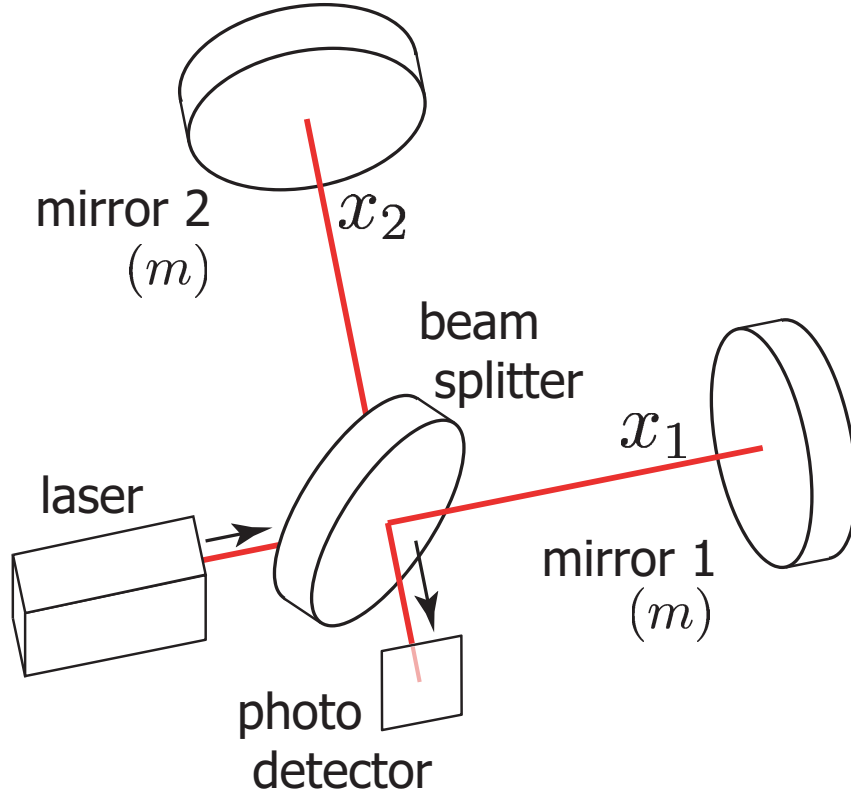


図 2.1: シンプルな Michelson 干渉計 .

### 2.2.1 検出ショットノイズ (散射雑音)

図 2.1 のような, 最もシンプルな Michelson 干渉計によって, 鏡の変位を測定する実験を考える. 鏡は完全反射, beam splitter(BS) は理想的な 50%分割を仮定し, 共に吸収・散乱といった損失は無視する. また, 鏡は BS よりも十分に質量が小さいとし, その有効質量を  $m$  とする.

干渉計にパワー  $P_0$  の光を入射させる. 光は腕を往復し, その腕の長さの差に比例した位相差 ( $\Delta\varphi$ ) を持って再結合する. 2 本の腕の長さの差  $\delta x \equiv x_1 - x_2$  に対して

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\delta x}{\lambda} \quad (2.27)$$

が成り立つ. 単位時間あたりに出力される光子数  $N$  は,

$$N = \frac{P_0}{2\hbar\Omega}(1 + \cos \Delta\varphi) \quad (2.28)$$

となる<sup>2</sup>. 腕の長さの差の微小変位  $\delta x$  に対する信号の変化が一番大きくなるのは

$$\delta x = \lambda(2n + 1)/8, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.29)$$

のときで,  $\delta x$  が  $\lambda$  に対して十分小さければ

$$\delta N = \frac{P_0}{2\hbar\Omega} \sin \varphi \delta\varphi = \frac{P_0 \sin \varphi}{2\hbar\Omega} \frac{4\pi}{\lambda} \delta x \quad (2.30)$$

<sup>1</sup>今後も, 特に単位が示されていない場合は, スペクトル密度 ( $1/\sqrt{\text{Hz}}$ ) を用いて計算を行っている.

<sup>2</sup>本論文においては, 主に光の周波数について  $\Omega$  を, 力学系の振動数について  $\omega$  を用いる. また,  $\omega > 0$  とし, power spectrum は全て片側表示である.

と書ける．

このとき，式 (2.26)(2.30) より，変位  $\delta x$  には

$$\langle \delta x_{\text{shot}}^2 \rangle \simeq \frac{hc\lambda}{8\pi^2 P_0} \text{ m}^2/\text{Hz} \quad (2.31)$$

という感度限界が与えられることが分かる．これは光子の統計的性質から直接導かれた感度限界である．光検出時の位相雑音として考えることができる，この  $\delta x_{\text{shot}}$  を検出ショットノイズ (散雑音) と呼ぶ．

検出ショットノイズは白色雑音である．すなわち

$$\langle \delta x_{\text{shot}}(\omega)^2 \rangle \simeq \frac{hc\lambda}{8\pi^2 P_0} \text{ m}^2/\text{Hz} \quad (2.32)$$

式 (2.32) によれば，入射光強度  $P_0$  を上げることにより，それに反比例して検出ショットノイズを低減させることが可能であり，式 (2.20) で表される光子の統計性を無視することができることが分かる．しかし光強度を上げていった場合，光子の統計性は，その運動量揺らぎを通じて系の雑音になりうるということが予測されている．すなわち，光の運動量揺らぎが干渉計の鏡と力学的な相互作用を行うことにより鏡の位置揺らぎとして感度限界を定めてしまう．この雑音を輻射圧雑音と呼ぶ．次節ではこれを議論する．

## 2.2.2 free mass の SQL

まず，シンプルな状況として，鏡の固有振動を無視する．すなわち，鏡を free mass として扱えるときの輻射圧雑音を考える．この状況は，実際の鏡においては，その固有振動に比べて十分に高い周波数で観察を行う場合に相当する．

### 輻射圧雑音

パワー  $P_0$  のレーザーは，運動量  $P_0/c$  を持つ．Michelson 干渉計の片腕には垂直に  $P_0/2$  の光が入射されるため，mirror1 の運動方程式は

$$m\ddot{x}_1 = 2 \times \frac{(P_0/2)}{c} \quad (2.33)$$

となり，mirror2 も同様である．揺らぎの周波数成分を考えると，

$$m^2\omega^4 \langle \delta x(\omega)^2 \rangle = \frac{4}{c^2} \times (\langle \delta P_0^2 \rangle / 2 + \langle \delta P_0^2 \rangle / 2) \quad (2.34)$$

式 (2.26) より，輻射圧雑音  $\delta x_{\text{rad}}$  は

$$\langle \delta x_{\text{rad}}(\omega)^2 \rangle \simeq \frac{8\hbar\Omega P_0}{m^2\omega^4 c^2} \text{ m}^2/\text{Hz} \quad (2.35)$$

と書ける．輻射圧雑音のスペクトルは入射光強度に比例して大きくなることが分かる．

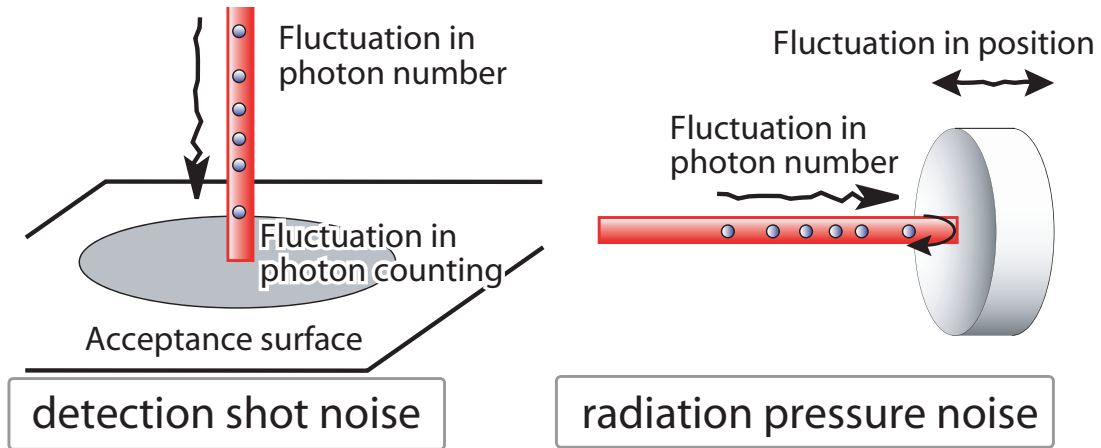


図 2.2: 検出ショットノイズ (左) と輻射圧雑音 (右) のイメージ .

### 標準量子限界

入射光の持つ量子性から導かれる雑音は，式 (2.32) で表される検出ショットノイズと式 (2.35) で表される輻射圧雑音である .

$$\langle \delta x_{\text{total}}(\omega)^2 \rangle = \langle \delta x_{\text{rad}}(\omega)^2 \rangle + \langle \delta x_{\text{shot}}(\omega)^2 \rangle \quad (2.36)$$

ここまでの議論により，検出ショットノイズは入射光強度に反比例し，輻射圧雑音は比例することが分かった . よって，これら 2 つの雑音の和はある光強度で最小値を与えることが分かる . これが光の量子性の与える感度限界であり，標準量子限界 (Standard Quantum Limit, 以下 SQL) と呼ばれるものである . すなわち， $\langle \delta x_{\text{total}}(\omega)^2 \rangle$  の最小値を感度限界  $\langle x_{\text{SQL}}^2 \rangle$  と書くことができる . このときの光強度  $P_{\text{SQL}}$  及び感度限界は

$$P_{\text{SQL}}(\omega) = \frac{m\omega^2 \lambda c}{8\pi} \text{ W} \quad (2.37)$$

$$\langle \delta x_{\text{SQL}}(\omega)^2 \rangle = \frac{4\hbar}{m\omega^2} \text{ m}^2/\text{Hz} \quad (2.38)$$

と書ける .

SQL は，レーザー干渉計においては測定のセンサである入射光によってもたらされる雑音を最小化する感度として与えられる，干渉計測の原理的な感度限界を定めるものとして考えることができる . 検出ショットノイズと輻射圧雑音の模式図を図 2.2 に示しておく . 検出ショットノイズは受光時の位相雑音，輻射圧雑音は光子の数揺らぎによって鏡の位置がふらつくことによる雑音であると考えられる .

### 不確定性原理からの導出

Michelson 干渉計において，2 つの鏡の位置の揺らぎ  $\Delta x$  と運動量の揺らぎ  $\Delta p$  を考える . まず，2 つの鏡が独立に運動しているとする，不確定性原理は

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (2.39)$$

と書き直せる . すなわち，運動量の最小揺らぎは

$$\langle \Delta p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{\langle \Delta x^2 \rangle} \quad (2.40)$$

で与えられる．バンド幅  $\Delta f$  (計測時間  $\tau = 1/2\Delta f$ ) で計測を行う．このとき，鏡にはたらく力の揺らぎ  $\Delta F$  は

$$\langle (\Delta F)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{\langle \Delta x^2 \rangle \tau^2} = \frac{4\hbar^2 (\Delta f)^2}{\langle \Delta x^2 \rangle} \quad (2.41)$$

となる．これより， $\Delta F$  による位置揺らぎ  $\langle \Delta x'^2 \rangle$  は，

$$\langle \Delta x'^2 \rangle = \frac{4\hbar^2 (\Delta f)^2}{m^2 \omega^4 \langle \Delta x^2 \rangle} \quad \text{m}^2 \quad (2.42)$$

と書ける． $\langle \Delta x^2 \rangle$  と  $\langle \Delta x'^2 \rangle$  の和が全体の不確定性となり，

$$\langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta x'^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \frac{4\hbar^2 (\Delta f)^2}{m^2 \omega^4 \langle \Delta x^2 \rangle} \quad (2.43)$$

$$\geq \frac{4\hbar^2}{m\omega^2} \Delta f \quad (2.44)$$

以上より

$$\langle \delta x_{\text{SQL}}(\omega)^2 \rangle = \frac{4\hbar}{m\omega^2} \quad \text{m}^2/\text{Hz} \quad (2.45)$$

となり，式 (2.38) が再現される．

## SQL の観察

重力波検出に向けた超高感度計測技術の発展により，レーザー干渉計の感度は SQL に近いところまで達している<sup>4)</sup>．

しかし，SQL そのものは未だに実験的な実証はなされていない．それは，SQL が超高感度の精密測定を要求することに起因する．特に，干渉計における輻射圧の効果は非常に微小なものであり，近年まで確認されていなかった<sup>31)</sup>．そして，式 (2.35) で表される輻射圧雑音は未だに観察されていない．

しかし，次世代型の重力波検出器の設計感度は SQL のレベルに定められており，近い将来に実現されることが期待されている<sup>9,10)</sup>．ここに，SQL を早期に実験的に実証することの必要性が近年高まっていると言うことができる．これが本研究の動機であり，干渉計測の SQL を観察することが最終的な目標となる．

それでは，輻射圧雑音を観察し，SQL を実証するためにはどのような戦略が考えられるのだろうか．式 (2.35)(2.37) などを見ながら考えていく．

### 力学系の質量について

式 (2.35) より，mirror1 の質量を軽くすることで，mirror1 において輻射圧の効果を強めることができることが分かる．このとき，式 (2.37) より，必要な光強度もまた小さくすることができる．mirror1 の質量を  $m_0$  とすると ( $m_0 \ll m$ )，mirror2 にはたらく輻射圧の大きさは無視することができ，式 (2.35) は

$$\langle \delta x_{\text{rad}}(\omega)^2 \rangle \simeq \frac{4\hbar\Omega P_0}{m_0^2 \omega^4 c^2} \quad \text{m}^2/\text{Hz} \quad (2.46)$$

と書き改められる．また，光強度  $P_{\text{SQL}}$  及び感度限界  $\langle x_{\text{SQL}}^2 \rangle$  も，それぞれ式 (2.37)，式 (2.38) から

$$P_{\text{SQL}} = \frac{m_0 \omega^2 \lambda c}{4\sqrt{2}\pi} \quad \text{W} \quad (2.47)$$

$$\langle \delta x_{\text{SQL}}(\omega)^2 \rangle = \frac{2\sqrt{2}\hbar}{m_0 \omega^2} \quad \text{m}^2/\text{Hz} \quad (2.48)$$

と書き直せる．

光強度について

式 (2.47) は一般には莫大な光強度であり，通常のレーザーを照射しただけでは実現することができない領域にある．そのため，入射光強度を大きくすることに加えて，Fabry-Perot 共振器を組むことにより鏡に照射される光の強さを実効的に強めることが有効である．この点については第 4 章にて詳しく検討する．

ターゲットとする周波数帯について

式 (2.47)(2.48) を見ると，より低周波数をターゲットとした方が  $\delta x_{\text{SQL}}$  は大きくなり，必要な光強度も小さくて済むことが分かる．しかし，低周波 (数 kHz 以下) では，地面雑音，光源の持つ雑音など技術的な雑音が支配的であり，SQL を実現させることは非常に困難である．重力波検出プロジェクト，例えば日本の次世代型重力波検出器 LCGT においては，目標感度は 100 Hz 付近で SQL 感度に設計されている<sup>9)</sup>．これは逆に考えると，重力波検出器のような大きなプロジェクトのレベルでないと低周波の SQL 実現はほぼ不可能であることを表す端的な証拠であると言える．テーブルトップの実験で SQL を実現させるためには数 kHz 以上の，他の雑音が比較的小さくなる領域で考えるべきである．変位感度，必要な光強度を適度な大きさに抑えることとのトレードオフで周波数を決定する必要がある．

### 2.2.3 振動子の変位計測における SQL

前節において，鏡の質量を小さくし，かつ適切な周波数帯を選ぶことが SQL 実現には不可欠であることが分かった．このような場合，鏡の固有振動を考える必要が出てくるため，鏡を free mass とおく近似はあまり適切でない．そこで，今後は干渉計のモデルとして図 2.3 のように，mirror1 の質量を小さくし，かつある固有振動数  $\omega_0$  を持つモデルで考えることにする．

mirror1 の運動方程式は

$$\delta x_{\text{rad}}(\omega) = \chi(\omega) \times 2 \times \frac{(\delta P_0/2)}{c} \quad (2.49)$$

と書ける．ここで  $\chi(\omega)$  は鏡の機械感受率である．機械感受率については，構造摩擦モデルと呼ばれるモデルを採用する<sup>32)</sup>．このモデルは，損失関数に周波数依存性が存在せず，一般に損失の小さな力学系に対して良く成立することが知られている<sup>3)</sup>．

$$\chi(\omega) = \frac{1}{m_0 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega^2/Q)} \quad (2.50)$$

$Q$  は鏡の機械的な  $Q$  値である．

このとき，式 (2.49) より，輻射圧雑音は

$$\langle \delta x_{\text{rad}}(\omega)^2 \rangle = |\chi(\omega)|^2 \frac{2P_0 h}{\lambda c} \text{ m}^2/\text{Hz} \quad (2.51)$$

$$\equiv |\chi(\omega)|^2 S_{\text{rad}}(\omega) \quad (2.52)$$

と書ける．ここで，輻射圧雑音の power spectrum を

$$S_{\text{rad}}(\omega) = \frac{2P_0 h}{\lambda c} \text{ N}^2/\text{Hz} \quad (2.53)$$

<sup>3)</sup> 損失を持つ力学系に対してよく用いられる，速度に比例した損失 (粘性抵抗など) を持つモデルは粘性摩擦モデルと呼ばれる．2 つのモデルは共振周波数付近ではほぼ同じ振る舞いをするが，共振周波数から離れた帯域ではその違いが顕著になる．本論文では，煩雑さを避けるため，共振周波数における応答を調べる場合は粘性摩擦モデルで計算を行っている．

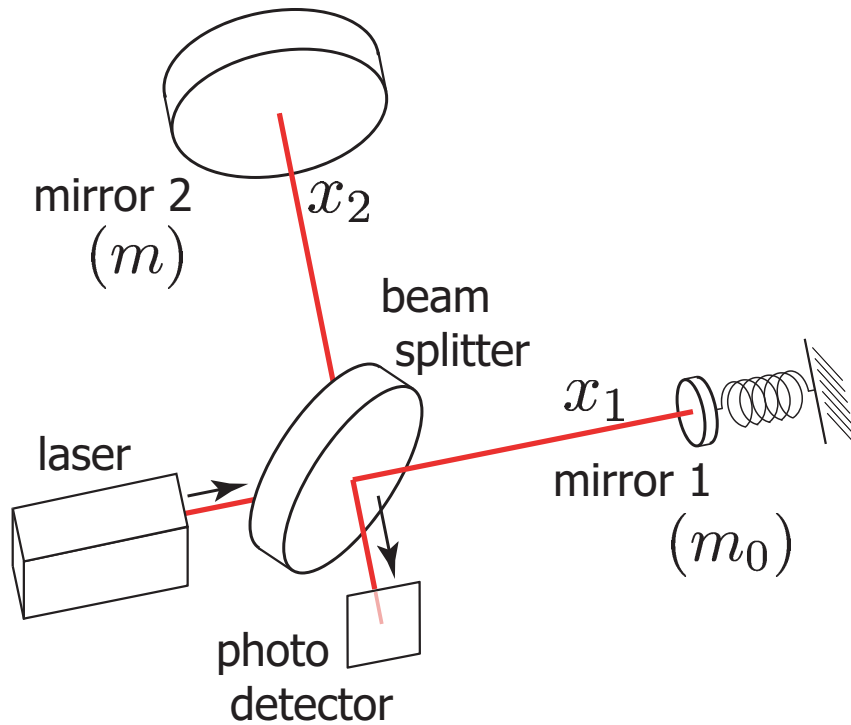


図 2.3: 輻射圧を顕在化させるための Michelson 干渉計の概念図 .

で定義した .

また , このときの SQL は

$$P_{\text{SQL}} = \frac{\lambda c}{4\pi|\chi(\omega)|} \text{ W} \quad (2.54)$$

$$\langle \delta x_{\text{SQL}}(\omega)^2 \rangle = 2\hbar|\chi(\omega)| \text{ m}^2/\text{Hz} \quad (2.55)$$

で与えられる .

## 2.3 熱雑音

量子雑音<sup>4</sup>を覆い隠す原理的な雑音として , 鏡の熱雑音が大きな問題になってくることが考えられるため , ここで扱っておく .

熱雑音の大きさの平均値は , エネルギー等分配則から得られる . バネ定数  $k_c$  の調和振動子と考えると , その変位  $\langle x_{\text{th}}^2 \rangle$  は

$$\frac{1}{2}k_c \langle x_{\text{th}}^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad (2.56)$$

で与えられる .

揺動散逸定理<sup>33)</sup>によれば , 熱平衡状態における熱雑音の power spectrum は

$$S_{\text{th}}(\omega) = -\frac{4k_B T}{\omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi(\omega)} \right) \quad (2.57)$$

<sup>4</sup>ここでは , 光子の持つ量子的な離散性に起因する雑音という意味で , 輻射圧雑音や検出ショットノイズに対して量子雑音という言葉を使っている .



で与えられる．機械感受率  $\chi(\omega)$  として，式 (2.50) の構造摩擦モデルを考えると，

$$S_{\text{th}}(\omega) = \frac{4m_0\omega_0^2 k_B T}{\omega Q} \quad \text{N}^2/\text{Hz} \quad (2.58)$$

となり，

$$\langle \delta x_{\text{th}}(\omega)^2 \rangle = |\chi(\omega)|^2 S_{\text{th}}(\omega) \quad \text{m}^2/\text{Hz} \quad (2.59)$$

で熱雑音の周波数成分が得られる．また，これを全周波数領域にわたって積分すると，

$$\int_0^\infty S_{\text{th}}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{k_B T}{m_0 \omega_0^2} \quad \text{m}^2 \quad (2.60)$$

となり，エネルギー等分配則 (式 (2.56)) が再現される．

## 2.4 SQL の観察に必要な要素

ここでは，SQL の観察に向けた戦略について，主に熱雑音との比較から定性的な考察を行う．

まず，単純に SQL 感度が熱雑音よりも十分に大きい必要があるであろう．熱雑音に対する SQL 感度の比  $\Theta$  は，式 (2.55)(2.59) より，

$$\Theta \equiv \frac{\langle \delta x_{\text{SQL}}(\omega)^2 \rangle}{\langle \delta x_{\text{th}}(\omega)^2 \rangle} \quad (2.61)$$

$$= \frac{\hbar \omega Q}{2m_0 \omega_0^2 k_B T |\chi(\omega)|} \quad (2.62)$$

と書ける．

### 2.4.1 共振周波数付近での SQL

鏡の共振周波数  $\omega = \omega_0$  においては，

$$\Theta = \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \quad (2.63)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(\text{鏡の振動状態の量子的な基底状態})}{(\text{鏡の持つ熱エネルギー})} \quad (2.64)$$

$$\simeq 1.0 \times \left( \frac{\omega}{2\pi \times 1 \text{ GHz}} \right) \left( \frac{T}{24 \text{ mK}} \right)^{-1} \quad (2.65)$$

と書ける．すなわち，SQL 感度を顕在化させる ( $\Theta > 1$ ) ためには，鏡の振動モードの量子的な基底状態を観察するレベルの計測が必要となる．鏡の振動の量子状態を観察することは cavity optomechanics の大きな目標の一つである<sup>20,21)</sup>．しかし， $\Theta = 1$  を実現するためのパラメータはここでは現実的とは言えない．ちょうど式 (2.65) のレベルの高周波かつ極低温を実現させ，振動の基底状態の観察を試みた先行研究は存在する<sup>34,35)</sup>．しかし，それは力学系に流れる電流を測定することにより計測を試みたものであった．レーザー干渉計で式 (2.65) のパラメータを実現させるのはほぼ不可能であろう．共振周波数をターゲットに据えることは SQL 計測には向かないと考えられる．

加えて述べておこならば，式 (2.65) のパラメータを達成することが直接鏡の巨視的振動の基底状態の観察に繋がるという単純化はできない<sup>34,21,36,20)</sup>．鏡の巨視的な振動状態の離散性 (quantum jump) の観察については，付録 A で理論的な取り扱いを行うことにする．

## 2.4.2 共振から外れた場所での SQL

では、共振周波数から外れた場所ではどうなるか考えてみる．低周波では、第 2.2.2 節で考察したように光源の持つ雑音・地面振動などの雑音が支配的になることが予想される．そのため、共振より十分に高い周波数 ( $\omega \ll \omega_0$ ) で考えることにする．このとき、 $\Theta$  は

$$\Theta = \frac{\hbar\omega^3 Q}{2k_B T \omega_0^2} \quad (2.66)$$

$$\simeq 2.4 \times \left(\frac{T}{4\text{K}}\right)^{-1} \left(\frac{Q}{10^6}\right) \left(\frac{\omega_0}{2\pi \times 50\text{kHz}}\right)^{-2} \left(\frac{\omega}{2\pi \times 100\text{kHz}}\right)^3 \quad (2.67)$$

と書ける．現実的なパラメータで  $\Theta > 1$  が実現される可能性があることが分かる．

式 (2.66) より、 $\Theta$  を大きくするために要求される要素として以下のものを挙げられる．

- 鏡の機械的 Q 値が大きい=損失が小さいこと
- 環境の温度を下げ、熱雑音を十分に小さくすること
- 周波数については、 $\Theta$  は  $\omega^3$  に比例して大きくなるが、SQL 感度は  $\omega^2$  に比例して小さくなるため、そのトレードオフとして定められる必要があること

また光強度については、式 (4.19) より

$$P_{\text{SQL}} = \frac{m_0 \omega^2 \lambda c}{4\pi} \quad (2.68)$$

$$\simeq 1.0 \times 10^{10} \times \left(\frac{m_0}{1\text{g}}\right) \left(\frac{\omega}{2\pi \times 100\text{kHz}}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{1064\text{nm}}\right) \text{ W} \quad (2.69)$$

を得る．式 (2.69) はこのままではまず実現不可能な数値である．適切な量にするための直接的な戦略としては

- 力学系の質量を小さくすること
- ターゲット周波数を高くしすぎないこと

が挙げられる．

以上より、力学系及び光学系に対して様々な制約が課せられることが分かった．ターゲットとする周波数については、光強度・熱雑音・外来雑音など様々な要因を考慮に入れる必要があることが分かった．加えて、ここで特に注目すべきなのは

- 高い機械的 Q 値
- 微小質量

の両立が力学系への要請として与えられていることである．

高い機械的 Q 値と微小質量の両立はしかし、一般に非常に困難であることが知られている．これは、力学系の損失が、その表面部分の機構による部分が大きいことから説明できる．すなわち、質量を小さくすると、体積に対する表面積の割合が増す．表面による損失が支配的となることで、Q 値は向上しない．力学系の体積とその Q 値については、内部損失が非常に小さな物質を考えた場合、ほぼ比例関係にあることが分かっている<sup>11)</sup>．

そのため、Q 値と微小質量についてはどこかでトレードオフを考える必要がある．また、レーザー干渉計として機能させるために、微小質量には光を照射させる必要がある．これも鏡の大きさの下限にある程度の制限を及ぼすことになる．この点においては次章にて論議する．

## 2.5 特殊な実験手法

最後に、SQL と密接に関わる実験手法をいくつか紹介する。SQL は、ここで挙げるような技術を発展させるための 1 つの基礎になるものであると考えている。

### 2.5.1 変位雑音フリー干渉計 (DFI)

変位雑音フリー干渉計 (Displacement- and frequency-noise Free Interferometer, DFI) とは、複数の干渉計を組み合わせ得られた信号を適当に演算することにより、変位雑音及び周波数雑音をキャンセルすることが可能な干渉計である<sup>37)</sup>。輻射圧雑音は変位雑音であるため、原理的には完全に取り除くことができると言われている。すなわち、この方法によれば、光強度の増強により SQL 感度を超えることが可能となる。

干渉計の配置としては

- 4 台の Mach-Zehnder 干渉計を立体的に組み合わせたもの<sup>38)</sup>
- Synchronous recycling 干渉計を用いるもの<sup>39)</sup>

などが提案されており、その配置によってキャンセル可能な雑音の数は変わる。

### 2.5.2 squeezed 光を用いた検出ショットノイズの低減

第 2 章で述べたように、コヒーレント状態とは光子同士の相関が全くない状態であった。光子に相関を与えることで、最小不確定状態にある 2 つの演算子の揺らぎに重みを付けた状態が squeezed 光と呼ばれる状態である。ここでは紹介にとどめるが、重力波検出プロジェクトにおいては、入射光と squeezed された真空場を干渉させることにより、検出ショットノイズを低減させる手法が実用化されようとしている<sup>27,40)</sup>。

squeezed 光を用いる方法は本質的に SQL を超えるものではなく、例えば上記の方法においては、輻射圧雑音を増加させた分だけ、いわばそれを犠牲にして検出ショットノイズを低減させる方法である。つまり、SQL に関して言えば、より弱い光で SQL を達成するための方法であると考えられることができる。強度の大きな光を用いることによる発熱の問題を回避できる点で、干渉計の高感度化に大きく寄与している技術である。

## 第3章 振動子の力学特性

第2章の議論により，Q値の高い振動子がSQLには不可欠であることが分かった．そのためにQ値の上限についてまず見積もる必要が生じた．それについて議論したのが本章である．

ここでは，まず振動子のQ値に関する議論を行う．今回は，計測対象となる力学系として音叉型の水晶振動子を試験的に選択した．その力学特性について行った実験の報告を行う．その後，この水晶振動子がSQL測定に利用できる可能性について議論する．

### 3.1 振動子の損失

Q値について考察するためには，振動子の損失のメカニズムを知る必要がある．ここではその理論を取り扱う<sup>32,41)</sup>．系全体の損失は，影響を与えている全ての損失の和で表すことができる．すなわち

$$\frac{1}{Q} = \sum_i \frac{1}{Q_i} \quad (3.1)$$

と書ける．損失が最も大きなメカニズムがQ値を制限すると考えてよい．

#### 3.1.1 残留ガスの影響

大気中においては，空気との摩擦による振動の減衰が極めて大きい．これは真空中に引くことで大きく低減可能であるが，それでも残留ガスによる影響を考える必要がある．理想気体で考えると，残留ガスによるQ値の制限は<sup>11,41)</sup>

$$Q_{\text{gas}} = \frac{CL\rho\omega_0}{p_{\text{gas}}} \sqrt{\frac{k_B T}{m_{\text{mol}}}} \quad (3.2)$$

と書ける． $L$ ， $\rho$ ， $m_{\text{mol}}$ ， $p_{\text{gas}}$  はそれぞれ振動子のサイズ・密度，ガス分子の平均質量・圧力である． $C$  は振動子の形によって決定される無次元の係数で，複雑な形状でない場合はほぼ1のオーダーである．

#### 3.1.2 振動子の支持部分からの損失

振動子は何らかの方法で固定されねばならないが，その支持部分からの損失もまた考慮する必要がある．損失を抑える方法としては，

- 振動子と接している面積を小さくすること
- 振動子の支持を，振動の節になっている部分で行うこと

が挙げられる．

或いは，振動子を外部と無接触にすることにより支持部からの損失を0にする方法も考えられる．

- 常磁性体の磁気浮上<sup>42)</sup>

- 超伝導ピン止め効果による磁気浮上

などが挙げられるが、いずれも材質に大きな制限が加えられる。また、それぞれの浮上メカニズムによる外部への散逸を考慮する必要がある。

### 3.1.3 内部損失

残留ガス・支持部分の損失が十分に小さければ、振動子の損失はその内部のメカニズムによって支配される。このとき、既に第2章で導入したとおり、振動子の特性は構造摩擦モデルと呼ばれるモデルで良く記述されることが知られている。

構造摩擦モデルは、複素バネ定数  $m_0\omega_0^2(1 + i\phi_m)$  を導入した運動方程式において、 $\phi_m = Q^{-1}$  と、 $\phi_m$  に周波数依存性を入れない場合に与えられる。

$$\chi(\omega) = \frac{1}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega_0^2/Q)} \quad (3.3)$$

様々な物質の内部散逸がこのような振る舞いを見せることは多くの実験で示されている<sup>43,44)</sup>が、その過程についてはまだ未解明な部分が多い<sup>41)</sup>。

### 3.1.4 thermoelastic damping

物質が変形して非一様な伸縮が生じた際に、非一様な温度変化が生じる。このときに発生する物質内部の対流によって生じるエネルギー散逸が thermoelastic damping と呼ばれるものである。鏡にレーザーを照射した際、エネルギーを吸収することによる熱の発生が生じると考えられる。これにより熱勾配が生じ、問題となることが予想される。

## 3.2 音叉型水晶振動子

### 3.2.1 実験に用いた振動子

第2章での議論により、SQL 観察のためには極微小かつ高い Q 値を持つ力学系の振動を見ることが有効であることが分かったが、その両立は極めて困難であることもまた示された。そのため、実際の振動子はどの程度良いパラメータを示すかを知ることが必要となった。そこで、音叉型の水晶振動子を試験的に力学系の候補として選択し、その力学特性について計測を行った。振動子の写真及びサイズを図 3.1 に示す。

この水晶振動子はシチズンファインテック株式会社<sup>1</sup>から提供していただいたもので、時計用の周波数参照として一般に用いられているものである。駆動周波数は  $2^{15} = 32768$  Hz であるが、今回用いた振動子は電極などの加工を行う前の状態であるため、共振周波数は  $2^{15}$  Hz からは若干ずれていると考えられる。

また、水晶の単結晶は方向によってヤング率が異なるが、この振動子の結晶軸の方向は分かっていない。

<sup>1</sup><http://cfm.citizen.co.jp/>

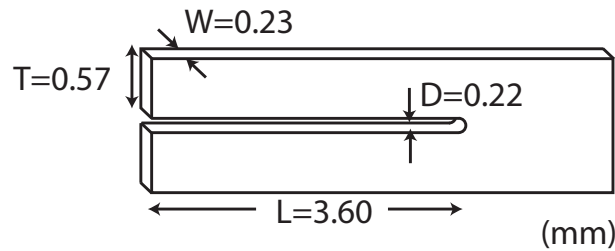
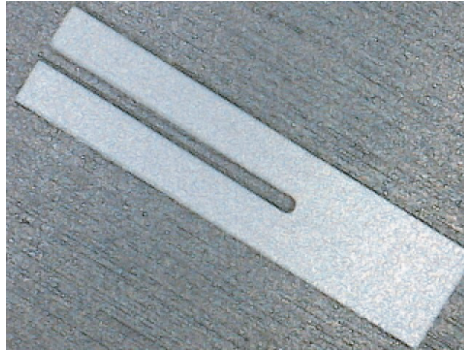


図 3.1: 音叉型水晶振動子の写真及びサイズ．音叉モードの振動を見るのが主眼であるため， $T$ (thickness) と  $W$ (width) は直感的な厚さ・幅方向とは異なっていることに注意．

### 3.2.2 音叉型水晶振動子を用いた精密計測

今回，この振動子を候補に選んだ理由としては以下のような点を挙げることができる．

- SQL 測定のための振動子に課せられる条件である，High-Q かつ small mass という条件をクリアしていると考えられた．
- 2本の梁が対称に横方向に振動する，所謂音叉モードと呼ばれる振動は，重心の位置が変わらないため，その分損失が低減できる．
- 水晶の単結晶は，低温にすることで更なる Q 値の上昇が見込める<sup>45)</sup>．
- 光を照射させるのに十分な大きさの面が確保されていると考えられる．
- 安価であり，容易に手に入れることが可能である．

音叉型水晶振動子は非常に良い力学特性を持つため，多くの実験で高感度のセンサとして用いられていたこともまた理由として挙げられる．そのうちのいくつかを挙げると，

- 原子間力顕微鏡 (Atomic Force Microscope, AFM)，Casimir 効果の観察<sup>46)</sup>
- 近接場走査型顕微鏡 (Scanning Near-field Optical Microscopy, SNOM)<sup>47)</sup>
- 磁気力顕微鏡 (Magnetic Force Microscope, MFM)<sup>48)</sup>
- 地震計，マイクロジャイロ<sup>49)</sup>

など，いずれも市販の 32 kHz の音叉型水晶振動子をセンサに用いることによって計測を行っているものである．

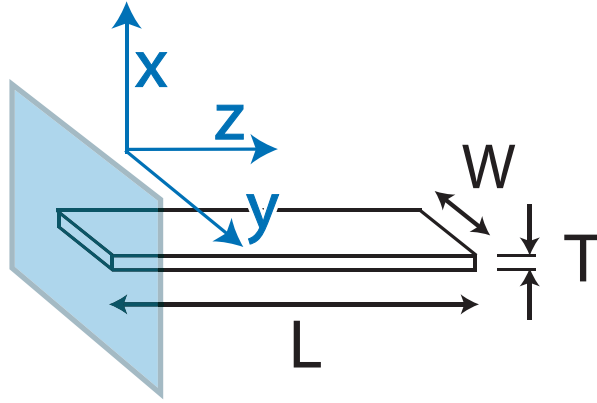


図 3.2: 片持ち梁と座標軸の設定． $x$  方向に振動する．

### 3.3 片持ち梁の振動特性

水晶振動子の片腕を図 3.2 のような片持ち梁と近似し，その力学特性について計算する． $L, W, T, E, \rho$  はそれぞれ長さ，幅，厚さ，ヤング率，密度を与える．振動は  $x$  (厚さ) 方向の一次元のみで考える．また， $Q$  値は十分に高いものとして計算を進めていく．

#### 3.3.1 外力に対する応答

振動子の長さ方向を  $z$  軸にとり， $z = z_0$  での  $x$  方向への変位を  $x(z_0, t)$  で表す．振幅が小さければ，片持ち梁は完全弾性体と考えて十分であり，その運動方程式は

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \frac{\rho WT}{EI} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

と書ける<sup>47)</sup>． $I$  は断面の 2 次モーメントで，

$$I = \int_S x^2 dS = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-W/2}^{W/2} x^2 dy dx \quad (3.5)$$

$$= \frac{WT^3}{12} \quad (3.6)$$

と計算される．

式 (3.4) の解として

$$\delta x(z, t) = (a_1 e^{\alpha_n z} + a_1 e^{-\alpha_n z} + a_1 e^{i\alpha_n z} + a_1 e^{-i\alpha_n z}) e^{-i\omega t} \quad (3.7)$$

の形を考えると，

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = \alpha_n^4 x \quad (3.8)$$

$$\alpha_n^4 = \frac{\rho WT}{EI} \omega_n^2 \quad (3.9)$$

が得られる．これを片持ち梁の境界条件

$$x|_{z=0} = 0$$

$$\partial x / \partial z|_{z=0} = 0$$

$$\partial^2 x / \partial z^2|_{z=L} = 0$$

$$\partial^3 x / \partial z^3|_{z=L} = 0$$

の下で解く．

自明でない解を持つ条件は，

$$\cos(\alpha_n L) \cosh(\alpha_n L) + 1 = 0 \quad (3.10)$$

$$a_1 + a_3 = 0 \quad (3.11)$$

$$a_2 + a_4 = 0 \quad (3.12)$$

となる． $\alpha$  は数値計算により求められる．小さい方から書き下すと

$$\alpha_0 L \equiv \eta_0 = 1.87510$$

$$\alpha_1 L \equiv \eta_1 = 4.69409$$

$$\alpha_2 L \equiv \eta_2 = 7.85476$$

$$\alpha_3 L \equiv \eta_3 = 10.99554$$

$$\alpha_4 L \equiv \eta_4 = 14.13717$$

$$\alpha_5 L \equiv \eta_5 = 17.27826$$

$$\omega_1/\omega_0 = 6.26692$$

$$\omega_2/\omega_0 = 17.54757$$

$$\omega_3/\omega_0 = 34.38621$$

$$\omega_4/\omega_0 = 56.84289$$

$$\omega_5/\omega_0 = 84.90849$$

特に，最低次の共振周波数は

$$\omega_0 = 1.0150 \frac{T}{L^2} \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

と書ける．

### 3.3.2 換算質量

片持ち梁は連続的に質量が分布しているが，これを一つの質点と考えた有効質量を用いると分かり易い．観測する点に質量  $m_{\text{reduced}}$  の質点があると考え，板全体の運動エネルギー  $K_1$  を質点  $m_{\text{reduced}}$  の運動エネルギーに換算する．この  $m_{\text{reduced}}$  を換算質量と呼ぶ．

$$K_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 TW dz \quad (3.14)$$

特定のモード  $u_n(z)e^{-i\omega_n t}$  に対しては，

$$K_1 = \frac{1}{2} \rho TW \omega_n^2 \sin^2 \omega_n t \int_0^L u_n(z)^2 dz \quad (3.15)$$

となる．対して，観測点  $z = z_0$  にある質量  $m_{\text{reduced}}$  の運動エネルギー  $K_2$  は，

$$K_2 = \frac{1}{2} m_{\text{reduced}} \left( \frac{\partial x(z_0)}{\partial t} \right)^2 \quad (3.16)$$

と書ける． $K_1$  と同様特定のモードについて考えると

$$K_2 = \frac{1}{2} m_{\text{reduced}} \left( \frac{\partial(u_n(z_0)e^{-i\omega_n t})}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} m_{\text{reduced}} \omega_n^2 u_n(z_0)^2 \sin^2 \omega_n t \quad (3.17)$$

が得られる． $K_1 = K_2$  より， $n$  次のモードに対する換算質量  $m_n$  は

$$m_n = \frac{\rho TW}{u_n(z_0)^2} \int_0^L u_n(z)^2 dz \quad (3.18)$$

となる．すなわち，片持ち梁の振動は質点の振動として考えることが可能である．今後は質点として計算していく．



### 3.3.3 共振とその減衰振動

今後の計測で用いる，最低次の共振周波数 ( $\omega = \omega_0$ ) 付近での応答を考える．今回は構造摩擦モデルで考えているが，共振周波数付近での応答はモデルによらず，ほぼ同じ Lorentzian となる．振動の power spectrum は機械感受率の絶対値の 2 乗に比例する形で与えられ，

$$x(\omega)^2 \propto \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega_0^2/Q)^2} \quad (3.19)$$

と書ける．共鳴の半値全幅  $\omega_0/Q$  は，速度摩擦モデルにおける粘性係数  $\gamma$  に等しい．

外力によって  $\omega = \omega_0$  で共振している振動子は，外力の供給が止まった瞬間から減衰振動を始める． $t = 0$  で外力が 0 になったとすると，粘性抵抗を持つ振動子の運動方程式より，その減衰振動は

$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2Q} + i\omega'_0 t + i\theta_0\right) \quad (3.20)$$
$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \quad (\simeq \omega_0)$$

で与えられる． $\tau_c \equiv 2Q/\omega_0$  は振動の緩和時間を表す．

## 3.4 水晶振動子の力学特性

### 3.4.1 理論値

まず，前節の議論により，音叉型水晶振動子を 2 つの独立な長方形の片持ち梁と近似した場合の力学特性の理論値を計算しておく．水晶のヤング率  $E$ ，密度  $\rho$  はそれぞれ  $7.87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ， $2659 \text{ kg/m}^3$  である．最低次の共振周波数及び有効質量については，それぞれ式 (3.13) と式 (3.18) より，

$$\omega_0 \simeq 2\pi \times 38.6 \text{ kHz} \quad (3.21)$$

$$m_0 \simeq 0.6 \text{ mg} \quad (3.22)$$

となる．有効質量については，振動の観察点を振動子の先端 ( $z = L$ ) として計算した．また，共振周波数が 32 kHz より 2 割近く大きいのが，これは振動子が未加工であり，電極の蒸着前であることに起因すると考えられる．電極の蒸着による共振周波数の低下を見込んだ数字であろう．

### 3.4.2 室温での Q 値

水晶振動子の力学特性について実験を行った．

#### 計測の原理

計測の原理を図 3.3 に示す．

まず，振動子は機械的に固定されている．交流電圧を，水晶振動子の 2 つの梁の隙間に，音叉モードの振動と垂直な方向にかける．水晶は誘電体であるため，より強い電圧のかかっている方向に力を受ける．共振周波数付近の交流をかけることで，基本モードの振動を励起する．

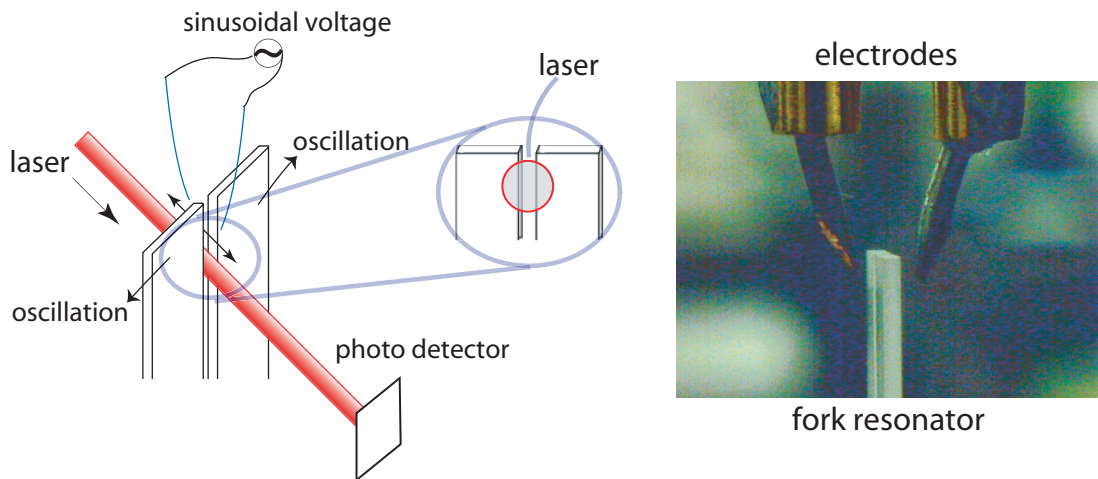


図 3.3: Q 値測定の原理．レーザーは振動子の隙間を，振動子上で十分な強度が散乱される程度の半径で通り抜ける．右側の写真は振動子を横から見たもの．

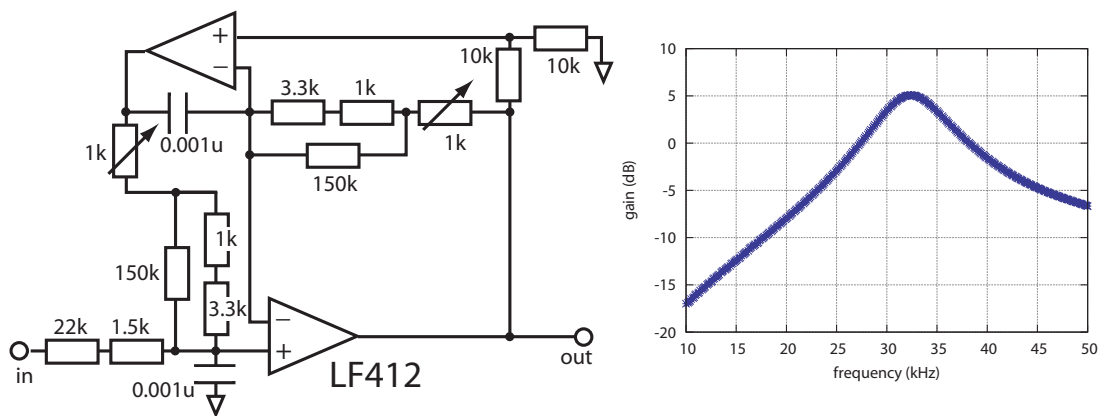


図 3.4: バンドパスフィルタの回路とそのゲイン特性．可変抵抗で中心周波数を 32400 Hz に調整している． $Q = 5.2$ ，中心周波数でのゲインは 2．

センサとして，He-Ne レーザー (633 nm, 1 mW) を，2 つの梁の隙間を通す形で照射する．その大きさは 2 つの梁の間の距離  $D = 0.22$  mm よりも十分大きくしておき，光の一部が振動子によって遮られ，散乱されるようにしておく．

振動子の隙間を通り抜けた光を光検出器 (photo detector, PD) で受ける．振動が十分に励起されていれば，通過した光は振動の周波数成分を含んでいるはずである．この光の励起周波数成分から，振動に関する情報が得られる．

通過した光強度のうち，交流電場の周波数成分は，ちょうど振動子の振幅に比例した成分を持っている．このことは付録 B で示しておく．

また，電気信号をフィルタに通すことにより，32kHz 付近での信号の増幅を図った．このとき用いた回路及びそのバンドパス特性の測定結果を図 3.4 に示しておく．

### Q 値の計測

計測の原理検証も兼ねて，まず室温，空気中で Q 値の測定を行った．光学系は図 3.3 とほぼ同程度の，非常にシンプルなものである．

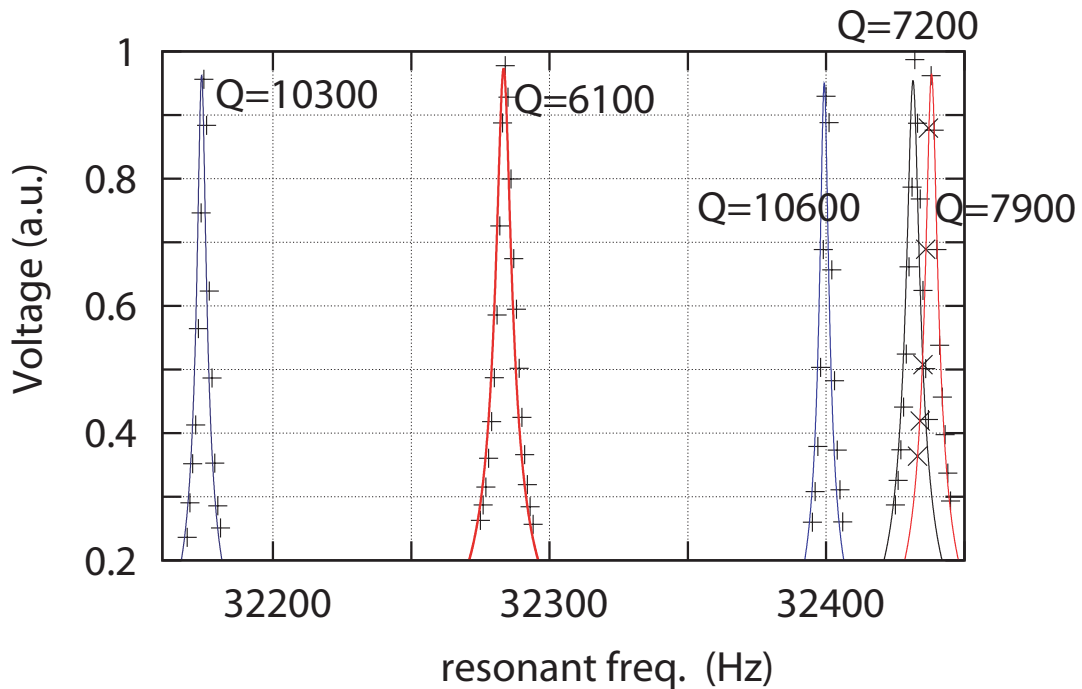


図 3.5: 空気中での Q 値測定結果．実線は Lorentzian によるフィッティング．

5 つの振動子に対して，共振周波数の計測を行った結果が図 3.5 である．

- Lorentzian によるフィッティングは実験値に良く一致している．すなわち，確かに周波数成分は振幅に比例する成分を持っていることが示された．
- 共振周波数は 32.1 - 32.5 kHz 程度に散らばっている．振動子の固定は，根元を機械的に押さえつけているだけなのでその部分で個体差が生じている可能性もある．
- Q 値は 6000-10000 程度に散らばっている．これも，振動子の固定箇所からの損失も大きく寄与している可能性が考えられる．
- 励起電圧 ( $\sim \pm 10$  V) の範囲内においては励起電圧と出力に対してほぼ線形性が維持されていることを確認した．

### 3.4.3 Q 値の温度依存性

#### 実験系

実験系を図 3.6 に示す．振動子の冷却は，4K GM パルス管冷凍機システム (冷却能力：0.1 W) により行った．真空槽内のステージ上に，低温用エポキシ接着剤 (Stycast 2850FT) で振動子を固定した．振動子の接着を底面の微小面積に抑え，接着部分からの損失を低減する．

真空排気はターボ分子ポンプとロータリーポンプによって行った．真空度の測定はピラニ真空計を用いている．到達した典型的な真空度は 1 Pa 程度であるが，後述のように実際にはこれよりも良い真空度であった可能性が高い．また，温度計測はステージ横の穴に Si 温度計を埋め込んだ状態で行った．

計測の原理は空気中と同様，He-Ne レーザーをセンサとしたものである．振動子を抜けた光がプリズムで 2 回反射し，真空槽から出てくる．その光を PD で受ける構成であるが，振動子の

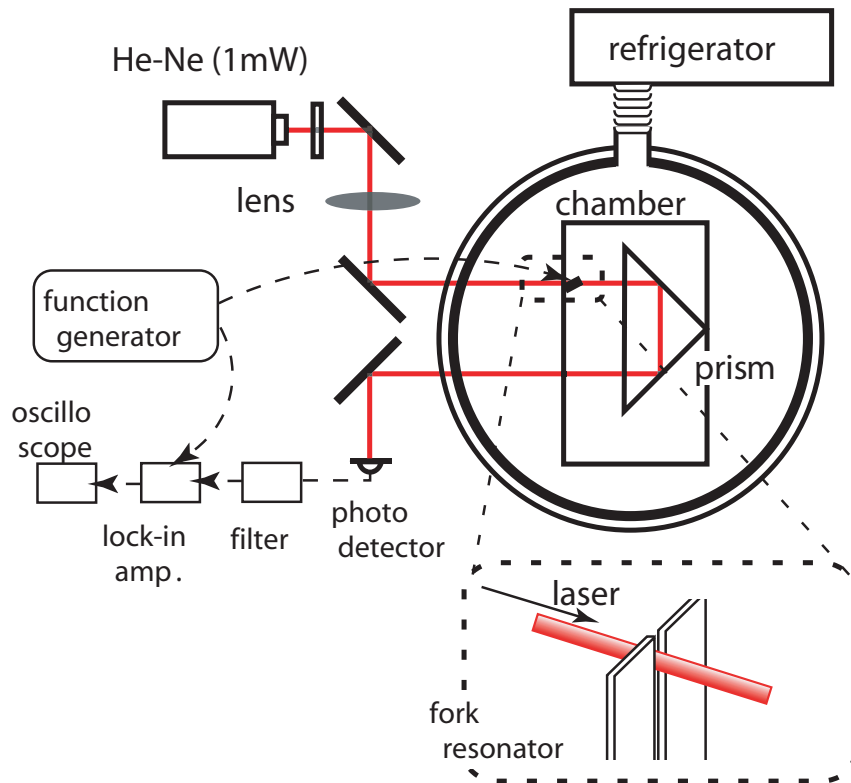


図 3.6: Q 値の温度依存性測定の実験系．基本的な構成は空気中の場合と変わらない．

励起電圧の回り込みにより PD の出力の S/N が著しく低下することが問題となった．PD をシールドすることで問題はほぼ解決された．

まず真空・室温で Q 値を測定したところ，Q 値は  $1.6 \times 10^5$  程度であった．大気への散逸をほぼ完全に遮断できるため，その分の損失が改善されたと考えられる．共振線幅は 0.2 Hz 程度となった．ここで，低温下に伴う Q 値の更なる上昇により，ピークの周波数及び振幅の推定についてやや精度を欠くおそれが考えられた．そのため，Q 値の温度依存性については，励起電圧を止めてからの振動の減衰時間からその推定を行うことにした．ロックインアンプにより式 (3.20) の包絡線  $x_0 \exp(-t/\tau_c)$  の情報を得て，そこから Q 値を求めた．

### Q 値の温度依存性

まず真空槽内の温度であるが，ただ冷凍機を動かした状態では冷却限界は 13 K 程度であった．温度の低下を妨げる要素としてレーザーの照射窓からの熱輻射の問題が考えられたため，光学系を覆う形でアルミ箔による熱輻射の低減を試みた．その結果，真空槽内の温度は典型的に 5.8 K まで下げることが可能となった．

室温 (300 K)，5.8 K における減衰振動の様子を図 3.8 に示す．室温では  $\tau_c \sim 1$  s，低温で最大  $\tau_c \sim 48$  s 程度まで上昇し，このときの Q 値は  $5.0 \times 10^6$  であった．また，Q 値の温度依存性を図 3.9 に示す．温度低下と共に Q 値は大幅に上昇した．

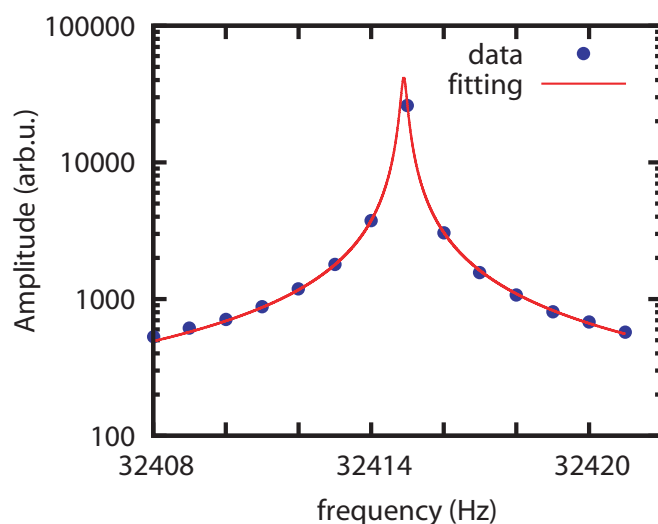


図 3.7: 室温・真空での周波数応答．フィッティングにより  $Q \sim 1.6 \times 10^5$  が得られたが，共振線幅が非常に細くなり，周波数応答からでは正確な  $Q$  値の測定が困難となっている．

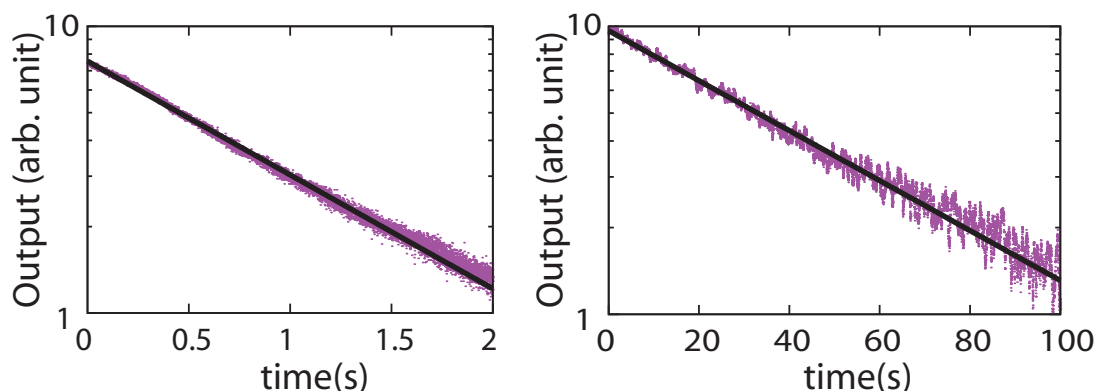


図 3.8: 室温(左)と 5.8K(右)における振動の減衰曲線．実線はフィッティング．緩和時間は 1s から 48s まで上昇した．

### Q 値の変化について

Q 値の温度変化，特に 20-50 K での Q 値の減少のメカニズムを考える．文献によると，38 K でピークを迎える損失として，結晶作製の溶液中の  $Al^{+3}$  イオンがその原因として挙げられている<sup>50)</sup>．酸素の結合が 2 つの  $Al^{+3}$  に置き換わることにより格子欠陥が生じる．その格子の歪みがちょうど振動子の振動数の超音波として損失になってしまうというモデルである．

同じく振動子中の不純物として， $Na^+$  による損失についてもいくつかの研究がある<sup>51,52,53)</sup>．しかし，いずれも損失の極大点が 50 K 前後にあることから，今回我々が用いた振動子には殆ど不純物としては含まれていないのではないかと考えられる．いずれにせよ，これらの損失は 10 K 以下では観察されないため，Q 値の最大値に影響は与えていないと判断した．

また，式 (3.2) に従って計算すると，振動子の形状と 1 Pa という真空度から，残留ガスによって制限される Q 値の上限として  $Q_{gas} \sim 10^6$  という数字が得られた．計測結果がこの値を有意に上回っていることから考えると，真空槽内の真空度は 1 Pa より十分に良かった可能性が考えられる．真空度ゲージが 1 Pa を下回ったあたりで振り切れてしまい，それ以降の正確な数値を測定できて

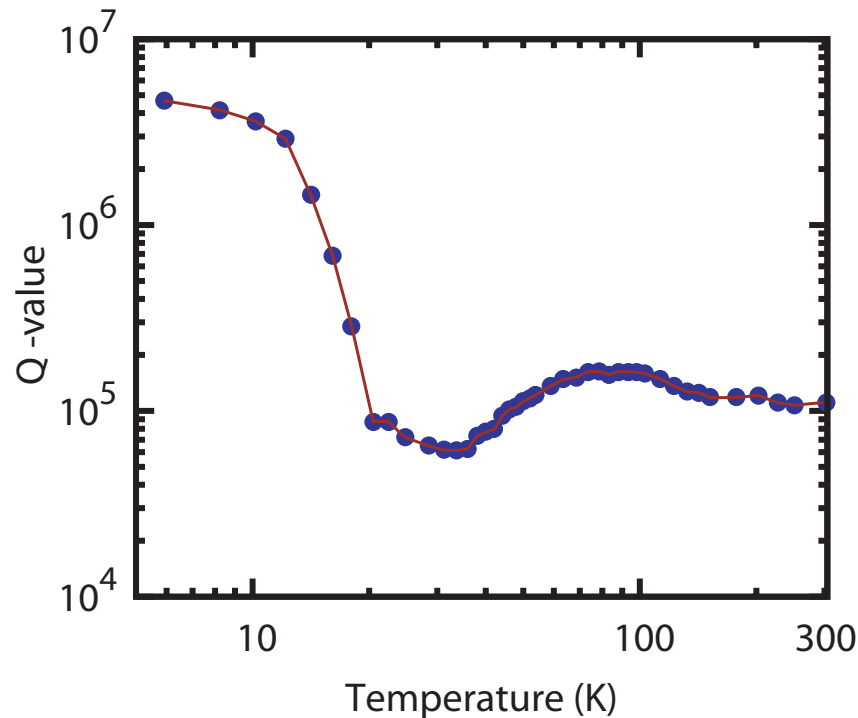


図 3.9: Q 値の温度依存性． $T = 5.8\text{ K}$  で，Q 値は最大 500 万程度まで達した．

いなかったと推測される．

また，図 3.10 によると，振動子の共振周波数は温度の低下と共に下がっている．一般には，冷却によりヤング率は上昇し，それに伴い共振周波数は上昇することが知られている<sup>54)</sup>．それゆえ，この値は振動子の物性を反映しているというよりも残留ガスや接着剤の物性の影響を受けている可能性がある．

### 3.5 水晶振動子による SQL の可能性

#### 3.5.1 Q 値からの考察

まず，この振動子の力学特性がどの程度優れたものであるか考察する．振動子のスケールに対し，それぞれ High-Q と呼べる振動子が持つ Q 値をプロットしたものを図 3.11 に示す<sup>11)</sup>．グラフより，振動子のスケールとその Q 値は良い線形関係を持っていることが分かる．図中において，我々の用いた音叉型水晶振動子は黒丸で示している．他の振動子と比べても遜色のない値であり，非常に良い力学特性を示していると言える．

#### 3.5.2 熱雑音との比較

では，この振動子は  $\Theta$ (式 (2.62)) に対して十分な値をとり得るであろうか． $T = 5.8\text{ K}$ ， $Q = 5 \times 10^6$ ， $\omega_0 = 2\pi \times 32\text{ kHz}$  などを代入して，熱雑音及び SQL 感度をプロットしたのが図 3.12 である．

グラフによれば，共振周波数付近では SQL 観察に必要な光強度は小さくなる．しかし，ここでは熱雑音が大きく SQL の観察は不可能である．

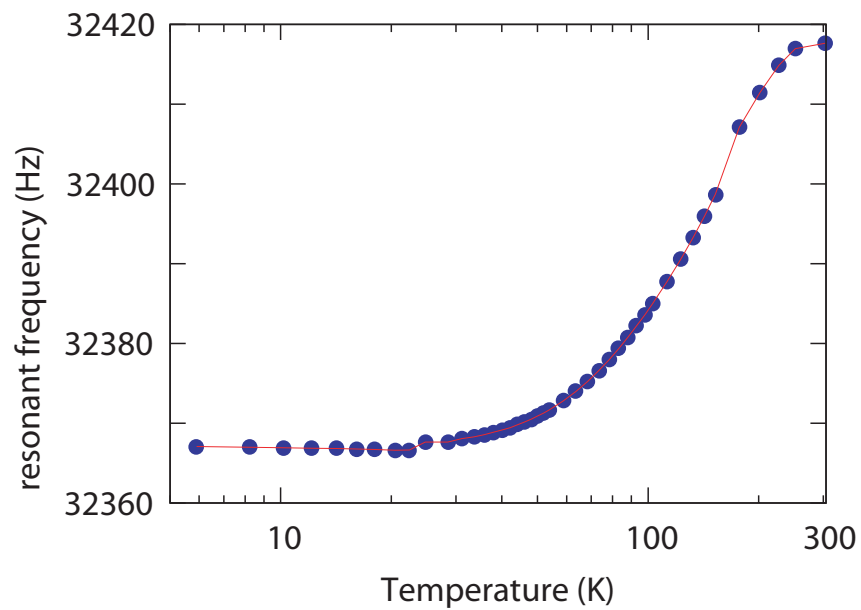


図 3.10: 共振周波数の温度依存性 .

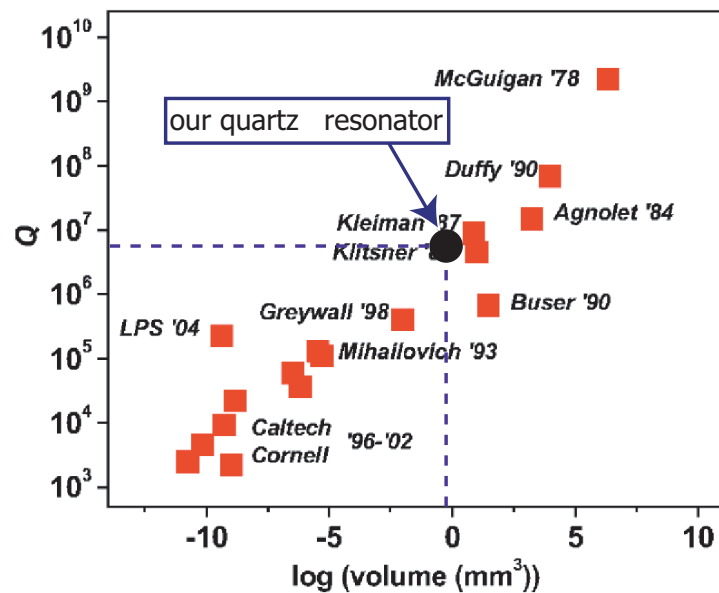


図 3.11: 他の振動子との Q 値の比較<sup>11)</sup> . 黒丸で示したのが我々の用いた水晶振動子である .

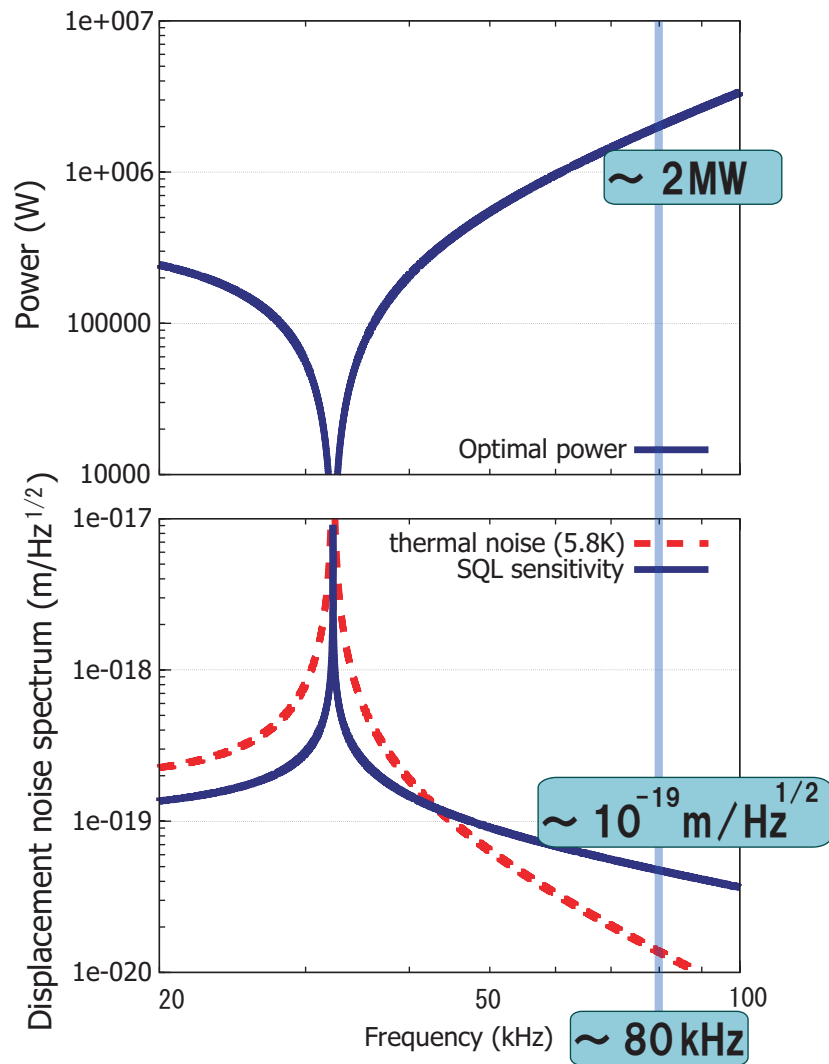


図 3.12: ある周波数で SQL を見ようとしたときの, SQL 感度と熱雑音の比較 (下) 及びそのときに必要とされる光強度 (上) .

共振周波数より高い周波数に目を向けると, 42 kHz 付近において SQL 感度は熱雑音に等しい大きさとなる . そして, およそ 80 kHz においては SQL 感度は熱雑音に対し power spectrum 換算で  $S/N=10$  程度で観察される可能性があることが分かる . また, このときに必要な光強度はおよそ 2 MW である . これは CW かつ高安定のレーザーで達成するのはほぼ不可能な数値である . しかし, 光共振器によって振動子に照射される光を実効的に強めることにより, この値を達成できる可能性がある . すなわち, 水晶振動子の側面を研磨・コーティングし高反射率の鏡とする . 音叉モードの振動と共振器内の光をカップリングさせることで, SQL 感度を達成できる可能性がある . 理論について詳しくは第 4 章で触れるが, 入射光強度 1 W に対して finesse は数千程度あれば十分である .

### 3.5.3 課題

水晶振動子を加工して超高反射率の鏡とする上で, 現在問題になるであろうと考えられている点を挙げ, 考察する .



## 鏡の Q 値の劣化

一般的に高反射鏡を作成するためには，誘電体多層膜と呼ばれる屈折率の異なる 2 つの誘電体膜を数十層積み重ねる必要がある<sup>2</sup>．この膜による Q 値の劣化が懸念され，また実際そのような報告もある<sup>55)</sup>．文献によれば，膜を作成する面積を，光の照射される極めて小さな領域に制限することで Q 値の本質的な劣化は防げるであろうということである．

---

<sup>2</sup>典型的には  $\text{SiO}_2$  ( $n = 1.45$ ) と  $\text{Ti}_2\text{O}_5$  ( $n = 2.25$ ) を  $1/4$  波長ずつ積層させたものが用いられる

## 第4章 光共振器の理論

ここでは光共振器とその制御法についてまとめる．ここまでは主に力学的な側面から超高感度変位計測に必要な要素を見てきたが，より高感度の測定を行うためには，光学的には

- 鏡の反射率を上げること
- 鏡の光学的損失が小さいこと

が必要であり，更に，今回のように 80 kHz 付近での感度を上げるためには

- 共振器長を短くすること

が有効であることが分かる．

### 4.1 Fabry-Perot 共振器

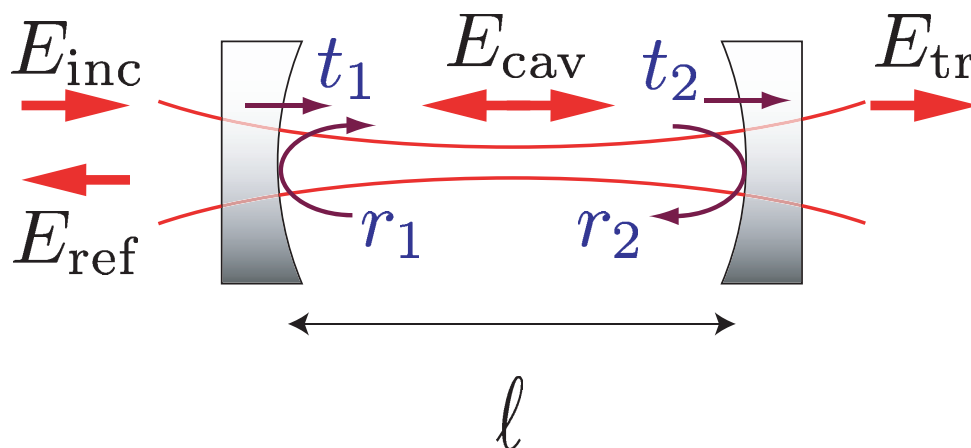


図 4.1: Fabry-Perot 共振器

Fabry-Perot 共振器の光学についてここに簡単にまとめておく<sup>56)</sup>．

#### 4.1.1 平面波

図 4.1 のような長さ  $l$  の Fabry-Perot 共振器を考える．振幅反射率  $r_i$ ，振幅透過率  $t_i$  は共に実数とし，反射率は共振器の内側に向かう場合を正にとる．平面波

$$E_{\text{inc}} = E_0 e^{i\Omega t} \quad (4.1)$$

を入射させると，透過光・反射光・内部光はそれぞれ

$$E_{\text{tr}} = \frac{t_1 t_2 e^{-i\phi/2}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi/2}} E_{\text{inc}} \quad (4.2)$$

$$E_{\text{ref}} = \left( -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \right) E_{\text{inc}} \quad (4.3)$$

$$E_{\text{cav}} = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} E_{\text{inc}} \quad (4.4)$$

また，その強度  $P = |E|^2$  は

$$P_{\text{tr}} = \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2(\phi/2)} P_{\text{inc}} \quad (4.5)$$

$$P_{\text{ref}} = \frac{(r_1 - r_2(r_1^2 + t_1^2))^2 + 4r_1 r_2(r_1^2 + t_1^2) \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2(\phi/2)} P_{\text{inc}} \quad (4.6)$$

$$P_{\text{cav}} = \frac{t_1^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \phi} P_{\text{inc}} \quad (4.7)$$

と書ける． $\phi$  は共振器を 1 往復したときの光の位相変化である．

$$\phi = \frac{2\Omega\ell}{c} = \frac{4\pi\ell}{c}\nu \quad (4.8)$$

$\phi$  が  $2\pi$  の整数倍のとき透過光強度は最大となり，これを共振と呼ぶ．また，隣り合う共振周波数の差を free spectral range(FSR) と呼ぶ．式 (4.8) より

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2\ell} \quad (4.9)$$

が得られる．

また，式 (4.6) から共振の半値全幅  $\delta\phi_{\text{FWHM}}$  を計算することができ，それに相当する周波数線幅  $\delta\nu_{\text{FWHM}}$  が

$$\delta\nu_{\text{FWHM}} = \frac{c}{4\pi\ell} \delta\phi_{\text{FWHM}} = \frac{\nu_{\text{FSR}}(1 - r_1 r_2)}{2\pi\sqrt{r_1 r_2}} \quad (4.10)$$

と書ける．

FSR( $\nu_{\text{FSR}}$ ) と線幅 ( $\delta\nu_{\text{FWHM}}$ ) の比によって共振の鋭さ  $\mathcal{F}$  を定義する．

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\delta\nu_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (4.11)$$

$\mathcal{F}$  は finesse と呼ばれ，共振器内の平均光子蓄積時間  $\tau_{\text{cav}}$  と

$$\tau_{\text{cav}} = \frac{2\ell\mathcal{F}}{\pi c} \quad (4.12)$$

の関係がある．

また，共振器の Q 値は

$$Q_{\text{cav}} = \Omega\tau_{\text{cav}} \quad (4.13)$$

と書くことができる．

#### 4.1.2 Gaussian beam

実際に測定に用いる光は平面波ではなく Gaussian beam であるため、その違いについて触れておく。

Maxwell 方程式の近軸近似解からは、Hermite 多項式、また Laguerre 多項式を用いて展開することが可能な一群の解が得られる。それらはそれぞれ Hermite Gaussian beam, Laguerre Gaussian beam と呼ばれる。それぞれの 0 次のモードは一致し、これを指して特に Gaussian beam と呼ぶ。その断面は  $\exp(-2r^2/w^2)$  ( $w$  はビームの半径) に比例する強度分布を持つ。

また、Gaussian beam の等位相面は曲率を持ち、伝播に従って変化する。そのため、Fabry-Perot 共振器で Gaussian beam の共振を見るためには、鏡の曲率と光の曲率を合わせる必要がある。これを mode matching と呼ぶ。

次数の異なるモードは、(次数)  $\times \varphi_{\text{TM}}$  だけずれた場所で共振する。 $\varphi_{\text{TM}}$  は横モード間隔と呼ばれる、共振器長とビームの広がりから決定される量である。そのため、理想的にはある共振器長に対して複数のモードが同時に共振することはない。すなわち、共振器長を掃引して各モードの強度を調べることで、レーザーの横モード分布についての情報が得られる。また、共振器長の制御により、特定のモードのみが共振するような光共振器を作成することが可能である。ビームの整形を目的とした、このような光共振器を特に mode cleaner と呼ぶことがある。

#### 4.1.3 鏡による損失

鏡の損失 (散乱と吸収の和として与えられる) の割合を  $\Lambda$  で表す。すなわち

$$t_i^2 + r_i^2 + \Lambda_i = 1 \quad (4.14)$$

高性能の鏡ならば損失は数 ppm という非常に小さな値に抑えることが可能であるが、鏡の反射率を上げるにしたがってこの数字も問題となりうる。ここではそのことを示す。

性能の良い鏡として、2 枚の鏡に同じ反射率  $r_1 = r_2 = 0.9999$  を与える。また、同じ損失  $\Lambda$  を持っているとする。このとき、共振器の共振状態における (強度) 透過率・反射率を  $\Lambda$  に対してプロットしたものを図 4.2 に示す。損失が大きくなるにつれて、共振時の透過光強度は下がり、反射光強度は上がっている。これは、損失が大きくなるにつれて共振の信号が弱められてしまうことを示す。より高感度の計測を行うためには、反射率に加えて十分に損失の小さな鏡を用いることが必要であることが分かる。

#### 4.1.4 Fabry-Perot 共振器による光強度の増強

光共振器により、共振器内部で光を強めることが可能であることを示す。

$P_{\text{inc}}$  と  $P_{\text{cav}}$  の比を  $\Xi$  とおく。

$$\Xi(\phi) \equiv \frac{P_{\text{cav}}}{P_{\text{inc}}} = \frac{t^2}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \phi} \quad (4.15)$$

ただし、2 枚の鏡の透過率・反射率を等しくとった ( $r_1 = r_2 = r$ ,  $t_1 = t_2 = t$ )。共振時には

$$\Xi(0) \equiv \Xi_0 = \frac{t^2}{(1 - r^2)^2} = \frac{t^2}{t^2 + \Lambda} \frac{\mathcal{F}}{\pi r} \quad (4.16)$$

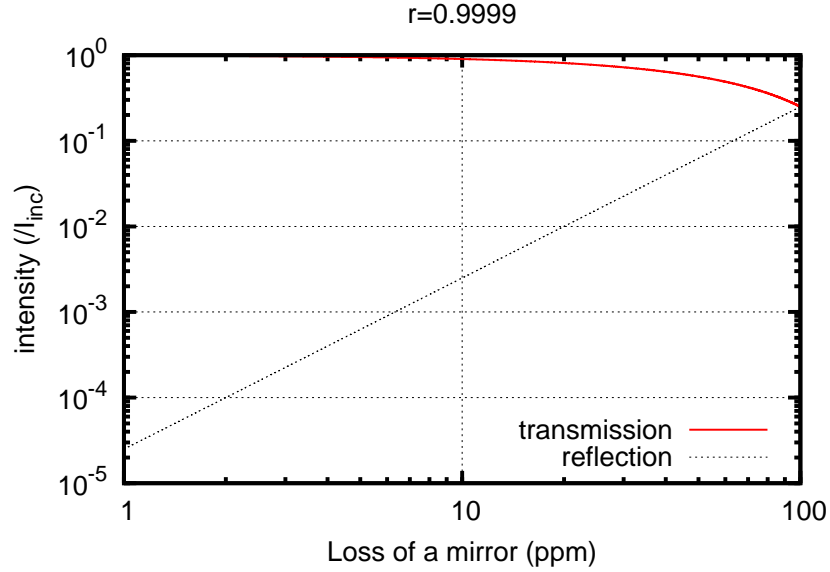


図 4.2: 共振時の、鏡の損失に対する共振器の透過率・反射率．鏡の反射率は  $r = 0.9999$  で一定としている．

となる．透過率が損失に比べて十分に大きければ、光共振器により入射光はおよそ  $\mathcal{F}/\pi$  倍だけ強められることが分かる．しかし、前節の議論により、高反射率の鏡においては  $\Lambda$  による  $\Xi_0$  の低下を考える必要が生じてくると考えられる<sup>1</sup>．

典型的な高性能鏡においては  $t^2$  と  $\Lambda$  のオーダーはそれほど変わらない．そのような状況では  $\Xi_0$  はほぼ共振器の finesse に比例して増大すると考えることができる．

#### 4.1.5 Fabry-Perot 共振器と SQL

Fabry-Perot 共振器による光強度の増強の効果を考えると、輻射圧雑音、検出ショットノイズはそれぞれ式 (2.51)(2.32) より、

$$\langle \delta x_{\text{rad}}(\omega)^2 \rangle = |\chi(\omega)|^2 \frac{2P_0 h}{\lambda c} \Xi_0^2 \quad (4.17)$$

$$\langle \delta x_{\text{shot}}(\omega)^2 \rangle = \frac{hc\lambda}{8\pi^2 P_0} \frac{1}{\Xi_0^2} \quad (4.18)$$

と書き直せる<sup>2</sup>．すなわち、SQL における変位感度は変わらないが、必要な入射光強度は

$$P_{\text{SQL}} = \frac{m_0 \omega^2 \lambda c}{4\sqrt{2}\pi \Xi_0^2} \quad (\text{W}) \quad (4.19)$$

と変化する． $\Xi_0^{-2}$  倍だけ小さくすることが可能となり、3.5 節で考察したパラメータが実現可能な領域となる．

<sup>1</sup> 反射率が高い鏡は必ずしも損失が少ないわけではない．損失には鏡の基材による吸収も大きく寄与するため、高反射率かつ基材の吸収により殆ど透過光の取れない鏡も存在する．

<sup>2</sup> 正確には、共振器のカットオフ周波数 ( $= \tau_{\text{cav}}^{-1}$ ) を考慮する必要がある．しかし、本実験 (第 5 章) においては共振器長を短くとしたため、カットオフ周波数による影響は考える必要はなく、その部分は省略した．

## 4.2 誤差信号取得法

共振器を共振状態に制御するために、レーザーの周波数と共振器の共振周波数の差  $\delta\nu$  を検出する必要がある。そのための信号をここで誤差信号と呼ぶ。今回は、誤差信号取得のために、Pound-Drever-Hall(PDH) 法と呼ばれる、レーザーの周波数安定化及び共振器長の制御において標準的に用いられている方法<sup>57,58)</sup> を選択した。PDH 法とは、レーザーの周波数に変調をかけ、共振器からの反射光を復調することによって誤差信号を得る方法である。ここではその原理を説明する。

### 4.2.1 周波数変調

電気光学変調素子 (Electro-Optic Modulator, EOM) に電圧をかけることにより、レーザーの周波数に変調をかける。入射光 (式 (4.1)) の位相部分に  $\phi_m \sin(\Omega_m t)$  で表される位相変調をかける。 $\phi_m$  を変調指数、 $\Omega_m$  を変調周波数と呼ぶ。

$$E_{\text{inc}}(t) = E_0 \exp(i\Omega t + i\phi_m \sin(\Omega_m t)) \quad (4.20)$$

第 1 種 Bessel 関数  $J_n(\phi_m)$  の 1 次までで展開すると

$$E_{\text{inc}}(t) = E_0 \exp(i\Omega t) (J_0(\phi_m) + J_1(\phi_m) \exp(i\Omega_m t) - J_1(\phi_m)) \exp(-i\Omega_m t) \quad (4.21)$$

$$= E_0 \exp(i\Omega t) J_0(\phi_m) (1 + \alpha \exp(i\Omega_m t) - \alpha \exp(-i\Omega_m t)) \quad (4.22)$$

と書ける。ただし  $\alpha \equiv J_1(\phi_m)/J_0(\phi_m)$  とおいた。元の光 ( $\Omega$  成分) を carrier, 変調を受けた光 ( $\Omega \pm \Omega_m$  成分) を sideband と呼ぶ。

### 4.2.2 復調

式 (4.3) より、光の周波数応答

$$b(\Omega) \equiv E_{\text{ref}}(\Omega)/E_{\text{inc}}(\Omega) \quad (4.23)$$

が得られる。これを用いると、入射光が変調された場合の反射光  $E_{\text{ref,mod}}$  は

$$E_{\text{ref,mod}} = E_0 J_0(\phi_m) \left( b(\Omega) e^{i\Omega t} + \alpha b(\Omega + \Omega_m) e^{i(\Omega + \Omega_m)t} - \alpha b(\Omega - \Omega_m) e^{i(\Omega - \Omega_m)t} \right) \quad (4.24)$$

その強度は

$$\begin{aligned} P_{\text{ref,mod}}/P_{\text{inc}} &= |b(\Omega)|^2 + |b(\Omega + \Omega_m)|^2 + |b(\Omega - \Omega_m)|^2 \\ &\quad + 2\alpha \text{Re} \left[ (b^*(\Omega) b(\Omega + \Omega_m) - b(\Omega) b^*(\Omega - \Omega_m)) e^{i\Omega_m t} \right] \\ &\quad + 2\alpha^2 \text{Re} \left[ b^*(\Omega - \Omega_m) b(\Omega + \Omega_m) e^{i2\Omega_m t} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

と書ける。この式の要素を見ていく。

sideband

変調周波数が共振器の線幅より十分大きく、FSR より小さければ、sideband は共振から十分に外れ、

$$b(\Omega \pm \Omega_m) \simeq -1 \quad (4.26)$$

と書ける。

career

career は共振器の共振周波数  $\Omega_0$  の近傍にあり,  $\Delta\Omega$  だけずれているとする ( $\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega$ ) と,

$$b(\Omega_0 + \Delta\Omega) \simeq \frac{(-r_1 + t_1^2 r_2 \mathcal{F}/\pi) - i4\pi\Delta\Omega/\nu_{\text{FSR}}}{1 + i4\pi\Delta\Omega/\nu_{\text{FSR}}} \quad (4.27)$$

$$\simeq \frac{(-r_1 + t_1^2 r_2 \mathcal{F}/\pi) - it_1^2 \mathcal{F}/\pi \cdot 4\pi\Delta\Omega/\nu_{\text{FSR}}}{1 + 16\pi^2 (\Delta\Omega/\nu_{\text{FSR}})^2} \quad (4.28)$$

となり, 虚数成分

$$\text{Im}[b(\Omega_0 + \Delta\Omega)] \simeq -\frac{2t_1^2 \mathcal{F}}{\pi} \frac{2\pi\Delta\Omega/\nu_{\text{FSR}}}{1 + 16\pi^2 (\Delta\Omega/\nu_{\text{FSR}})^2} \quad (4.29)$$

$$\simeq -\frac{4t_1^2 \mathcal{F}}{\nu_{\text{FSR}}} \Delta\Omega \quad (4.30)$$

は  $\Delta\Omega$  に比例する.

式 (4.25) に式 (4.26)(4.30) を代入すると, 結局反射光の  $\Omega_m$  成分は  $4\alpha \text{Im}[b(\Omega)] \times \cos \Omega_m t$  と,  $\Delta\Omega$  に比例した情報が得られることが分かる. すなわち, 反射光を  $\Omega_m$  で復調することで, 共振器の共振周波数からのずれを検出することが可能である. この信号を用いて共振器長制御を行う.

また, 伝達関数の計算により, PDH 法で安定化された共振器の伝達関数は

$$f_{\text{cav}} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{2\mathcal{F}} \quad (4.31)$$

に極 (cavity pole) を 1 つ持つ形で与えられることが分かる.

ただし今回実験に用いた共振器は微小長のものであり,  $\nu_{\text{FSR}} \sim 400 \text{ GHz}$  であった (第 5 章). そのため cavity pole は観測帯域よりも十分に高い周波数にあり, 共振器の応答関数を考慮する必要はなかったことを付け加えておく.

## 4.3 共振器にはたらく雑音

第 3 章においては, 光の量子雑音と熱雑音の比較のみで SQL の可能性を論じてきた. しかし, 実際に感度を調べるための干渉計測においては, その他にも様々な雑音源を考慮する必要がある. ここではそれらについて概観する.

### 4.3.1 光の強度雑音

光の持つ強度雑音は, 共振器の制御点回りの揺らぎとカップリングすることで検出時の雑音となる. 強度雑音の影響は次式で表される.

$$\delta x_{\text{int}} = \frac{\delta P}{P_{\text{inc}}} \Delta x_{\text{rms}} \quad (4.32)$$

$\delta P/P_{\text{inc}}$  は光源の持つ相対強度雑音,  $x_{\text{rms}}$  は光共振器の制御点回りの rms 振幅である.

強度雑音は, 様々な原因から生じる. 光源の持つ強度の揺らぎに加えて, 位相変調が最適な点に対して行われな場合, 位相変調素子から強度変調が生じることも考えられる. そのため, 強度雑音の影響を避けるには, 良い位相変調素子を用いることや, 光源の持つ強度の安定化を図ることが重要である.

### 4.3.2 光の周波数雑音

#### 周波数雑音の定義

入射光に理想単色光 (式 (4.1)) をとる．鏡が周波数  $\omega$  で微小振動している場合，反射光の周波数応答は  $H_c(\omega)$  は<sup>59,60)</sup>

$$H_c(\omega) = \frac{2\Omega r_2 t_1^2 \exp(-i\omega\ell/c)}{c(1-r_1 r_2)(1-r_1 r_2 \exp(-2i\omega\ell/c))} \quad (4.33)$$

と書け，

$$|H_c(\omega)| \simeq \frac{2\Omega r_2 t_1^2}{c(1-r_1 r_2)^2 \sqrt{1+(\omega\tau_{\text{cav}})^2}} \quad (4.34)$$

が得られる．

次に，光源が周波数  $\omega$  に雑音を持つモデルで書ける場合を考える (鏡の揺らぎは考えない)．

$$E'_{\text{inc}} = E_0 e^{i(\Omega t + \kappa \cos \omega t)} \quad (4.35)$$

このときの応答関数は  $b(\Omega)$  (式 (4.23)) とほぼ同じ形で考えることが可能である．

$$H_{\text{fm}}(\omega) = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 \exp(-2i\omega\ell/c)}{1-r_1 r_2 \exp(-2i\omega\ell/c)} \quad (4.36)$$

となる．式 (4.33)(4.36) によって，検出可能な変位感度  $\delta\ell_{\text{fm}}$  は

$$\delta\ell_{\text{fm}} = \kappa \left| \frac{H_{\text{fm}}(\omega)}{H_c(\omega)} \right| \quad (4.37)$$

$$\simeq \frac{2\pi\ell\delta\nu}{\Omega} \quad (4.38)$$

ここで， $\delta\nu = \omega\kappa/2\pi$  は光源の周波数雑音として定義されるものである．式 (4.38) より，

$$\frac{\delta\ell_{\text{fm}}}{\ell} = \frac{\delta\nu}{\nu} \quad (4.39)$$

を得る．すなわち，共振器長  $\ell$  を小さくすることで，光源の持つ周波数雑音に対してより感度の鈍い干渉計を作成できることが分かる．

#### 2 台の Fabry-Perot 共振器による同相雑音除去

レーザーの周波数雑音を抑えるためには，2 台の Fabry-Perot 共振器を用いることが有効である．図 4.3 にその概念図を示す．2 台の Fabry-Perot 共振器から独立に情報を引き出す Locked Fabry-Perot と呼ばれる方法と，2 台の信号を干渉させてから出力する Fabry-Perot Michelson と呼ばれる方法が考えられるが，どちらの場合も片方の Fabry-Perot の end mirror のみを微小鏡にすることで，この鏡に加わる力に対する応答をより高感度で見ることが可能となる．

また，これらの場合において減少する雑音の比を同相雑音除去比 (Common-Mode noise Rejection Ratio, CMRR) と呼ぶ．共振器のカットオフ周波数よりも十分に低い周波数においては，CMRR は

$$\varepsilon_{\text{CMRR}} \sim \frac{\delta\ell}{\ell} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} \quad (4.40)$$

と書くことができる<sup>56)</sup>．すなわち，CMRR を下げるためには，2 つの共振器の共振器長および性能を合わせる必要がある．CMRR を 0 にすることにより，周波数雑音は理論上は完全にキャンセルすることが可能であるが，実際には鏡の反射率の僅かな差や鏡の角度ずれなどにより制限が与えられる．



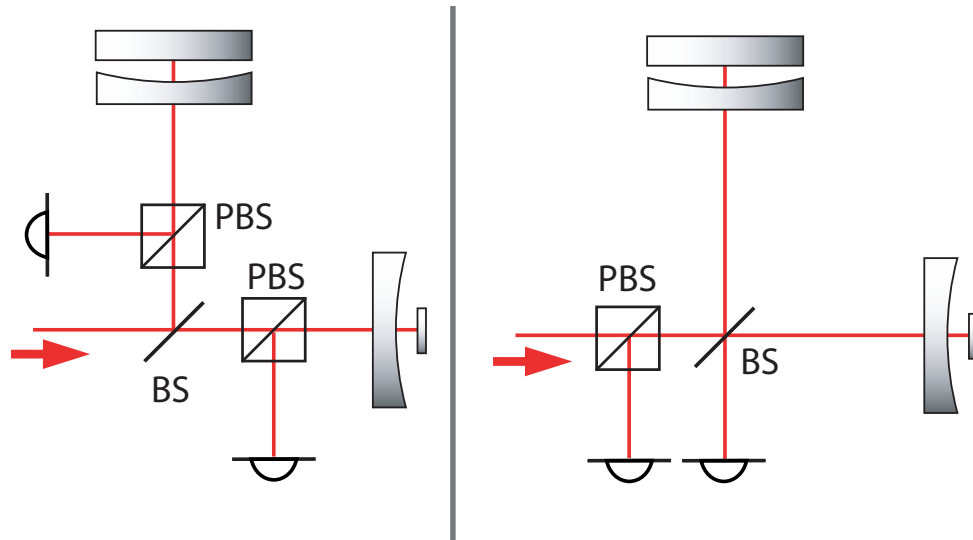


図 4.3: 2 台の Fabry-Perot 共振器を用いた感度向上．左は Locked Fabry-Perot ，右は Fabry-Perot Michelson 干渉計と呼ばれる方式．波長板などは省略した．

### 4.3.3 地面振動

地面振動の典型的なスペクトルは

$$\sqrt{\langle \delta x_{\text{seis}}(\omega)^2 \rangle} \simeq 10^{-7} \left( \frac{1 \text{ Hz}}{f} \right)^2 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.41)$$

で与えられる<sup>56,61)</sup>．このパラメータを採用すると，十分に地面振動の影響を取り除くためには，80 kHz においておよそ 60 dB 程度の防振が必要であることが分かる．

### 4.3.4 残留ガスによる雑音

光路上のガスの揺らぎが屈折率の変化となり，光路長の揺らぎとなって現れてしまう可能性が考えられる．これは共振器長を大きくとった場合に顕在化してくると考えられるが，第 4.3.2 節で述べたように，本研究においては共振器長は短くとるべきである．そのため，残留ガスが干渉計に与える雑音は考慮する必要はないと考えられる．鏡の Q 値の劣化を引き起こさないレベルの真空度があれば十分となる（第 3 章）．

## 第5章 微小光共振器の変位感度測定

第4章の議論により，高 finesse かつ短い光共振器が SQL 観察においては必要とされることが分かった．ここでは，そのような光共振器を試作し，その特性についての実験を行った．それを報告する．

### 5.1 光学系・電気系

#### 5.1.1 全体図

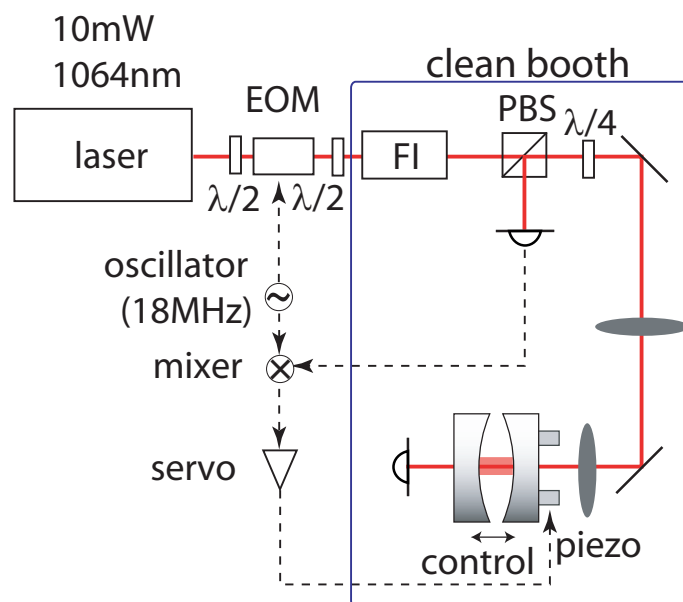


図 5.1: 光学系．共振器からの反射光を復調して誤差信号を取得する．

本実験で用いた実験装置の全体図を図 5.1 に示す．光学系は小型 (90 cm×120 cm) の光学定盤上に設置されている．

EOM による変調を加えた光を Fabry-Perot 共振器に入射する．光路に  $\lambda/4$  波長板を入れておき，入射波から偏光方向を 90 度回転させた光を PBS で取り出す構成である．共振器の透過光は PD 及び CCD カメラで観察している．地面振動を避けるために光学定盤は空気バネで浮かせることによる防振を行っている．光学定盤が小型で軽かったため防振が安定しない問題が生じたため，定盤上に数枚の鉛板 (計 40 kg 程度) を乗せて安定化を図った．

また，共振器部分は小型のクリーンブース内に設置した．クリーンブースは Keyence 社製のクリーンファンユニット (CF-H018) とパーティクルセンサ (CF-P100) により作成したもので，ゴム板による防振を行っている．測定時はファンを止める必要があった．

### 5.1.2 レーザー

本実験の光源であるレーザーは、LIGHTWAVE 社製の LD 励起 ND:YAG レーザー MODEL 126-1064-010 である。

発振波長は 1064 nm，出力は 10 mW となっている。結晶端面を鏡とした monolithic 構造の共振器であり，NPRO(Non-Planar Ring Oscillator) と呼ばれる非常な安定なレーザーを実現している。更に，結晶に磁場をかけることにより逆回りの波の励起を抑え，空間的ホールバーニングを取り除くことが可能になっている。発振線幅 (1 ms) は 5 kHz 以下，周波数ドリフトは 50 MHz/hour 以下である。また，本実験においてはレーザーの制御は行っていない。

### 5.1.3 微小長光共振器

今回の実験で用いた Fabry-Perot 共振器について述べる。

共振器に用いた鏡は，REO 社製の誘電体多層膜の高反射鏡 (直径 7.75 mm) である。鏡には曲率 ( $R = 500$  mm) があり，強度反射率は 99.99% 以上という高反射率を実現している。この鏡を 2 枚用いて光共振器を作成した。また，共振器長については，調整の平易さなども考慮した上で， $\ell = 0.7$  mm に設計した。

入射側・出射側の鏡はそれぞれ独立に一次元微動台上にセットした。台はマグネットベースにより光学定盤上に固定した。入射側の鏡はエポキシ樹脂接着剤でステージ上に固定した。ステージは piezo 素子により微調整をかけられるようになっており， $\pm 15$  V の電圧で 1 波長以上の調整が可能である。出射側の鏡はスペーサーを作成し，12.5 mm 用のミラーホルダーにセットしてある。共振器の写真を図 5.2 に示す。

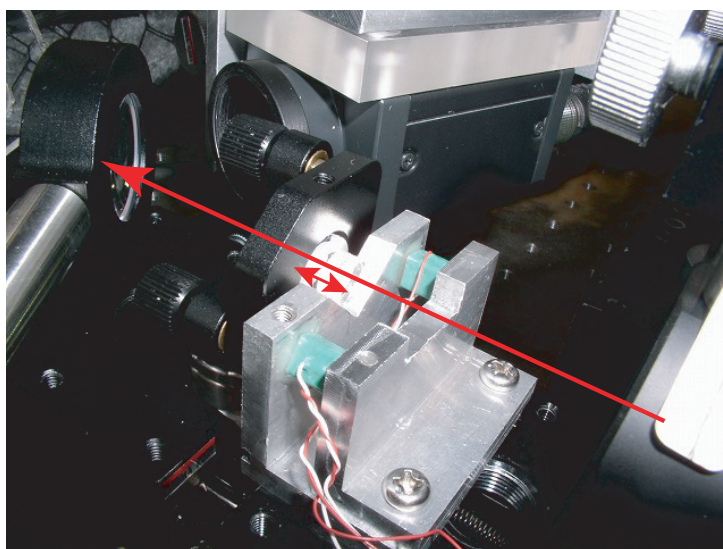


図 5.2: 共振器の写真。赤線はレーザー光の伝播。

### 5.1.4 電気系

共振器長の制御のための電気系を図 5.3 に示す。function generator (Tektronix 社製) を用いて EOM に 18 MHz の位相変調をかける。この信号と，反射光の RF 成分を掛け合わせるにより誤差信号を取得する。信号をプリアンプで増幅させてゲインを稼いだ後に，サーボ回路と piezo driver を通して piezo 素子に電圧を加える。また，途中で DC 電圧を加えることでオフセットを

補償している．サーボ部分の回路及びその伝達関数を図 5.4 に，piezo driver の回路及びその伝達関数を図 5.5 に示す．

piezo素子の持つ容量は実験により  $0.89 \mu\text{F}$  であることが分かった．また，抵抗は  $1 \Omega$  以下であった．殆ど考慮する必要はない量である．

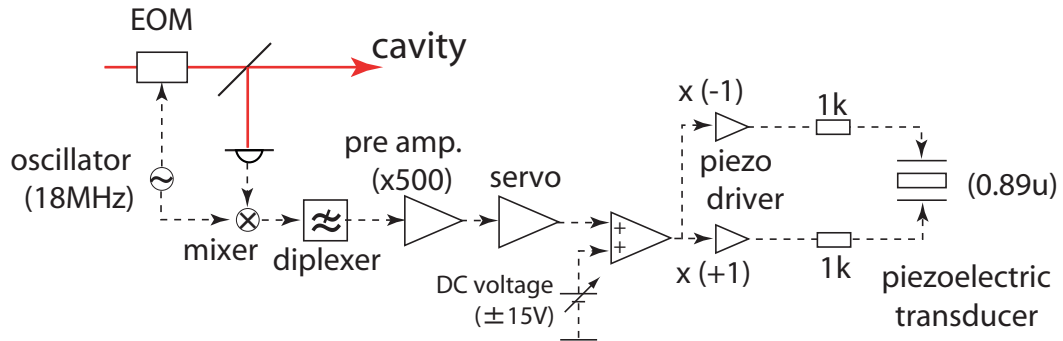


図 5.3: 共振器長制御のための回路の全体図．

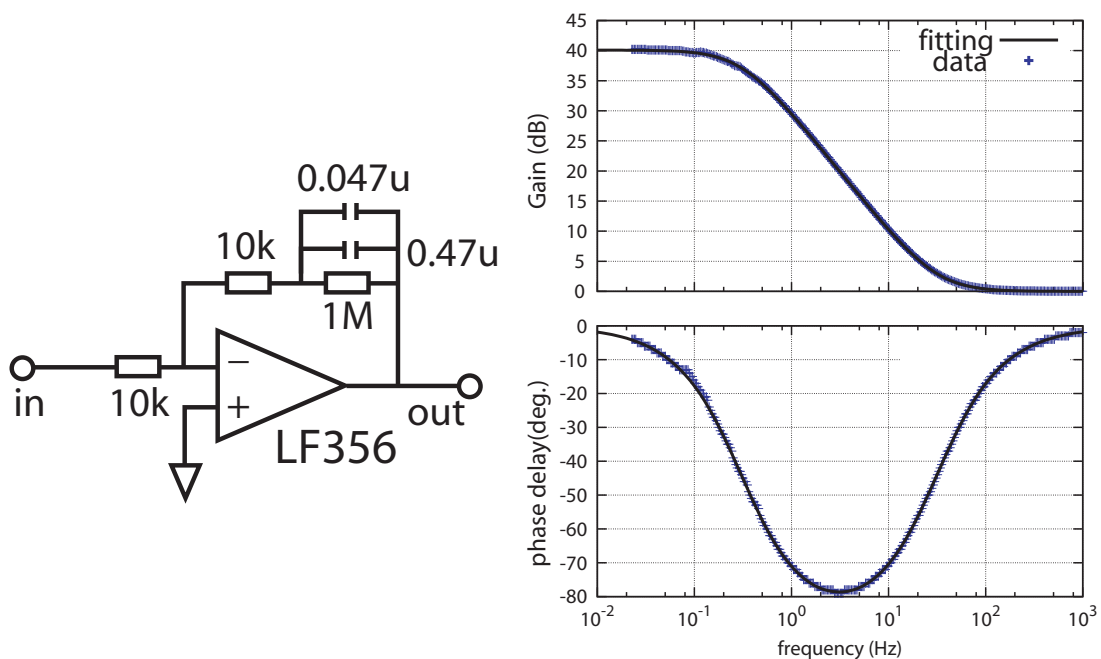


図 5.4: 共振器長に用いたサーボとその伝達関数．ゲインは低周波で 40 dB ．

反射光を観察する PD は，変調周波数である 18 MHz に十分な感度を持たせる必要があるため共振型のものを用いている．変調を加えた LED に対する応答から，共振型 PD の感度を測定した．その結果を図 5.6 に示す．感度曲線の中心周波数は 17.84 MHz ，その Q 値は 14.4 と計算された．18 MHz において十分な感度が得られていることが確認される．

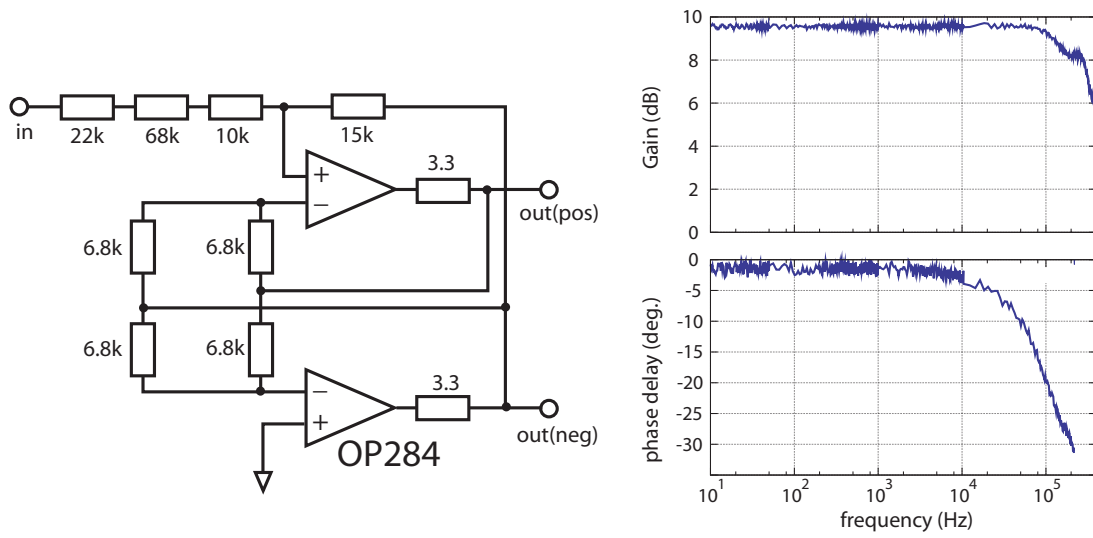


図 5.5: piezo driver とその伝達関数．数十 kHz 以降で位相が遅れ始める．

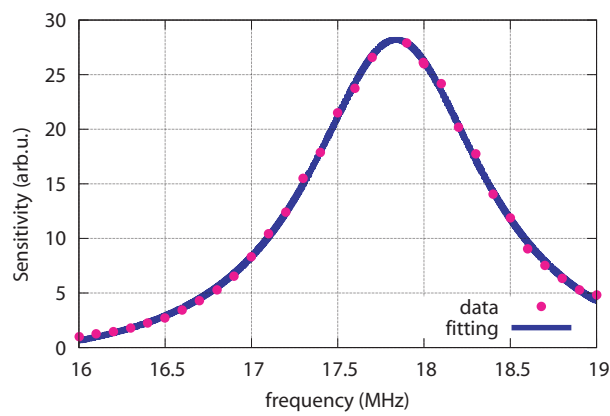


図 5.6: 共振型 PD の特性．中心周波数  $f_0 = 17.84\text{MHz}$  ,  $Q = 14.4$  .

## 5.2 共振器長の制御

### 5.2.1 共振器長

透過光の横モード間隔とFSRから、共振器長を計算することが可能である。Rayleigh長 $z_R$ 、横モード間隔 $\varphi_{TM}$ に対し

$$\ell = 2z_R \tan\left(\frac{\varphi_{TM}}{2}\right) \quad (5.1)$$

が成り立つ。この式から共振器長を求め、設計長である0.7mmに調整した。

### 5.2.2 finesseの測定

式(4.11)より、共振器のfinesseとして $5.1 \times 10^4$ を得た。更に、線幅が

$$\delta\nu_{FWHM} = \frac{c}{2\ell\mathcal{F}} \simeq 3.9 \text{ MHz} \quad (5.2)$$

と求められる。レーザーの発振線幅よりも十分に大きく、また変調周波数18MHzに比べて十分に小さいため、PDH法による共振器長の制御が可能であることが分かった。

続いて、誤差信号を確認した。ピエゾ素子に三角波をかけ、共振器長を掃引した。共振付近で得られた透過光及び誤差信号を図5.7に示す。共振付近における誤差信号の傾き $dV_{error}/dx$ は

$$\frac{dV_{error}}{dx} = \frac{\frac{dV_{error}}{dt}}{\frac{dV_{piezo}}{dt} \frac{dx}{dV_{piezo}}} \quad (5.3)$$

$$\simeq 45.5 \text{ nm/V} \quad (5.4)$$

と求められる。ただし $V_{piezo}$ はピエゾ素子にかかる電圧であり、 $dx/dV_{piezo}$ はほぼ線形であるが、2次まで考えて計算している。

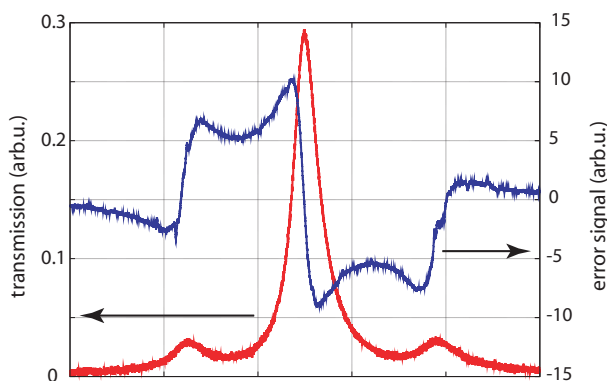


図 5.7: 共振器長の掃引した際に得られる透過光 (上) と誤差信号 (下)。

### 5.2.3 鏡の損失

鏡の反射率は、式(4.11)より $r^2 \simeq 99.994\%$ と計算される。また、共振状態において、反射光の強度は非共振時の80%程度になった。ここから、式(4.14)(4.6)より、

$$t^2 = 6.5 \text{ ppm} \quad (5.5)$$

$$\Lambda \leq 55.1 \text{ ppm} \quad (5.6)$$

が得られる．ただし， $\Lambda$  に関しては mode matching のずれによる値も含まれているが，その分は見積もっていない．また，

$$\Xi_0 \simeq 1710 \quad (5.7)$$

が得られる．すなわち，共振器によって 1710 倍ほど光を強めることが可能となった．

以上の測定は共振器の透過光量ができるだけ高くなるようにセットした状態における測定である．しかし，共振器の制御実験を続けるうちに透過光量が低下する現象が見られた．これは，クリーンブース内に入った埃が鏡に焼き付くことによる鏡の損失の増加が原因ではないかと考えられる．正確な評価を行うためには，周囲の環境を整える必要がある．

### 5.3 変位感度測定

共振状態に共振器長を制御した状態で，系の雑音特性から共振器の変位感度を測定する．そのスペクトルを計算したものを図 5.8 に示す．80 kHz 前後では，およそ  $7 \times 10^{-17} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  の変位感度であることが分かる．

本実験で用いたレーザーの持つ周波数雑音は，1 Hz から 10 kHz 程度の範囲では

$$\delta\nu \simeq \frac{3 \times 10^4}{f} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (5.8)$$

で良く表される<sup>62)</sup>．式 (4.39) から，周波数雑音による感度限界が推定されるが，これは現在の感度に比べると 2 桁程度低い．系の感度は外来の雑音に支配されていることが分かる．

感度を上げるためにはまず十分な防振を行うことが不可欠であろう．

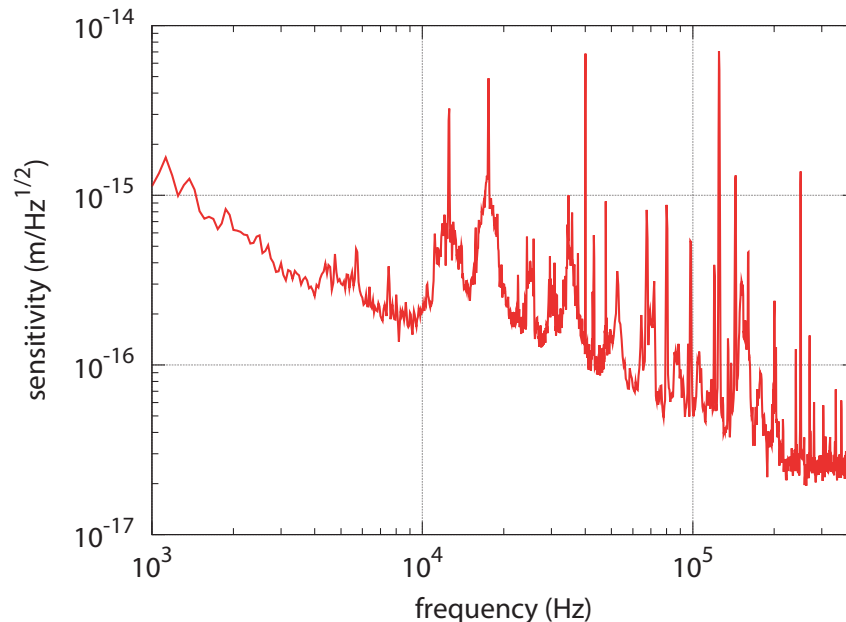


図 5.8: 光共振器の変位感度．

## 第6章 まとめ・今後の展望

レーザー干渉計の SQL の観察を目標として、その要素として考えられる力学系・光学系についてそれぞれ実験を行い、その可能性を議論した。

まず、力学系については音叉型の水晶振動子を試験的に選択し、その力学特性について測定を行った。低温化に伴い Q 値は上昇し、最大で  $5 \times 10^6$  程度を記録した。これは非常に高い値であり、他の微小振動子の実験と比べても遜色ないものであることが分かった。更に、振動子の共振から外れた周波数で変位計測を行うことで、SQL 感度は熱雑音よりも十分に大きいレベルで観察される可能性を見出した。

また、力学系に照射される光強度を実効的に強め、また光源のパッシブな安定化を目的として、高フィネスかつ共振器長を短くとした Fabry-Perot 光共振器を作成しその制御及び変位感度の測定を行った。フィネス 50000 という極めて高い光共振器が得られ、共振長にロックをかけることで高感度の変位干渉計として機能することを確認した。現在の感度は光源の持つ雑音や環境に支配されている可能性が強く、改善により更なる感度が期待される。



## 謝辞

本研究を行うにあたり，多くの方にお世話になりました．

指導教員の三尾典克准教授からは，卒論に引き続きご指導いただきました．研究の方向性が定まらず苦しんだ時期も様々な指針を示してくださり，また実験に行き詰まったときにも適切な助言を与えてくださいました．また，先生の物理学全般に対する広く深い知識には何度も感動させられました．これからも1つでも多くのことを学ばせていただけたらと思います．

助教の森脇成典氏には，何度となく実験について，また理論について基本的な質問ばかりを伺っていたような気がしますが，その全てに丁寧に教えてくださいました．また，常に細かい点にまで心配りをしていただき，お陰で不自由のない研究室生活を送ることができました．本当にありがとうございました．

博士課程1年の大前宣昭氏には，実験や研究計画について何度も相談し，またアドバイスをしていただきました．氏の洞察の深さには何度も助けていただきました．また，今後の研究生生活についても多くのことを学ばせていただきました．

同期の町田幸介氏には，3年間にわたり，研究のみならず生活全般についてお世話になりました．氏のお陰で乗り切ることができた $\times$ 切が思い出されます．本当にありがとうございました．

修士課程1年の徳田祐太郎氏には研究状況など気遣っていただいたことも多く，本当に助かりました．同じく修士課程1年の荻窪徳氏は，学部時代とは異なる分野での研究ということでしたが，果敢に取り組む姿には何度も励まされました．

また，学部4年の野中理，米田淳両氏の，研究に打ち込む姿には何度も刺激を受けました．今後は2人とも本郷への進学となりますが，そちらでも頑張ってください．

ここに挙げた方以外にも多くの方々のご理解ご協力をいただきました．最後になりますが，改めてお礼を申し上げます．

## 付録 A 巨視的振動の量子性

量子力学的には、巨視的な力学系の振動もまた量子化されており、離散化された準位<sup>1</sup>を持つ。究極的な感度を持つ干渉計においては、このような鏡の持つ振動モードの量子性もまた考慮に入れる必要が現れてくるのではないかと考えられる。その観察の可能性についてここに簡単に考察する<sup>8,25)</sup>。

### A.1 平均熱量子数の減衰

式 (3.20) より、振動子の持つ平均エネルギー  $\bar{E}$  は

$$\bar{E} \propto \exp(-\omega_0 t / Q) \quad (\text{A.1})$$

で与えられ、その減衰は

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{\omega}{Q}\bar{E} \quad (\text{A.2})$$

と書ける。

振動子は熱浴とエネルギー相互作用を行う。振動子が熱平衡状態にあるならば  $\bar{E} = k_B T$  であるため、ある計測時間間隔  $\tau$  におけるエネルギー変化は

$$\Delta\bar{E} = \frac{\omega_0 \tau}{Q} k_B T \quad (\text{A.3})$$

となる。振動子が量子力学的な調和振動子として扱えるためには、まず、この量が振動準位間のエネルギー  $\hbar\omega$  に比べて十分に小さい必要があるだろう。すなわち、振動の平均熱量子数  $n_{\text{th}}$  を

$$n_{\text{th}} \equiv \frac{k_B T}{\hbar\omega} \quad (\text{A.4})$$

で与え、測定間隔を 1 周期にとれば

$$n_{\text{th}} \ll \frac{Q}{2\pi} \quad (\text{A.5})$$

が得られる。

### A.2 熱浴との相互作用

次に、熱雑音による振動準位の遷移の可能性を議論する。

調和振動子の生成消滅演算子をそれぞれ

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{m_0\omega_0}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m_0\hbar\omega}} \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{m_0\omega_0}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m_0\hbar\omega}} \quad (\text{A.7})$$

<sup>1</sup>この準位の変化を特に quantum jump と呼ぶことがある。

と書く ( $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ ) . 振動子の状態は

$$|\Psi\rangle = \sum_k c_k(t) e^{-i(k+1/2)\omega t} |k\rangle \quad (\text{A.8})$$

で記述される .

外力  $F(t)$  による摂動のポテンシャルを

$$\hat{U}(t) \equiv -\hat{x}F(t) = -x_0(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)F(t) \quad (\text{A.9})$$

で定義する . ただし  $x_0 = \sqrt{\hbar/(2m_0\omega_0)}$  は振動子の零点振幅である .

$t = 0$  で  $c_k(0) = \delta_{kn}$  として一次の摂動を計算すると

$$c_{n-1}(t) = i\sqrt{n}\Gamma(t) \quad (\text{A.10})$$

$$c_{n+1}(t) = i\sqrt{n+1}\Gamma^*(t) \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma(t) = \frac{x_0}{\hbar} \int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' \quad (\text{A.12})$$

$$c_n(t) = 1 - (|c_{n-1}(t)|^2 + |c_{n+1}(t)|^2) / 2 \quad (\text{A.13})$$

が得られる . これ以外の係数は 0 である .

$F(t)$  が熱雑音である場合は , Einstein の関係

$$\langle F(t)F(t') \rangle = 2m_0\gamma k_B T \delta(t - t') \quad (\text{A.14})$$

を用いて

$$\langle |\Gamma(t)|^2 \rangle = \frac{x_0^2}{\hbar^2} \int_0^t \int_0^t \langle F(t')F(t'') \rangle e^{-i\omega(t'-t'')} dt' dt'' \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{2m_0\gamma k_B T x_0^2}{\hbar^2} t = \frac{k_B T}{Q\hbar} t \quad (\text{A.16})$$

と計算されるため ,  $n \rightarrow n \pm 1$  のように状態が変化する確率は

$$W_{n \rightarrow n \pm 1} = |c_{n-1}(t)|^2 + |c_{n+1}(t)|^2 = (2n+1) \langle |\Gamma(t)|^2 \rangle = \frac{(2n+1)k_B T}{Q\hbar} t \quad (\text{A.17})$$

と書くことができる . すなわち ,  $n$  が大きいほど遷移確率は高くなること分かる . この式は , 振動子の位相空間における等間隔なエネルギー準位軌道が , エネルギーが高いほど密になっていることで説明ができる . すなわち , 軌道が密になった分摂動が小さくても状態変化が起きやすくなると考えられる .

遷移確率が 1 より十分小さい時間幅においては振動子は量子状態を保つことができると考えられるであろう .  $t$  に  $2\pi/\omega_0$  をとると , 振動子が量子状態を保つ条件は , 式 (A.4) を用いて

$$(n + \frac{1}{2})n_{\text{th}} \ll \frac{Q}{4\pi} \quad (\text{A.18})$$

と書ける .  $n \sim n_{\text{th}}$  を用いて ,

$$n_{\text{th}}^2 \frac{4\pi}{Q} \ll 1 \quad (\text{A.19})$$

を得る .

式 (A.5) より式 (A.19) の方が厳しい条件を与えることが分かる . そこで , 式 (A.19) を考える . 第 3 章で用いた水晶振動子のパラメータを用いると ,

$$n_{\text{th}}^2 \frac{4\pi}{Q} \sim 3.6 \times 10^6 \quad (\text{A.20})$$

となる．この振動子では，振動の離散準位の観察は不可能であることが分かる．式 (A.19) を議論するためには，たとえば

$$n_{\text{th}}^2 \frac{4\pi}{Q} = \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 \frac{4\pi}{Q} \quad (\text{A.21})$$

$$= 0.87 \times \left( \frac{T}{4 \text{ K}} \right)^2 \left( \frac{Q}{10^7} \right)^{-1} \left( \frac{\omega}{2\pi \times 100 \text{ MHz}} \right)^{-2} \quad (\text{A.22})$$

といったパラメータが必要とされる．

ただし，以上の議論は被計測系の量子状態のみを考えたものであり，測定行為によって量子状態が壊れてしまうことは考慮していない．実際に quantum jump，更には基底状態の観察を議論するためには，厳密な量子力学的定式化を行う必要がある<sup>20,21)</sup>．

# 付録B 回折理論

## B.1 Fraunhofer 回折の導出

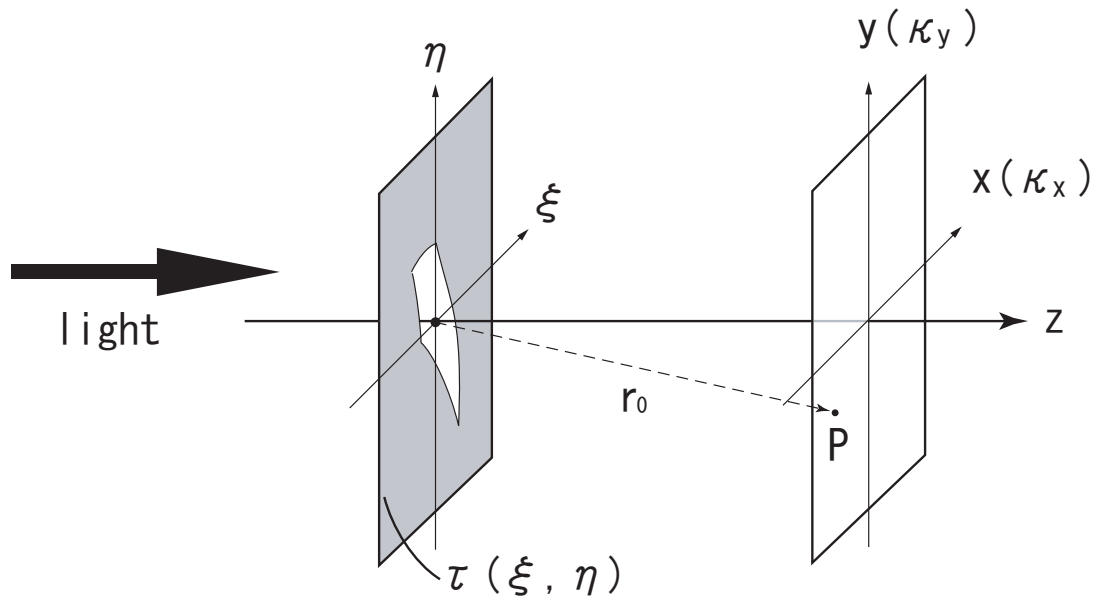


図 B.1: 回折

Kirchhoff の積分定理によれば、点  $P(\mathbf{r}_P)$  における電場分布は、その点を取り囲む閉曲面上の光電場が分かれば求められる<sup>63)</sup>。すなわち、スカラー波近似の下で

$$E(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{e^{ikr}}{r} \nabla E - E \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS \quad (\text{B.1})$$

と書くことができる。ただし  $S$  は  $P$  を囲む任意の閉曲面であり、 $r$  は閉曲面上の各々の点から  $P$  までの距離を表すこの式に近軸近似を導入し、更に観察場所を散乱源から（最低数波長分）離れた点にあるとすると、回折を議論することができる。

図 (B.1) のような状況を考える。回折窓が  $z$  軸に垂直な  $(\xi, \eta)$  平面上に存在するとし、その瞳関数を  $\tau(\xi, \eta)$  と表記する<sup>1)</sup>。

$P$  における電場の大きさは  $\xi\eta$  平面からの電場の寄与を積分することで求められ、

$$E(\mathbf{r}) = \frac{iE_S}{\lambda} \oint_S \tau(\xi, \eta) \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta \quad (\text{B.2})$$

ただし

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \quad (\text{B.3})$$

$$r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{B.4})$$

<sup>1)</sup>単に光の通る場所を 1、通らない場所を 0 と定義する方法が最も簡単な表式だが、回折における位相変化を考える必要がある時は複素数表示する必要が出てくるなど状況に応じた表記法がある。

であり,  $\kappa_x \equiv -kx/r_0$  及び  $\kappa_y \equiv -ky/r_0$  で規格化すれば

$$r = r_0 \sqrt{1 + \frac{2(\kappa_x \xi + \kappa_y \eta)}{kr_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{r_0^2}} \quad (\text{B.5})$$

$$\simeq r_0 \left( 1 + \frac{\kappa_x \xi + \kappa_y \eta}{kr_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r_0^2} \right) \quad (\text{B.6})$$

と書き直せる.  $E_S$  は回折平面における電場強度<sup>2</sup>である.

$r_0$  に比べて  $\xi, \eta$  が十分小さければ, 式 (B.7) の第三項を更に省略することが可能である. この近似は Fraunhofer 近似と呼ばれ, 回折源から十分に離れた場所で観察を行うことに相当している<sup>3</sup>. これを式 (B.2) に用いることにより, Fraunhofer 回折の表式

$$E(\mathbf{r}_P) = -\frac{iE_S e^{ikz} e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2z}}}{\lambda z} \oint_S \tau(\xi, \eta) e^{i(\kappa_x \xi + \kappa_y \eta)} d\xi d\eta \quad (\text{B.7})$$

を得る.

## B.2 単スリット回折

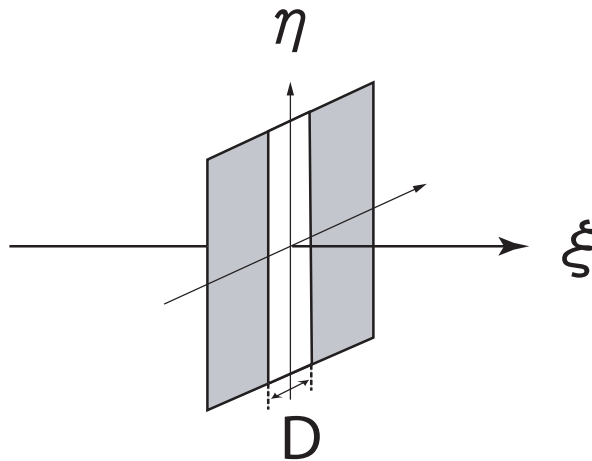


図 B.2: 単スリット

図 (B.2) のような, 幅  $D$  の無限に長い単スリットによる回折を考える. この開口による回折は, 点光源による光ではなく線光源による光として考えると分かりやすい. 線光源から発せられる円柱型の波は  $1/\sqrt{z}$  で減衰し, このとき式 (B.7) は

$$E(\mathbf{r}_P) = -\frac{iE_S e^{ikr_0}}{\lambda \sqrt{kz}} \int_S \tau(\xi) e^{i\kappa_x \xi} d\xi \quad (\text{B.8})$$

<sup>2</sup>回折平面に当たる光は単色平面波で, 強度及び位相は等しいとしている.

<sup>3</sup>第三項を残したまま行う方法は Fresnel 近似と呼ばれる.

という一次元の式に書き直せる．よって，

$$E(x) = -\frac{iE_S e^{ikr_0}}{\lambda\sqrt{kz}} \int_{-D/2}^{D/2} d\xi e^{i\kappa_x \xi} \quad (\text{B.9})$$

$$= E_S \frac{D e^{ikr_0}}{\lambda\sqrt{kz}} \frac{\sin kxD/2z}{kxD/2z} \quad (\text{B.10})$$

$$P(x) = |E(x)|^2 = \frac{2E_S^2 z}{\lambda^2 k^3 x^2} \left( 1 - \cos\left(\frac{kxD}{z}\right) \right) \quad (\text{B.11})$$

ここで，スリットが微小振動している場合を考える．すなわち

$$D(t) = D_0(1 + \varepsilon \sin(\omega t)) \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (\text{B.12})$$

と書く．このときは

$$\cos\left(\frac{kxD}{z}\right) \simeq -\varepsilon \sin(\omega t) \times \frac{kxD_0}{z} \sin\left(\frac{kxD_0}{z}\right) + \cos\left(\frac{kxD_0}{z}\right) \quad (\text{B.13})$$

と計算される．確かに  $\omega$  成分は振幅  $\varepsilon$  に比例している．

以上の議論は無限に長いスリットと平面波に対して計算している点で第3章の測定とは異なるが，スリットの振幅が十分に小さく，また  $x$  方向に十分な大きさを持った PD を用いれば十分に適用可能であると考えられる．

## 付録C 光バネ (Optical spring)

光共振器によって強められた光によって及ぼされる効果として、光バネと呼ばれるものが知られている。本論文で行った実験では問題とはならなかったが、鏡の微小化および更なる高精度化を目指す上では考慮される必要があるため、ここで取り扱っておく。

### C.1 静的な光バネ

共振器内の光の輻射圧は、特にその共振から僅かに外れた点において鏡の力学応答に大きな影響を与えることがある。これを光バネと呼ぶ。強度  $P$  の光が鏡に垂直に照射されたとき、鏡が受ける運動量は  $(2r^2 + \Lambda)P/c$  である。

共振器内に置かれた鏡の場合、鏡が受ける運動量は共振の付近で大きく変化する。この変化が鏡に実効的にバネとしてはたらく。式 (4.7) より、その大きさ  $k_{\text{opt}}$  は

$$k_{\text{opt}} = -\frac{d}{dx} \frac{(2r_2^2 + \Lambda_2)P_{\text{cav}}}{c} \quad (\text{C.1})$$

$$= \frac{8\pi(2r_2^2 + \Lambda_2)t_1^2 r_1 r_2 P_{\text{inc}}}{\lambda c} \frac{\sin\left(\frac{4\pi x}{\lambda}\right)}{\left(1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\left(\frac{4\pi x}{\lambda}\right)\right)^2} \quad (\text{C.2})$$

と書ける<sup>18, 64)</sup>。 $x$  は共振点からの鏡のずれである。特に共振点近傍においては

$$k_{\text{opt}} = \frac{64t_1^2 \mathcal{F}^2 P_{\text{inc}}}{c\lambda^2} x \quad (\text{C.3})$$

と、変位  $x$  に比例することが分かる。

バネ定数は共振点では 0 であり、その前後で符号が変わることが分かる。すなわち、共振器長が短いときには負のバネとしてはたらく、長いときには正のバネとしてはたらく。 $k_{\text{opt}}$  が最大になるのは、

$$\cos\left(\frac{4\pi x}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{r_1^4 r_2^4 + 34r_1^2 r_2^2 + 1} - (r_1^2 r_2^2 + 1)}{4r_1 r_2} \quad (\text{C.4})$$

のときで、2 次までで計算すると

$$x = \pm \frac{\lambda}{2\mathcal{F}} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{(r_1^2 r_2^2 + 4r_1 r_2 + 1) + \sqrt{r_1^4 r_2^4 + 34r_1^2 r_2^2 + 1}}} \quad (\text{C.5})$$

$$\simeq \pm \frac{\lambda}{4\sqrt{3}\mathcal{F}} \quad (\text{C.6})$$

このときの光バネの大きさは

$$k_{\text{opt,max}} \simeq \frac{t_1^2 \mathcal{F}^3 P_{\text{inc}}}{\sqrt{3}\lambda c \pi^2} \quad (\text{C.7})$$



と書ける．共振器を構成する鏡の反射率がほぼ等しければ  $t_1^2 \simeq \pi/\mathcal{F}$  であり，光バネの最大値は finesse の 2 乗に比例して増大することが分かる．

第 5 章で扱った共振器のパラメータで計算すると， $k_{\text{opt,max}} \sim 700 \text{ N/m}$  という値が得られる．これは，第 3 章で扱った振動子をはじめ，ミリグラムからグラムスケールの振動子は典型的に  $k_c \sim 10^4 \text{ N/m}$  のオーダーの機械バネを持つ<sup>65,64,18,48,46,66</sup> ため，光バネによって振動子の力学応答に数%程度の影響が現れることが分かる．特に，その共振周波数は

$$\omega_{0,\text{mod}} = \sqrt{\frac{k_c + k_{\text{opt}}}{m_0}} \quad (\text{C.8})$$

に従って変化する．

## C.2 動的な光バネ

以上の議論は，共振器に有限の平均光子残存時間  $\tau_{\text{cav}}$  があることによる時間遅れを考慮していない．十分に高い周波数においては，光子の残存時間および振動子の速度依存の効果を考える必要がある．典型的には，

$$f \geq \frac{1}{\sqrt{\tau_c \tau_{\text{cav}}}} \quad (\text{C.9})$$

の領域においてはこの効果を考えなければならない．

このときの光バネの大きさは周波数依存性を持ち，

$$k(\omega) = -k_c \frac{1 + (\delta/\gamma_{\text{cav}})^2 - (\omega/\gamma_{\text{cav}})^2}{(1 + (\delta/\gamma_{\text{cav}})^2 - (\omega/\gamma_{\text{cav}})^2)^2 + 4(\omega/\gamma_{\text{cav}})^2} \quad (\text{C.10})$$

という形で書ける．ここで， $\gamma_{\text{cav}}$  は共振器の共鳴の半値半幅で， $\gamma_{\text{cav}} = 2\pi \times \delta\nu_{\text{FWHM}}/2$  である． $\delta$  は共振器の共振点からのずれ ( $\delta = 2x\nu/\lambda$ ) を表す．

この場合，静的な場合と異なり，共振器の線幅よりも高い周波数においては光バネの影響は弱められることが分かる．また，光子の共振器内残存時間を考慮すると，共振器長の変化と共振器内の光強度の変化にタイムラグが生じることになる．これにより，鏡の速度に比例した形で光による粘性力を考慮しなければならない．その大きさは

$$\Gamma(\omega) = \frac{2k(\omega)/m_0\gamma_{\text{cav}}}{(1 + (\delta/\gamma_{\text{cav}})^2 - (\omega/\gamma_{\text{cav}})^2)^2 + 4(\omega/\gamma_{\text{cav}})^2} \quad (\text{C.11})$$

で与えられる．

## 参考文献

- 1) Weber, J.: Detection and Generation of Gravitational Waves, *Physical Review*, Vol. 117, No. 1, p. 306 (1960).
- 2) Weber, J.: Evidence for Discovery of Gravitational Radiation, *Physical Review Letters*, Vol. 22, No. 24, p. 1320 (1969).
- 3) Ando, M. and Collaboration, T. T. A. M. A.: Current status of TAMA, *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 19, No. 7, pp. 1409–1419 (2002).
- 4) Collaboration, D. S.: Status of the LIGO detectors, *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 25, No. 11, p. 114041 (2008).
- 5) Acernese, F., Alshourbagy, M., Amico, P., Antonucci, F., Aoudia, S., Astone, P., Avino, S., Baggio, L., Ballardín, G., Barone, F., Barsotti, L., Barsuglia, M., Bauer, T. S., Bigotta, S., Birindelli, S., Bizouard, M. A., Boccara, C., Bondu, F., Bosi, L., Braccini, S., Bradaschia, C., Brillet, A., Brisson, V., Buskulic, D., Cagnoli, G., Calloni, E., Campagna, E., Carbognani, F., Cavalier, F., Cavalieri, R., Cella, G., Cesarini, E., Chassande-Mottin, E., Clapson, A. C., Cleva, F., Coccia, E., Corda, C., Corsi, A., Cottone, F., Coulon, J. P., Cuoco, E., D’Antonio, S., Dari, A., Dattilo, V., Davier, M., Rosa, D. R., Prete, D. M., Fiore, D. L., Lieto, D. A., Emilio, , Virgilio, D. A., Evans, M., Fafone, V., Ferrante, I., Fidecaro, F., Fiori, I., Flaminio, R., Fournier, J. D., Frasca, S., Frasconi, F., Gammaitoni, L., Garufi, F., Genin, E., Gennai, A., Giazotto, A., Giordano, L., Granata, V., Greverie, C., Grosjean, D., Guidi, G., Hamdani, S., Hebri, S., Heitmann, H., Hello, P., Huet, D., Kreckelbergh, S., Penna, L. P., Laval, M., Leroy, N., Letendre, N., Lopez, B., Lorenzini, M., Lorette, V., Losurdo, G., Mackowski, J. M., Majorana, E., Man, C. N., Mantovani, M., Marchesoni, F., Marion, F., Marque, J., Martelli, F., Masserot, A., Menzinger, F., Milano, L., Minenkov, Y., Moins, C., Moreau, J., Morgado, N., Mosca, S., Mours, B., Neri, I., Nocera, F., Pagliaroli, G., Palomba, C., Paoletti, F., Pardi, S., Pasqualetti, A., Passaquieti, R., Passuello, D., Piergiovanni, F., Pinard, L., Poggiani, R., Punturo, M., Puppo, P., Rapagnani, P., Regimbau, T., Remillieux, A., Ricci, F., Ricciardi, I., Rocchi, A., Rolland, L., Romano, R., Ruggi, P., Russo, G., Solimeno, S., Spallicci, A., Tarallo, M., Terenzi, R., Toncelli, A., Tonelli, M., Tournefier, E., Travasso, F., Tremola, C., Vajente, G., Brand, , Putten, , Verkindt, D., Vetrano, F., Viceré, A., Vinet, J. Y., Vocca, H. and Yvert, M.: Status of Virgo, *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 25, No. 11, p. 114045 (2008).
- 6) Collaboration, : The status of GEO 600, *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 25, No. 11, p. 114043 (2008).
- 7) Caves, C. M.: Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer, *Physical Review Letters*, Vol. 45, No. 2, p. 75 (1980).

- 8) Braginsky, V. B. and Khalili, F. Y.: *Quantum Measurement*, Cambridge University Press (1995).
- 9) Kuroda, K. and Collaboration, T. L. C. G. T.: The status of LCGT, *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 23, No. 8, pp. S215–S221 (2006).
- 10) Weinstein, A.: Advanced LIGO optical configuration and prototyping effort, *Classical and Quantum Gravity*, pp. 1575–1584 (2002).
- 11) Ekinici, K. L. and Roukes, M. L.: Nanoelectromechanical systems, *Review of Scientific Instruments*, Vol. 76, No. 6, p. 061101 (2005).
- 12) Cohadon, P. F., Heidmann, A. and Pinard, M.: Cooling of a Mirror by Radiation Pressure, *Physical Review Letters*, Vol. 83, No. 16, p. 3174 (1999).
- 13) Tittonen, I., Breitenbach, G., Kalkbrenner, T., Müller, T., Conradt, R., Schiller, S., Steinsland, E., Blanc, N. and Rooij, de N. F.: Interferometric measurements of the position of a macroscopic body: Towards observation of quantum limits, *Physical Review A*, Vol. 59, No. 2, p. 1038 (1999).
- 14) Metzger, C. H. and Karrai, K.: Cavity cooling of a microlever, *Nature*, Vol. 432, No. 7020, pp. 1002–1005 (2004).
- 15) Caniard, T., Briant, T., Cohadon, P., Pinard, M. and Heidmann, A.: Ultrasensitive optical measurement of thermal and quantum noises, *Optics and Spectroscopy*, Vol. 103, No. 2, pp. 225–230 (2007).
- 16) Kippenberg, T. J. and Vahala, K. J.: Cavity Opto-Mechanics, *Opt. Express*, Vol. 15, No. 25, pp. 17172–17205 (2007).
- 17) Kleckner, D. and Bouwmeester, D.: Sub-kelvin optical cooling of a micromechanical resonator, *Nature*, Vol. 444, No. 7115, pp. 75–78 (2006).
- 18) Sheard, B. S., Gray, M. B., Mow-Lowry, C. M., McClelland, D. E. and Whitcomb, S. E.: Observation and characterization of an optical spring, *Phys. Rev. A*, Vol. 69, No. 5, p. 051801 (2004).
- 19) Heidmann, A., Hadjar, Y. and Pinard, M.: Quantum nondemolition measurement by optomechanical coupling, *Applied Physics B: Lasers and Optics*, Vol. 64, No. 2, pp. 173–180 (1997).
- 20) Genes, C., Vitali, D., Tombesi, P., Gigan, S. and Aspelmeyer, M.: Ground-state cooling of a micromechanical oscillator: Comparing cold damping and cavity-assisted cooling schemes, *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, Vol. 77, No. 3, p. 033804 (2008).
- 21) Rae, W. I., Nooshi, N., Zwerger, W. and Kippenberg, T. J.: Theory of Ground State Cooling of a Mechanical Oscillator Using Dynamical Backaction, *Physical Review Letters*, Vol. 99, No. 9, p. 093901 (2007).

- 22) Schliesser, A., Del’hayé, P., Nooshi, N., Vahala, K. J. and Kippenberg, T. J.: Radiation Pressure Cooling of a Micromechanical Oscillator Using Dynamical Backaction, *Physical Review Letters*, Vol. 97, No. 24 (2006).
- 23) Thompson, J. D., Zwickl, B. M., Jayich, A. M., Marquardt, F., Girvin, S. M. and Harris, J. G. E.: Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane, *Nature*, Vol. 452, No. 7183, pp. 72–75 (2008).
- 24) 桜井純：現代の量子力学〈上〉(物理学叢書), 吉岡書店 (1989).
- 25) 三尾典克：量子力学と極限計測, 講義資料 (2007).
- 26) 花村栄一：量子光学 (岩波講座 現代の物理学), 岩波書店 (1992).
- 27) 桐原明宏：Squeezed vacuum による高感度干渉計測の研究, Master’s thesis, University of Tokyo (2004).
- 28) 太田浩一：電磁気学 (2) (丸善物理学基礎コース), 丸善 (2000).
- 29) 東京大学教養学部統計学教室 (編): 統計学入門 (基礎統計学), 東京大学出版会 (1991).
- 30) Edelstein, W. A., Hough, J., Pugh, J. R. and Martin, W.: Limits to the measurement of displacement in an interferometric gravitational radiation detector, *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, Vol. 11, No. 7, pp. 710–712 (1978).
- 31) Dorsel, A., McCullen, J. D., Meystre, P., Vignes, E. and Walther, H.: Optical Bistability and Mirror Confinement Induced by Radiation Pressure, *Physical Review Letters*, Vol. 51, No. 17, p. 1550 (1983).
- 32) Saulson, P. R.: Thermal noise in mechanical experiments, *Physical Review D*, Vol. 42, No. 8, p. 2437 (1990).
- 33) Callen, H. B. and Greene, R. F.: On a Theorem of Irreversible Thermodynamics, *Physical Review*, Vol. 86, No. 5, p. 702 (1952).
- 34) Gaidarzhy, A., Zolfagharkhani, G., Badzey, R. L. and Mohanty, P.: Evidence for Quantized Displacement in Macroscopic Nanomechanical Oscillators, *Physical Review Letters*, Vol. 94, No. 3, p. 030402 (2005).
- 35) Gaidarzhy, A., Imboden, M., Mohanty, P., Rankin, J. and Sheldon, B. W.: High quality factor gigahertz frequencies in nanomechanical diamond resonators, *Applied Physics Letters*, Vol. 91, No. 20, p. 203503 (2007).
- 36) Bhattacharya, M. and Meystre, P.: Trapping and Cooling a Mirror to Its Quantum Mechanical Ground State, *Physical Review Letters*, Vol. 99, No. 7, p. 073601 (2007).
- 37) Chen, Y. and Kawamura, S.: Displacement- and Timing-Noise-Free Gravitational-Wave Detection, *Physical Review Letters*, Vol. 96, No. 23, p. 231102 (2006).
- 38) Chen, Y., Pai, A., Somiya, K., Kawamura, S., Sato, S., Kokeyama, K., Ward, R. L., Goda, K. and Mikhailov, E. E.: Interferometers for Displacement-Noise-Free Gravitational-Wave Detection, *Physical Review Letters*, Vol. 97, No. 15, p. 151103 (2006).

- 39) Nishizawa, A., Kawamura, S. and Sakagami, M. A.: Resonant Speed Meter for Gravitational-Wave Detection, *Physical Review Letters*, Vol. 101, No. 8, p. 081101 (2008).
- 40) Goda, K., Miyakawa, O., Mikhailov, E. E., Saraf, S., Adhikari, R., McKenzie, K., Ward, R., Vass, S., Weinstein, A. J. and Mavalvala, N.: A quantum-enhanced prototype gravitational-wave detector, *Nature Physics*, Vol. 4, No. 6, pp. 472–476 (2008).
- 41) Yamamoto, K.: *Study of the thermal noise caused by inhomogeneously distributed loss*, PhD thesis, University of Tokyo (2000).
- 42) Augst, S. J. and Drever, R. W. P.: Measurements of Mechanical Q in Levitated Paramagnetic Crystals, in Meshkov, S. ed., *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 523 of *American Institute of Physics Conference Series*, p. 338 (2000).
- 43) 鍛島麻理子: レーザー干渉計による揺動散逸定理を応用したゴム粘弾性の精密測定, PhD thesis, University of Tokyo (2003).
- 44) Saulson, P. R., Stebbins, R. T., Dumont, F. D. and Mock, S. E.: The inverted pendulum as a probe of anelasticity, *Review of Scientific Instruments*, Vol. 65, No. 1, pp. 182–191 (1994).
- 45) Nietzsche, S., Nawrodt, R., Zimmer, A., Schnabel, R., Vodel, W. and Seidel, P.: Cryogenic Q-factor measurement of optical substrates for optimization of gravitational wave detectors, *Superconductor Science and Technology*, Vol. 19, No. 5, pp. S293–S296 (2006).
- 46) Ludwig, T.: Casimir force experiments with quartz tuning forks and an atomic force microscope (AFM), *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 41, No. 16, p. 164025 (2008).
- 47) Karrai, K. and Tiemann, I.: Interfacial shear force microscopy, *Physical Review B*, Vol. 62, No. 19, p. 13174 (2000).
- 48) Seo, Y., Zimansky, P. C. and Chandrasekhar, V.: Low-temperature high-resolution magnetic force microscopy using a quartz tuning fork, *Applied Physics Letters*, Vol. 87, No. 10, p. 103103 (2005).
- 49) Watson, S. D. and Tapon, J.: Simple force balance accelerometer/seismometer based on a tuning fork displacement sensor, *Review of Scientific Instruments*, Vol. 75, No. 9, pp. 3045–3049 (2004).
- 50) Bömmel, H. E., Mason, W. P. and Warner, A. W.: Dislocations, Relaxations, and Anelasticity of Crystal Quartz, *Physical Review*, Vol. 102, No. 1, p. 64 (1956).
- 51) Zimmer, A., Nawrodt, R., Koettig, T., Neubert, R., Thürk, M., Vodel, W., Seidel, P. and Tünnermann, A.: Cryogenic resonant acoustic spectroscopy of bulk materials (CRA spectroscopy), *Review of Scientific Instruments*, Vol. 78, No. 6, p. 063905 (2007).
- 52) Fraser, D. B.: Anelastic Effects of Alkali Ions in Crystalline Quartz, *Journal of Applied Physics*, Vol. 35, No. 10, pp. 2913–2918 (1964).
- 53) Planat, M.: Nature of 1/f phase noise in quartz crystal resonators, in *Ultrasonics Symposium, 1988. Proceedings., IEEE 1988*, pp. 379–382 vol.1 (1988).

- 54) Broughton, J. Q., Meli, C. A., Vashishta, P. and Kalia, R. K.: Direct atomistic simulation of quartz crystal oscillators: Bulk properties and nanoscale devices, *Physical Review B*, Vol. 56, No. 2, p. 611 (1997).
- 55) Hahtela, O.: *High-Q Mechanical Silicon Oscillators in Optomechanical Sensor Applications*, PhD thesis, Helsinki University of Technology (2007).
- 56) 中村卓史, 大橋正健, 三尾典克: 重力波をとらえる 存在の証明から検出へ, 京都大学学術出版会 (1998).
- 57) Drever, R. W. P., Hall, J. L., Kowalski, F. V., Hough, J., Ford, G. M., Munley, A. J. and Ward, H.: Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator, *Applied Physics B: Lasers and Optics*, Vol. 31, No. 2, pp. 97–105 (1983).
- 58) Black, E. D.: An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization, *American Journal of Physics*, Vol. 69, No. 1, pp. 79–87 (2001).
- 59) Tsubono, K., Mio, N. and Mizutani, A.: Laser interferometer instrumented in a disk antenna for gravitational radiation, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 30, pp. 1326–1330 (1991).
- 60) Mio, N. and Tsubono, K.: Vibration transducer using an ultrashort Fabry-Perot cavity, *Appl. Opt.*, Vol. 34, No. 1, pp. 186–189 (1995).
- 61) Araya, A., Kawabe, K., Sato, T., Mio, N. and Tsubono, K.: Highly sensitive wideband seismometer using a laser interferometer, *Review of Scientific Instruments*, Vol. 64, No. 5, pp. 1337–1341 (1993).
- 62) 頼本賢治: Fabry-Perot 共振器を用いた半導体励起 Nd:YAG レーザーの周波数安定化, Master's thesis, University of Tokyo (1999).
- 63) Meschede, D.: *Optics, Light and Lasers: The Practical Approach to Modern Aspects of Photonics and Laser Physics*, Wiley-VCH (2004).
- 64) Di Virgilio, A., Barsotti, L., Braccini, S., Bradaschia, C., Cella, G., Corda, C., Dattilo, V., Ferrante, I., Fidecaro, F., Fiori, I., Frasconi, F., Gennai, A., Giazotto, A., La Penna, P., Losurdo, G., Majorana, E., Mantovani, M., Pasqualetti, A., Passuello, D., Piergiovanni, F., Porzio, A., Puppo, P., Rapagnani, P., Ricci, F., Solimeno, S., Vajente, G. and Vetrano, F.: Experimental evidence for an optical spring, *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, Vol. 74, No. 1, p. 013813 (2006).
- 65) Corbitt, T., Ottaway, D., Innerhofer, E., Pelc, J. and Mavalvala, N.: Measurement of radiation-pressure-induced optomechanical dynamics in a suspended Fabry-Perot cavity, *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, Vol. 74, No. 2, p. 021802 (2006).
- 66) Blaauwgeers, R., Blazkova, M., Clovecko, M., Eltsov, V., Graaf, R., Hosio, J., Krusius, M., Schmoranzler, D., Schoepe, W., Skrbek, L., Skyba, P., Solntsev, R., Zmeev, and D.: Quartz Tuning Fork: Thermometer, Pressure- and Viscometer for Helium Liquids, *Journal of Low Temperature Physics*, Vol. 146, No. 5-6, pp. 537–562 (2007).