

東京大学 大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成20年度

修士論文

磁気圏型プラズマ閉じ込めにおける
圧力駆動不安定性に対する安定限界解析

2009年2月提出
指導教員 吉田 善章 教授

76216 林 裕之

目次

第1章 序論	1
1.1 核融合エネルギーについて	1
1.2 磁気圏型磁場によるプラズマ閉じ込めの研究	3
1.3 RT-1 実験装置	6
1.3.1 RT-1 装置の概要	6
1.3.2 マイクロ波源の概要	8
1.4 研究の背景と目的	11
1.4.1 RT-1 における安定性解析の意義	11
1.4.2 RT-1 のプラズマ平衡に即した安定性解析の必要性	12
1.4.3 磁力線平行方向の解析も含めた研究	13
1.4.4 本研究の目的	14
1.5 研究の方法	14
1.5.1 RT-1 平衡解析コード	15
1.5.2 マッピングコード	15
1.5.3 安定性解析コード	15
1.6 本論文の構成	17
第2章 圧力駆動不安定性の固有方程式	18

2.1	理想 MHD 方程式の導入	18
2.1.1	MHD 不安定性	18
2.1.2	理想 MHD 方程式	19
2.1.3	理想 MHD 方程式の規格化	19
2.1.4	理想 MHD 方程式の線形化	21
2.2	固有方程式の導出	22
第 3 章	圧縮性による安定化効果	26
3.1	圧縮性を無視したモデルとの比較	26
3.1.1	圧縮性無視モデル	26
3.1.2	不安定性成長率の出方比較	26
3.2	エネルギー積分による比較	29
3.2.1	エネルギー積分	29
3.2.2	規格化の問題	30
3.2.3	圧縮性無視モデルにおける ポテンシャルエネルギーの径方向分布	31
3.2.4	圧縮性モデルにおける ポテンシャルエネルギーの径方向分布	34
3.2.5	補足: ξ_{\perp} のみのモデルによるポテンシャルエネルギーについて	35
3.2.6	圧縮性モデルにおける ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} の運動エネルギー比率の径方向変化	36
3.3	圧縮性による安定化効果の物理的意味	38

3.3.1	エネルギー密度の磁力線方向分布	38
3.3.2	エネルギー密度分布の径方向変化	44
3.3.3	プラズマ変位 ξ_{\perp} , ξ_{\parallel} の径方向変化の要因	49
3.3.4	交換型不安定性に対する安定条件式	49
3.3.5	補足：安定な圧力分布の条件	51
3.4	補足：磁力線垂直方向のみの圧縮性モデルについて	54
3.4.1	圧縮性 (垂直のみ) モデルにおける固有値解析	55
3.4.2	ポテンシャルエネルギーによる安定化効果の比較	55
第 4 章	セパトリックス配位の安定性	59
4.1	プラズマ境界問題とセパトリックスについて	59
4.2	セパトリックス配位における安定化効果	60
4.2.1	ダイポール配位とセパトリックス配位における解析比較	60
4.2.2	セパトリックス配位の安定化要因	66
4.3	セパトリックス近傍における物理現象	68
4.3.1	セパトリックス配位におけるプラズマ変位の径方向変化	68
4.3.2	セパトリックス配位におけるエネルギー密度分布の径方向変化	70
第 5 章	RT-1 安定限界解析	74
5.1	安定限界の物理的意味	74
5.1.1	エッジ領域における不安定性	74
5.1.2	コア領域における安定性	80
5.1.3	RT-1 における安定限界の物理的解釈	84

5.2 RT-1 における理論的安定限界領域	86
第 6 章 結論	89
付 録 A RT-1 平衡コードの計算	91
A.1 Grad-Shafranov 方程式	91
A.2 Grad-Shafranov 演算子に関する Green 関数	92
A.3 自由境界条件での解法	92
付 録 B 平衡計算のグリッド数と	
安定性解析の計算精度の関連性	94
付 録 C 磁気圏プラズマにおける	
非圧縮性モデルの解析について	97

第1章 序論

1.1 核融合エネルギーについて

質量数の小さい各種の原子核が衝突して、質量数の大きい原子核を作る反応を核融合反応といい、その核融合反応から得られるエネルギーを核融合エネルギーという。核融合反応後に生成された原子核の質量の和は、衝突する前の2つの原子核の質量の和に比べてわずかに少なくなっている。相対性理論によれば、この質量欠損 Δm に相当する $(\Delta m)c^2$ (c は光速) のエネルギーが放出される。例えば太陽の中心部では核融合の反応が進行して地球に降り注ぐエネルギーの源となっている。

核融合反応には反応する2つの原子核の種類によって多くの反応の種類があるが、現在考えられている主な反応には重水素(D)と三重水素(T, トリチウム)の反応であるD-T反応, DとDの反応であるD-D反応, Tの代わりにヘリウム-3(^3He)を用いるD- ^3He 反応がある。特にその中で地上で最も反応を起こしやすいのがD-T反応であり、放出されるエネルギーは水素分子の燃焼エネルギーの100万倍程度になり、非常に大きいエネルギーが得られる。

このような爆発的な核融合反応によるエネルギーの放出は1951年の水素爆弾実験によって実証されているが、核融合炉の研究は制御された核融合反応がエネルギー資源として役立つであろうという期待に基づいている。核分裂反応とは異なり、核融合反応そのものからは放射性生成物が出てこないという利点もある(ただし、放出される中性子が炉壁材料に捕捉されて誘導放射能を生ずることはある)。核融合反応は1920年代に発見されたが、

そのときは原子番号 Z の小さい元素を標的にして陽子や重陽子 (重水素イオン) の粒子線をぶつけた。しかしこのような方法では、粒子線の大部分は標的元素のイオン化、弾性散乱などによる熱化に費やされてしまい、核融合反応を起こす確率は、微々たるものである。

現在研究されているのは、高温プラズマを使った核融合である。プラズマとは物質の高エネルギー状態のことであり、原子核と電子がバラバラに電離した状態のことである。水素プラズマ中ではイオンがさらに電離したり励起されたりすることはなく、高い熱エネルギーを持つイオンや電子がクーロン衝突 (弾性衝突) を繰り返しても、プラズマが断熱的にある有限な領域に閉じ込められていれば、その平均エネルギー、すなわち温度は下がらない。したがってある程度高温 DT プラズマ、あるいは DD プラズマを閉じ込めることができれば、D と T あるいは D と D が互いに高速で走り回っているので、正の電荷を持つ原子核同士のクーロン反発力を乗り越えて衝突し、核融合反応を起こすことができると期待される。

しかしただ単にプラズマを閉じ込めれば良いというわけではなく、核融合を引き起こすための条件を満たしたプラズマでなければならない。核融合炉の炉心プラズマに関しては、臨界プラズマ条件や自己点火条件など満たすために核融合積というものを大きくすることがその条件の指標である。この核融合積は $n\tau T$ (n : プラズマ密度, τ : 閉じ込め時間, T : プラズマ温度) で表される。この核融合積を大きなものとする閉じ込め方法には主に 2 つあり、磁力線に荷電粒子が巻きつく性質を利用した磁場閉じ込め方式と、大出力レーザーで圧縮・加熱し一瞬に高い核融合積を得る慣性閉じ込め方式である。特に、磁場閉じ込め方式の主流はトカマク型と言われるものであり、国際熱核融合実験炉 (international thermonuclear experimental reactor: ITER) はこのトカマク型を採用している。

現在、核融合エネルギーの開発はさまざまな分野に分かれており、技術開発やプラズマ研究が進められている。さらに効率の良い閉じ込め技術の開発を進める炉心プラズマ分

野，耐熱性に優れ中性子にも強い炉壁の開発を進めるブランケット・材料分野，炉の安全性やその他の炉工学分野など多岐に渡っており，現在のシナリオでは D-T 反応のトカマク型核融合炉の実用化は 2050 年頃に設定されている．

1.2 磁気圏型磁場によるプラズマ閉じ込めの研究

核融合プラズマの分野においてその閉じ込め効率の性能を特徴づけるパラメータの一つに β 値というものがある． β 値とは $\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0}$ (p : プラズマ圧力， $B^2/2\mu_0$: 磁気圧) で表され，現在主流のトカマク型でさえ高々 0.1 程度しかない．この β 値を高くすることができればそれだけ弱い磁場でプラズマを閉じ込めることも可能になる． β 値の向上は核融合の実現に結びつき，装置の小型化も望め，経済性の良い核融合エネルギーの実現に繋がることになる．そして現在， β 値の高いプラズマ閉じ込めを目指して，トカマク型とは異なる様々な磁場閉じ込め方式が世界中で研究されているが，その一つとしてダイポール磁場配位によるプラズマ閉じ込めが提案されている．

1977 年に打ち上げられた探査機ボイジャーによる観測結果などから，木星の磁気圏内において 超高 β トーラスプラズマが閉じ込められていることが明らかになった [1, 2]．この現象に関して A. Hasegawa は，ダイポール磁場が極めて高い β 値のプラズマを閉じ込める可能性があることを指摘しており，ダイポール磁場によるプラズマの閉じ込め方式を提案している [3, 4]．圧力勾配と磁場曲率が同じ向きになる領域ではダイポール磁場は磁力線方向全域で「悪い曲率」であるので，単純に考えれば圧力勾配に対してインターチェンジモードが不安定である．しかし，磁場強度の強い勾配のために，磁束管の圧縮効果を考慮すると，たとえ悪い曲率部に圧力勾配があっても，インターチェンジモードが安定になるということが考えられる．A. Hasegawa のダイポール平衡解の概念に基づき，Columbia 大学と MIT では共同実験として，浮上させたコイルによって作り出されるダイポール磁

場によってプラズマを閉じ込める装置「Levitated Dipole Experiment (LDX)」を開発し、高 β なプラズマ閉じ込めの研究を行っている [5, 6] .

また、木星磁気圏に閉じ込められるプラズマがトロイダル方向に高速回転流をしていることも、観測結果から分かっている [1, 2](図 1.1) . この現象に関して S. M. Mahajan と Z. Yoshida は 2 磁気流体緩和理論を提唱し [7, 8, 9] , この高速回転流が木星磁気圏におけるプラズマの超高 β プラズマ平衡状態を実現させていることを示した . そこで我々の研究室では、この木星磁気圏に閉じ込められるプラズマをモデルとしたプラズマ実験装置「Ring Trap-1 (RT-1)」 [11](図 1.2) により、超高 β プラズマ閉じ込め現象の実験的検証を目指している . 現在、局所的最大 β 値が 0.3 を超える安定なプラズマ閉じ込めが実現されている . 今後は高速流駆動による緩和現象を利用した超高 β プラズマ閉じ込めを目指しており、先進核融合に向けたプラズマ閉じ込めの更なる可能性が期待されている .

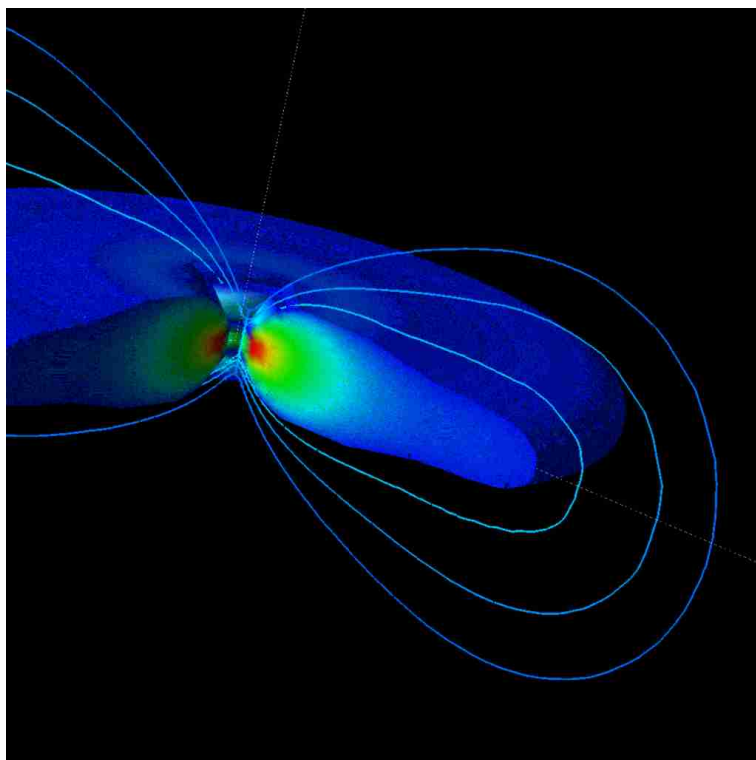


図 1.1 木星磁気圏プラズマの回転流高 平衡の理論モデル [10]



図 1.2 RT-1 実験装置概観

1.3 RT-1 実験装置

RT-1 は真空容器に電流を流したコイル (超伝導コイル) を浮かべ、ダイポール磁場を生らせてプラズマを閉じ込める装置である。木星などの惑星磁気圏に閉じ込められているプラズマをモデルとしていることから、RT-1 を磁気圏型閉じ込め装置と呼んでいる。本節では、RT-1 装置とマイクロ波源について概要を説明する。

1.3.1 RT-1 装置の概要

RT-1 装置は、真空容器、真空排気システム、高温超伝導磁気浮上コイル (HTS コイル)、冷凍システム、磁気浮上制御システムおよびプラズマ加熱装置で構成される (図 1.3)。

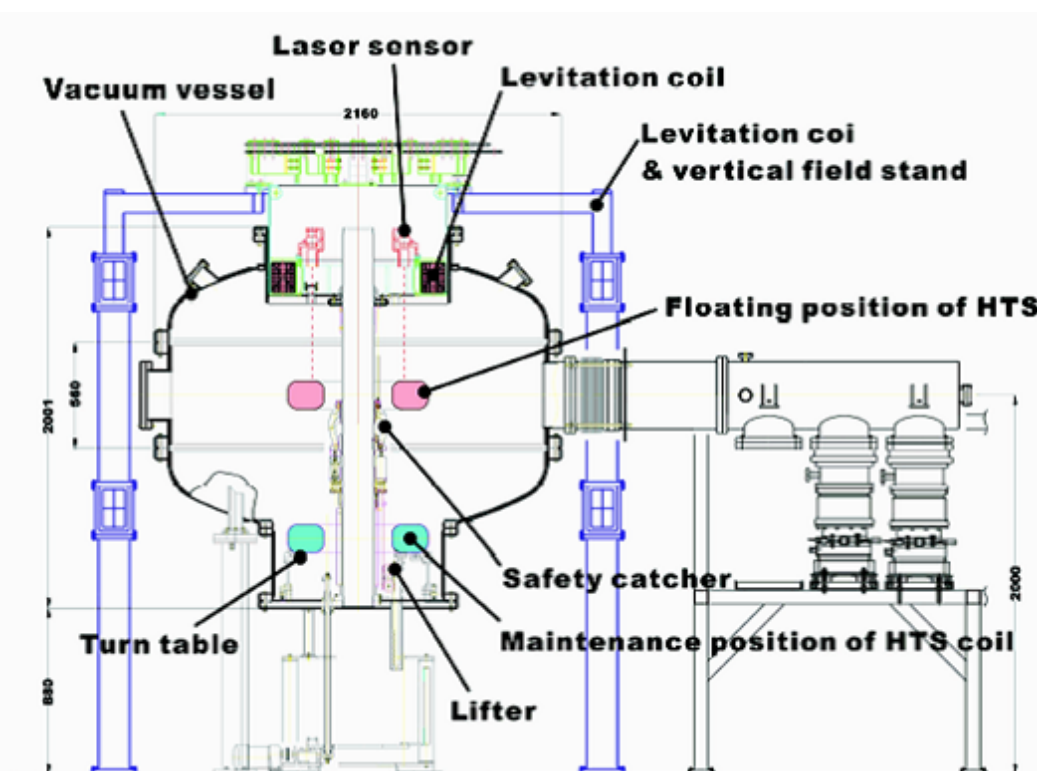


図 1.3 RT-1 実験装置断面図

真空容器は直径 2m、高さ 2m、であり、3つの層に分けられる。真空容器主要部であるプラズマ閉じ込め領域には、HTS コイルが磁気浮上され、これが発生するダイポール磁場でプラズマを閉じ込める。図 1.4 にポロイダル断面における最外殻磁気面と各機器の配

置を示す．下層部は HTS コイルのメンテナンス領域である．上層部には磁気浮上制御システムが設置されている．

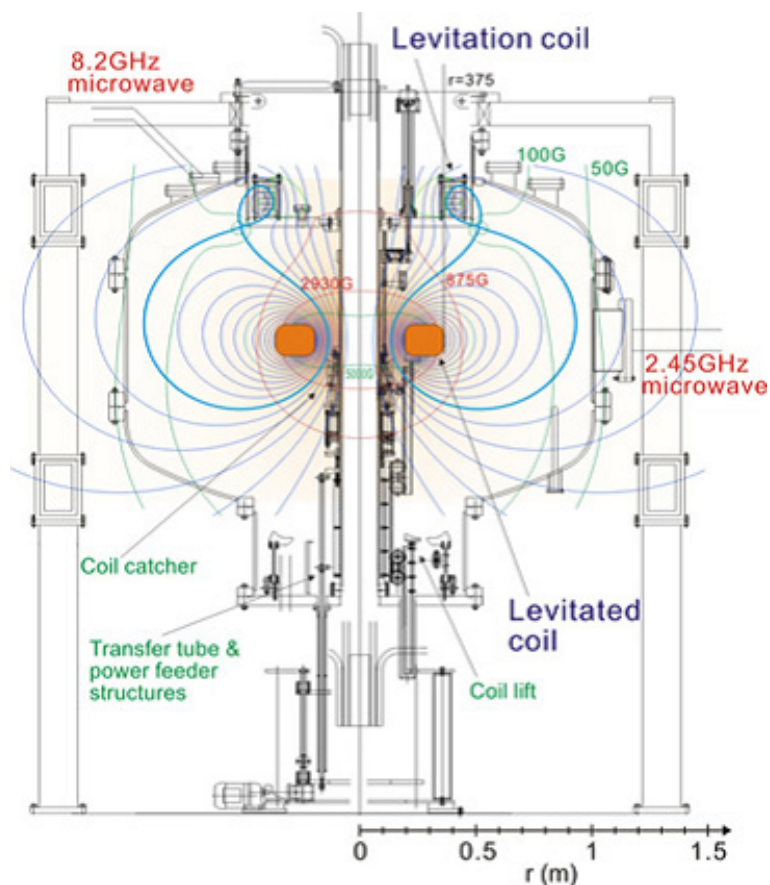


図 1.4 RT-1 磁場配位と各機器の位置 (ポロイダル断面図)

HTS コイルは Bi-2223 のテープ状線材 (幅 4.6mm , 厚 0.23mm) で巻かれた 12 個のパンケーキコイルによって構成される．各パンケーキコイルは 181 ターンである．コイル電流は 116A であり，磁気浮上コイルの全起磁力は 250kA である．励磁は，永久電流スイッチ (PCS) を 100k まで加熱してオープンにした後，直流電源から直接通電する．PCS として薄膜 YBCO を用いている．励磁完了後に PCS は回路を閉じ，永久電流モードとする．HTS コイルは銅製の輻射シールドで覆われており，その外周をステンレス製コイル容器で覆っている．コイルの総重量は 110kg である．プラズマ実験中，磁気浮上コイルは冷却ライン，励磁用電流リード，コイル内計測ラインから離脱して，プラズマの内部に浮上している．離脱して低温状態，超伝導状態を保つ時間は 7 時間とし，この間のコイル温度は

30K 以下，電流減衰は 10^{-2} 以下である．

コイルの浮上は，真空容器の上部に設置した吊上げコイルによる引き上げ方式を採用しているため，垂直方向変位に対し不安定である．このため，浮上コイル位置を 3 台のレーザセンサで測定し，吊上げコイル電流をフィードバック制御することでコイル位置を安定化している．浮上コイル位置は $\pm 50 \mu\text{m}$ 以下の制度で制御できるが，コイル制御が失われた非常事態の場合は，コイルキャッチャーが 100ms 以内で動作し，落下距離 50mm で浮上コイルを受け止める．

HTS コイルの冷却および励磁は，下層部の真空中で遠隔操作によって行われる，冷却においては，GM 冷凍機で冷却された He ガスを，トランスファーチューブおよび真空中で着脱されるバルブを経由して HTS コイル内に設置した冷却ラインへ送り，コイルを 20K 以下まで冷却する．室温からの冷却は，ほぼ 48 時間で完了する．励磁は，80K まで予冷した電流リードを接続し，PCS を 100k まで加熱してオープンにした後，直流電源から直接通電する．定常電流を得た後，PCS を超伝導温度に戻してクローズとし，永久環状電流とし，電源電流を下げる．

冷却および励磁が完了した後，HTS コイルは冷却ガスライン，励磁用電流リード，コイル内計測ラインを離脱し，昇降機で真空容器中央部に移動される．その後，フィードバック制御された吊上げコイル磁場により磁気浮上される．プラズマ実験終了後，HTS コイルは 20K まで再冷却され，翌日再度磁気浮上させ，プラズマ実験を行う．

1.3.2 マイクロ波源の概要

RT-1 ではマイクロ波を用いて ECH(電子サイクロトロン加熱) プラズマを生成している．このマイクロ波を発生させる装置として，RT-1 には 8.2GHz のマイクロ波源 RF1 と 2.45GHz のマイクロ波源 RF2 がある．ECH ではマイクロ波の周波数が磁場中の電子の

ジャイロ周波数 $f_c = eB/2\pi m_e$ (e :電荷, B :磁場強度, m_e :電子質量) の整数倍に等しい時, マイクロ波のエネルギーが電子に共鳴的に吸収されることで放電が維持され, 電子の加熱が起きる. エネルギーの閉じ込め時間が電子, イオンのそれぞれの温度緩和時間よりも長い場合には, 電子の得たエネルギーが伝達されることにより, 間接的にイオンの加熱を行うことが可能である. 図 1.5 は ECH プラズマの閉じ込め様子である.

- RF1(8.2GHz) について

1 秒運転・最大定格出力が 100kW のクライストロンにより供給される 8.2GHz マイクロ波源である. 方向性結合器やインピーダンス整合器などを介して, 弱磁場側の真空容器上部のポートに接続した導波管から入射される. 吸収効率を高めるために磁力線とある角度を成すようにコイル近傍の共鳴面に到達する. 共鳴面は $B = 2930\text{G}$ である.

- RF2(2.45GHz) について

2 秒運転・最大定格出力が 20kW のマグネトロンにより供給される 2.45GHz のマイクロ波源である. マイクロ波電力は基本モードの短形導波管により発信器から伝送され, 石英ビューポートを介して赤道面上の真空容器内に入射される. 閉じ込め領域内に $B=875\text{G}$ の共鳴面を形成する.

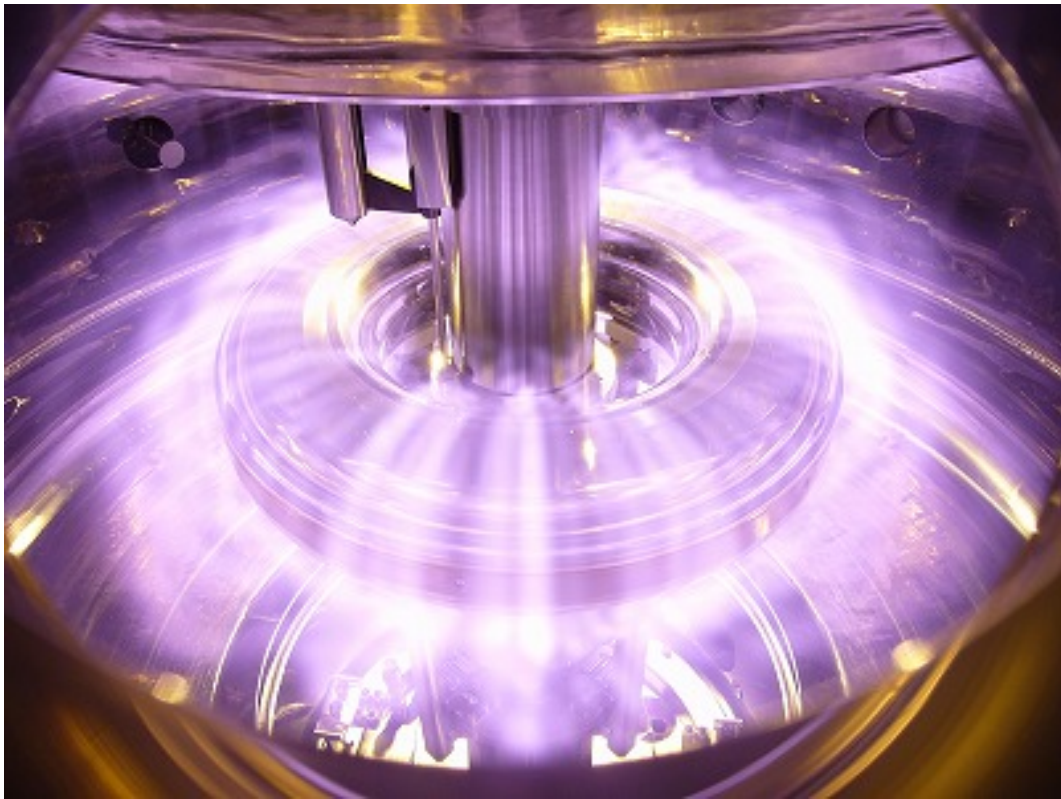


図 1.5a ECH プラズマ閉じ込め様子 1

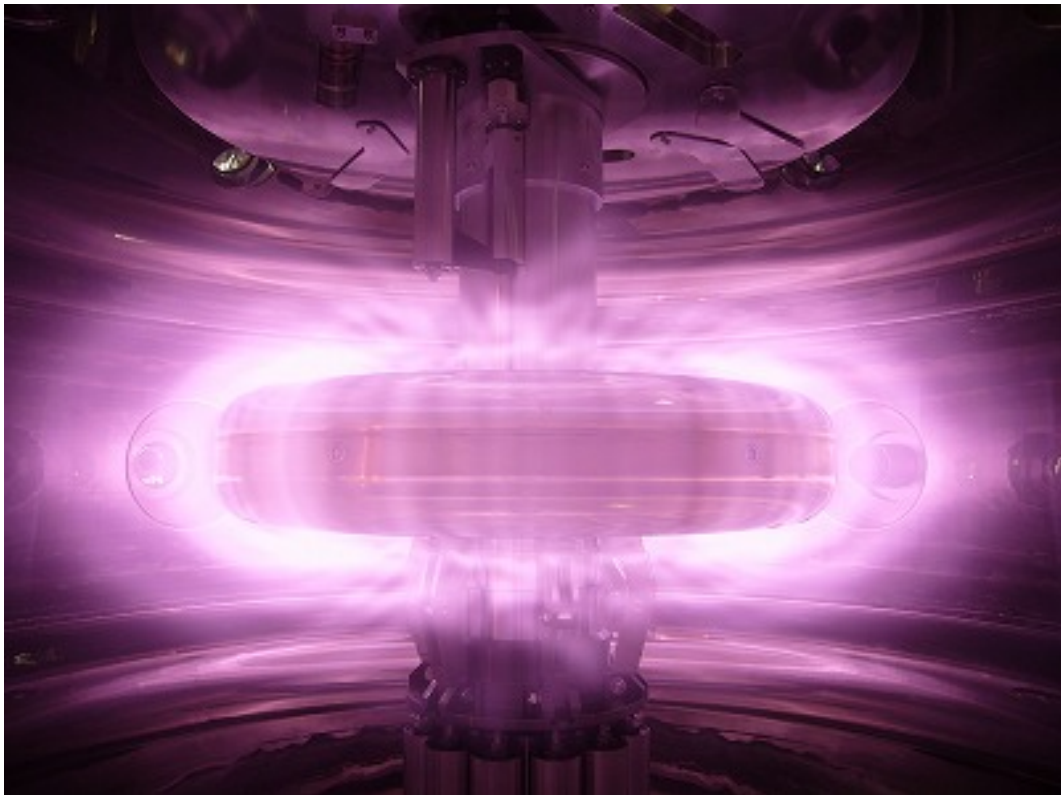


図 1.5b ECH プラズマ閉じ込め様子 2

1.4 研究の背景と目的

1.4.1 RT-1 における安定性解析の意義

1.2 節で触れたように，RT-1 のような磁気圏型磁場配位によるプラズマ閉じ込めでは，圧力駆動による不安定性が起きる可能性があるが，RT-1 実験では $\beta_{max} > 0.3$ という高 β なプラズマ閉じ込めが実現されている．RT-1 においてこのような高 β なプラズマ平衡が実現されるのは，磁気圏型プラズマ閉じ込めにおける磁束管の圧縮性効果，ECH プラズマによる運動論的效果，プラズマ流の効果などがプラズマの安定化に関わっているからであると考えられている．特に磁束管の圧縮性に関しては，これまでの磁気圏型プラズマにおける MHD(プラズマを流体モデルとして扱う) 理論解析の研究 [13, 17] において，その安定化効果が非常に大きいことが報告されており，この磁束管の圧縮性による安定化効果が RT-1 における高 β プラズマ平衡にも大きく関わっていると考えられる．したがって，MHD 理論での解析により圧力駆動不安定性に対する磁束管の圧縮性効果を確認することは，現在実験的に実現されている高 β プラズマ平衡の安定性を理論的な側面から説明することに繋がると考えられるため，重要な課題であると思われる．

また，RT-1 における $\beta_{max} > 0.3$ という平衡が安定限界であるかどうかは実験的にはまだわかっておらず，プラズマショット条件の改善により，今後さらに高い β 値を得られる可能性は充分にある．しかし一方で，それ以上の高 β プラズマ平衡では不安定性が生じる可能性もあり，圧力駆動による不安定性が RT-1 の安定限界 (β 値限界) を決めていると考えている．したがって，圧力駆動不安定性に対して安定限界解析を行うことは，RT-1 における β 値限界を理論的に予測することも可能になると考えられる．

1.4.2 RT-1 のプラズマ平衡に即した安定性解析の必要性

これまでの磁気圏型プラズマ閉じ込めにおける MHD 理論の安定性解析は、主に MIT の LDX に関連する研究として行われてきており、プラズマの回転も含めた安定性解析 [12]、バルーニングモードに対する安定性解析 [13]、非等方性を考慮に入れた安定性解析 [14] などがそれぞれポイント・ダイポール磁場配位のモデルにおいて行われてきた。ポイント・ダイポール磁場配位モデルは簡単な構造でありながらも、一般的なダイポール配位の特徴を充分掴んだまま、簡単に解析をすることができるという利点がある [15]。また近年の研究では、Z ピンチモデルにおける理論的な β 値予測の研究も行われている [16]。

しかしながら、RT-1 のような高 β プラズマ平衡における安定性解析には、ポイント・ダイポール磁場配位などの簡略化された磁場配位モデルに近似して安定限界を求めることは適切ではなく、RT-1 のプラズマ平衡に即した解析をする必要があると思われる。その理由は主に 2 つある。

1. 高 β プラズマ平衡により磁場配位が変化するため

RT-1 における高 β プラズマ閉じ込めでは、実験的に真空磁場に対して 10 % 以上にも上る反磁性信号が計測されている。すなわち、真空磁場状態に比べて 10 % 以上も磁場配位が変化しているため、真空磁場近似による解析を行うのは適切でないと考えられる。

2. 吊上げコイルにより磁場配位が変化するため

1.3.1 項で説明したように、RT-1 では超伝導コイルを吊上げコイルによって磁気浮上させている。そのため RT-1 装置内では、図 1.6 で示されるように単純なダイポール磁場配位ではなく、磁場配位が装置上方に引き伸ばされたような形状となっている。また RT-1 では、プラズマが装置壁と相互作用するのを防ぐために、セパルト

リックス (磁力線の閉じている内部領域と閉じていない外部領域との境界) が装置内部に形成されるように設計されている。このような吊上げコイルによる磁場配位変化の影響とセパトリックスの効果を検討するためにも、簡略化された磁場配位に近似して解析を行うのは適切でないと考えられる。

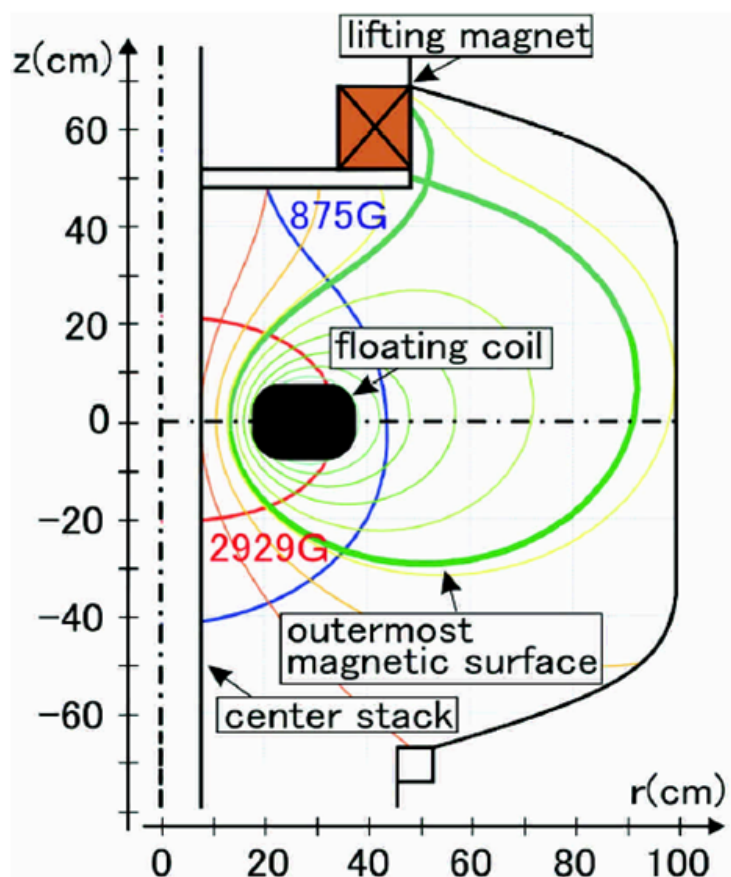


図 1.6 セパトリックスを含む RT-1 磁場配位の様子

1.4.3 磁力線平行方向の解析も含めた研究

磁気圏型プラズマ閉じ込めにおける圧力駆動不安定性に対する解析は、A. N. Simakov らや D. T. Garnier らによって行われ、圧縮性の安定化効果が確認されている [13, 17]。しかしこれらの研究では、磁力線垂直方向の変位のみで表されたモデルでの解析を行っており、磁力線平行方向の現象についてはよくわかっていない。プラズマは磁力線に沿った方向にも変位しやすいため、磁力線平行方向の運動についても調べることは物理的考察をす

る上で重要であると思われる。したがって、圧縮性効果の物理的メカニズムをより正確に考察するためには、磁力線平行方向のプラズマ変位も含めた解析をする必要がある。

1.4.4 本研究の目的

1.4.2 項，1.4.3 項に挙げた問題点を踏まえ，本研究ではより現実に即した安定性解析を行うために，磁力線平行方向の運動も含めた圧力駆動不安定性の解析を RT-1 の有限 β なプラズマ平衡に対して行う。これは，より RT-1 のプラズマ平衡状態に即した解析を行うことで，

1. 圧縮性による安定化効果の確認
2. 磁力線平行方向の運動が安定性に与える影響
3. 吊上げコイルによる磁場配位の変化が安定性に与える影響
4. RT-1 における β 値限界

について定性的かつ定量的に評価し，それぞれの物理的意味を考察することを目的とするためである。

1.5 研究の方法

本研究における RT-1 プラズマ平衡に即した安定性解析を行うためには，「RT-1 平衡解析コード」，「マッピングコード」，「安定性解析コード」の3つの数値計算コードによる計算工程が必要となる。それぞれのコードについて簡単に説明をする。

1.5.1 RT-1 平衡解析コード

このコードは，J. Shiraishi と M. Furukawa によって開発された RT-1 のプラズマ平衡状態を求める計算コードである．仮定された圧力分布 $p(\psi)$ に対して，軸対称配位の円柱座標系 (R, ϕ, Z) を用いた Grad-Shafranov 方程式を解き，その解を磁束関数 $\psi(R, Z)$ として得ることができる (付録 A 参照)．また局所的な最大 β 値や体積平均 β 値，プラズマによる反磁性信号なども求めることができる．本研究において RT-1 のプラズマ平衡量を求める際に，このコードを使用した数値計算を行う．また本研究では，このように RT-1 平衡解析コードにより求められる平衡量を安定性解析に使用するので，平衡解析コードにおける計算精度が安定性解析の精度に影響を及ぼす可能性もある．この影響については付録 B にて説明する．

1.5.2 マッピングコード

RT-1 平衡解析コードによる数値計算からは，磁束関数 $\psi(R, Z)$ とポロイダル角 $\theta(R, Z)$ を求めることができる．しかし，後述の安定性解析コードでは磁気面座標系 (ψ, θ) で方程式が解かれるので，円柱座標系と磁気面座標系の間で座標変換のためのメトリックとヤコビアンを求める必要がある．そこで本研究ではまず，

$$(\psi(R, Z), \theta(R, Z)) \implies (R(\psi, \theta), Z(\psi, \theta))$$

のように座標変換を行うマッピングコードを開発した．RT-1 平衡解析コードによる計算の後で，このコードを使用して平衡解に対する座標変換を行う．

1.5.3 安定性解析コード

磁気圏型磁場配位に閉じ込められるプラズマにおける圧力駆動不安定性に対して，固有値問題として安定性解析を行う数値計算コードを開発した．磁気面座標系で記述された 2

連立の固有方程式に対して、磁気圏型磁場配位では磁力線は閉じているため、周期境界条件を課して計算している。しかし、セパトリックスを含む配位では以下の問題が生じている。

1. X 点上の計算

セパトリックスでは磁場強度がゼロとなる X 点が含まれており、その場所ではメトリックとヤコビアンが発散してしまうので、計算することはできない。したがって、この場所における微分計算は中心差分ではなく、片側差分を代用することで計算を行い、X 点を避けるようにして解析を行う。

2. セパトリックス外側の計算

セパトリックスの外側領域では磁力線が閉じていないので (図 1.6)、周期境界条件によって固有値問題を解くことはできない。したがって、この領域における解析では、装置上部の適当なところに「壁」を想定し、壁ではプラズマが変位しないとしてそこに固定境界条件を課し、固有値問題を解いている。

以上の計算上の不都合性により、セパトリックスを含む外側領域では実際の物理現象に即した数値計算を行うことはできない。しかし本研究では、磁力線が閉じている領域、すなわちプラズマが閉じ込められる領域において安定性解析を行うことを主としているので、この問題は影響しないと考えている。

なお、この安定性解析コードは、固有値解析の結果として不安定な固有値・固有関数を求める他に、不安定性の成長率やエネルギーの径方向分布、磁力線方向分布などを調べることも可能にしている。

1.6 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。

第2章では、本研究の安定性解析で解かれる圧力駆動不安定性の固有方程式について概説する。2.1節では理想MHD方程式の導入について説明し、2.2節では固有方程式を導出する。

第3章は圧縮性の安定化効果の確認と、その物理的メカニズムについて説明する。まず3.1節では、圧縮性の安定化効果を確認するために、圧縮性を除いたモデルとの解析結果を比較し、3.2節ではポテンシャルエネルギーの変化を見ることで、径方向に対してどのように現象が変化していくかを確認する。そして3.3節では、プラズマ変位やポテンシャルエネルギーの磁力線方向分布を見ることで、圧縮性の安定化効果の物理的メカニズムについて考察する。また、3.4節では磁力線平行方向のプラズマ変位の重要性を考察するために、磁力線垂直方向のみの圧縮性モデルにおける解析と比較する。

第4章は吊上げコイルによる磁場配位の変化が安定性に与える影響について考察する。まず4.1節では、「セパトリックス」を導入することの意義について述べ、4.2節でセパトリックス配位における安定化効果とその物理的意味について考察する。また4.3節では、磁場強度が極端に小さくなる場所近傍における物理現象について説明する。

第5章ではRT-1における安定限界解析を行う。5.1節では、RT-1に閉じ込められるプラズマに安定限界が存在する理由について考察し、5.2節では安定なプラズマ平衡の領域についてまとめる。

第6章は結論である。

第2章 圧力駆動不安定性の固有方程式

トラス型プラズマにおける圧力駆動不安定性の安定性解析の手法はすでに確立されている [18, 19] . 本研究における安定性解析に使われる固有方程式も R. L. Dewar らによって導かれており [19] , 本研究ではこの方程式を磁気圏型プラズマに適用して, 固有値問題として数値解析を行っている . 本章では, 本研究にて用いた圧力駆動不安定性に対する固有方程式の導出について概説する .

2.1 理想 MHD 方程式の導入

2.1.1 MHD 不安定性

プラズマは多くの電磁流体力学的自由度や速度空間的自由度をもっており, プラズマ中に振動が成長すればそれによってプラズマ損失が急増する . またプラズマを加熱する場合, プラズマ粒子の運動エネルギーを増加するとともに, 電場・磁場の振動をも誘起し, こればまたプラズマのエネルギー損失を増やす役割を果たす .

したがって, プラズマにあるモードの擾乱を加えたとき, それが安定 (減衰) か不安定 (成長) かを調べることは重要課題である . この解析手段としては, 擾乱が小さく平衡状態からのずれが 1 次の微少量であるとして線形化近似を用いる . この場合, 電磁流体力学の方程式を線形化する場合とブラゾフの方程式を線形化する場合があるが, 圧力駆動不安定性は電磁流体力学的不安定性 (MagnetoHydroDynamic instability: MHD 不安定性) であるので, 電磁流体力学的方程式すなわち MHD 方程式を取り扱うことにする .

2.1.2 理想 MHD 方程式

プラズマの粒子 1 個 1 個の運動をすべて追いかけて、系全体としての発展を考えることは非常に複雑である。そこで、プラズマ粒子の運動をある程度平均化して流体として取り扱うのが電磁流体力学 (MagnetoHydroDynamics: MHD) である。通常の流体力学における運動方程式にローレンツ力を加えたものであり、プラズマの運動はこの運動方程式によって記述される。また、電磁場の発展は Maxwell 方程式に支配されている。

また、プラズマ中ではプラズマの粒子運動による衝突によりエネルギーが散逸するが、今回のモデルにおいては考慮しないことにする。それは今回着目する、磁場曲率と圧力勾配により発生する圧力駆動不安定性を記述する際には、粒子衝突によるエネルギーの散逸が圧力駆動不安定性には関係しないことと、散逸の時間スケールが大きいために無視できることが理由である。このように、粒子衝突によるエネルギー散逸を無視することを理想電磁流体近似と呼び、その際に記述される方程式を理想 MHD 方程式と呼ぶ。

2.1.3 理想 MHD 方程式の規格化

理想 MHD 方程式は以下のように表される。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \right) (p \rho^{-\gamma}) = 0. \quad (2.4)$$

ここで、 ρ は質量密度、 \mathbf{V} は流速、 \mathbf{B} は磁場、 p はプラズマの圧力、 μ_0 は真空における透磁率、 γ は比熱比を表す。(2.1) は運動方程式、(2.2) は磁場の誘導方程式、(2.3) は連続の式、(2.4) は断熱の式である。それぞれの物理量は次元を持っており、その大きさや単

位は対象とする現象や装置によって異なってくる．よって，より一般的な議論をするために，それぞれの物理量を代表的な値によって規格化（無次元化）することにする．

(2.1) ~ (2.4) 式を典型的な長さ L_* ，質量密度 ρ_* ，磁場強度 B_* ，圧力 $p_* = B_*^2/\mu_0$ ，速度 $v_A = B_*/\sqrt{\mu_0\rho_*}$ ，時間 $t_* = L_*/v_A$ によって規格化する．ある物理量「 A 」に対し，規格化された無次元量を「 \hat{A} 」として表すと，規格化された理想 MHD 方程式は

$$\hat{\rho} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{V}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{V}} \right) = (\hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{B}}) \times \hat{\mathbf{B}} - \hat{\nabla} \hat{p}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial \hat{t}} = \hat{\nabla} \times (\hat{\mathbf{V}} \times \hat{\mathbf{B}}), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{V}}) = 0, \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\nabla}) \right) (\hat{p} \hat{\rho}^{-\gamma}) = 0 \quad (2.8)$$

となる．以後，特に断りがない限り物理量は規格化されたもので表すとし，規格化された物理量「 \hat{A} 」を「 A 」で表す．したがって，規格化された理想 MHD 方程式 (2.5) ~ (2.8) は

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \right) (p \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (2.12)$$

となる．

2.1.4 理想 MHD 方程式の線形化

次に各々の物理量を 0 次の平衡量と 1 次の摂動量に分けることによって, (2.9) 式 ~ (2.12) 式を線形化する. 磁場 B , 流速 V , 圧力 p , 密度 ρ を

$$B = B_0 + B_1, \quad (2.13)$$

$$V = 0 + V_1, \quad (2.14)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad (2.15)$$

$$p = p_0 + p_1 \quad (2.16)$$

のようにすると, 0 次の項については

$$(\nabla \times B_0) \times B_0 - \nabla p_0 = 0 \quad (2.17)$$

であり, 1 次の摂動量について線形化された方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = (\nabla \times B_0) \times B_1 + (\nabla \times B_1) \times B_0 - \nabla p_1, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = \nabla \times (V_1 \times B_0), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 V_1) = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (V_1 \cdot \nabla)p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot V_1 = 0 \quad (2.21)$$

となる. プラズマが平衡なときの位置 r_0 からの変位を $\xi(r_0, t)$ とすると

$$\xi(r_0, t) = r - r_0 \quad (2.22)$$

$$V_1 = \frac{d\xi}{dt} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (2.23)$$

である． ξ を用いて (2.18) ~ (2.21) を書き表すと

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 - \nabla p_1, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right), \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \nabla \right) p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (2.27)$$

となり，(2.25) ~ (2.27) から

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0), \quad (2.28)$$

$$\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = 0, \quad (2.29)$$

$$p_1 + \xi \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \xi = 0 \quad (2.30)$$

であるから，これらの式を (2.24) に代入すると， ξ に関する線形化された運動方程式は以下のように求まる．

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(\xi), \quad (2.31)$$

$$F(\xi) = [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{Q} + (\nabla \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{B}] + \nabla(\gamma p \nabla \cdot \xi + \xi \cdot \nabla p). \quad (2.32)$$

ここで $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B})$ と置いてある．また簡略化のため，0 次の平衡量「 A_0 」を「 A 」と表している．

2.2 固有方程式の導出

(2.31) に関して， $F(\xi)$ は2階偏微分作用素であり，物理的に適切な境界条件の下でエルミート作用素である [20]．エルミート作用素は，一般的には点スペクトルと連続スペクトルをもち，固有関数は直交する．したがって，(2.31) 式はそれぞれの固有モードに分解でき，固有値問題

$$-\rho \omega^2 \xi = F(\xi) \quad (2.33)$$

を解いて、 $\omega^2 < 0$ の固有値が見つければ、その系は指数関数的に不安定ということになる。

次に、空間のみの関数 $\xi(\mathbf{r})$ について、Fourier モード展開を試みる。磁力線を曲げない空間構造が最も不安定になりやすいと考えられるので、 $\xi(\mathbf{r}) = \xi(\psi, \theta)e^{in\zeta}$ と仮定する。ここで、 (ψ, θ, ζ) は磁気座標であり、それぞれ磁束関数、ポロイダル角、トロイダル角であり、 n はトロイダルモード数で $n \gg 1$ が仮定されている。これは、 $e^{in\zeta}$ の部分が磁力線を横切る速い振動を表し、 $e^{in\zeta}$ がゆっくり変化するエンベロープを表せば、 $n \gg 1$ を用いてスケール長分離できることを利用する。アイコナル S を導入して

$$\xi(\mathbf{r}) = \hat{\xi}(\psi, \theta)e^{inS(\psi, \theta, \zeta)} \quad (2.34)$$

と表し、

$$\mathbf{B} \cdot \nabla S = 0, \quad (2.35)$$

つまり平衡磁場に沿った速い振動はないと仮定すると、

$$S = \zeta + S_0(\psi) \quad (2.36)$$

とできる。波数ベクトルはアイコナルの空間微分で定義されるので、

$$\hat{\mathbf{k}} \equiv \nabla S \quad (2.37)$$

$$= \nabla \zeta + \frac{dS_0}{d\psi} \nabla \psi \quad (2.38)$$

である。

ここで、(2.31) に関して (2.34) による摂動展開を行う。例えば左辺は、

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\xi} e^{inS}) = \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t} + in \hat{\xi} \frac{\partial S}{\partial t} \right) e^{inS} \quad (2.39)$$

より

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho \left[\frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial t^2} + in \left(2 \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial t} + \hat{\xi} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right) - n^2 \hat{\xi} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \right] e^{inS} \quad (2.40)$$

のように展開することができる．右辺 $F(\hat{\xi})$ も n のオーダー毎に展開すると，以下のようになる．

$$F(\hat{\xi}) = n^2 F^{(-2)}(\hat{\xi}) + in F^{(-1)}(\hat{\xi}) + F^{(0)}(\hat{\xi}) \quad (2.41)$$

$$F^{(-2)}(\hat{\xi}) = -(B^2 + \gamma p)(\hat{\xi} \cdot \nabla S) \nabla S \quad (2.42)$$

$$F^{(-1)}(\hat{\xi}) = [-(\hat{Q} \cdot \mathbf{B}) \nabla S + \mathbf{B} \times [\nabla \times (\hat{\xi} \cdot \nabla S) \mathbf{B}] - (\hat{\xi} \cdot \nabla S)(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \quad (2.43)$$

$$+ \gamma p(\nabla \cdot \hat{\xi}) \nabla S + \nabla(\gamma p \hat{\xi} \cdot \nabla S) + (\hat{\xi} \cdot \nabla p) \nabla S$$

$$F^{(0)}(\hat{\xi}) = [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \hat{Q} + (\nabla \times \hat{Q}) \times \mathbf{B}] + \nabla(\gamma p \nabla \cdot \hat{\xi} + \hat{\xi} \cdot \nabla p) \quad (2.44)$$

まず $O(n^2)$ の項は，

$$-\rho \hat{\xi} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 = F^{(-2)}(\hat{\xi}) \quad (2.45)$$

である．ここで $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ より，

$$-(B^2 + \gamma p)(\hat{\xi} \cdot \nabla S) \nabla S = 0 \quad (2.46)$$

である．さらに $B^2 + \gamma p \neq 0$ より，

$$\hat{\xi} \cdot \nabla S = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.47)$$

である．(2.37)(2.47) から， $\hat{\xi}$ は 0 次の \hat{k} 成分を持たないので，

$$\hat{\xi} = \hat{\xi}^{(0)} + \frac{i}{n} \hat{\xi}^{(1)} \quad (2.48)$$

$$= \xi_{\perp} \frac{\mathbf{B} \times \hat{k}}{B^2} + \xi_{\parallel} \mathbf{B} + \frac{i}{n} \xi_k \frac{\nabla S}{|\nabla S|^2} \quad (2.49)$$

と表すことができる．ここで， $\xi_k \equiv \hat{\xi}^{(1)} \cdot \nabla S$ である．

次に $O(n)$ の項は，

$$\rho \left(2 \frac{\partial \hat{\xi}^{(0)}}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial t} + \hat{\xi}^{(0)} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right) - \rho \hat{\xi}^{(1)} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 = F^{(-2)}(\hat{\xi}^{(1)}) + i F^{(-1)}(\hat{\xi}^{(0)}). \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \text{ より}$$

$$\xi_k = \frac{1}{B^2 + \gamma p} \left[(\hat{\mathbf{Q}}^{(0)} \cdot \mathbf{B}) + \gamma p (\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}) + \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)} \cdot \nabla p \right] \quad (2.51)$$

が求まる .

さらに $O(1)$ の項は ,

$$\rho \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}}{\partial t^2} - \rho \left(2 \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial t} + \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right) = F^{(-2)}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}) + iF^{(-1)}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}) + F^{(0)}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}) \quad (2.52)$$

において $\frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$, また $F^{(-2)}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}) = 0$ より ,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}}{\partial t^2} = & \left[-\nabla(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{(0)}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\mathbf{Q}}^{(0)} + \hat{\mathbf{Q}}^{(0)} \cdot \nabla \mathbf{B} \right] + \nabla \left[\gamma p (\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}) - \xi_k \right] + \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)} \cdot \nabla p \\ & + \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_k) \mathbf{B} - B^2 \nabla \xi_k + 2\xi_k (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + (\hat{\mathbf{Q}}^{(0)} \cdot \mathbf{B}) \nabla S \right] \\ & - \gamma p (\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}) \nabla S - (\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)} \cdot \nabla p) \nabla S \quad (2.53) \end{aligned}$$

が求められる .

磁力線垂直方向 ($\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}$ 方向) 成分の方程式を導出するには (2.53) 式において $\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}$ との内積を取ればよく , また磁力線平行方向 (\mathbf{B} 方向) 成分の方程式を導出するには \mathbf{B} との内積を取ればよい . 系の時間依存性を $e^{-i\omega t}$ であると仮定して , (2.49)(2.51) 式を用いて方程式を整理すると , 圧力駆動不安定性の固有方程式は以下のように求まる .

$$\begin{aligned} -\rho \omega^2 \frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \xi_{\perp} = & \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp} \right) + 2 \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \nabla p \right) \xi_{\perp} \\ & - \frac{4\gamma p}{1 + \gamma p B^{-2}} \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \left[\left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \xi_{\perp} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\parallel} \right], \quad (2.54) \end{aligned}$$

$$-\rho \omega^2 B^2 \xi_{\parallel} = -\mathbf{B} \cdot \nabla \left[\frac{2\gamma p}{1 + \gamma p B^{-2}} \left\{ \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \xi_{\perp} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\parallel} \right\} \right]. \quad (2.55)$$

ここで , $\boldsymbol{\kappa} \equiv \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ は磁場曲率である . (2.54) 式が $\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}$ 方向成分 , (2.55) 式が \mathbf{B} 方向成分の方程式であり , (2.54) 式の左辺第 1 項がシアアルフベン波の項 , 第 2 項が圧力駆動項であり , 第 3 項と (2.55) 式の左辺が圧縮性に関する項となっている .

第3章 圧縮性による安定化効果

3.1 圧縮性を無視したモデルとの比較

圧縮性による安定化効果を確認するために、圧縮性を無視したモデル(圧縮性無視モデル)による固有値問題の数値解析結果と比較する。ただし、この圧縮性無視モデルとは、非圧縮性プラズマを仮定しているわけではないことに注意する。すなわち、方程式の導出過程で非圧縮条件 $\nabla \cdot \xi = 0$ を課しているわけではない。非圧縮性プラズマに対する解析については、付録Cにまとめてある。

3.1.1 圧縮性無視モデル

(2.54)(2.55)式において、圧縮性に関する項を省くと、磁力線垂直方向成分の方程式のみが残り(すなわち、慣性項も磁力線垂直方向だけのモデルとなる。),

$$-\rho\omega^2 \frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \xi_{\perp} = \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp} \right) + 2 \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \nabla p \right) \xi_{\perp} \quad (3.1)$$

と表される。

3.1.2 不安定性成長率の出方比較

圧縮性モデルの固有方程式(2.54)(2.55)と圧縮性無視モデルの固有方程式(3.1)をそれぞれ固有値問題として解き、その不安定性の成長率の出方を比較することにする。

図3.1aは仮定された圧力分布 $p(\psi) \propto (\psi_1 - \psi)(\psi - \psi_2)^2$ (ψ_1 :プラズマの内側境界 ($R=0.4\text{m}$)における磁束関数, ψ_2 :プラズマの外側境界 ($R=1.0\text{m}$)における磁束関数)で

ある．図 3.1a では圧力のピークが 1 に規格化されているが，計算で仮定した圧力のピーク値は $1/2\mu_0 \times 10^{-4}\text{Pa}$ である．これを用いた RT-1 ダイポール磁場配位による平衡計算では，局所的最大 β 値 $\beta_{max} = 0.12$ ，体積平均 β 値 $\langle\beta\rangle = 0.035$ となっている．

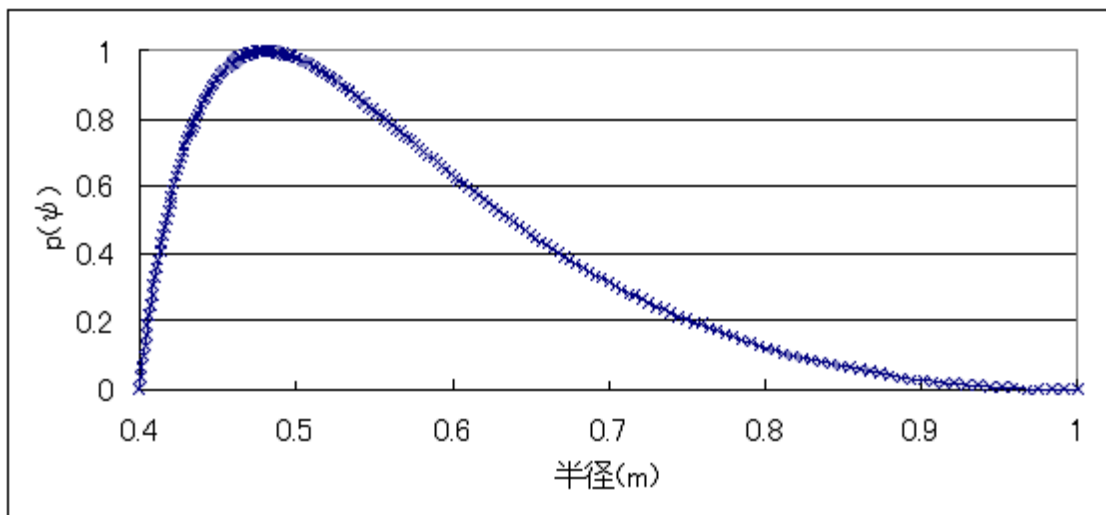


図 3.1a $p(\psi) \propto (\psi_1 - \psi)(\psi - \psi_2)^2$ の圧力分布

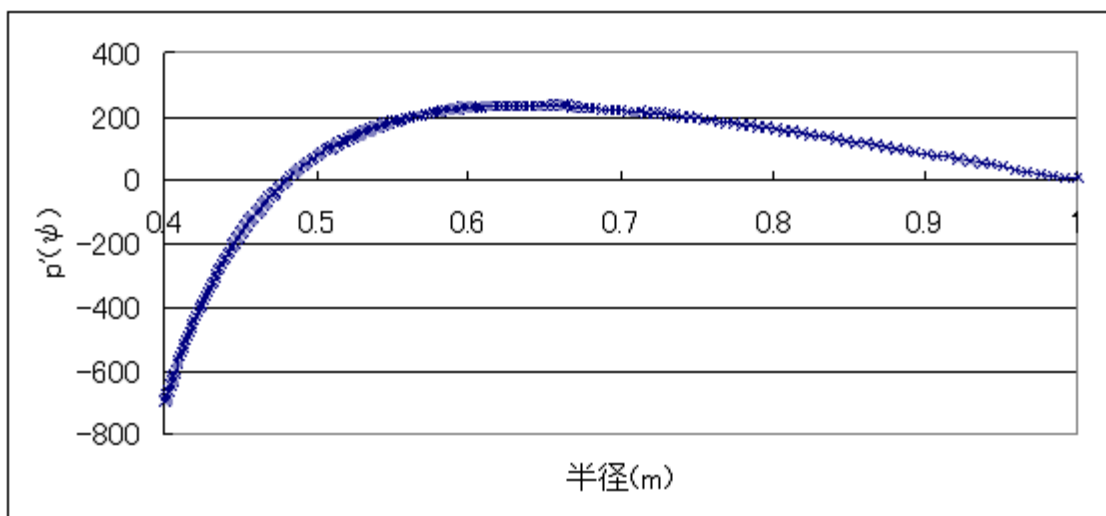


図 3.1b $p(\psi) \propto (\psi_1 - \psi)(\psi - \psi_2)^2$ の圧力勾配分布

また、平衡計算から得られた平衡磁場配位のポロイダル断面の分布を示してたものが図 3.2 である。

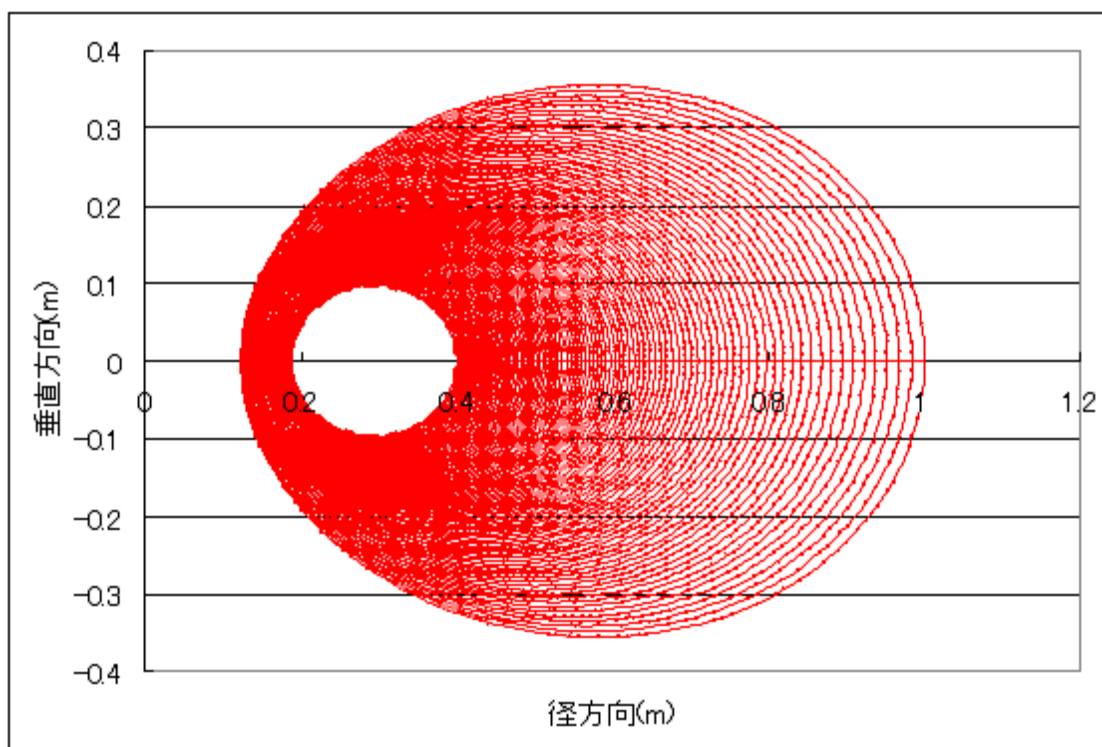


図 3.2 RT-1 平衡解析によるダイポール平衡磁場配位

図 3.3 はそれぞれのモデルにおける不安定性の成長率の出方を表している。ただし、図 3.3 における圧縮性無視モデルの不安定性成長率の大きさは比較できないことに注意する。その理由は、圧縮性無視モデルでは磁力線垂直方向の慣性しか考慮されていないためである。しかし安定限界解析においては、慣性項は関係しないので、不安定性の成長率が生じる領域については圧縮性モデルによる解析と比較することはできる。

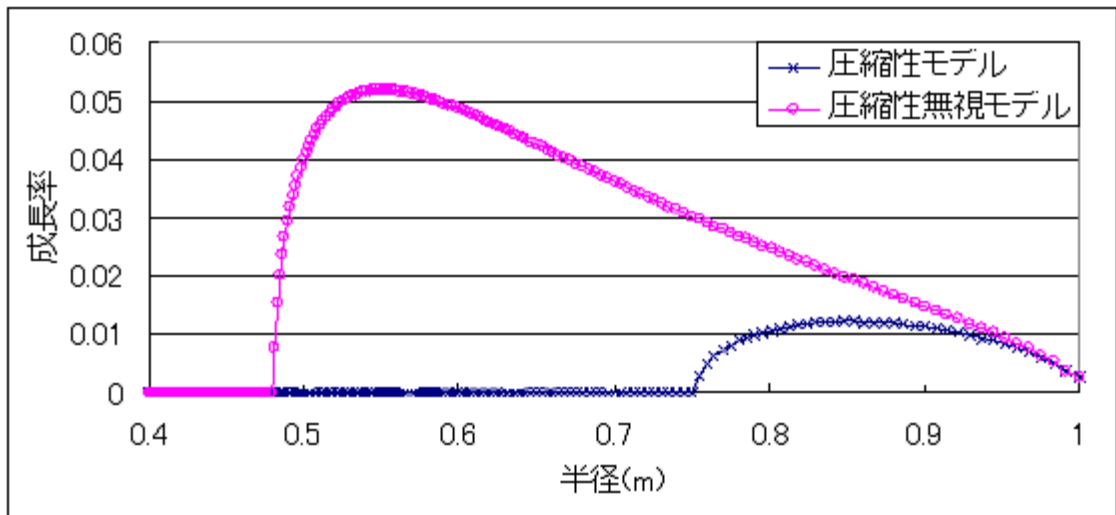


図 3.3 固有値解析結果による不安定性の成長率比較

圧縮性無視モデルでは， $R=0.48\text{m}$ から外側領域で不安定になることがわかる． $R=0.48\text{m}$ から外側領域では，図 3.1b において圧力勾配の向きが磁場曲率の向きと同じになる領域であり，(3.1) 式第 2 項の圧力駆動項が不安定化項として働く．したがって，圧力駆動項が不安定化項になることで，直ちにモードが不安定になることが示される．一方，圧縮性モデルでは，不安定性は $R=0.75\text{m}$ から外側領域で生じていることがわかる．圧縮性無視モデルとの比較から， $0.48 \sim 0.75\text{m}$ の領域は圧縮性によって安定化されたことが示される．

3.2 エネルギー積分による比較

図 3.3 で示された圧縮性による安定化効果について，径方向に対するポテンシャルエネルギーの分布を見ることで考察していく．

3.2.1 エネルギー積分

(2.54)(2.55) 式に関して，固有関数の複素共役を取り，二次形式を作ると，固有値 ω^2 は次のように表される．

$$\omega^2 = \frac{\delta W(\xi^*, \xi)}{K(\xi^*, \xi)}, \quad (3.2)$$

$$\delta W(\xi^*, \xi) = \frac{1}{2} \int_p d\mathbf{r} \left[Q_{\perp}^2 + \frac{4\gamma p}{1 + \gamma p B^{-2}} \left(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\parallel} \right)^2 - 2(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \nabla p)(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \right], \quad (3.3)$$

$$K(\xi^*, \xi) = \frac{1}{2} \int_p d\mathbf{r} \rho |\boldsymbol{\xi}|^2. \quad (3.4)$$

ただし, $\boldsymbol{\xi}_{\perp} = \xi_{\perp} \frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2}$, $\boldsymbol{\xi}_{\parallel} = \xi_{\parallel} \mathbf{B}$, $Q_{\perp}^2 = \frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp})^2$ である. ここで, $\delta W(\xi^*, \xi)$ がポテンシャルエネルギーであり, 第1項がシアアルフベン波項, 第2項が圧縮性項, 第3項が圧力駆動項を示す.

エネルギー原理では, あらゆる微小変位 ξ に対して

$$\delta W(\xi^*, \xi) > 0 \quad (3.5)$$

ならば, その系は安定となる. 逆に, (2.54)(2.55) で固有値問題として求めた微小変位 ξ を用いれば, 安定なモードに対しては $\delta W(\xi^*, \xi) > 0$ であり, 不安定なモードに対しては $\delta W(\xi^*, \xi) < 0$ となり, 不安定性が発生する領域は固有値問題として求めた領域 (図 3.3) と一致する.

このエネルギー原理の性質により, 式 (3.3) の被積分関数の符号から, シアアルフベン波項, 圧縮性項は安定化に働き, 圧力駆動項は圧力勾配の向きが磁場曲率の向きと同じになる領域 ($(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \nabla p)(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp}) > 0$) において不安定化に働くことがわかる.

3.2.2 規格化の問題

式 (3.3) のポテンシャルエネルギーの径方向分布を見ることで不安定性が発生する領域が分かるが, さらに式 (3.3) を構成する各項それぞれの径方向分布を見ることで, 径方向に対して各項がどのように働くのかを考察することができる. しかし, そのポテンシャルエネルギーの扱いには注意が必要である.

ポテンシャルエネルギー式 (3.3) の計算には, 固有値問題によって求めたプラズマの変

位 $\xi_{\perp} = \xi_{\perp} \frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2}$, $\xi_{\parallel} = \xi_{\parallel} \mathbf{B}$, すなわち固有関数 ξ_{\perp} , ξ_{\parallel} が用いられているが, 固有方程式 (2.54)(2.55) は同次形微分方程式であるので, この固有方程式から求められる固有関数 ξ_{\perp} , ξ_{\parallel} の絶対値は任意の大きさを持つ. したがって, 固有値問題によって求められた固有関数 ξ_{\perp} , ξ_{\parallel} を用いて, ポテンシャルエネルギー同士を単純に比較することはできないのである.

以上の観点から, ポテンシャルエネルギーの径方向分布を調べるときには, 固有関数 ξ_{\perp} , ξ_{\parallel} の大きさを定めるために制約条件を課す必要がある. そこで, 本研究において異なるポテンシャルエネルギー同士を比較する必要があるときには,

$$K(\xi^*, \xi) = 1 \quad (3.6)$$

という制約条件を課して, 固有関数を規格化し直すことにする. (3.6) の制約条件から (3.2) より, ポテンシャルエネルギーは

$$\delta W(\xi^*, \xi) = \omega^2 \quad (3.7)$$

と等価になり, 異なるポテンシャルエネルギー同士で比較することが可能となる.

3.2.3 圧縮性無視モデルにおける ポテンシャルエネルギーの径方向分布

圧縮性無視モデルにおける固有方程式 (3.1) において, 二次形式を作ると, ポテンシャルエネルギーは同様に

$$\delta W(\xi^*, \xi) = \frac{1}{2} \int_p dr [Q_{\perp}^2 - 2(\xi_{\perp} \cdot \nabla p)(\kappa \cdot \xi_{\perp})] \quad (3.8)$$

と求まる. 式 (3.8) は, 圧縮性モデルにおけるポテンシャルエネルギーの式 (3.3) において圧縮性のエネルギー項を取り除いたものと同じである.

式 (3.8) のポテンシャルエネルギーを求めるには固有値解析によって得られた ξ_{\perp} を用いる必要があるが、圧縮性無視モデルの固有値解析から得られる ξ_{\perp} によって求められたポテンシャルエネルギーは、圧縮性モデルのポテンシャルエネルギーとは単純に比較することはできない。その理由は、圧縮性無視モデルによる固有値解析では ξ_{\parallel} を考慮されていないため、物理現象が解析結果に正しく反映されない可能性があるからである。これについては 3.2.5 項で触れることにする。そこで、圧縮性モデルの固有値解析結果から得られるプラズマ変位 ξ_{\perp} を、圧縮性項を除いたポテンシャルエネルギーの式 (3.8) に適用し、ポテンシャルエネルギーの径方向分布を調べることにする。

式 (3.8) のポテンシャルエネルギーについて、シアアルフベン波項、圧力駆動項、そしてポテンシャルエネルギー和の径方向分布は図 3.4 のようになる。圧力駆動項は $R=0.48\text{m}$ (図 3.1a において圧力がピークになる位置) から外側領域において負になっており、ポテンシャルエネルギー和の分布を見ると、圧力駆動項が不安定化項になるこの $R=0.48\text{m}$ の位置から直ちに不安定性が生じていることがわかる。一方、シアアルフベン波項は安定化エネルギーとしてほとんど効いていない。これはシアアルフベン波は磁力線が曲げられるときに発生するエネルギーであるが、固有値解析の結果として磁力線が曲げない構造が最も不安定なモードとして出てくるため、結果的にシアアルフベン波のエネルギー項が小さくなっていると考えられる。

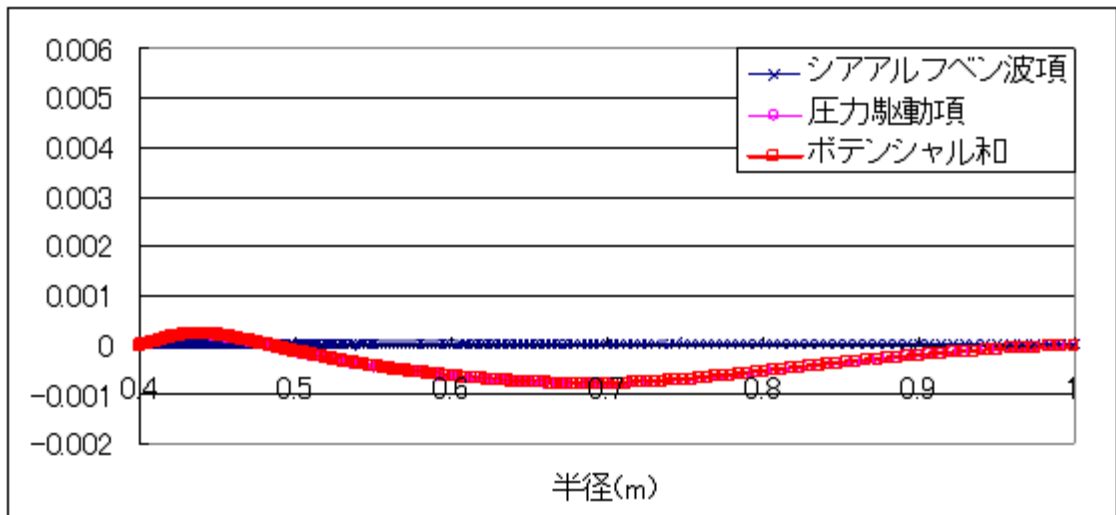


図 3.4 圧縮性無視モデルのエネルギー分布

次に不安定性の成長率を求める．成長率はポテンシャルエネルギー $\delta W(\xi^*, \xi)$ と運動エネルギー $K(\xi^*, \xi)$ によって，式 (3.2) のように表される負の固有値 ω^2 により求めることができる．エネルギー原理から求めた圧縮性無視モデルの不安定性の成長率の出方を，固有値解析から求めた圧縮性モデルの不安定性の成長率の出方と比較すると図 3.5 のようになる．圧縮性のエネルギーを除くことにより， $R=0.48 \sim 0.75\text{m}$ の領域で不安定性が生じていることがわかる．すなわち， $R=0.48 \sim 0.75\text{m}$ の領域が圧縮性によって安定化されたと確認できる．

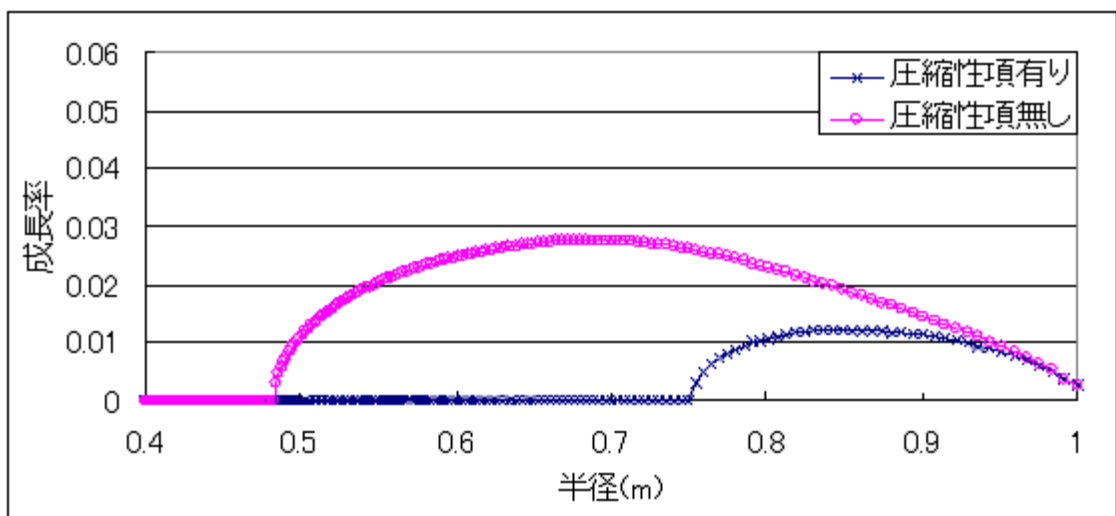


図 3.5 エネルギー原理により求めた不安定性の成長率

ところで、エネルギー原理により求めた不安定性の成長率の出方を、圧縮性無視モデルの固有値解析により求めた不安定性の成長率の出方(図 3.3)と比較すると、図 3.6 のようになり、両者における不安定性の出る位置は一致していることがわかる。したがって成長率の大きさを考慮せずに安定限界解析を行うだけならば、 ξ_{\perp} のみのモデルによる解析も正しいことが確認できる。

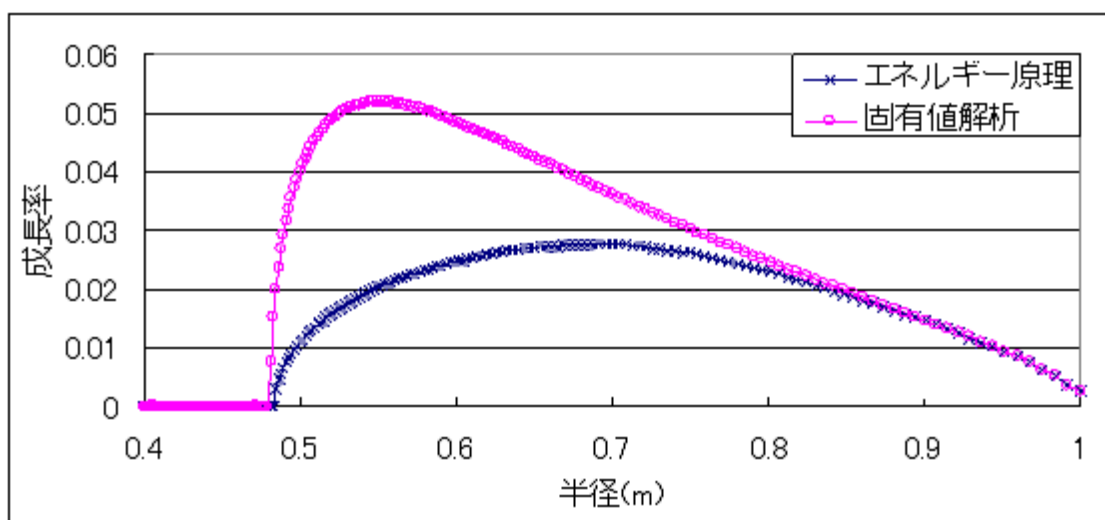


図 3.6 エネルギー原理から求めた成長率と固有値解析から求めた成長率の出方比較

3.2.4 圧縮性モデルにおける ポテンシャルエネルギーの径方向分布

圧縮性モデルにおけるポテンシャルエネルギーは式 (3.3) で表される。そして図 3.7 は、式 (3.3) における、シアアルフベン波項、圧力駆動項、圧縮性項、そしてポテンシャルエネルギー和の径方向分布を示している。図 3.7 から、圧力駆動項は図 3.4 と同様に $R=0.48\text{m}$ より外側領域において負になり、不安定化エネルギー項となっているが、圧縮性項の安定化エネルギーによってポテンシャルエネルギー全体としては $R=0.75\text{m}$ まで正になり、安定化されていることがわかる。

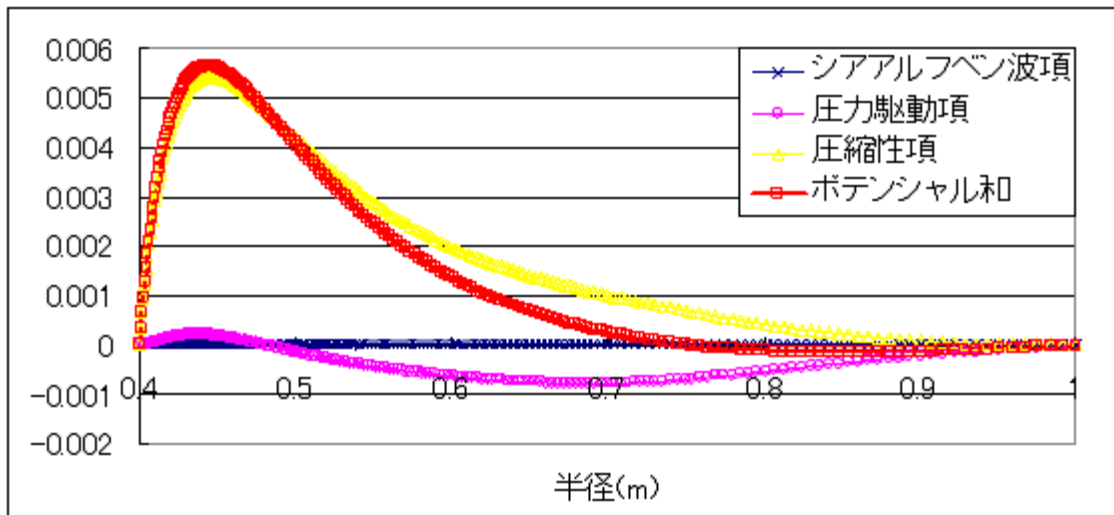


図 3.7 圧縮性モデルのエネルギー分布

シアアルフベン波項がほとんど効いていないため、圧縮性モデルの場合は圧縮性項の値の大きさによって不安定なモードとなるかが決まり、エッジ領域では圧縮性項が小さくなることで不安定化が抑えられなくなっていることがわかる。これは式 (3.3) において、圧縮性項は圧力 $p(\psi)$ に比例するので、圧力が小さくなるエッジ領域では圧縮性項の安定化エネルギーが減少するためであると考えられる。

3.2.5 補足: ξ_{\perp} のみのモデルによるポテンシャルエネルギーについて

圧縮性無視モデルの固有値解析結果として求められた ξ_{\perp} を用いて、式 (3.8) のポテンシャルエネルギーを求め、各エネルギー項の径方向分布を示したものが図 3.8 である。

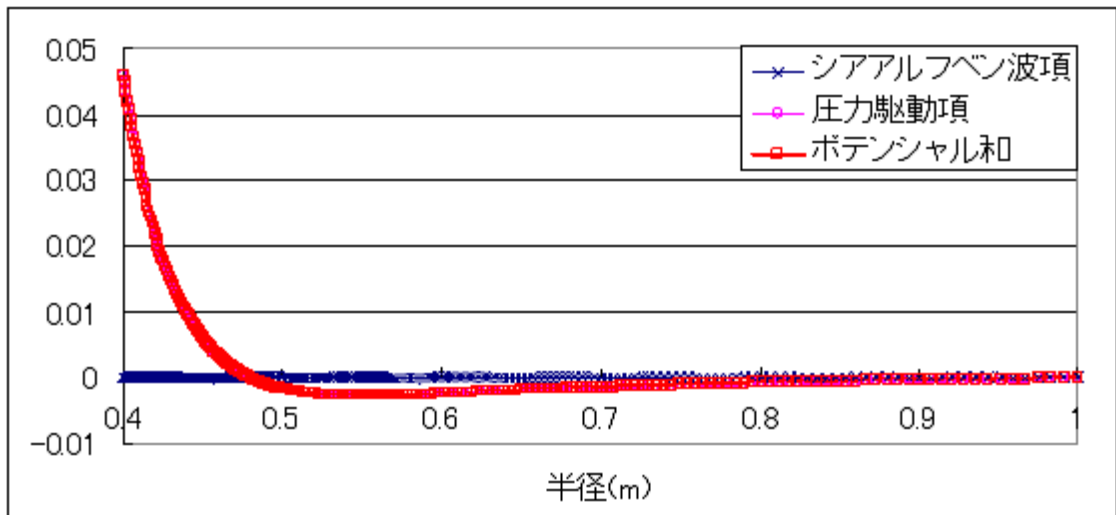


図 3.8 圧縮性無視モデルの固有値解析から求めたエネルギーの分布

図 3.4 と比較すると、圧力駆動のエネルギー項に大きな違いが現れており、特に内側領域での違いが顕著である。この違いについては以下のように理解される。圧縮性無視モデルの固有値解析では ξ_{\perp} のみの慣性しか含まれておらず、 ξ_{\parallel} の慣性は考慮されていない。 ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} が両方含まれたモデルでは、運動エネルギーが磁力線平行方向にも分配されるので(次項参照)、 ξ_{\parallel} の運動比率が大きい領域では ξ_{\perp} が相対的に小さくなり、圧力駆動項のエネルギーも小さくなる。一方 ξ_{\perp} のみのモデルでは、得られたエネルギーは全て磁力線垂直方向の運動に作用するので、 ξ_{\perp} の値が大きくなり、結果として圧力駆動のエネルギーが大きくなると考えられる。図 3.8 の圧力駆動項のエネルギー分布が図 3.1b の圧力勾配と同じような分布をとるのは、以上の理由を示しているからであると思われる。

3.2.6 圧縮性モデルにおける

ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} の運動エネルギー比率の径方向変化

前項において、磁力線平行方向の運動を考慮しないことが解析結果に影響を与えると指摘したが、径方向に対してその影響がどの程度現れるのかを確認する。

式 (3.2) において $\omega^2 K(\xi^*, \xi)$ は運動エネルギーを表しており、 $K(\xi^*, \xi)$ は運動エネルギー

ギーに比例する項である．今，

$$\begin{aligned}
 K(\xi^*, \xi) &= \frac{1}{2} \int_p dr \rho |\xi|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_p dr \rho (|\xi_{\perp}|^2 + |\xi_{\parallel}|^2) \\
 &= \frac{1}{2} \int_p dr \rho |\xi_{\perp}|^2 + \frac{1}{2} \int_p dr \rho |\xi_{\parallel}|^2 \\
 &= K_{\perp}(\xi_{\perp}^*, \xi_{\perp}) + K_{\parallel}(\xi_{\parallel}^*, \xi_{\parallel})
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

である．式 (3.6) の規格化により $K_{\perp}(\xi_{\perp}^*, \xi_{\perp})$ と $K_{\parallel}(\xi_{\parallel}^*, \xi_{\parallel})$ の値が，磁力線垂直方向と磁力線平行方向それぞれの運動エネルギーの比率を表していることになる．

圧縮性モデルにおける磁力線垂直方向と磁力線平行方向の運動エネルギー比率の径方向変化は図 3.9a になる．図 3.9a から，不安定性が生じるような外側領域では ξ_{\perp} の運動エネルギー比率が大きく，一方内側領域では ξ_{\parallel} の運動エネルギー比率が大きくなるような変化が見られる．さらに運動エネルギー比率から各成分における運動エネルギーを求めると，その径方向分布の様子は図 3.9b で表され，内側領域においては ξ_{\parallel} の運動が非常に大きくなっていることが示される．この結果からも ξ_{\parallel} の運動を考慮することは重要であることがわかる．

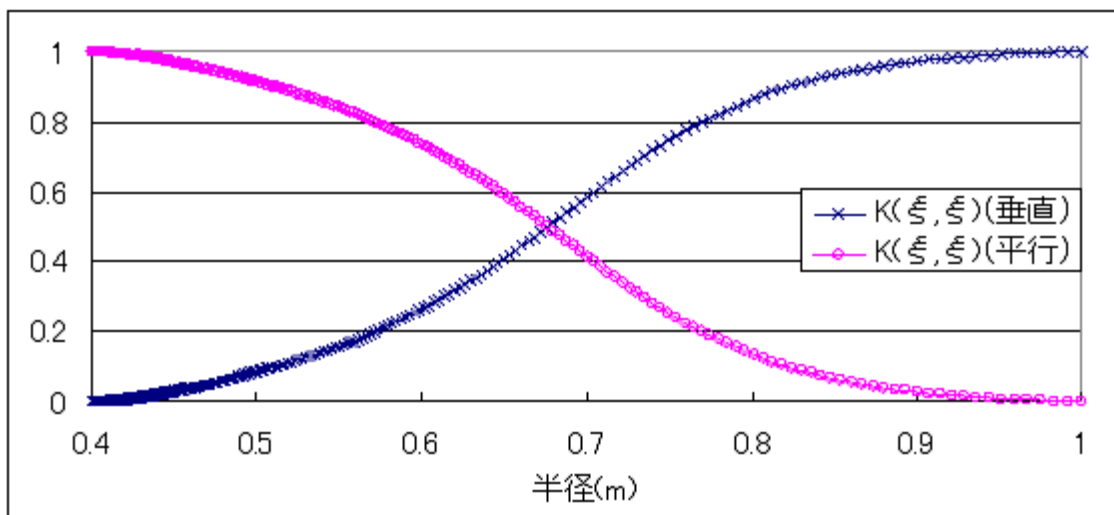


図 3.9a 各成分における運動エネルギー比率の径方向変化

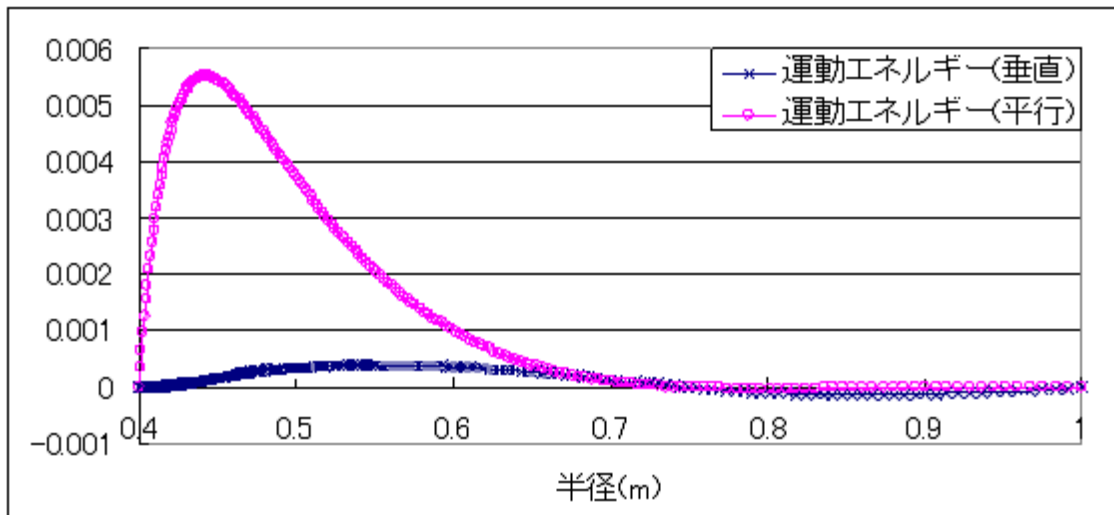


図 3.9b 各成分における運動エネルギーの径方向変化

ξ_{\perp} のみのモデルによる解析では、 ξ_{\parallel} の運動を考慮していないことで、実際の物理現象をより不正確に反映させてしまうことが示される。 ξ_{\perp} のみのモデルによる解析を扱うときは注意しなければならない。

3.3 圧縮性による安定化効果の物理的意味

3.3.1 エネルギー密度の磁力線方向分布

ポテンシャルエネルギーの式 (3.3) を構成する各エネルギー項の被積分関数は、エネルギー密度であると考えられる。このエネルギー密度は磁力線方向に非一様であるので、各項目とも磁力線方向に対して配位による影響を持った分布をしている。そこで各項目のエネルギー密度について磁力線方向分布を調べることにより、それぞれの物理的意味を考えていく。ここでは図 3.5、図 3.7 において、不安定性が生じている $R=0.77m$ を通る磁力線における分布について調べることにする。

図 3.10a から図 3.10g は $R=0.77m$ を通る磁力線における、磁場強度、プラズマの磁力線垂直方向変位 ξ_{\perp} 、プラズマの磁力線平行方向変位 ξ_{\parallel} 、シアアルフベン波のエネルギー密度項、圧力駆動のエネルギー密度項、圧縮性のエネルギー密度項、そしてポテンシャル

エネルギー和のエネルギー密度項の磁力線方向分布を示している．図の横軸は平衡解析結果におけるダイポール磁場配位 (図 3.2) において，コイル外側領域の赤道面上を $\theta = 0$ とし，反時計周りを正方向としてコイル内側領域の赤道面上を $\theta = \pi, -\pi$ としている．

図 3.10a から，磁場強度はコイル内側領域において強く，コイル外側領域に行くほど大きく減少しており，磁場強度の磁力線方向の非一様性が非常に強いことが確認できる．図 3.10b，図 3.10c のプラズマ変位の分布から，座標軸の符号に気を付けると，プラズマの変位を図 3.11a，図 3.11b のような概念図で考えることができる．この概念図を用いてエネルギー密度分布の物理的意味を考察する．圧力駆動項による不安定化効果は，磁場の弱いコイル外側領域に局在化しており (図 3.10e)， ξ_{\perp} はこの領域で大きくなっている．また， ξ_{\parallel} は，プラズマが外側に変位するときは外側領域に集まる形で磁力線方向を移動し (図 3.11a)，プラズマが内側に変位するときは外側領域から離れる形で磁力線方向を移動する (図 3.11b) ．

シアアルフベン波による安定化効果は，磁力線が曲げられる領域において大きくなっているが，圧力駆動項の不安定化エネルギーと比較すると桁違いに小さく (図 3.10d)，安定化効果にはほとんど効いていないことがわかる．またプラズマが変位することによって，圧縮性による安定化効果が生じていることがわかる (図 3.10f) ．これは，プラズマが変位する際に磁束管を圧縮または膨張させる仕事が必要となり，ポテンシャルエネルギーが増大するためであると考えられる．各エネルギー密度項の総和は図 3.10g のような分布になっている．ポテンシャルエネルギーが負になるのはコイル外側領域のみであるが，全体を積分した値は $\delta W(\xi^*, \xi) < 0$ であり，したがって $R=0.77m$ では不安定性が生じていることがわかる．

以上の考察から，磁気圏型磁場配位によるプラズマ閉じ込めにおける圧力駆動不安定性では，モードが局在化するバルーニングモードのような構造になっていると言える．これ

はトカマク型のように磁力線の良い曲率と悪い曲率があるために、磁力線の悪い曲率においてモードが局在化するトカマク型のバルーニングモードとは異なる。磁気圏型磁場配位によるプラズマ閉じ込めでは、磁力線が全域で悪い曲率となっているが、磁場強度の磁力線方向の非一様性が強いために、磁場強度が弱く磁力線が曲げられやすい領域においてモードが局在化する構造になっていると考えられる。

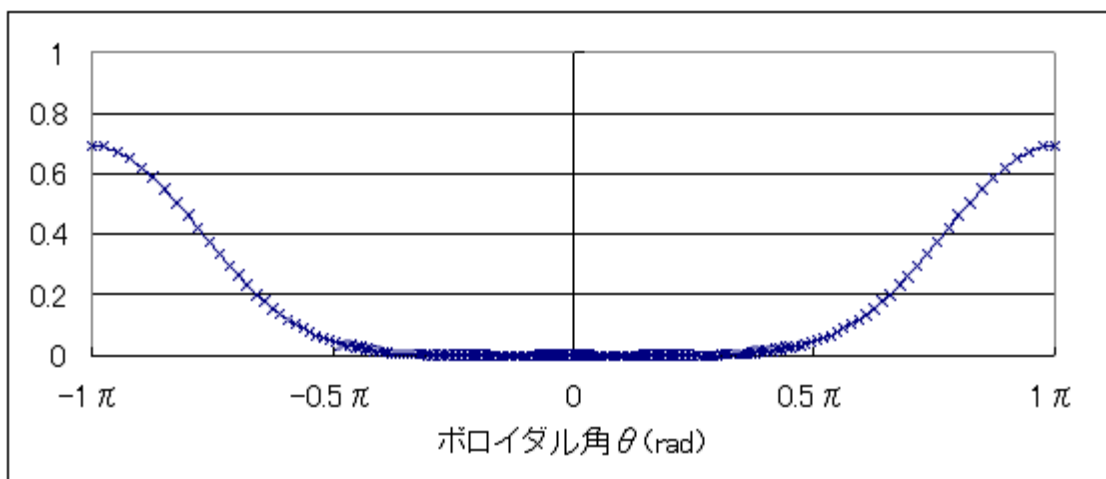


図 3.10a 磁場強度分布

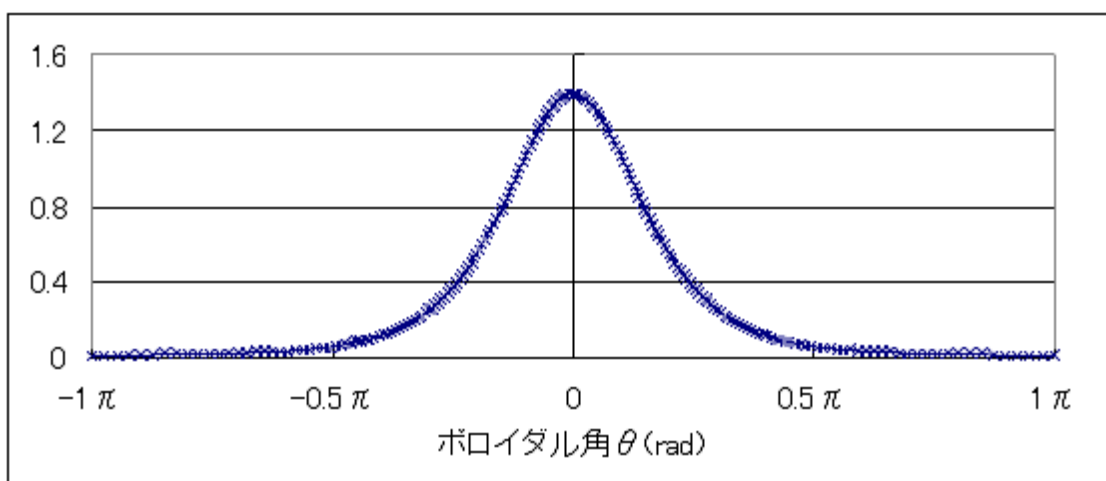


図 3.10b プラズマの磁力線垂直方向変位分布

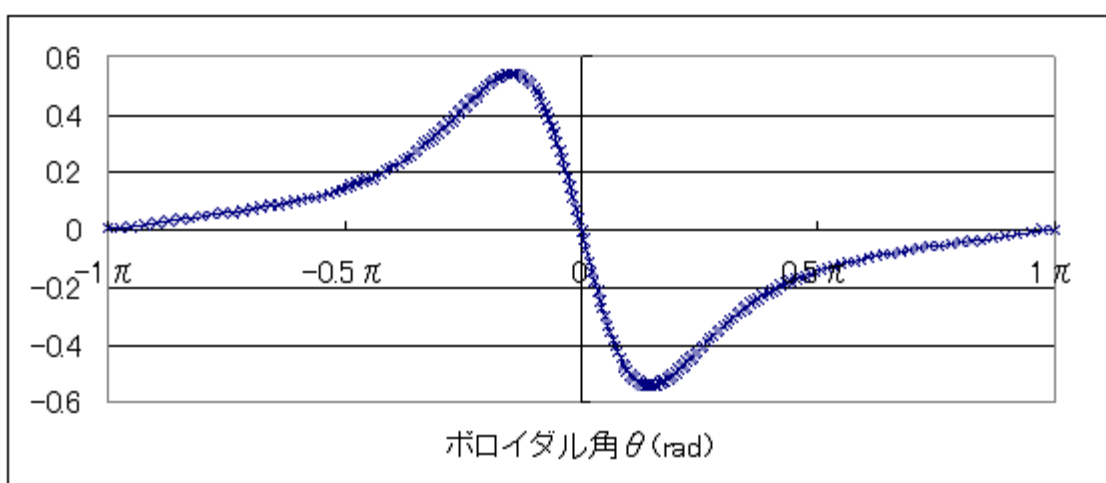


図 3.10c プラズマの磁力線平行方向変位分布

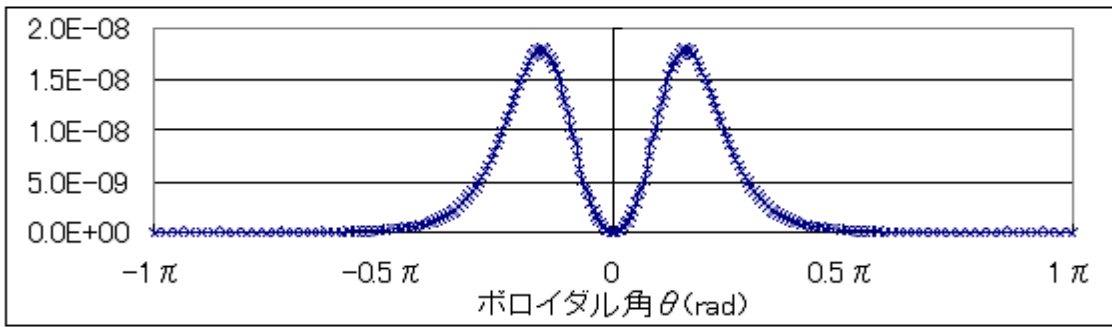


図 3.10d シアアルフベン波のエネルギー密度分布

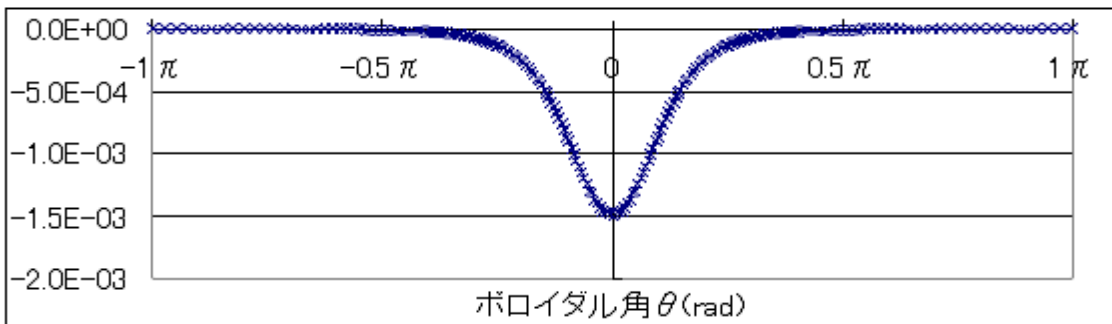


図 3.10e 圧力駆動項のエネルギー密度分布

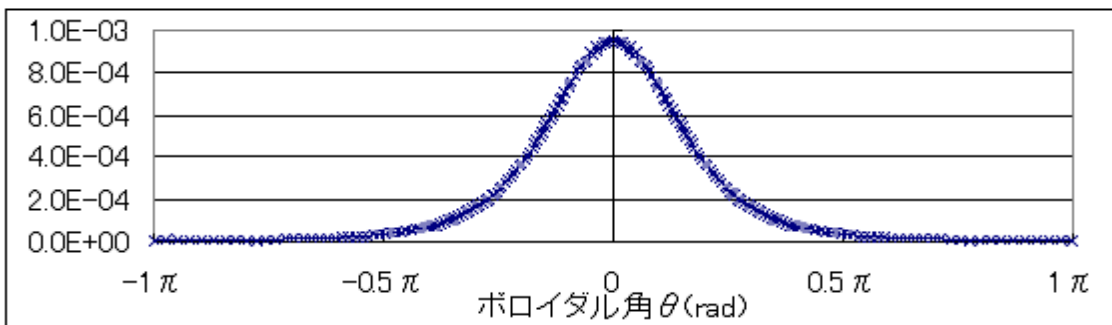


図 3.10f 圧縮性項のエネルギー密度分布

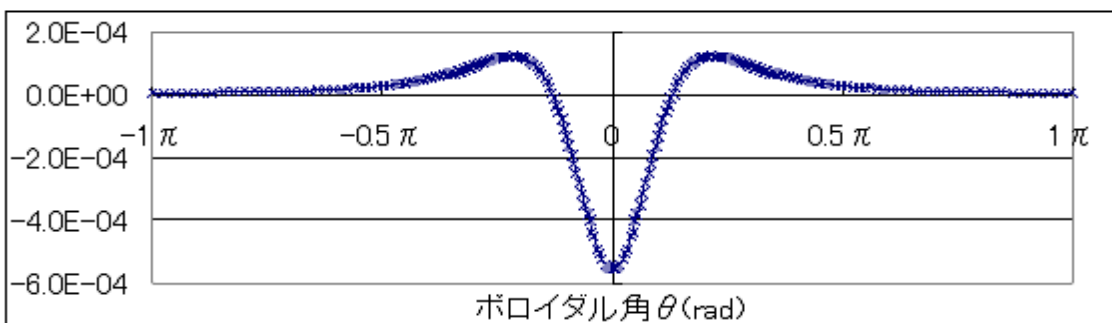


図 3.10g ポテンシャルエネルギー和のエネルギー密度分布

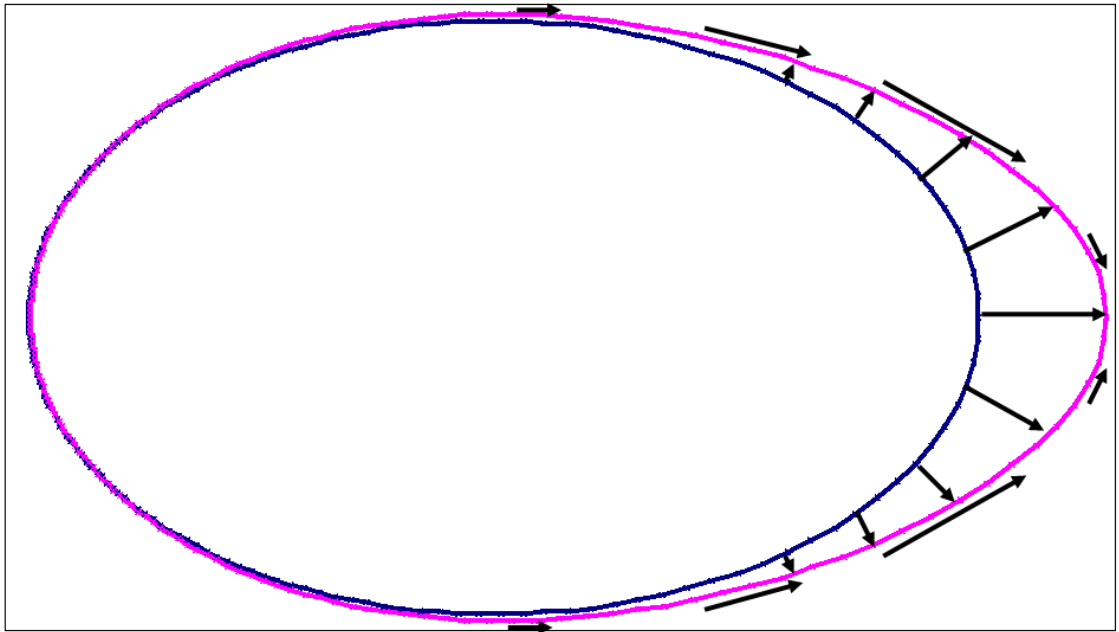


図 3.11a 磁力線が外側に膨張する際のプラズマ変位の様子

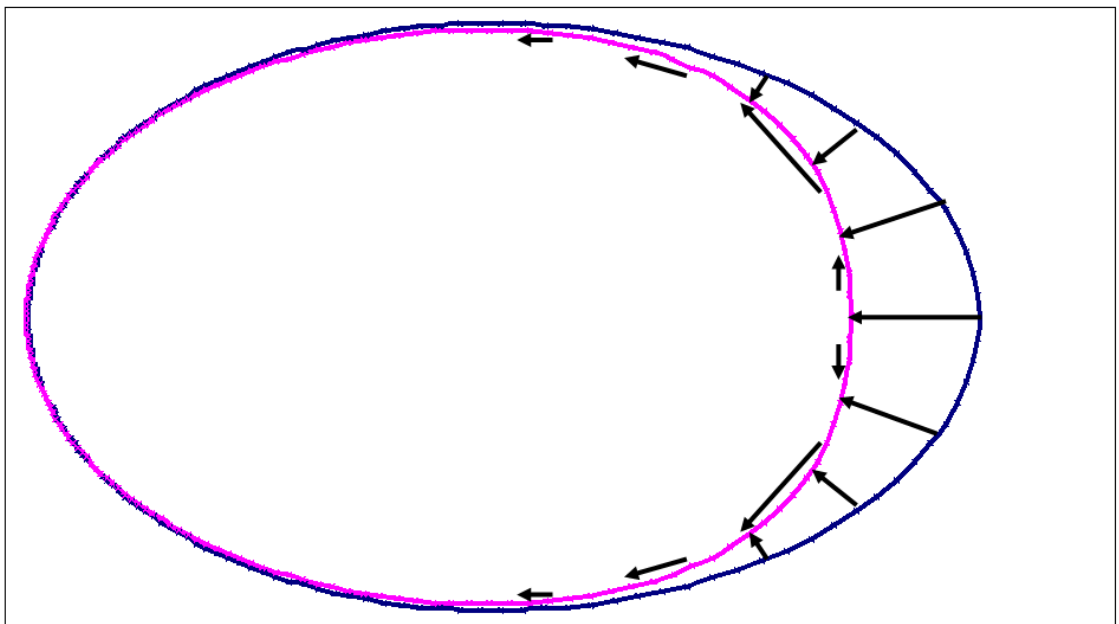


図 3.11b 磁力線が内側に圧縮する際のプラズマ変位の様子

3.3.2 エネルギー密度分布の径方向変化

3.2.6 項による考察から， ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} の項を含む圧縮性のエネルギー密度項は ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} の運動エネルギー比率が変わることで，径方向に対する安定化効果の振る舞いも変わってくると予想される．そこで，径方向に対する圧縮性の安定化効果の変化を確認する．

図 3.9a において $K_{\perp} : K_{\parallel} = 0.2 : 0.8$ となる $R=0.57\text{m}$ ， $K_{\perp} : K_{\parallel} = 0.5 : 0.5$ となる $R=0.68\text{m}$ ， $K_{\perp} : K_{\parallel} = 0.8 : 0.2$ となる $R=0.77\text{m}$ を通る 3 箇所の磁力線について，磁場強度，プラズマ変位，そして各エネルギー密度項の磁力線方向分布を比較する．図 3.12a から図 3.12g は $R=0.57\text{m}$ ， $R=0.68\text{m}$ ， $R=0.77\text{m}$ を通る磁力線における，磁場強度，プラズマの磁力線垂直方向変位 ξ_{\perp} ，プラズマの磁力線平行方向変位 ξ_{\parallel} ，シアアルフベン波のエネルギー密度項，圧力駆動のエネルギー密度項，圧縮性のエネルギー密度項，そしてポテンシャルエネルギー和のエネルギー密度項の磁力線方向分布の比較を表している．

径方向に対して内側の磁力線ほど磁場強度は強くなっており (図 3.12a)， ξ_{\perp} は小さく (図 3.12b)， ξ_{\parallel} は大きくなっていることがわかる (図 3.12c)．シアアルフベン波のエネルギーは，内側ほど大きくなっている (図 3.12d)．これは，内側ほど磁場強度が強く，磁力線がより曲げられにくくなるためであると思われる．圧力駆動項は $R=0.68\text{m}$ の分布が大きくなっているが (図 3.12e)，これは圧力勾配の分布 (図 3.1b) によるものだと考えられる．そして圧縮性のエネルギー密度分布が，内側領域と外側領域で大きく異なっていることが図 3.12f からわかる．これは，圧縮性のエネルギーは式 (3.3) の第 2 項で示されるように ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} を含んでおり，すなわち ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} の運動に関連しているためであると思われる．

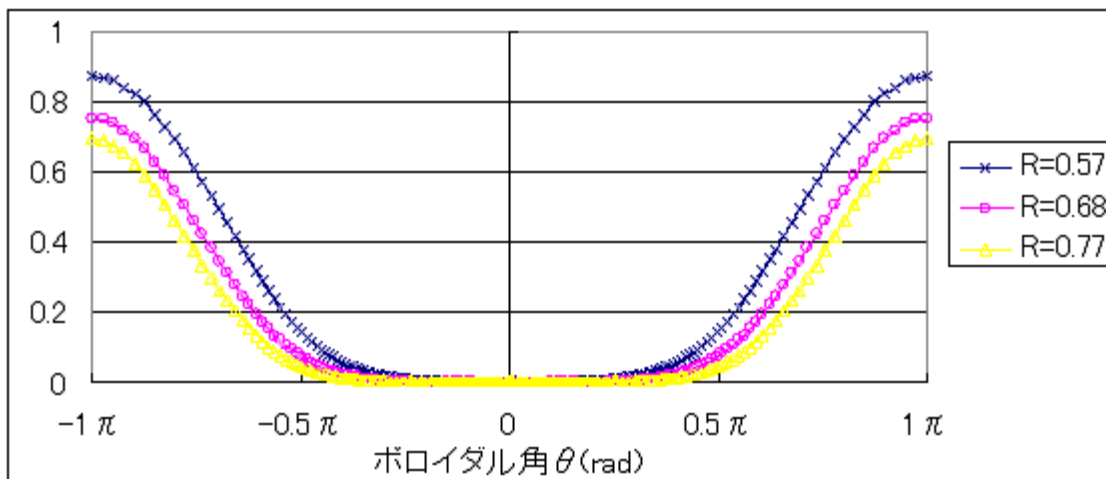


図 3.12a 磁場強度分布の径方向変化

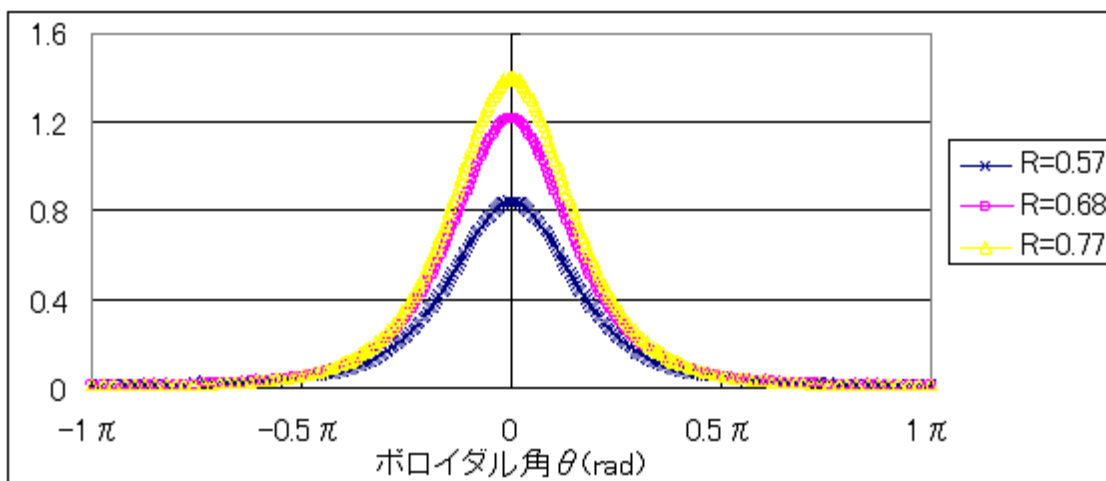


図 3.12b プラズマの磁力線垂直方向変位分布の径方向変化

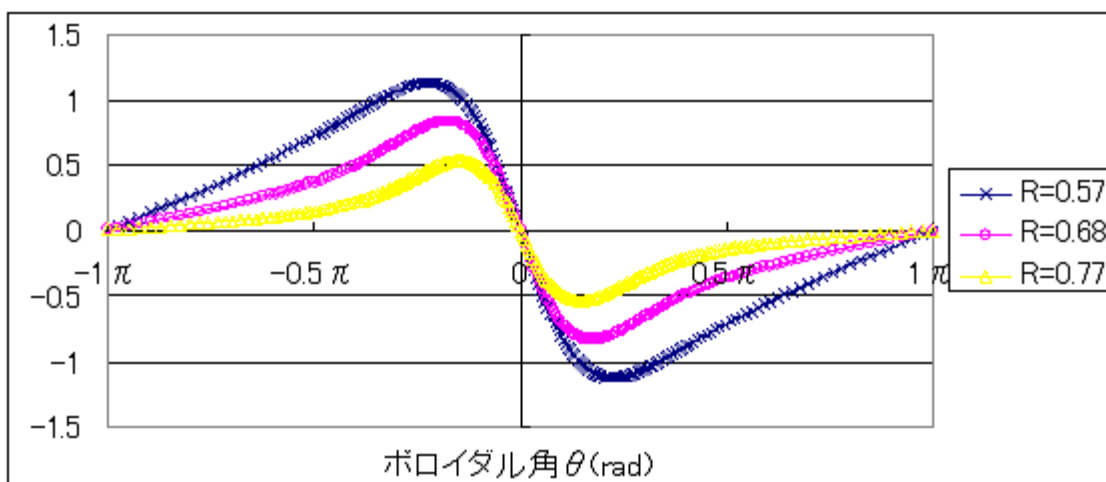


図 3.12c プラズマの磁力線平行方向変位分布の径方向変化

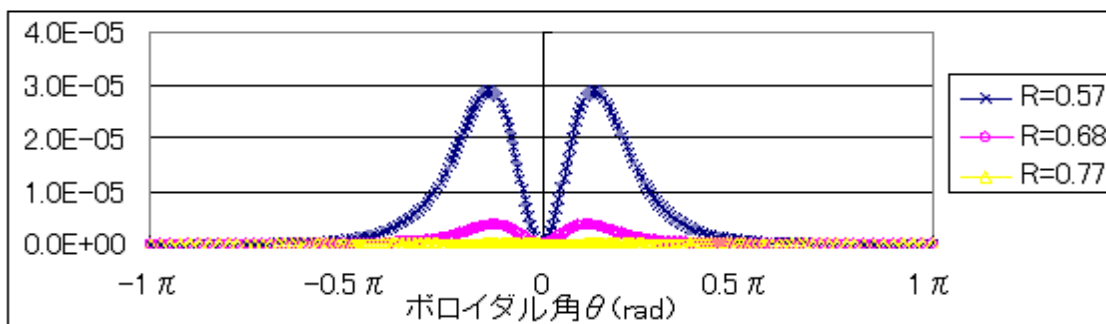


図 3.12d シアアルフベン波のエネルギー密度分布の径方向変化

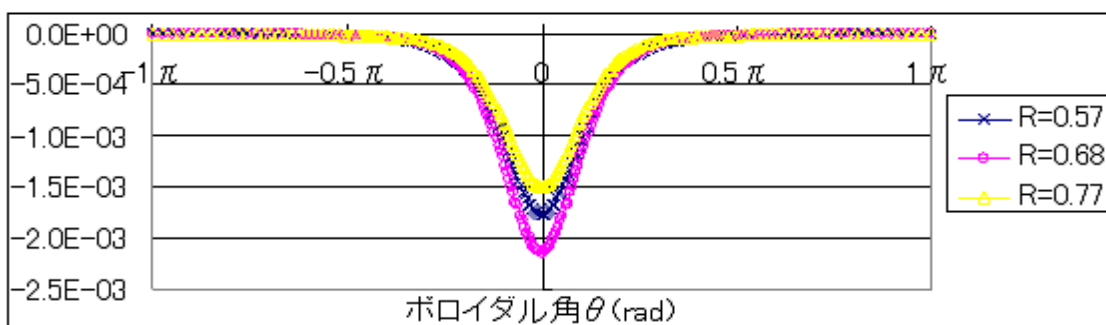


図 3.12e 圧力駆動項のエネルギー密度分布の径方向変化

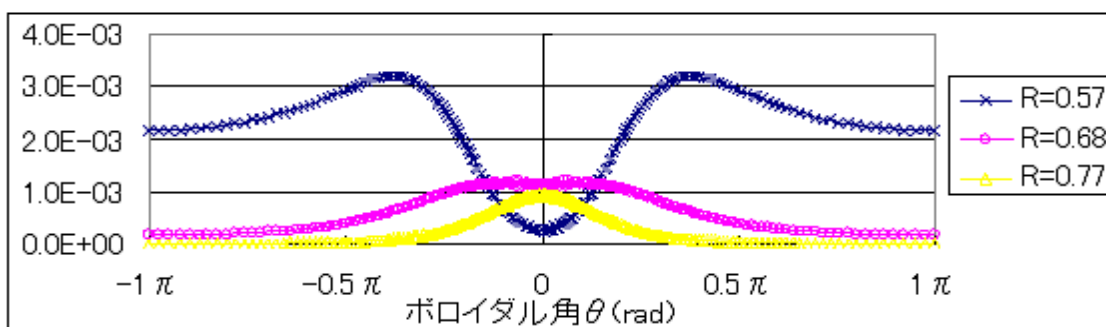


図 3.12f 圧縮性項のエネルギー密度分布の径方向変化

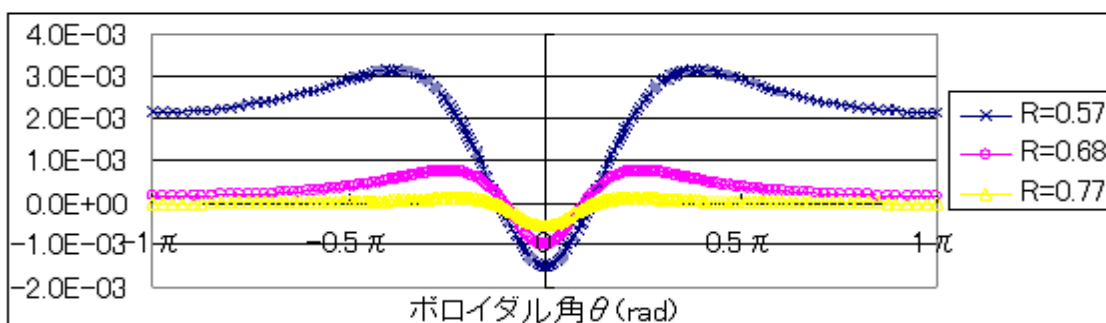


図 3.12g ポテンシャルエネルギー和のエネルギー密度分布の径方向変化

図 3.13a は運動エネルギー比率 $K(\xi^*, \xi)$ の磁力線方向分布である．径方向に対する傾向の変化が圧縮性のエネルギーの分布の変化と似ており，数値解析の結果からもプラズマの運動が圧縮性に関連があることが確かめられる．運動エネルギー比率を，磁力線垂直方向と平行方向に分けた分布が，図 3.13b と図 3.13c である．両者の分布に見られる傾向から，圧縮性のエネルギー密度分布が内側ほど大きく変化している理由は，プラズマの磁力線平行方向の運動が大きくなったためであり，それに伴って磁力線平行方向の圧縮性によるエネルギーが大きくなったと考えられる．

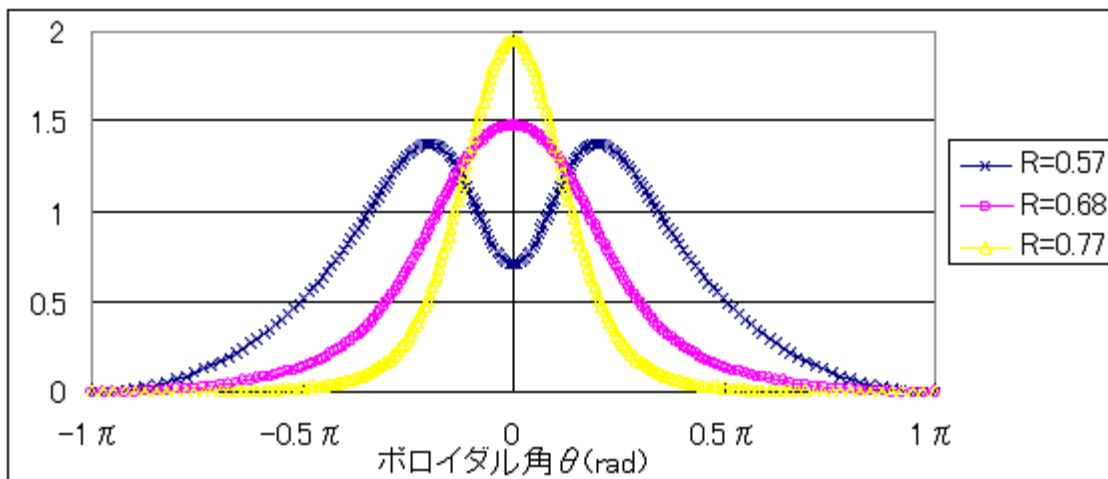


図 3.13a 運動エネルギー比率分布

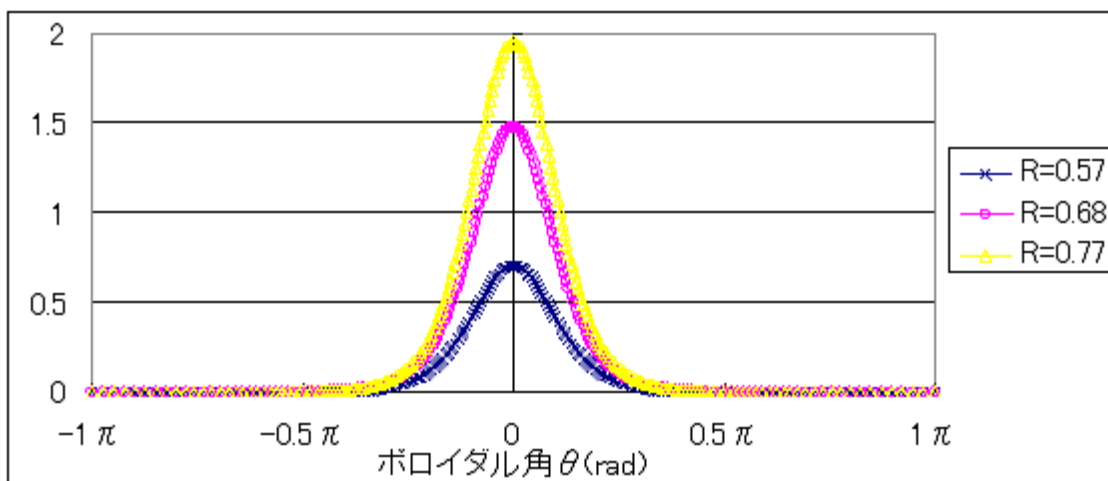


図 3.13b 磁力線垂直方向の運動エネルギー比率分布

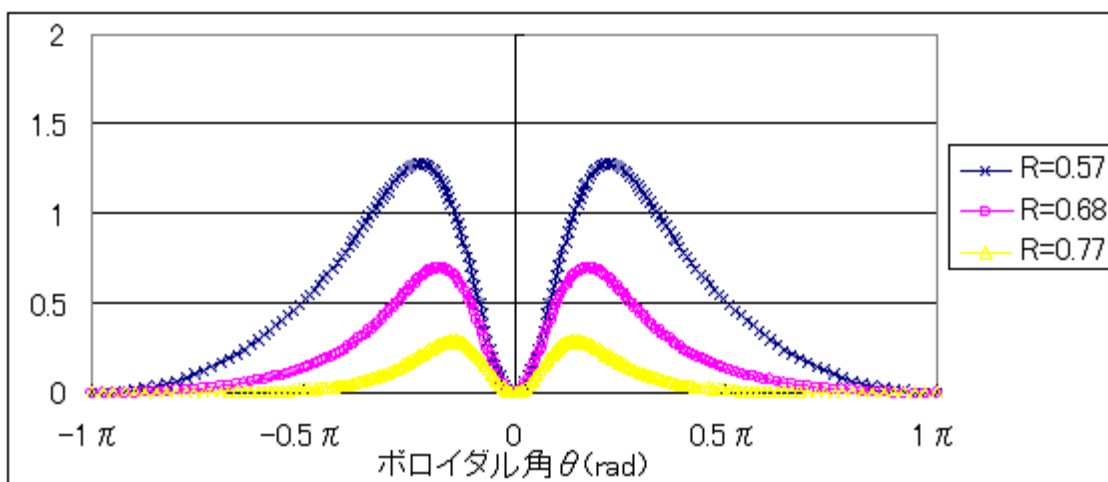


図 3.13c 磁力線平行方向の運動エネルギー比率分布

3.3.3 プラズマ変位 ξ_{\perp} , ξ_{\parallel} の径方向変化の要因

圧縮性の安定化エネルギーは径方向に対して大きく変化していることが数値計算の結果として出ていたが、その変化の要因はプラズマ変位 ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} の径方向変化にあることがこれまでの考察により示されたことである。すなわちコア領域において ξ_{\parallel} が大きく、エッジ領域において ξ_{\perp} が大きくなることで圧縮性のエネルギーを変化させていた要因となるが、このプラズマ変位の径方向変化は、プラズマ圧や磁場配位の平衡状態として決まる安定性そのものに要因があると思われる。その理由は、安定な磁力線ほど曲げられにくいいためプラズマが磁力線垂直方向には変位しにくく、その分磁力線平行方が偏ったと考えられるからである。

次項では、交換型不安定性の安定条件式を用いて、圧縮性の安定化要因が磁束管の比体積変化にあることを示し、さらにプラズマの圧力変化と磁束管の比体積変化の関係性がプラズマ変位 ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} の径方向変化に影響していることを説明する。

3.3.4 交換型不安定性に対する安定条件式

圧力 $p(\psi)$ と磁束管の体積 $V(\psi)$ の関係を用いた交換型不安定性に対する安定条件式は、Rosenbluth と Longmire によって求められている [21]。磁場に閉じ込められるプラズマ中において径方向の位置が異なる微小体積のプラズマが、磁場のエネルギーを変えることなく交換したときのプラズマのエネルギー変動量 δE_p は次式で与えられる。

$$\delta E_p = V^{-\gamma} \delta(pV^{\gamma}) \delta V \quad (3.10)$$

ここで δp はプラズマ圧力の径方向変化量、 δV は磁束管の微小体積の径方向変化量である。磁束管体積は $V(\psi) = \psi \oint dl/B$ で表されるので、磁束管の比体積を

$$U(\psi) \equiv \frac{dV}{d\psi} = \oint \frac{dl}{B} \quad (3.11)$$

で定義する (ただし積分は磁力線に沿った線積分である.) と, 安定条件 $\delta E_p > 0$ は, $\delta U > 0$ のとき

$$\delta(pU^\gamma) > 0 \quad (3.12)$$

であると求められる. ただし, 式 (3.12) は安定条件の十分条件であることに注意する. 安定性解析を行う際には, 仮定された圧力分布に対して平衡計算を行い, 平衡量として求められた磁場配位と仮定された圧力分布を用いて固有値解析を行っている. しかし, 固有値解析を行わずとも, 磁場配位から計算される磁束管の比体積 $U(\psi)$ と仮定された圧力分布 $p(\psi)$ が (3.12) の関係式を満たしていれば, 少なくとも交換型不安定性に対しては安定であると言える.

ここで, (3.12) の安定条件式は ψ に対して

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{d\psi} + \gamma \frac{1}{U} \frac{dU}{d\psi} < 0 \quad (3.13)$$

と書き直すことができ, 左辺を

$$M(\psi) \equiv \frac{1}{p} \frac{dp}{d\psi} + \gamma \frac{1}{U} \frac{dU}{d\psi} \quad (3.14)$$

と定義する. 平衡量に関して $M(\psi)$ の径方向分布を求めたものが図 3.14 である. 図 3.14 において $M(\psi) < 0$ である領域ならば安定であるが, この安定な領域は固有値解析により求められた安定領域と一致することがわかる (図 3.3). また, 内側にいくほど安定条件値 $M(\psi)$ が負に大きくなっており, 内側のプラズマほど安定性が強いこともわかる.

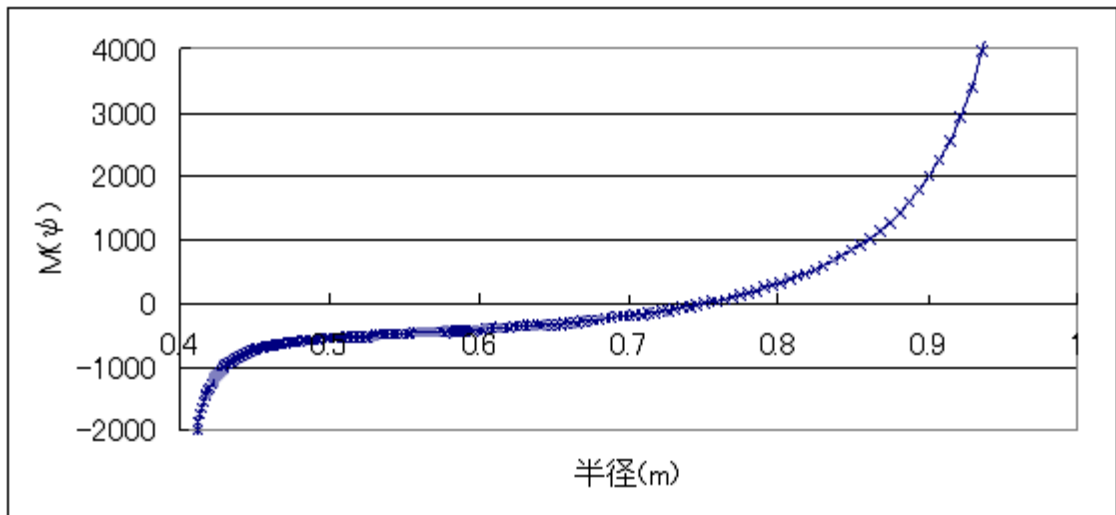


図 3.14 安定条件値 $M(\psi)$ の径方向分布

以上の解析から，圧縮性の安定化要因は磁束管の比体積変化にあることが示される．すなわち，圧力勾配と磁場曲率により生じる不安定化効果によってプラズマは磁力線垂直方向に変位しようとするが，その際隣り合う磁束管との交換のために磁束管の体積を圧縮・膨張させなければならない．そのときに必要となる圧縮性のエネルギーにより不安定化が抑えられていると考えられる．また，その安定性の強さは安定条件値 $M(\psi)$ に関連しており， $M(\psi)$ の値が負に大きければ安定性が強く，結果としてプラズマの垂直方向変位 ξ_{\perp} が小さくなったと考えられる．この安定条件値 $M(\psi)$ とプラズマの変位 ξ_{\perp} ， ξ_{\parallel} の比率の関係性については次章でも触れる．

3.3.5 補足：安定な圧力分布の条件

実験室系という有限な領域では，図 3.1a のように圧力がエッジ領域において $p(\psi) \rightarrow 0$ となる分布は，その領域において不安定性が生じる可能性があることを示しておく．安定条件式 (3.12) より，臨界安定条件は

$$pU^{\gamma} = const. \quad (3.15)$$

となり，臨界安定な圧力分布は

$$p \sim U^{-\gamma} \quad (3.16)$$

となる．式 (3.16) から，領域全域に渡って安定性を保つ圧力分布を考えた場合， $U(\psi) \rightarrow \infty$ であるときに $p(\psi) \rightarrow 0$ とすることが可能であるとわかる．しかしながら，ダイポール磁場配位では $U(\psi) \rightarrow \infty$ となるのは無限遠においてである．一方，実験室という有限な領域では，エッジ領域において有限な $U(\psi)$ を持つので，圧力を $p(\psi) \rightarrow 0$ にすると式 (3.12) や式 (3.13) の安定条件を満たさなくなることが示され，この領域で不安定性が生じる可能性が出てくる．逆に言えば，実験室系において式 (3.12) や式 (3.13) の安定条件を満たす圧力分布は，エッジ領域においてプラズマ圧が残る分布である．このような分布の具体的な例として，ポイント・ダイポールの真空磁場配位における臨界安定な圧力分布を求めることにする．この磁場配位では $B \sim R^{-3}$ ， $\oint dl \sim R$ より， $U \sim \frac{R}{R^{-3}} = R^4$ であるので，圧力分布は

$$p \sim U^{-\gamma} \sim R^{-4\gamma} = R^{-\frac{20}{3}} \quad (3.17)$$

であると求められる．さらにポイント・ダイポールの真空磁場配位においては，磁気モーメント M を用いて $\psi \approx M \sin^2 \theta / R$ と表されるので，ポイント・ダイポールの真空磁場配位における臨界安定な圧力分布は

$$p(\psi) \sim \psi^{\frac{20}{3}} \quad (3.18)$$

と求められる． $(\xi_{\perp} \cdot \nabla p)(\kappa \cdot \xi_{\perp}) > 0$ となる領域において圧力が (3.18) の分布であればよいので圧力のピーク値の場所を適当なところに決めると，この圧力分布は図 3.15 のように，エッジ領域においてプラズマ圧 ($R=1.0\text{m}$ において圧力のピークに対して 0.5 %程) が残る分布になることが確かめられる．

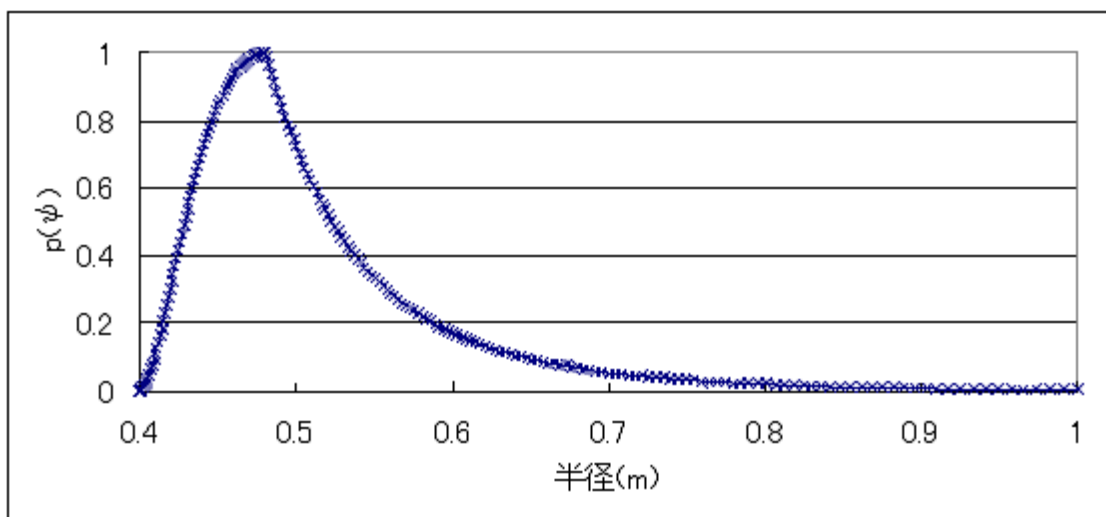


図 3.15 $p(\psi) \propto \psi^{20/3}$ の圧力分布

しかし，式 (3.18) の圧力分布を用いて，RT-1 における平衡計算と安定性解析を行うと，図 3.16 のようにエッジ領域において不安定性が生じることが確認された．また式 (3.14) の安定条件値 $M(\psi)$ の分布を調べると図 3.17 のようになっていることがわかり，ポイント・ダイポールの真空磁場配位から求められた臨界安定な圧力分布は平衡磁場配位での安定条件を満たしていないことがわかる．この結果からも，安定性解析を行う際には，簡略化されたモデル・磁場配位での圧力分布を代用するのではなく，平衡計算により求められたプラズマ平衡量を用いることの必要性が確認される．

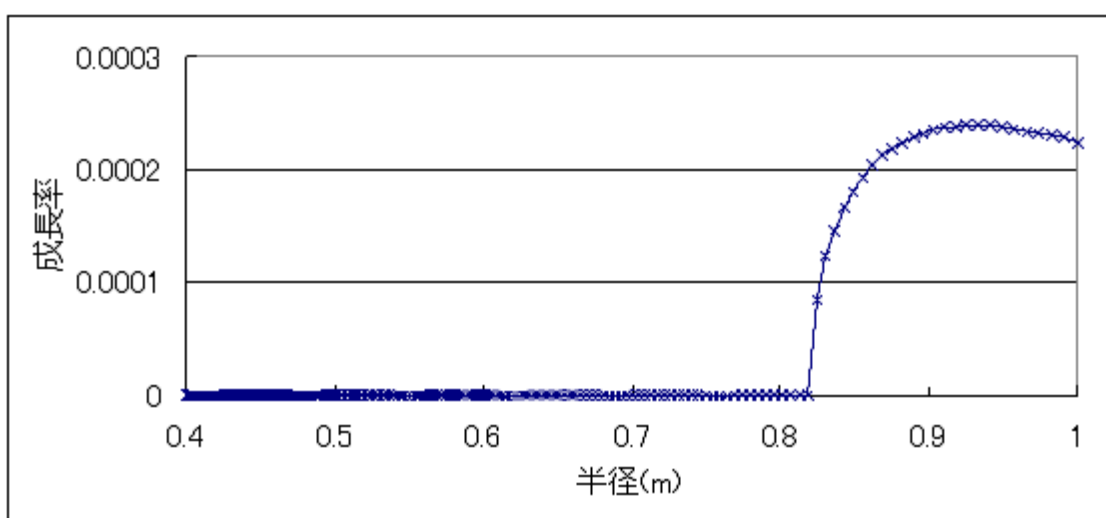


図 3.16 $p(\psi) \propto \psi^{20/3}$ における不安定性の出方

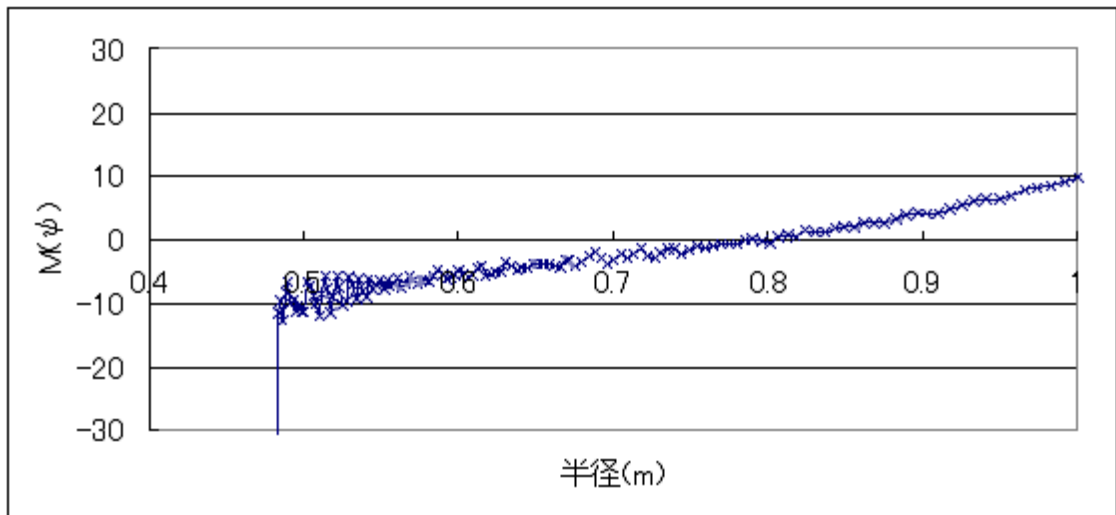


図 3.17 $p(\psi) \propto \psi^{20/3}$ における安定条件値 $M(\psi)$ の分布

そこで RT-1 のダイポール平衡磁場配位における臨界安定な圧力分布を

$$p(\psi) \sim \psi^n \quad (3.19)$$

という関数で与えることにする．この n の値と圧力のピーク位置を変化させていくと臨界安定な圧力分布のピーク圧力とエッジ圧力の値は変わり，それぞれの圧力分布における安定限界の傾向を調べることができる．また，実験から得られるピーク圧力とその位置，そしてエッジ圧力のデータ値を用いることができれば，RT-1 における安定限界 (β 値限界) を理論的に求めることも可能となる．

3.4 補足：磁力線垂直方向のみの圧縮性モデルについて

式 (3.3) で示されるポテンシャルエネルギーの各項において，プラズマの磁力線平行方向変位 ξ_{\parallel} が関わるのは磁力線平行方向の圧縮性項のみである．この磁力線平行方向の圧縮性項を削除できれば，方程式としては ξ_{\perp} のみの変位を考えるだけとなるので，より簡単に解析ができる．ここで，圧縮性項は安定化エネルギーとして寄与するので，単純に考えれば磁力線平行方向の圧縮性項を省いて解析しても，安定性の過小評価に繋がるだけであ

るので、磁力線垂直方向のみの簡略化されたモデルによって安定限界解析を行っても問題は無いように思える。本節ではこのような磁力線垂直方向のみの圧縮性モデルによる安定限界解析について、磁力線平行方向の圧縮性を考慮しないことが、逆に安定化効果を過大評価してしまう可能性について触れることにする。

3.4.1 圧縮性 (垂直のみ) モデルにおける固有値解析

圧縮性 (垂直のみ) モデルにおけるポテンシャルエネルギーを次式のようにする。

$$\delta W(\boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \int_p d\mathbf{r} \left[Q_{\perp}^2 + \frac{4\gamma p (\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp})^2}{1 + \gamma p B^{-2}} - 2(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \nabla p)(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \right]. \quad (3.20)$$

式 (3.20) に関して、磁力線垂直方向の慣性のみを残し、変分原理により求めた固有方程式を求めると、

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2 \frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \boldsymbol{\xi}_{\perp} = & \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}_{\perp} \right) + 2 \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \nabla p \right) \boldsymbol{\xi}_{\perp} \\ & - \frac{4\gamma p}{1 + \gamma p B^{-2}} \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。この方程式について固有値解析を行うと、不安定性の成長率の出方は図 3.18 のようになる。図 3.18 では磁力線平行方向の圧縮性も含めたモデルによる固有値解析結果と比較してあるが、圧縮性 (垂直のみ) モデルの方が安定な領域が $R=0.78\text{m}$ まで広がっており、磁力線平行方向の圧縮性を考慮しない方が安定化効果が大きくなることわかる。

3.4.2 ポテンシャルエネルギーによる安定化効果の比較

前項で確認された、磁力線垂直方向のみの圧縮性を考えることの方が安定化効果が強く出ることについて、その理由を考察するために圧縮性のエネルギー分布を調べることにする。ただし、 $\boldsymbol{\xi}_{\perp}$ のみのモデルによる固有値解析結果を用いたエネルギーを比較すること

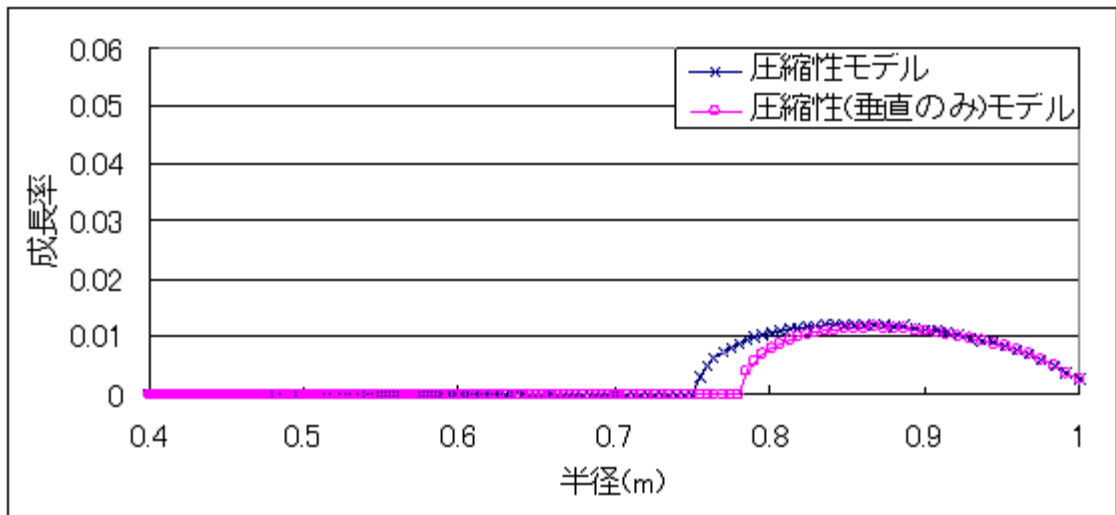


図 3.18 圧縮性 (垂直のみ) モデルにおける不安定性の出方

はできないので、本項の考察においても 3.2.3 項と同様に圧縮性モデルによる固有値解析結果を利用することにする。

まず、ポテンシャルエネルギーの各項の径方向変化は図 3.19 になる。また、ポテンシャルエネルギーから求められる不安定性の成長率の出方を調べたものが図 3.20 になる。図 3.20 では、固有値解析の結果と比較してあるが、不安定性は $R=0.78\text{m}$ から生じており、 ξ_{\perp} のみの固有値解析でも図 3.18 の安定限界解析は正しく表されていると確認できる。

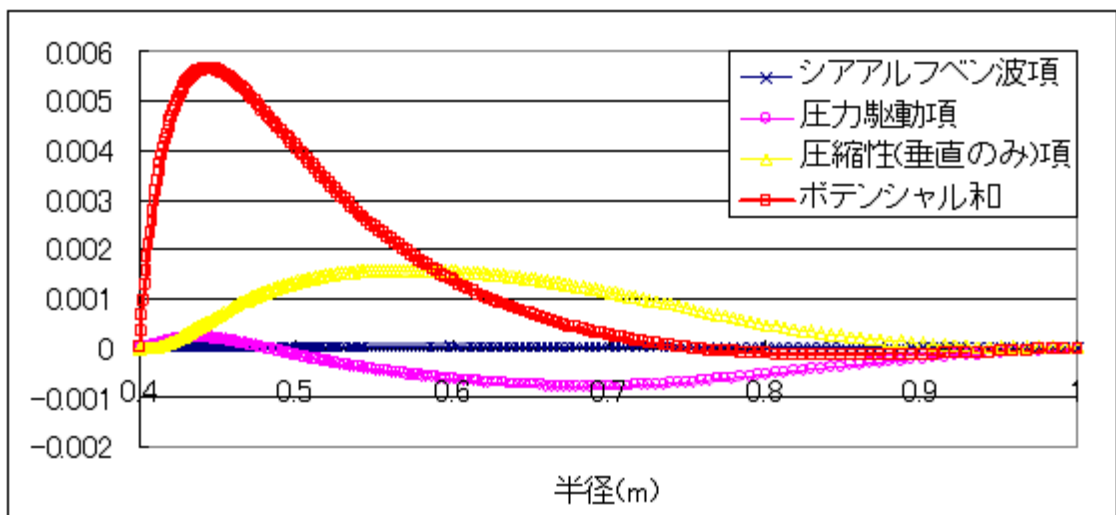


図 3.19 圧縮性 (垂直のみ) モデルにおけるエネルギー径方向分布

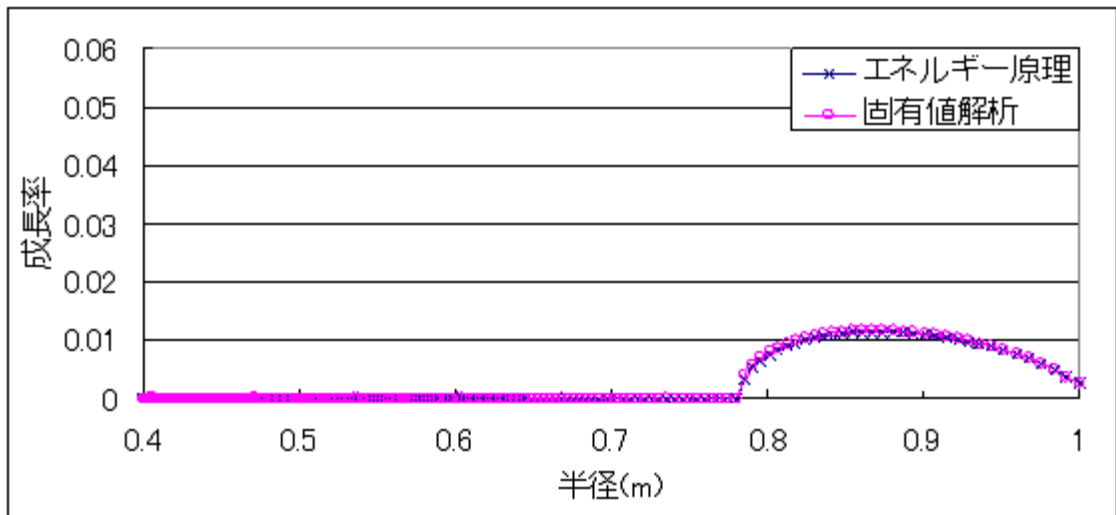


図 3.20 エネルギー原理から求めた成長率と固有値解析から求めた成長率の出方比較

図 3.19 における各エネルギー項について図 3.7 と異なる項は圧縮性のエネルギー項のみであり、その結果としてポテンシャルエネルギー和の分布も変化し、 $R=0.78\text{m}$ で $\delta W(\xi^*, \xi) < 0$ となっていることが確認できる。 $R=0.65\text{m}$ までの内側領域では、磁力線平行方向の圧縮性を考慮しないことで安定化エネルギーが減少していることがわかるが、 $R=0.65\text{m}$ より外側領域では磁力線平行方向の圧縮性を考慮しなかったことで安定化エネルギーが増加していることが確かめられる (図 3.21)。この理由については以下のように考察できる。ポテンシャルエネルギーの式 (3.3) の圧縮性のエネルギー項 $\frac{4\gamma p}{1 + \gamma p B^{-2}} \left(\kappa \cdot \xi_{\perp} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \xi_{\parallel} \right)^2$ について、磁力線垂直方向の圧縮を示す $\kappa \cdot \xi_{\perp}$ と磁力線平行方向の圧縮を示す $\frac{1}{2} \nabla \cdot \xi_{\parallel}$ は同符号であるので、 ξ_{\perp} の運動による圧縮が卓越している外側領域では、磁力線平行方向の圧縮性 $\frac{1}{2} \nabla \cdot \xi_{\parallel}$ の存在が $\frac{4\gamma p}{1 + \gamma p B^{-2}} \left(\kappa \cdot \xi_{\perp} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \xi_{\parallel} \right)^2$ 全体の値を小さくする方向に働くことがわかる。プラズマ変位の概念図 3.11 においてその物理的意味を考えると、プラズマが外側に変位する際には磁束管を膨張させるためにポテンシャルエネルギーが上がるが、磁力線平行方向においてプラズマが赤道面上に集まるように変位することによってこの膨張を助長させているものと考えられる。また、プラズマが内側に変位する際には、磁束管を圧縮させるためにポテンシャルエネルギーが上がるが、磁力線平行方向において

プラズマが赤道面上から逃げるように変位することによってこの圧縮を助長させているとも考えられる．すなわち，磁力線垂直方向のプラズマ変位が大きくなる領域では，磁力線平行方向の圧縮性は安定化エネルギーを減少させる働きがあるので，磁力線平行方向の圧縮性を安易に排除してしまうことは，圧縮性の安定化効果の過大評価に繋がり，安定限界値を高く見積もってしまう可能性がある．したがって，磁力線平行方向の圧縮性を含めた安定限界解析を行わなければならない．

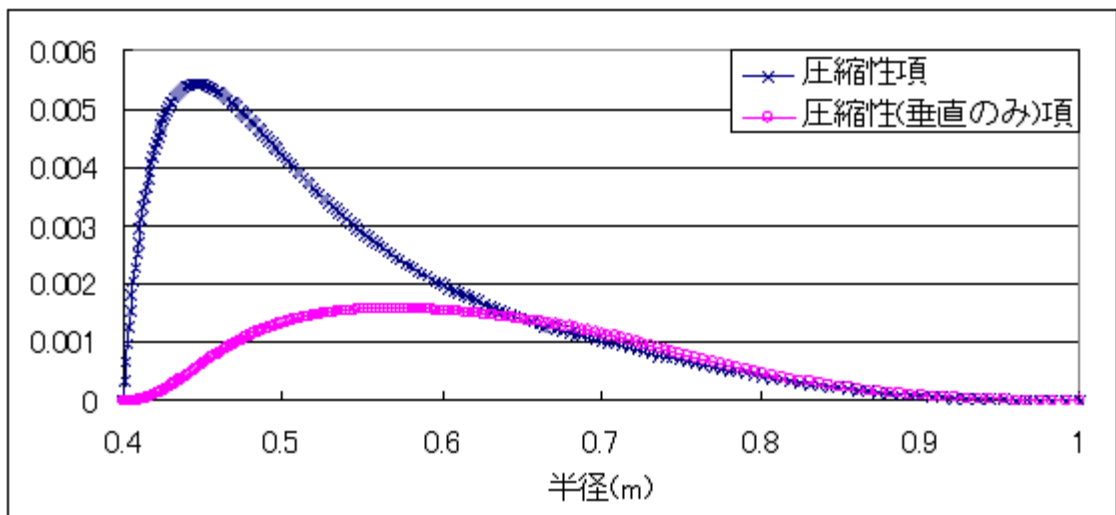


図 3.21 圧縮性項と圧縮性 (垂直のみ) 項とのエネルギー分布の比較

第4章 セパトリックス配位の安定性

4.1 プラズマ境界問題とセパトリックスについて

前章において、ダイポール配位における安定な圧力分布とは、安定条件の関係式 $M(\psi) < 0$ を満たす $p(\psi) \sim \psi^n$ であることを示した。しかし、有限な領域を持つ実験室系では「壁」という物理的境界が存在するため、この分布は「壁」においてもプラズマ圧が残る分布である。低 β なプラズマ閉じ込めでは、エッジ領域において圧力は十分に下がっているとも考えられるが、高 β な閉じ込めではエッジ領域でも相当高い圧力が残ってしまい、「壁」にプラズマが衝突したまま安定に閉じ込められるという実験的には非現実なプラズマ平衡となることがわかる。すなわち、「壁」に向かって $p(\psi) \rightarrow 0$ となる分布ではエッジ領域で不安定性が生じるという問題があり、また「壁」において $p(\psi) \neq 0$ となる分布では高 β 閉じ込めで非現実的な平衡状態になるという問題があるが、これまでの簡略化されたモデルでの研究ではこのエッジ領域における不安定性・境界問題については触れられていなかった。しかし本研究では、「セパトリックス」という配位的境界を考慮に入れることで、エッジ領域におけるこの問題を解決する。

1.4.2 項でも触れたように、RT-1 の磁場配位は、コイルを磁気浮上させる吊上げコイルのために、単純なダイポール配位ではなく、装置内部にセパトリックスが形成された配位 (セパトリックス配位) となっている (図 1.6)。セパトリックスの外側領域は磁力線が閉じていないためにプラズマが閉じ込められていないので、セパトリックス外側領域における解析は無視しても良いと考えられる。つまり、セパトリックスの外側で

$p(\psi) \rightarrow 0$ となる分布は理論上では不安定性が生じると予想されるが、これは閉じ込められていないプラズマにおける不安定性であるので注目すべき問題とはならず、セパトロリックスの内側領域全体において安定性が保たれていれば充分であると考えられる。このセパトロリックスがプラズマ存在領域の明確な境界となっており、従来の研究における境界問題を解決する手立てとなる。

したがって、本研究において RT-1 の安定限界解析を行うときは、このセパトロリックス配位での解析を行う。すなわち圧力分布は $p(\psi) \sim \psi^n$ という関数形を仮定し、セパトロリックスの内側領域全体について安定性解析を行うことにする。RT-1 における安定限界解析については、次章で説明する。

4.2 セパトロリックス配位における安定化効果

ダイポール配位と比較すると、セパトロリックス配位は磁場配位が装置上方に引き伸ばされたような形になっている (図 1.6)。特に外側に行くほどこの変化は大きくなり、プラズマの安定性にも影響を及ぼすと考えられる。そこで本節ではダイポール配位における解析結果と比較することで、吊上げコイルによる磁場配位の変化がプラズマの安定性に与える影響を考察していく。

4.2.1 ダイポール配位とセパトロリックス配位における解析比較

磁場配位の変化が安定性に与える影響を調べるために、ダイポール配位とセパトロリックス配位における安定性解析結果を比較するが、セパトロリックス配位の場合、吊上げコイルの存在によって磁束関数 ψ 自体の分布も変化していることに注意する。平衡計算では ψ の値によって決まる圧力分布 $p(\psi)$ を用いているので、 ψ 自体の分布が変化することで圧力分布 $p(\psi)$ も変化してしまうからである。したがって、ダイポール配位とセパトロ

リックス配位それぞれの解析において ψ の範囲を固定し，同じ圧力分布 $p(\psi)$ を用いることで，磁場配位の変化が安定性に与える影響を調べることにする．

そこで，本章における安定性解析では，ダイポール配位とセパトリックス配位それぞれにおいて，プラズマの存在範囲を $0.006 \leq \psi \leq 0.015$ に固定し，圧力分布は同じ関数形 $p(\psi) \sim \psi^7$ を用いることにする．圧力のピーク値を $1/2\mu_0 \times 10^{-4}$ とし，ピーク位置を適当なところに定めると，仮定された圧力分布は図 4.1 のようになる．本章では，ダイポール配位とセパトリックス配位それぞれにおいて ψ に対して同じ圧力分布を用いるので，図の横軸が ψ になっていることに注意する．また，横軸は反転して表示してある（右ほど ψ が小さくなる）が，これはコイル外側領域の径方向が右を正としていたため， ψ もその方向に合わせたからである．（磁束関数 ψ は，コイルから遠くなるほど小さくなることに注意する．）

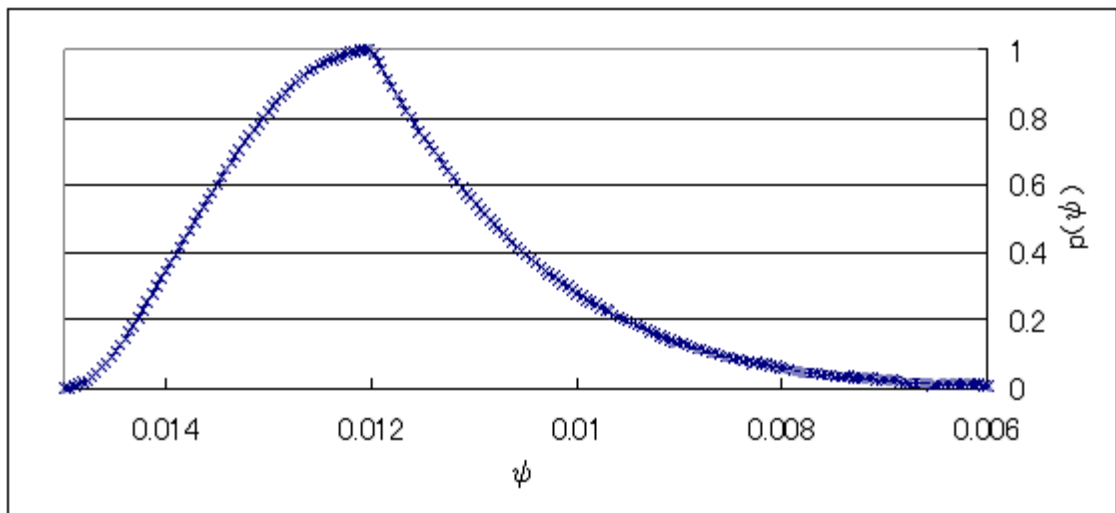


図 4.1a $p(\psi) \sim \psi^7$ の圧力分布

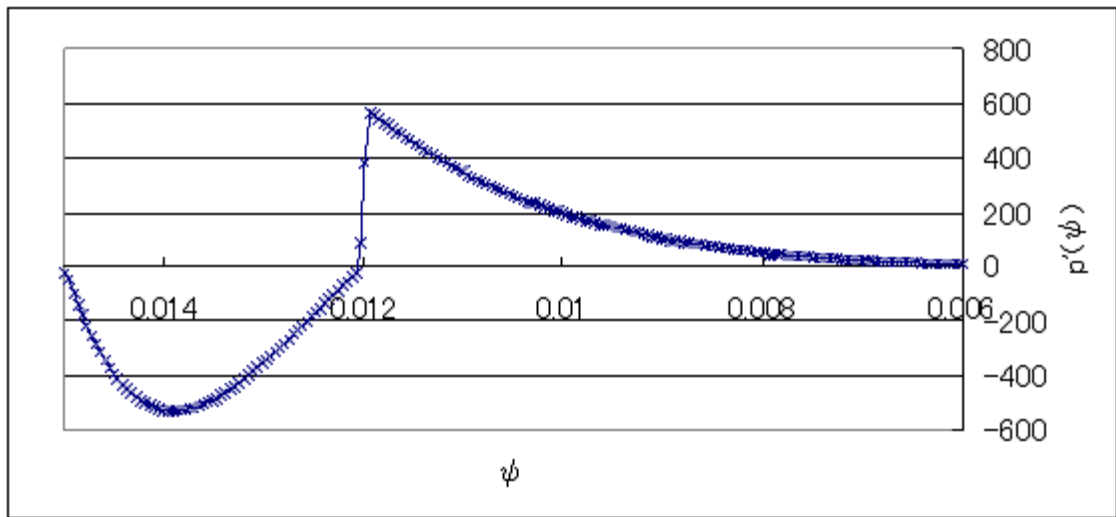


図 4.1b $p(\psi) \sim \psi^7$ の圧力勾配分布

図 4.1a の圧力分布について，吊上げコイル無し状態で平衡計算をした平衡磁場配位が図 4.2a でありダイポール配位となる．このとき局所的な最大 β 値は $\beta_{max} = 0.020$ である．一方，吊上げコイル有りの状態で平衡計算をした平衡磁場配位が図 4.2b でありセパトリックス配位となる．このとき $\beta_{max} = 0.034$ である．同じ圧力分布における計算でもセパトリックス配位の方が β 値が大きくなったが，これは吊上げコイルにより磁場配位が装置上方に引き伸ばされたことによって，磁場が弱くなる部分が出てくるためと思われる．

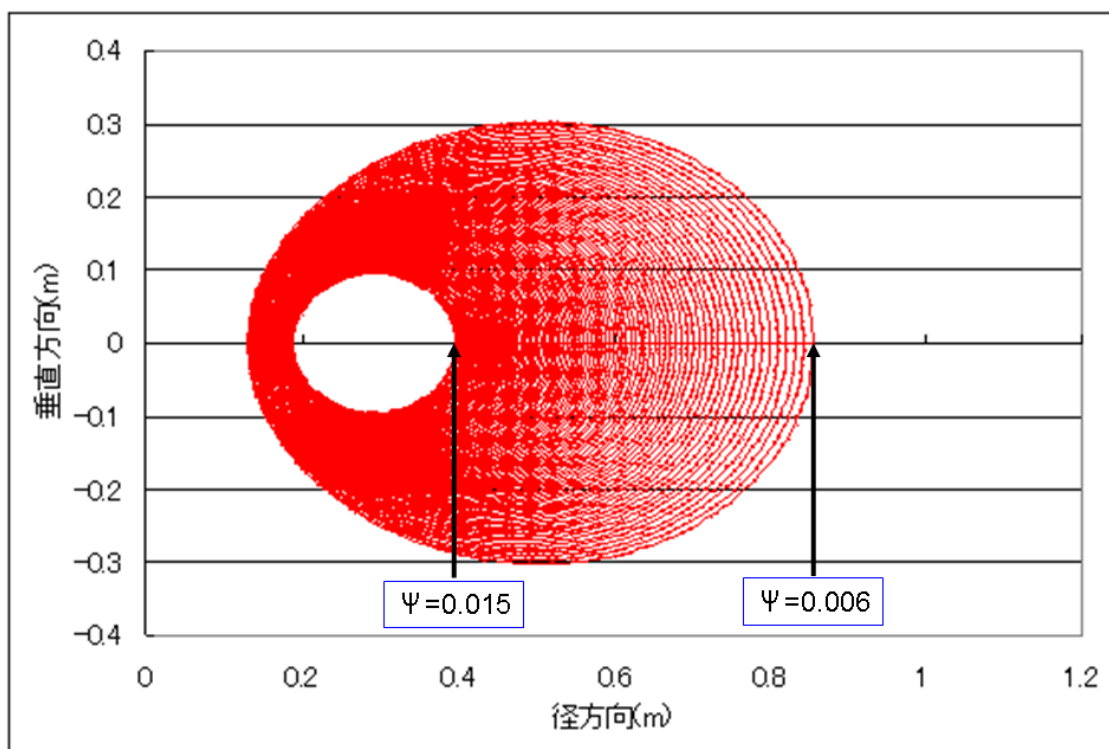


図 4.2a ダイポール平衡磁場配位

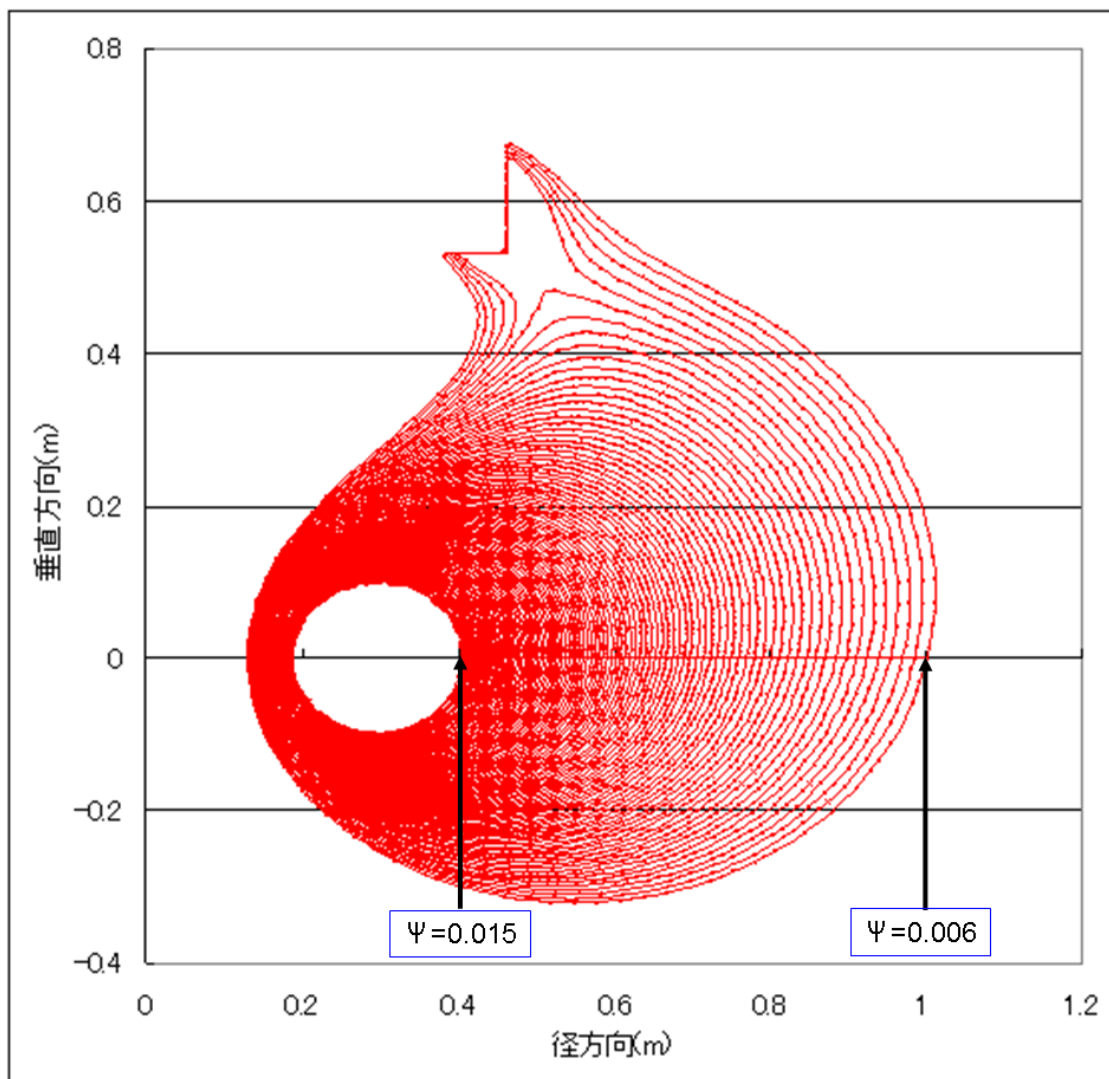


図 4.2b セパトリック平衡磁場配位

仮定された圧力分布に対して、ダイポール配位とセパトリックス配位それぞれにおいて圧縮性モデルの固有方程式 (2.54)(2.55) を固有値問題として解き、不安定性の成長率の出方を比較したものが図 4.3 である。図 4.3 からダイポール配位 (D 配位) では、圧力駆動項が不安定化項になる $\psi = 0.012$ から外側領域全体で不安定性が生じていることがわかるが、一方セパトリックス配位 (SX 配位) では全域に渡って不安定性が現れないという結果が得られた。

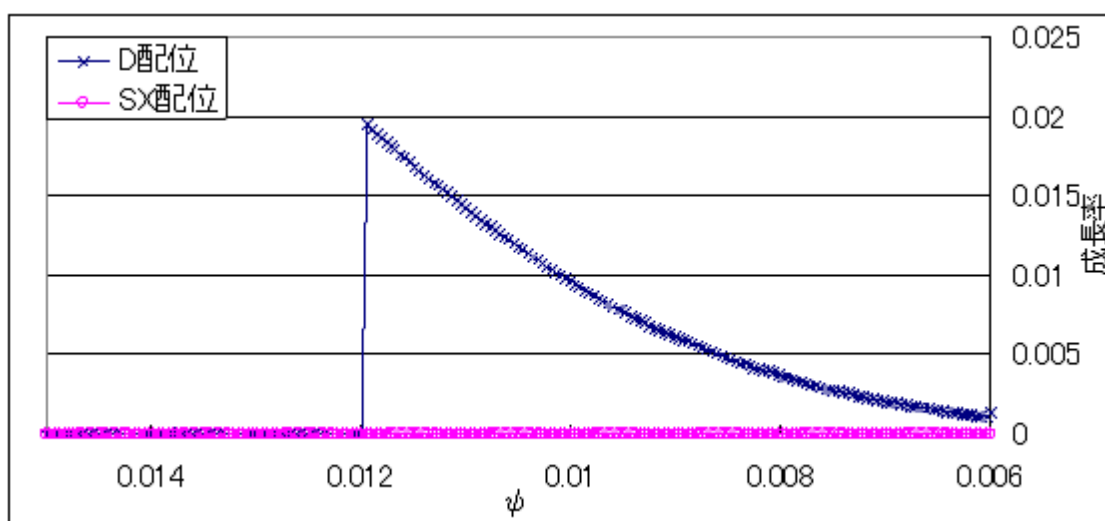


図 4.3 固有値解析結果による不安定性の成長率比較

ポテンシャルエネルギーの径方向分布を見ると、ダイポール配位では圧縮性項より圧力駆動項の方が大きく、ポテンシャルエネルギー和としては $\psi = 0.012$ より外側領域で負になっており、不安定性が生じることが確かめられる (図 4.4)。一方、セパトリックス配位では圧力駆動項より圧縮性項の方が大きく、ポテンシャルエネルギー和としては全域で正になっており、安定であることが確かめられる (図 4.5)。

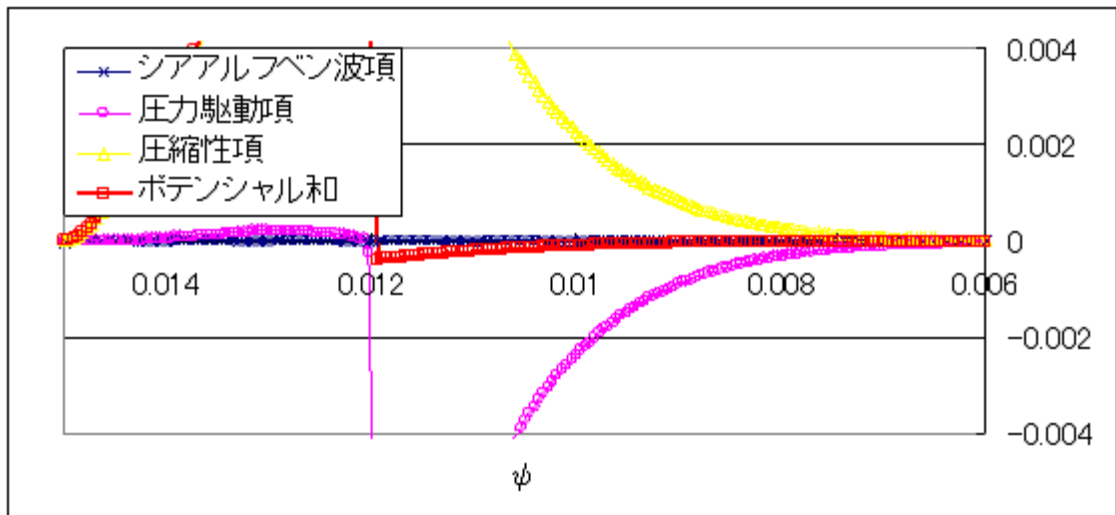


図 4.4 ダイポール配位におけるエネルギー径方向分布

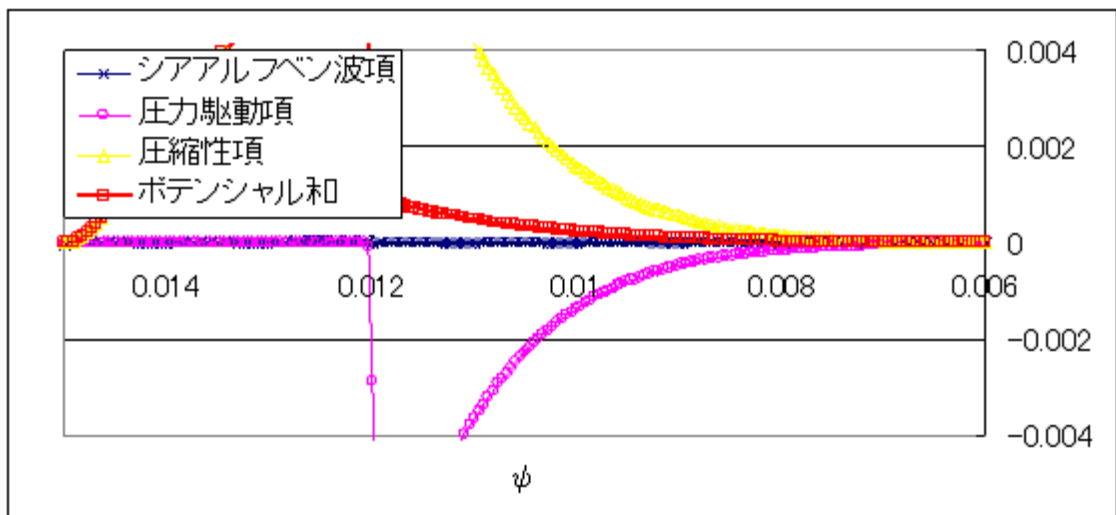


図 4.5 セパトリックス配位におけるエネルギー径方向分布

固有値解析とエネルギーの径方向分布の結果から，セパトリックス配位の方が安定であり，吊上げコイルにより磁場配位が変化したことが結果としてより安定な磁場配位になったと考えられる．

4.2.2 セパトリックス配位の安定化要因

前項で，セパトリックス配位の方がより安定な磁場配位であるとの結果が得られたが，本項では 3.3.4 項の安定条件値 $M(\psi)$ を用いて，セパトリックス配位の安定化要因

を調べることにする．

ダイポール配位とセパトリックス配位それぞれにおいて，径方向に対する安定条件値 $M(\psi)$ の値を求めたものが図 4.6 である．セパトリックス配位では $\psi \sim 0.0064$ が X 点を含むセパトリックスとなっていることに注意する．ダイポール配位では $\psi = 0.012$ から外側領域全域で $M(\psi) > 0$ であり，安定条件を満たしていないが，セパトリックス配位では $\psi \sim 0.0064$ のセパトリックスの内側全域で $M(\psi) < 0$ であり，安定条件を満たしていることが確認できる．

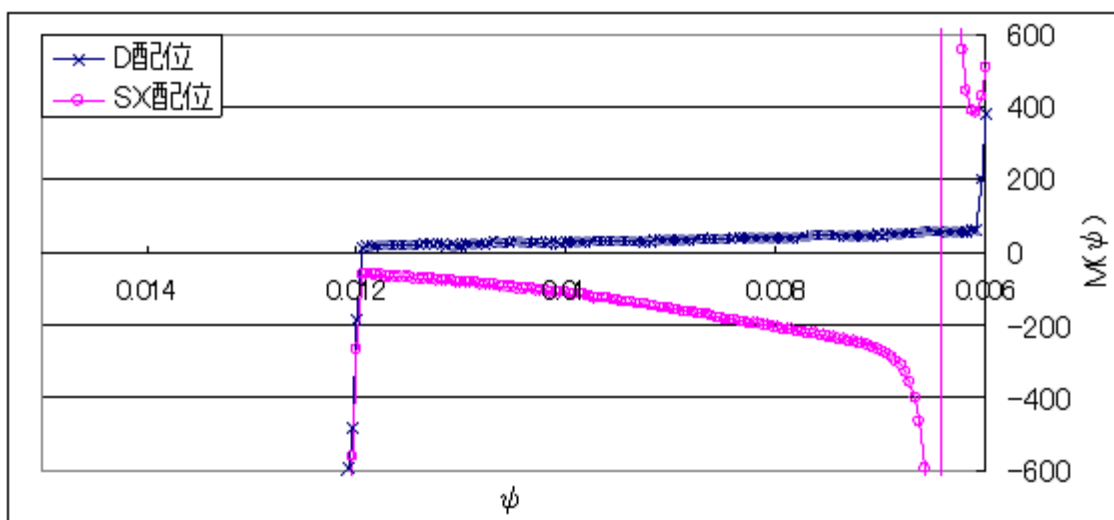


図 4.6 安定条件値 $M(\psi)$ の径方向分布

安定条件値 $M(\psi)$ はプラズマの圧力 $p(\psi)$ と磁束管の比体積 $U(\psi)$ で決まる値であり，両配位において $p(\psi)$ ， $p'(\psi)$ が同じであるので，両配位において $M(\psi)$ の値が異なった分布を取るのには， $U(\psi)$ の違いであることが考えられる．そこで，ダイポール配位とセパトリックス配位それぞれにおいて，径方向に対して磁束管の比体積 $U(\psi)$ を計算すると図 4.7 となる．セパトリックス配位では $\psi \sim 0.0064$ において $U(\psi)$ が発散していることが確認できるが，これはセパトリックス上の磁力線は磁場強度がゼロとなる X 点を含むので， $U(\psi) \rightarrow \infty$ となるためである．図 4.7 からセパトリックス配位ではダイポール配位に比べて磁束管の比体積が全域で大きくなっていることがわかる．しかもこの増大傾向は外側

領域になるほど強くなっており，すなわち $U'(\psi)$ が大きくなるので，安定条件値 $M(\psi)$ がより負側になったと考えられる．吊上げコイルによる磁場配位の変化は外側領域になるほど大きくなるので，この磁束管の比体積 $U(\psi)$ の増大傾向は吊上げコイルによる磁場配位の変化が原因であることがわかる．すなわち，吊上げコイルにより磁場配位が装置上方に引き伸ばされることで，磁束管の比体積が増大したことが安定化の要因である．

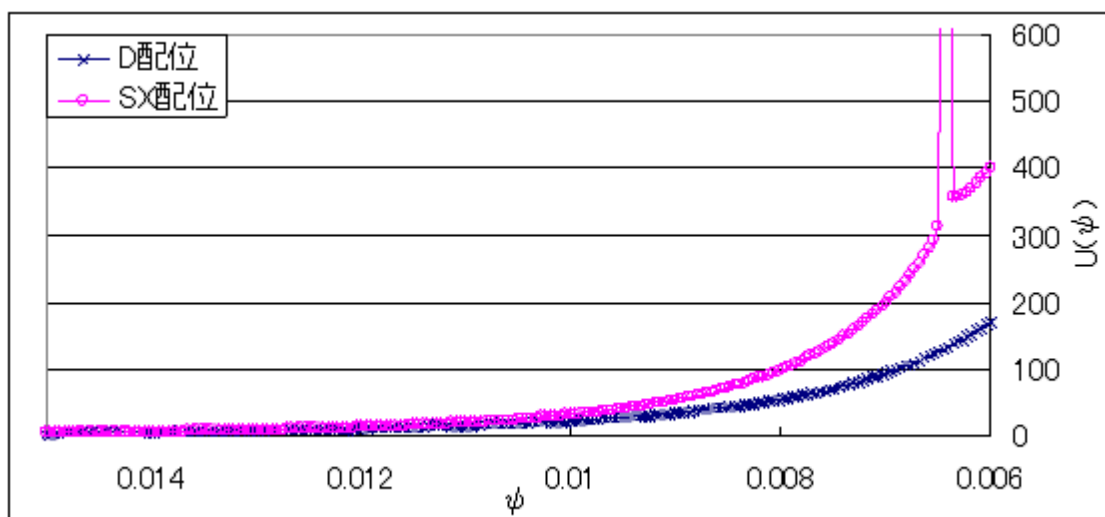


図 4.7 磁束管の比体積の径方向分布

4.3 セパトリックス近傍における物理現象

4.3.1 セパトリックス配位におけるプラズマ変位の径方向変化

前章 3.3.4 項において，プラズマ変位 ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} の径方向に対する比率変化が，安定条件値 $M(\psi)$ に関連していることを説明したが，図 4.6 において $M(\psi)$ の径方向分布がダイポール配位とセパトリックス配位で大きく異なっており，プラズマ変位 ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} の比率，すなわちプラズマの ξ_{\perp} 方向と ξ_{\parallel} 方向に対する運動比率も大きく異なってくると予想される．

前章 3.2.6 項と同様に，磁力線垂直方向と磁力線平行方向の運動エネルギー比率 ($K_{\perp} : K_{\parallel}$) の径方向変化を示したものが図 4.8，図 4.9 である．図 4.8 はダイポール配位における運動エネルギー比率の径方向変化であるが，図 4.6 における $M(\psi)$ の値が正に大きくなるにつ

れて、図 4.8 の磁力線垂直方向の運動エネルギー比率が大きくなっていることがわかる。これは、安定条件値 $M(\psi)$ が正側に大きくなることで、安定性が小さくなり、その結果プラズマの垂直方向変位 ξ_{\perp} が大きくなったためであると考えられる。一方、図 4.9 はセパトリックス配位における運動エネルギー比率の径方向変化であるが、図 4.6 における $M(\psi)$ の値が負に大きくなるにつれて、図 4.9 の磁力線垂直方向の運動エネルギー比率が大きく減少していることがわかる。これは、安定条件値 $M(\psi)$ が負側に大きくなることで、安定性が大きくなり、その結果プラズマの垂直方向変位 ξ_{\perp} が小さくなったためであると考えられる。

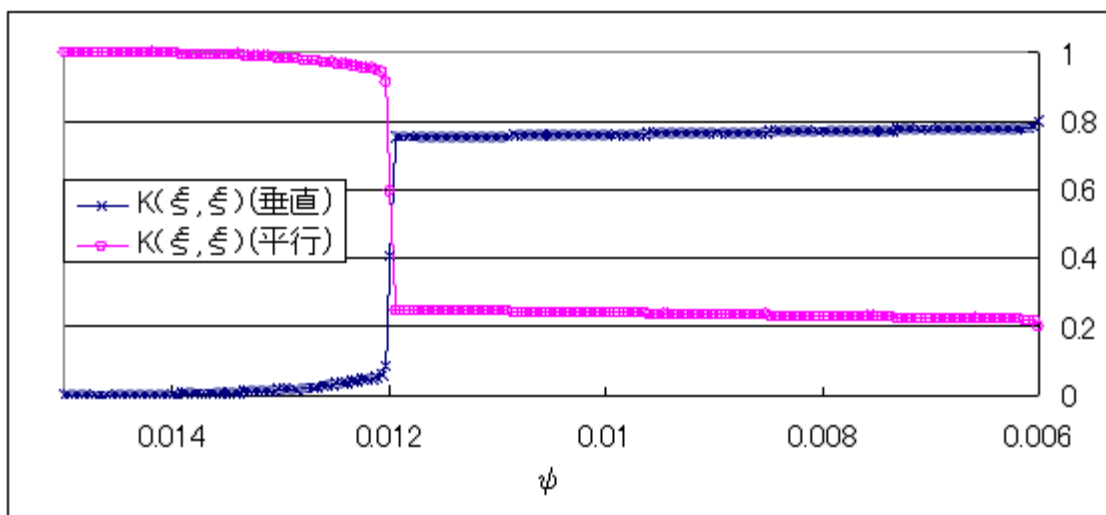


図 4.8 ダイポール配位における運動エネルギー比率の径方向変化

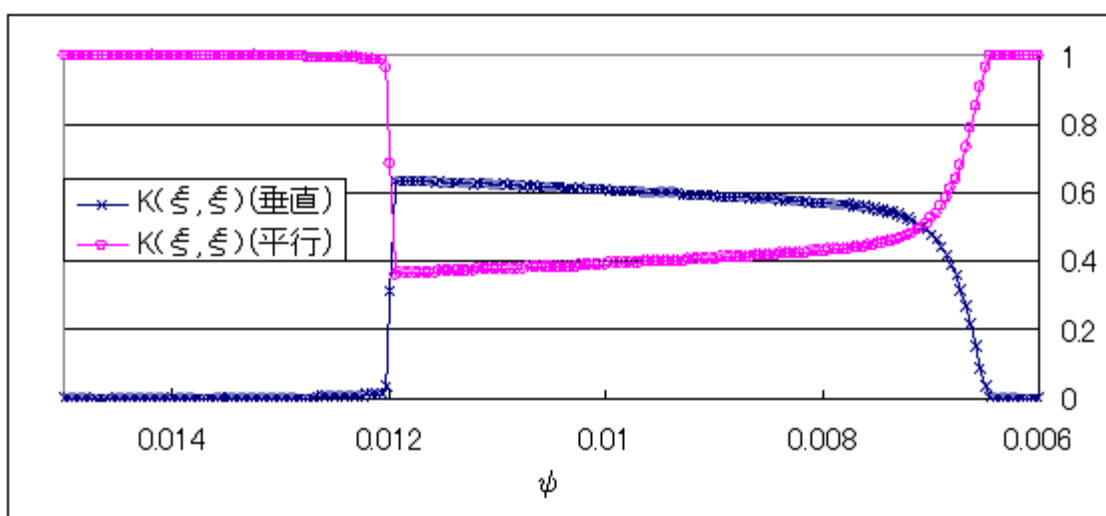


図 4.9 セパトリックス配位における運動エネルギー比率の径方向変化

以上の結果からも，プラズマの変位 ξ_{\perp} と ξ_{\parallel} は安定条件値 $M(\psi)$ に大きく関係していることが確かめられる． $M(\psi)$ は圧力と磁場の平衡量により決まる値であるので，平衡状態で決まる安定性により磁力線が曲げられにくくなることで，磁力線垂直方向変位 ξ_{\perp} が小さくなったことが確認される．

また，図 4.6 の $M(\psi)$ 径方向変化から，ダイポール配位では外側領域になるほど安定性が小さくなるので，エッジ領域で不安定性が出やすいことが確認できる．しかし一方で，セパトリックス配位ではエッジ領域でセパトリックスに近づくほど安定性が大きくなっており，ダイポール配位とは反対にエッジ領域では不安定性が出にくいと予想される．この予想に関しては，次章で確認することにする．

4.3.2 セパトリックス配位におけるエネルギー密度分布の径方向変化

図 4.9 から，セパトリックス配位では径方向外側領域になるほどプラズマの磁力線垂直方向変位 ξ_{\perp} が小さくなり，平行方向変位 ξ_{\parallel} が大きくなっていく様子が確認されるが，それに伴い径方向に対してエネルギー密度の磁力線方向分布も変化していくと考えられる．ここでは，径方向に対して比較的内側の磁力線 ($\psi = 0.008$) とセパトリックス近傍の磁力線 ($\psi = 0.0065$) におけるプラズマの変位分布を比較することで，径方向に対するプラズマの運動変化を確認していく．

図 4.10 は $\psi = 0.008$ と $\psi = 0.0065$ における磁力線上のプラズマ変位 ξ_{\perp} , ξ_{\parallel} をそれぞれ表している． $\psi = 0.008$ におけるプラズマ変位はダイポール配位における変位分布 (図 3.10b , 図 3.10c) と似ていることがわかる．これは $\psi = 0.008$ の磁力線は比較的内側に分布しているため，吊上げコイルによる磁場の影響が少ないためであると思われる．一方，セパトリックス近傍の磁力線 ($\psi = 0.0065$) におけるプラズマ変位はその分布が大きく異なっていることがわかる．図 4.7 からセパトリックス近傍の磁力線の方が曲げられに

くいので，図 4.9 のようにプラズマの磁力線垂直方向の運動が小さくなるために，磁力線垂直方向変位 ξ_{\perp} の分布も全体的に小さくなっているが (図 4.10a)，ポロイダル角 $\theta \sim \pi/3$ 付近での変位が卓越して大きくなっていることがわかる．また図 4.10b から $\theta \sim \pi/3$ 付近を中心にプラズマが磁力線平行方向に大きく変位することがわかる．

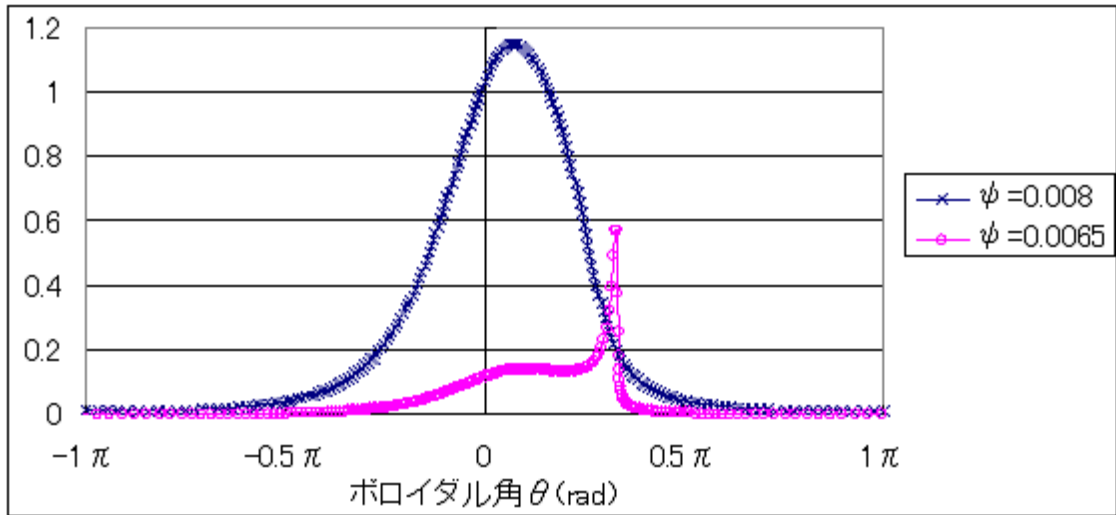


図 4.10a プラズマの磁力線垂直方向変位分布の比較

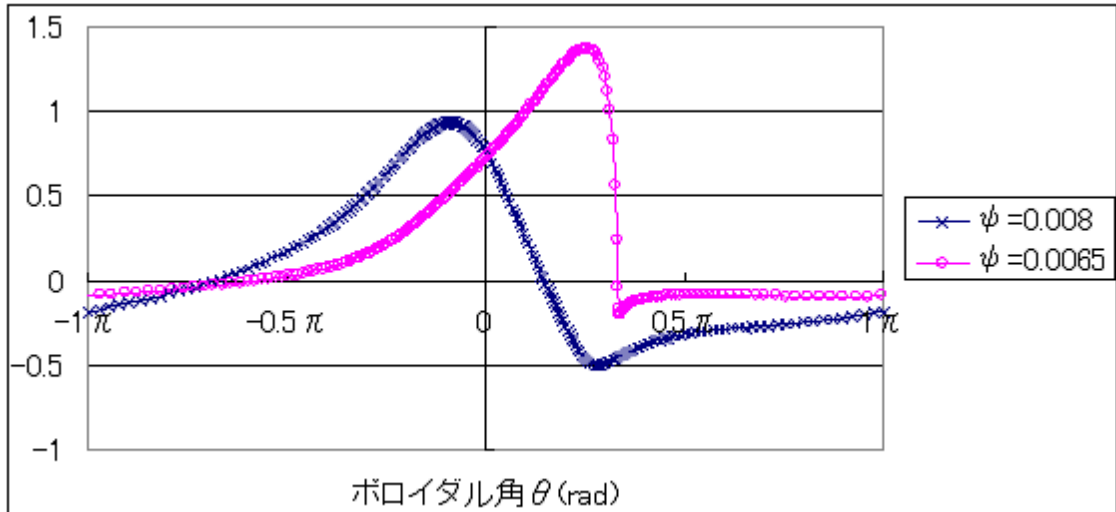


図 4.10b プラズマの磁力線平行方向変位分布の比較

またこの傾向はセパトリックスに近い磁力線ほど大きいことが図 4.11 からわかる．図 4.11a では，セパトリックスに近くなるほど磁束管の圧縮性による安定化効果が強くなるため ξ_{\perp} は小さくなっていくが， $\theta \sim \pi/3$ 付近での変位が局所的に大きくなっていくこ

とがわかる．また図 4.11b から，セパトリックスに近づくほど $\theta \sim \pi/3$ 付近での ξ_{\perp} が大きくなっていくことがわかる．セパトリックス近傍の磁力線においてこのような特徴的な変位分布になるのは， $\theta \sim \pi/3$ 付近はセパトリックスの X 点に近い位置であるので (図 4.2)，磁場強度が局所的に非常に小さくなっているためである (図 4.12b)．すなわち，セパトリックス近傍の磁力線では，よりモードが局在化した構造になりやすいと考えられる．

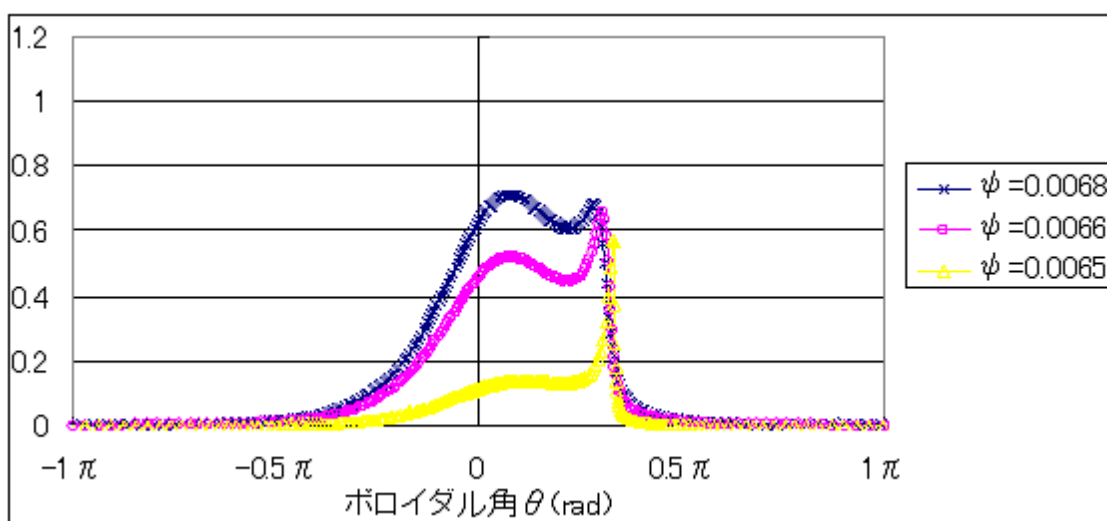


図 4.11a セパトリックス近傍でのプラズマの磁力線垂直方向変位分布の比較

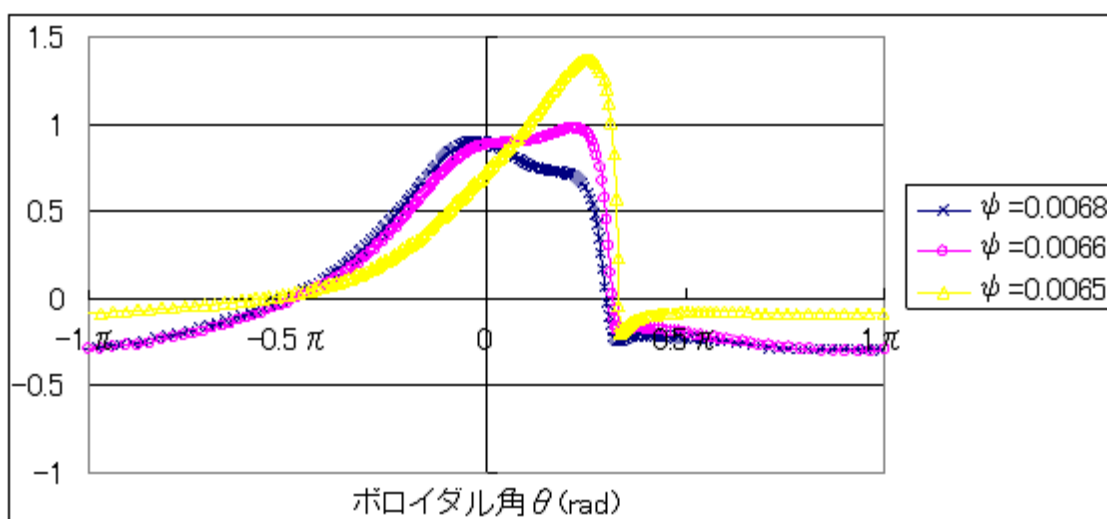


図 4.11b セパトリックス近傍でのプラズマの磁力線平行方向変位分布の比較

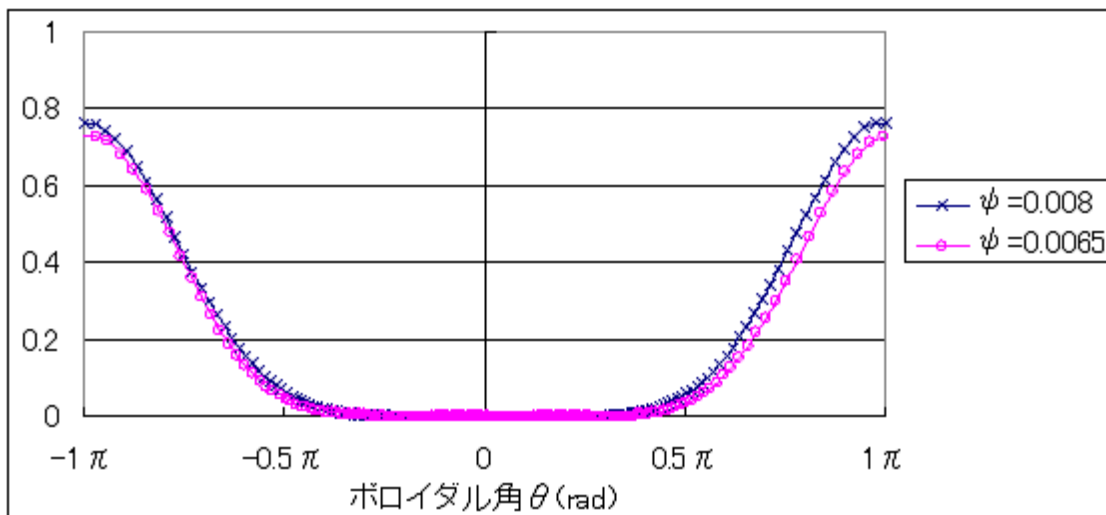


図 4.12a 磁場強度分布

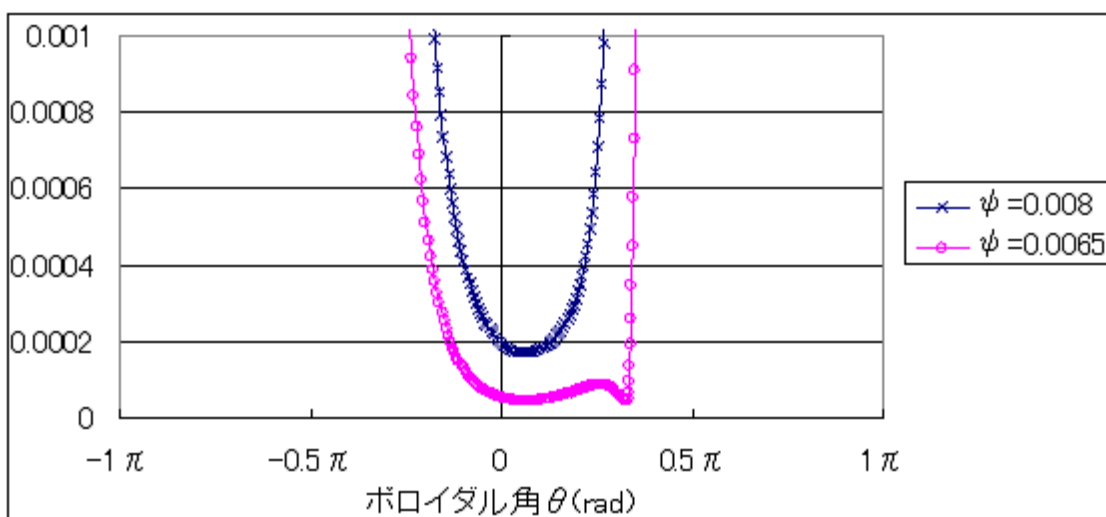


図 4.12b 磁場強度分布 (コイル外側領域赤道面上付近を拡大)

第5章 RT-1 安定限界解析

5.1 安定限界の物理的意味

5.1.1 エッジ領域における不安定性

3.3.5 項で述べたように，圧力分布を $p(\psi) \sim \psi^n$ の関数形として仮定し，RT-1 での安定限界解析を行う．ここではまずエッジ領域における不安定性の出方を確認するために，圧力分布の関数形を $p(\psi) \sim \psi^7$ で与えることにする (図 5.1)．この圧力分布に対して，ピーク圧力を 0Pa から 500Pa まで変化させて安定限界解析を行ったところ，473Pa よりピーク圧力が高くなるとエッジ領域に不安定性が生じ，安定限界 ($\beta_{max} = 0.775$) となることがわかった．このときの平衡磁場配位の様子は図 5.2b である．ピーク圧力 100Pa での平衡磁場配位 (図 5.2a) と比較すると，高 β な平衡では，プラズマの反磁性効果によって磁場配位が変化し，セパトリックスの位置がより外側の磁力線に移動することがわかる．

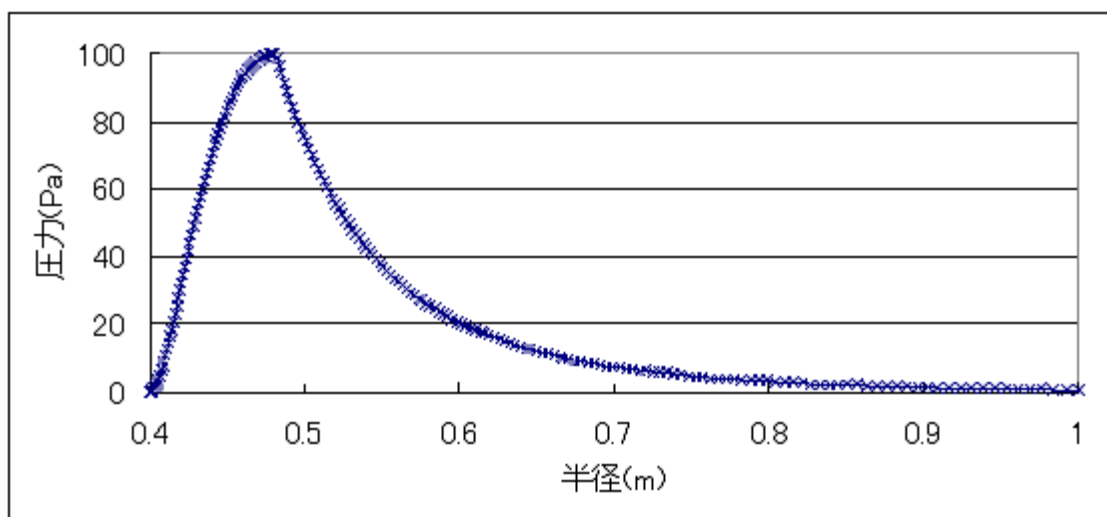


図 5.1 圧力分布関数 $p(\psi) \sim \psi^7$ (ピーク圧力 100Pa , $\beta_{max} = 0.081$)

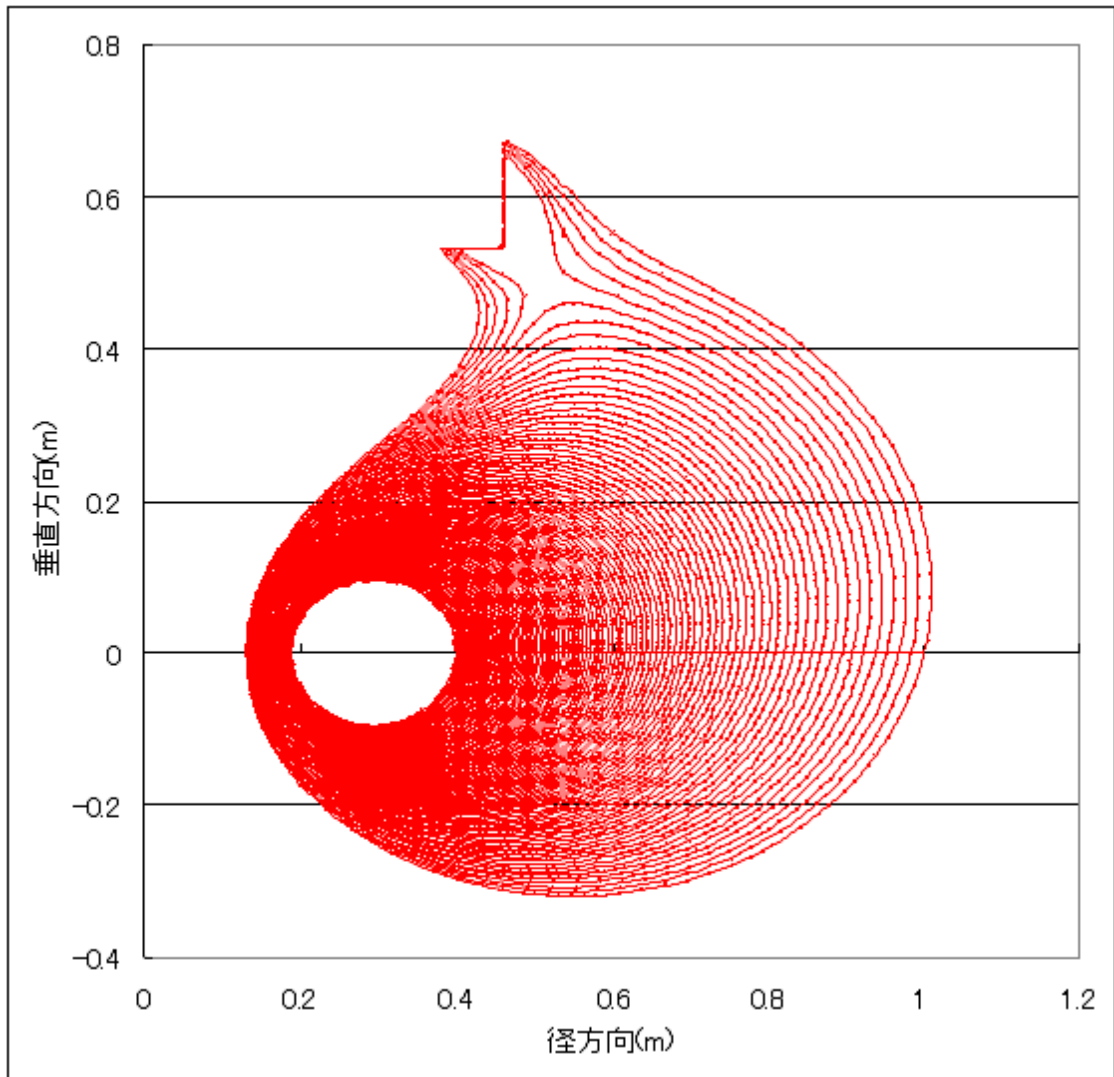


図 5.2a RT-1 平衡磁場配位 (低 平衡時 : ピーク圧力 100Pa , $\beta_{max} = 0.081$)

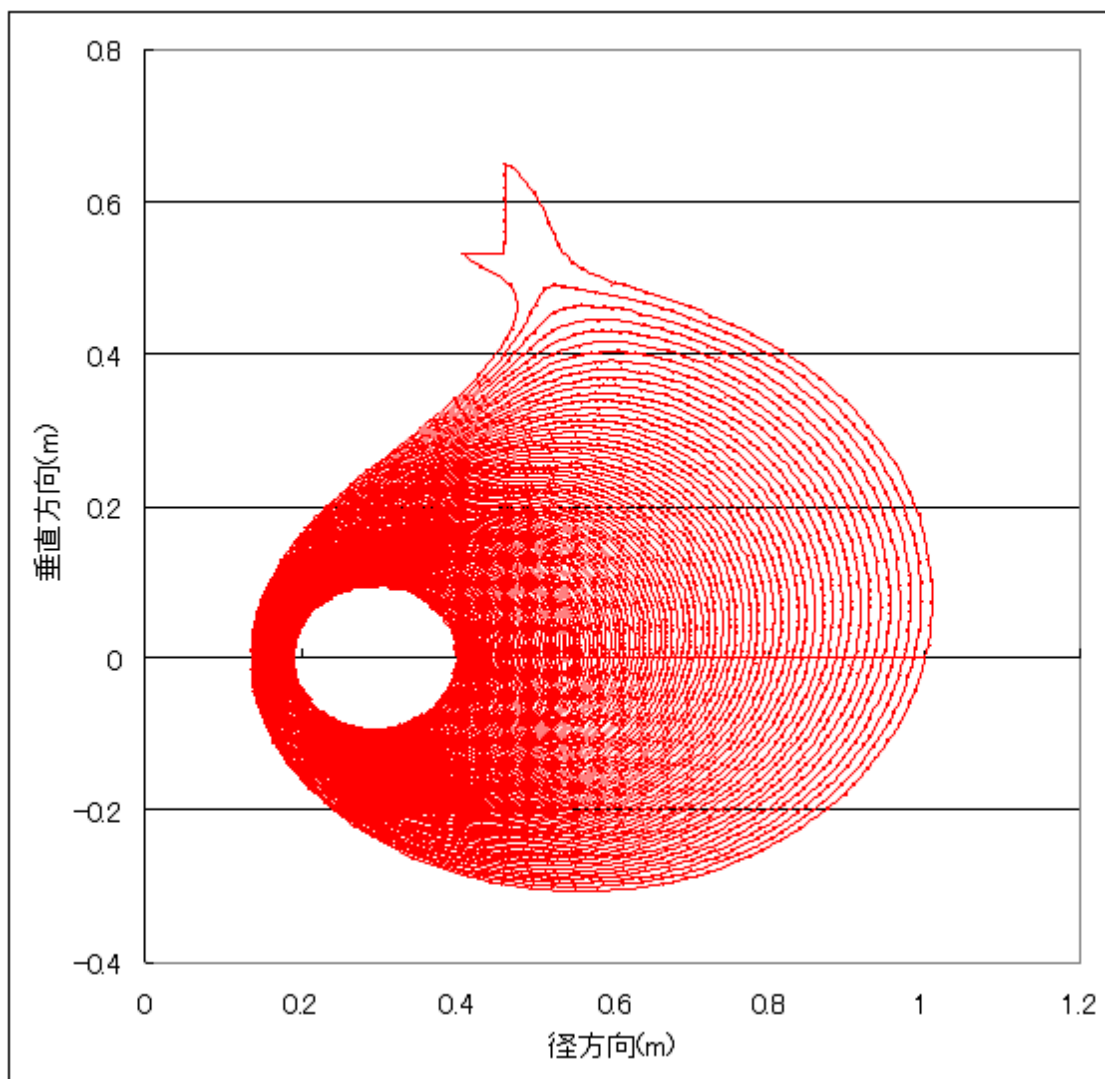


図 5.2b RT-1 平衡磁場配位 (安定限界時 : ピーク圧力 473Pa , $\beta_{max} = 0.775$)

高 β なプラズマ平衡ではエッジ領域に不安定性が生じたが、ピーク圧力に対してこの不安定性の最大成長率変化をプロットすると図 5.3 のようになる。図 5.3 から、安定限界のピーク圧力 473Pa を超えるプラズマ平衡において不安定性が生じており、圧力が高くなるほど成長率も増大していくことがわかる。ピーク圧力 480Pa における不安定性の出方を径方向に対して表したものが図 5.4 である。不安定性はエッジ領域の $R=0.97\text{m}$ 付近で生じていることがわかる。

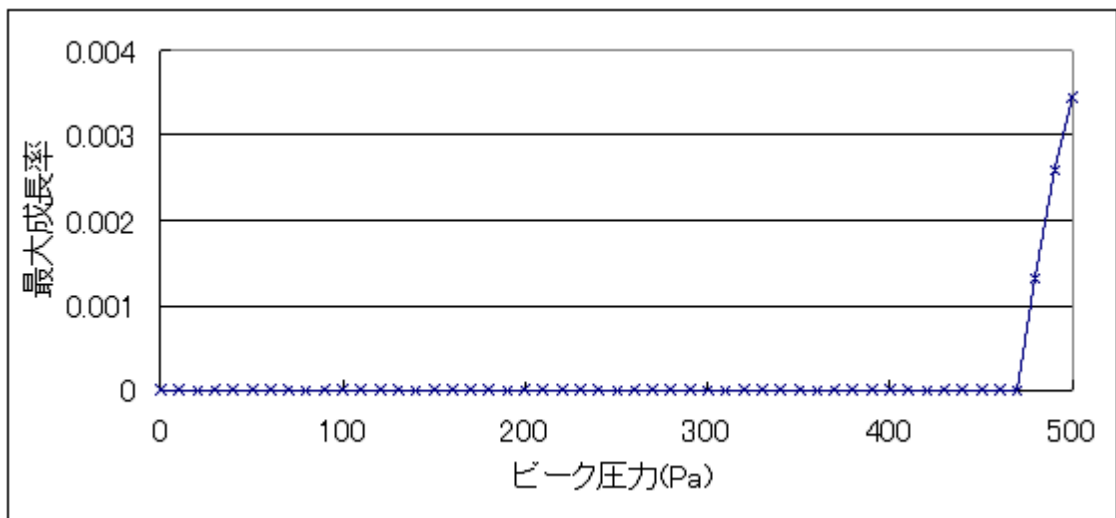


図 5.3 $p(\psi) \sim \psi^7$ における安定限界解析

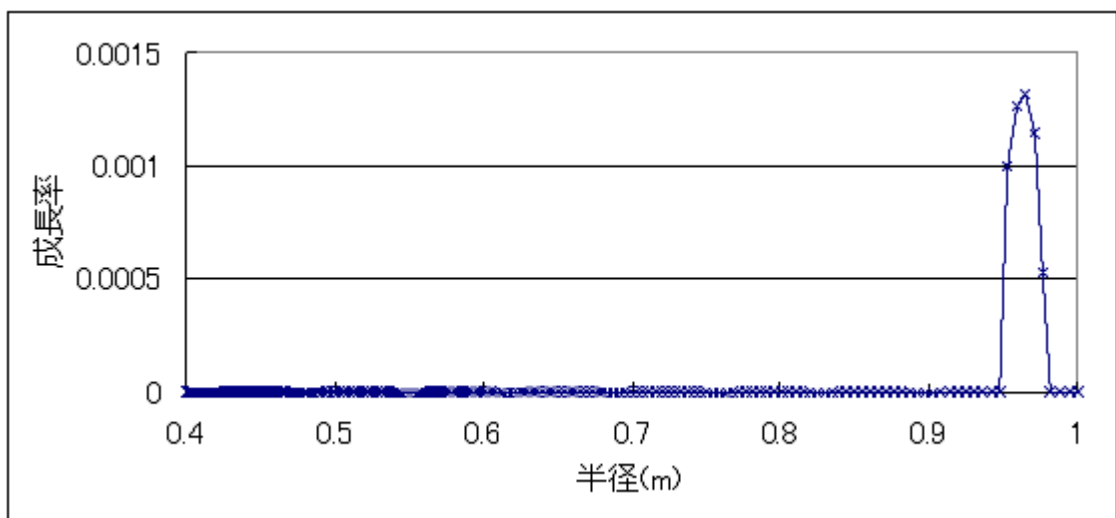


図 5.4 不安定性の出方 (ピーク圧力 480Pa , $\beta_{max} = 0.777$)

ところで、4.3.1項において、エッジ領域における不安定性の成長率は、セパトリックス近傍の磁力線では起こりにくいと予想したが、図5.4ではセパトリックス近傍 ($R \sim 0.99$) よりも内側の領域から不安定性が生じていることが確認できる。

エッジ領域においてこのような不安定性が生じる理由を、安定条件値 $M(\psi)$ の径方向分布を見ることで確認していく。ピーク圧力 100Pa ($\beta_{max} = 0.081$)、 300Pa ($\beta_{max} = 0.328$)、そして不安定性が出始めるときのピーク圧力 480Pa ($\beta_{max} = 0.777$) の3つの圧力分布 (図5.5) における安定条件値 $M(\psi)$ の径方向分布を示したものが図5.6である。図5.6ではセパトリックスの位置がピーク圧力 100Pa のとき $R=0.925\text{m}$ 、 300Pa のとき $R=0.965\text{m}$ 、 480Pa のとき $R=1.0\text{m}$ であり、圧力が上がるに連れてセパトリックスは外側に移動する。図5.6からは、圧力が高くなるほどエッジ領域における $M(\psi)$ が正方向に近づいていく様子がわかり、すなわちエッジ領域では不安定化する傾向にあることが考えられる。特にピーク圧力 480Pa のときは、エッジ領域において $M(\psi) > 0$ となる領域があり、この領域が図5.4の不安定性の生じる領域と一致することが確認できる。しかし、不安定性が生じているピーク圧力 480Pa のときでもセパトリックス近傍の磁力線における $M(\psi)$ は負であり、セパトリックス近傍の磁力線では磁力線がより曲げられにくいために不安定性が生じにくくなるという3.3.4項および4.3.1項での考察が正しいと確認できる。

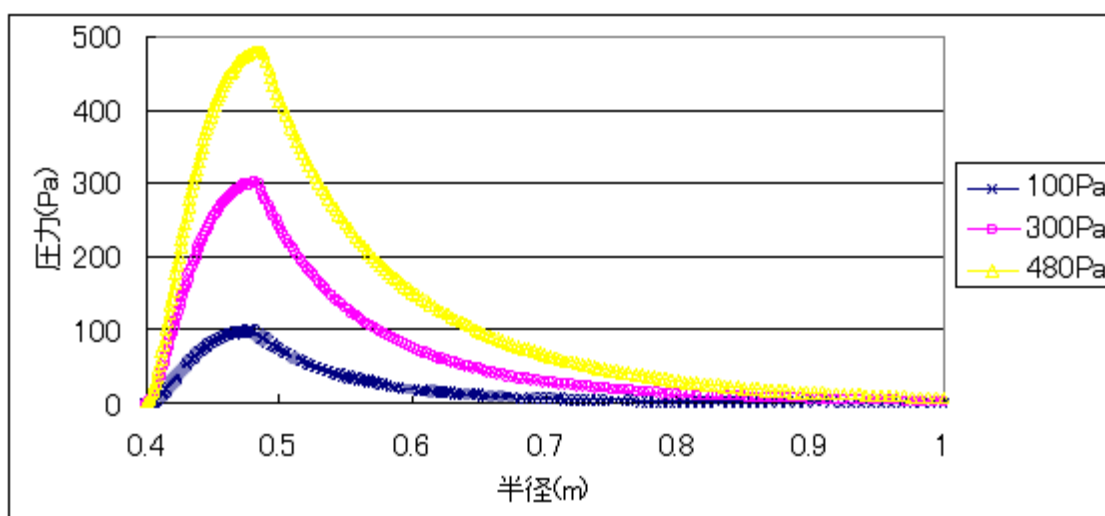


図 5.5 圧力分布の比較

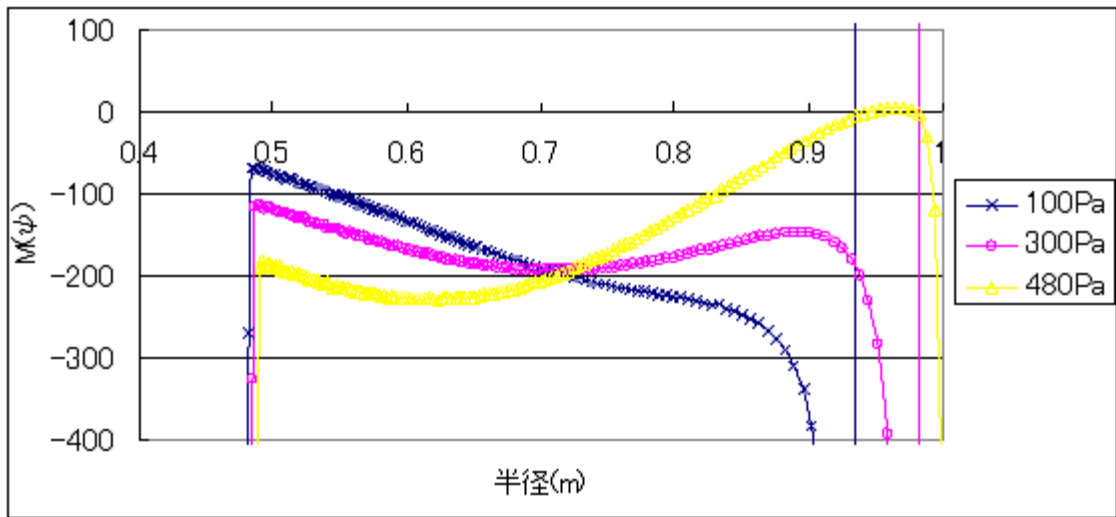


図 5.6 安定条件値 $M(\psi)$ の径方向変化の比較

図 5.6 からは圧力が高くなるほど，安定限界値が正方向に変化するのでエッジ領域が不安定化していくことが確認されたが，この変化は高 β プラズマによる磁場配位の変化に原因があると考えられる．高 β 平衡のとき，磁場は図 5.2a から図 5.2b の分布へと配位が変化していくが，その変化に伴って磁束管の比体積も変化していくと考えられるからである．図 5.7 はそれぞれの圧力分布における磁束管の比体積 $U(\psi)$ の変化を示したものである．この図から，圧力が高くなるほど磁束管の比体積は減少し， $U(\psi)$ の径方向変化が緩やかになっていくことがわかる．すなわち，磁束管の比体積変化が緩やかになることで，隣り合う磁束管同士が交換されやすくなるために不安定性が生じやすくなると考えられる．

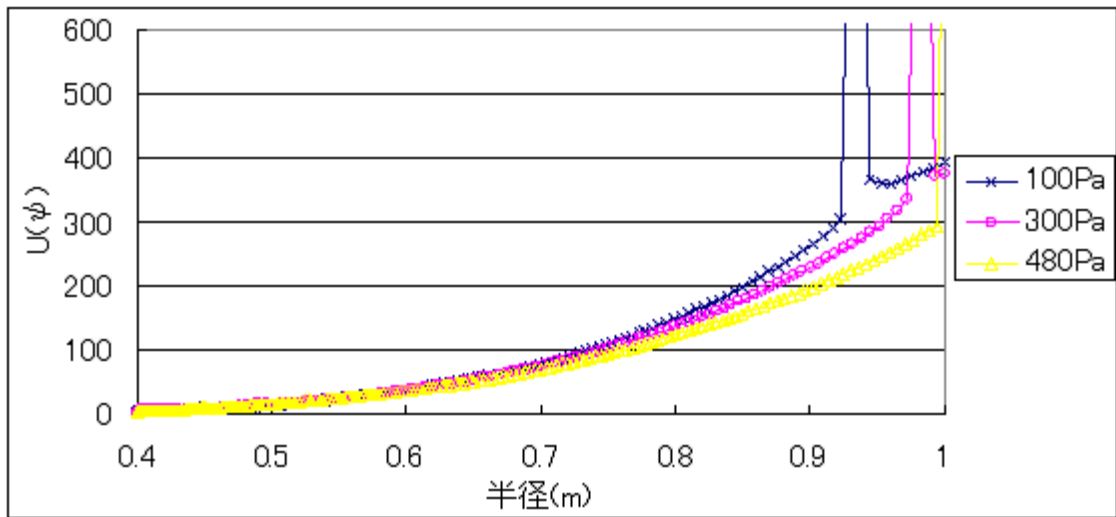


図 5.7 磁束管比体積の径方向分布の比較

5.1.2 コア領域における安定性

$p(\psi) \sim \psi^n$ の関数形では、 n の値が大きいほどプラズマの圧力が高い領域 (コア領域) における圧力勾配が大きくなり、コア領域で不安定が生じることは当然考えられる。そこで本項では n の大きい圧力分布において、圧力を上げたときにコア領域における不安定がどのように変化するかを確認するため、関数形を $p(\psi) \sim \psi^7$ より急勾配となる $p(\psi) \sim \psi^8$ で与えて安定性解析を行う。低 β な平衡としてピーク圧力 100Pa ($\beta_{max} = 0.076$) での圧力分布は図 5.8 のようになり、 $p(\psi) \sim \psi^7$ のピーク圧力 100Pa ($\beta_{max} = 0.081$) の分布と比較するとコア領域において勾配が大きくなることが確かめられる。この分布に対して安定性解析を行うと、コア領域において不安定が生じることが確認された (図 5.9)。

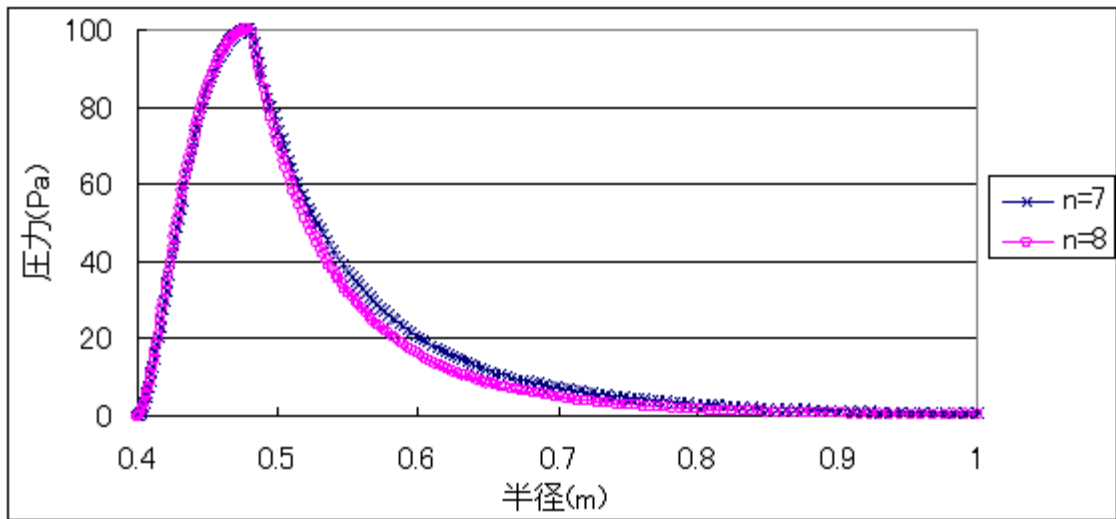


図 5.8 圧力分布関数 $p(\psi) \sim \psi^7$ と $p(\psi) \sim \psi^8$ (ピーク圧力 100Pa) の比較

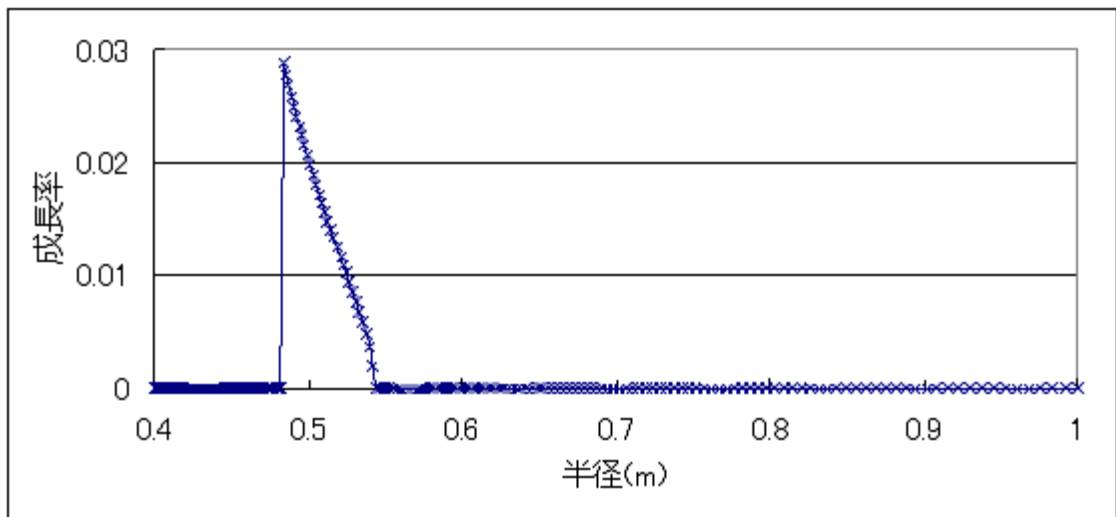


図 5.9 コア領域における不安定性 (ピーク圧力 100Pa , $\beta_{max} = 0.076$)

次に、この関数形 $p(\psi) \sim \psi^8$ に対して、ピーク圧力を 0Pa から 500Pa まで与えて安定限界解析を行い、不安定性の成長率がどのように変化するかを調べたところ、圧力が高くなるとコア領域における不安定性が無くなるという結果を得た。ピーク圧力に対する不安定性の最大成長率をプロットしたものが図 5.10 であるが、低 β 平衡におけるコア領域での不安定性がピーク圧力 238Pa ($\beta_{max} = 0.213$) のときに安定化されていることがわかる。そしてさらにピーク圧力を上げていくと、410Pa ($\beta_{max} = 0.470$) より高いピーク圧力でのプラズマ平衡においてエッジ領域での不安定性が生じた。

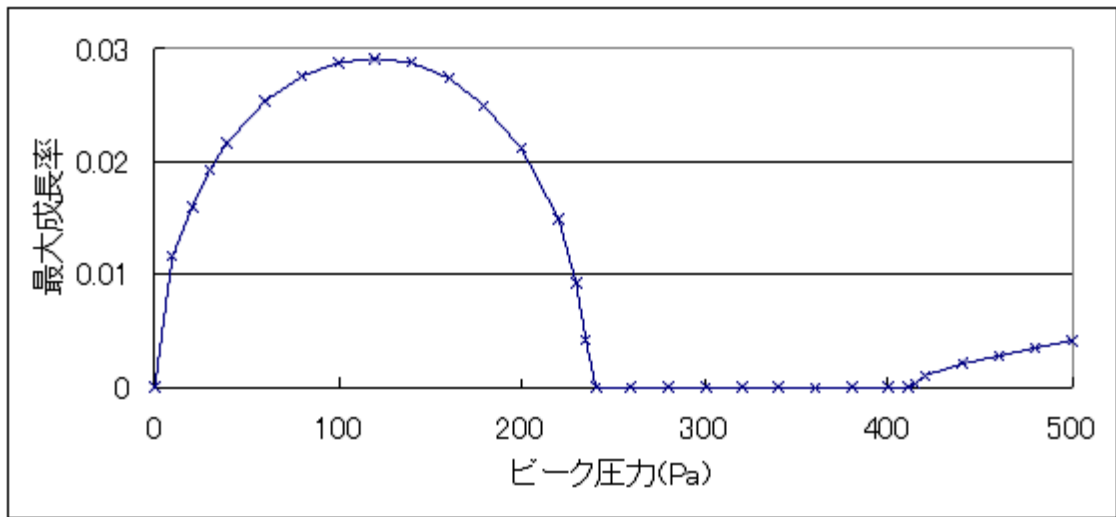


図 5.10 $p(\psi) \sim \psi^8$ における安定限界解析

このような高 β 平衡になることでコア領域における不安定性が安定化されることの要因を調べるために、ピーク圧力 100Pa ($\beta_{max} = 0.076$)、安定化されているピーク圧力 300Pa ($\beta_{max} = 0.291$)、そして不安定性が再び出始めるときのピーク圧力 420Pa ($\beta_{max} = 0.490$) の 3 つの圧力分布 (図 5.11) における安定条件値 $M(\psi)$ の径方向分布を求めた (図 5.12) . 図 5.12 から、ピーク圧力 100Pa のときにはコア領域において $M(\psi) > 0$ となっていたものが、圧力が上がる (ピーク圧力 300Pa) と $M(\psi) < 0$ となっており、コア領域に生じていた不安定性が安定化されたことが確認される . そしてさらに圧力が上がる (ピーク圧力 420Pa) と、エッジ領域において $M(\psi) > 0$ となり、不安定性が生じる様子も確かめられる . この $M(\psi)$ の変化の要因を調べるために、コア領域における磁束管の比体積 $U(\psi)$ の径方向変化 (図 5.13b) を確認すると、不安定性が生じていたコア領域 $R=0.5m$ 付近では、高 β な平衡ほど $U(\psi)$ が大きくなっていた . エッジ領域とは反対にコア領域では、磁束管比体積が増大することで隣り合う磁束管が交換されにくくなり、安定化傾向になると考えられる .

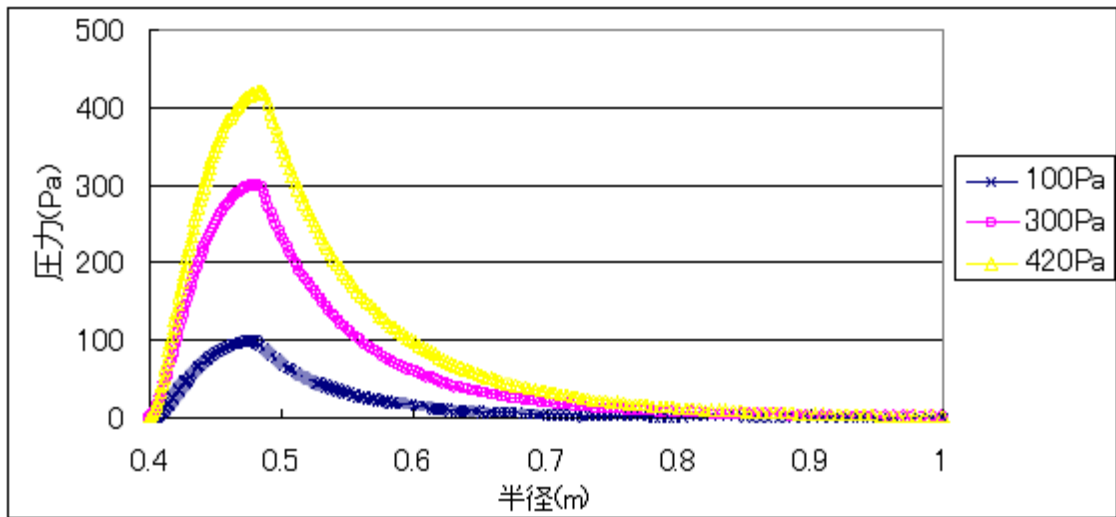


図 5.11 圧力分布の比較

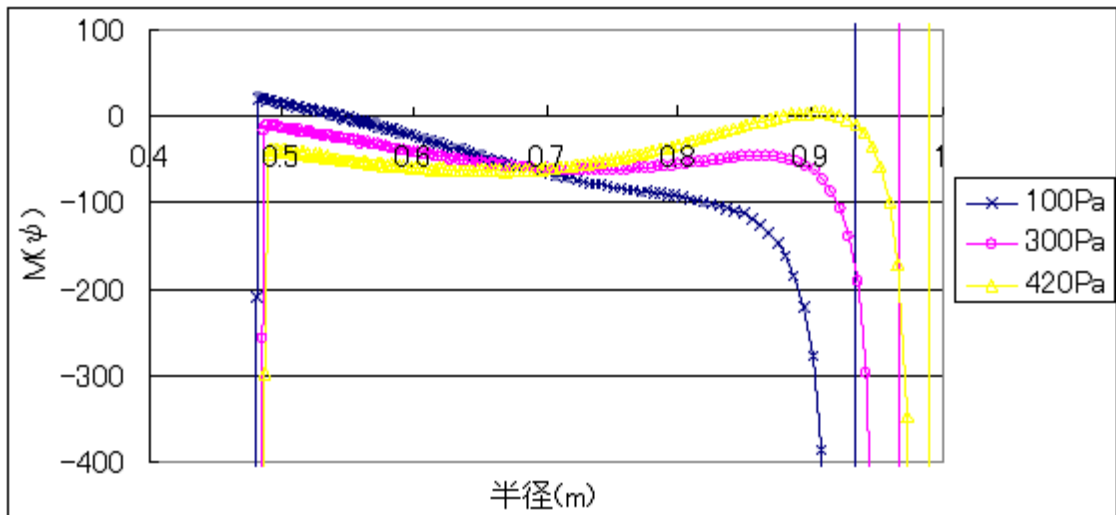


図 5.12 安定条件値 $M(\psi)$ の径方向変化の比較

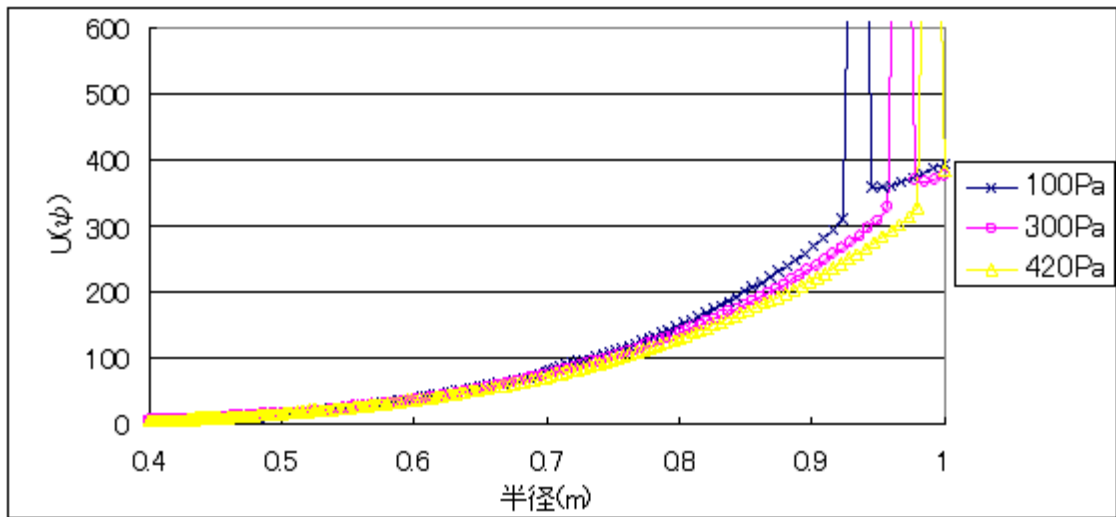


図 5.13a 磁束管比体積の径方向分布の比較

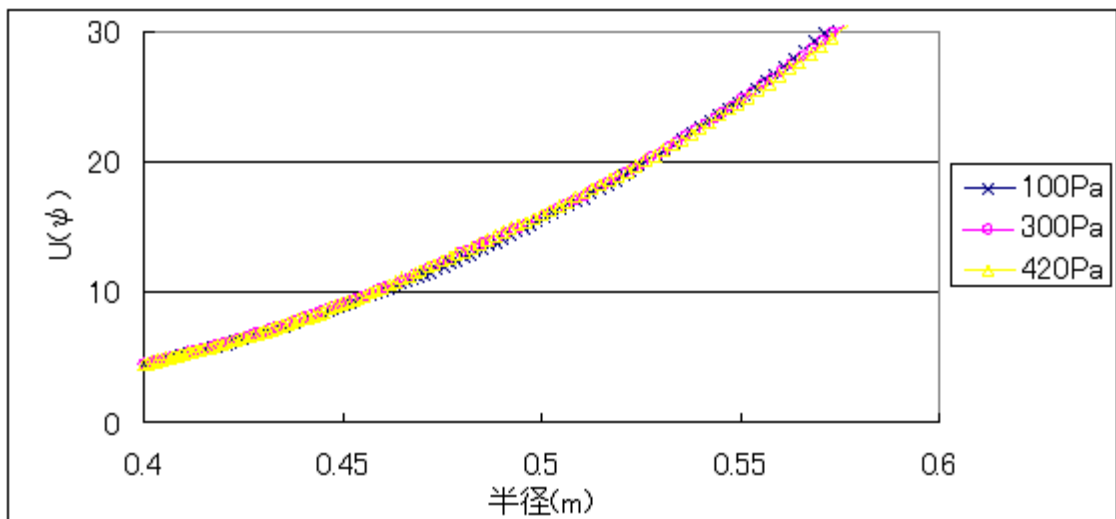


図 5.13b 磁束管比体積の径方向分布の比較 (コア領域を拡大したもの)

5.1.3 RT-1 における安定限界の物理的解釈

これまでプラズマ平衡が高 β になるに連れて、エッジ領域に不安定性が生じる要因、コア領域での不安定性が安定化される要因を考察してきたが、どちらも高 β になるに連れて磁場配位が変化し、磁束管の比体積が変化していくことに要因があることがわかってきた。すなわち、高 β 平衡では、コア領域の磁束管比体積が増大するために安定化し、一方エッジ領域では減少するために不安定化することが示されたが、磁束管の比体積変化

が径方向に対してこのような非一様に変化をするのは、セパトリックスという境界内の有限な領域においてプラズマが閉じ込められるからであると考えられる。その理由は、セパトリックスの存在により、プラズマ圧力による磁場配位の変化が制限されるためである。セパトリックスは吊上げコイルにより装置上方に引っ張られたような形状になる(図 1.6)が、それにより磁場配位がより内側に押し込められるような働きを持ち、磁場配位が自由に変化することを制限するものと思われる。したがって、RT-1 の高 β 平衡においてエッジ領域で不安定性が生じたことの物理的解釈は以下のようなになる。まず図 5.11 のように、ピーク圧力の高い平衡では、そのコア領域においてプラズマ圧力が大きくなるので、その強い反磁性効果のために磁場が押し広げられるように変化し、磁束管の比体積が増大する。しかし、エッジ領域では圧力が低いために反磁性効果が小さく、またセパトリックスの存在により磁場配位の変化が制限されるために磁束管の比体積は増大することはできない。むしろコア領域における磁束管比体積の増大変化のために、エッジ領域では比体積が減少せざるを得なくなったと考えられる。その結果、磁束管の圧縮性による安定化効果が減少し、エッジ領域での不安定性が抑えきれなくなったと考えられる。

また、セパトリックスの存在しないダイポール配位においても、高 β プラズマ平衡ではエッジ領域に不安定性が生じることが確認されているが、これもエッジ領域において磁束管比体積が減少したことが原因である。セパトリックス配位ではセパトリックスという配位的境界によって磁場配位の変化が制限されたが、ダイポール配位においても同様に磁場配位の変化が制限されることが、エッジ領域での磁束管比体積減少に繋がっていると考えられる。その理由は、ダイポール配位では「壁」という物理的境界のために、プラズマの存在領域が限定されるためである。プラズマの存在領域が限定され、プラズマが外側に広がることのできない構造が、磁場配位の変化を制限していると考えられる。

宇宙のような無限領域である空間に閉じ込められるプラズマでは、「セパトリックス」

という配位的境界，または「壁」という物理的境界によって磁束管の比体積変化が制限されることはないので，プラズマ圧力の増大に伴って磁束管比体積も増大するために安定性が保たれる．しかし，実験室系という有限領域では，このような磁場配位変化に制限があるために安定限界が存在すると考えられる．

5.2 RT-1 における理論的安定限界領域

前節までの解析により，圧力分布関数 $p(\psi) \sim \psi^7$ の安定限界は，エッジ領域での不安定性により上限が $\beta_{max} = 0.775$ (ピーク圧力 473Pa) となり，また圧力分布関数 $p(\psi) \sim \psi^8$ のときはコア領域における不安定性によって下限が $\beta_{max} = 0.213$ (ピーク圧力 238Pa) に決まり，エッジ領域における不安定性によって上限が $\beta_{max} = 0.470$ (ピーク圧力 430Pa) に決まることがわかった．同様にして 圧力分布関数 $p(\psi) \sim \psi^n$ の n を変えて安定限界解析を行うと，安定なプラズマ平衡が取り得るピーク圧力と β 値の範囲は n の値によって異なり，図 5.14，図 5.15 のようになる．両図では不安定領域に斜線を引いてあり，したがって安定なプラズマ平衡の範囲は斜線が引かれていない領域である．

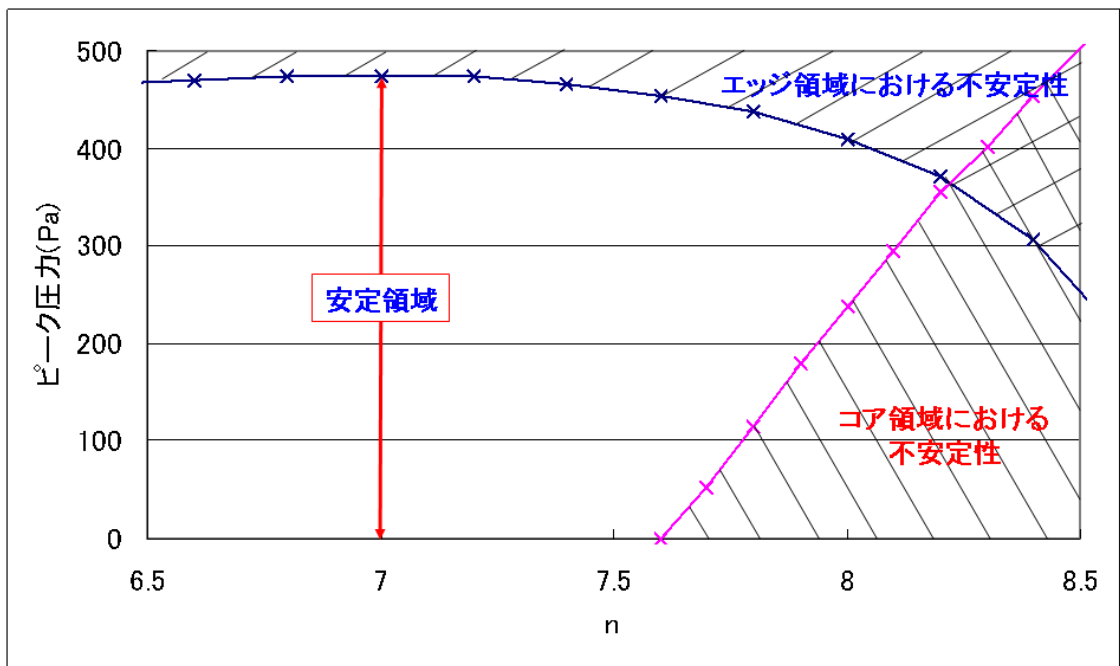


図 5.14 安定平衡なピーク圧力領域

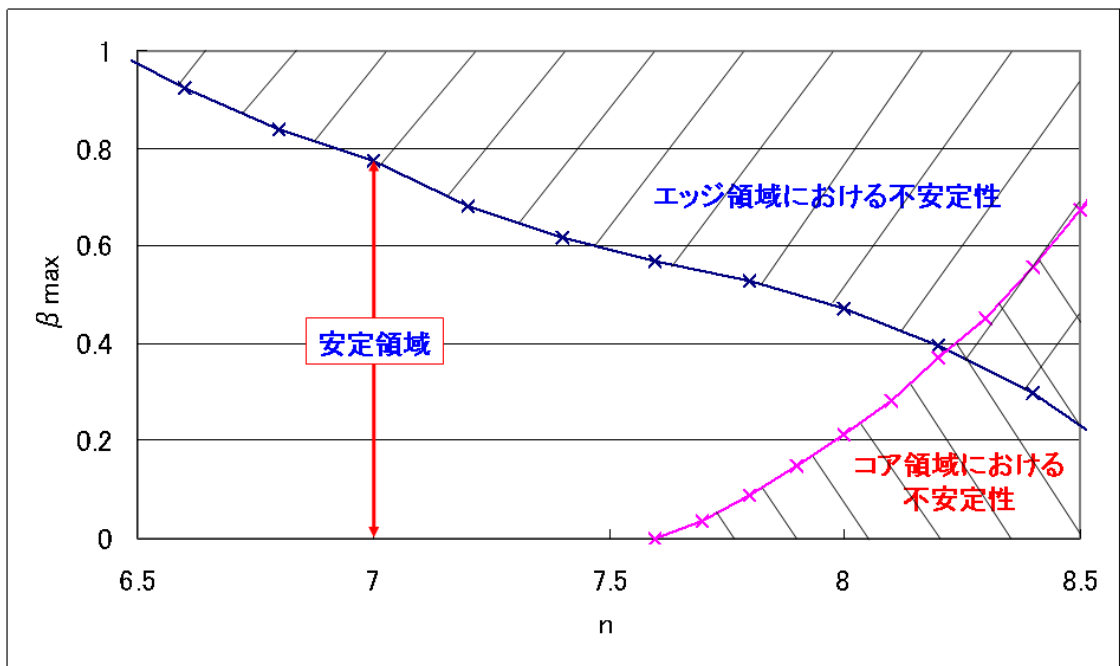


図 5.15 安定平衡な β 値領域

図 5.14, 図 5.15 では, 横軸に n を取っており, 右側ほどコア領域において圧力が急勾配になる分布となっている. したがって, $n > 7.6$ ではコア領域における急な圧力勾配のために低 β 領域で不安定性が生じ, 安定限界が定まっていることがわかる. n が小さくなるほど, 圧力勾配は緩やかな分布になるので, 安定限界の下限は小さくなり, $n \leq 7.6$ の圧力分布関数では安定限界の下限は存在しなかった.

一方, エッジ領域での不安定性による安定限界の上限は, n が小さくなるほど エッジ領域でプラズマ圧力が大きく残るので不安定になりにくく, β 値は大きくなっていった (図 5.15). しかし, ピーク圧力に関しては, n を小さくしても 474Pa を超えることはなかった (図 5.14). この理由は, 前項での考察と同様で, 実験室系という有限な領域におけるプラズマ閉じ込めではセパトリックスの存在のために磁束管の比体積変化が制限されてしまうため, エッジ領域では圧縮性の安定化効果が効きにくくなり, n が小さくエッジ領域でのプラズマ圧力が比較的大きく残っていても, エッジ領域での不安定性が抑えられなくなると考えられる.

また, 図 5.15 から β 値が 1 を超えるようなプラズマ平衡も理論的には安定であることが示される. しかし, このようなプラズマ平衡が実験的に存在するかどうかは現在の計測段階では明らかになっていない. 今後は RT-1 実験における計測環境の改善と, その計測による実験データ値を参考にするすることで, 実験的に存在する平衡状態の領域を考察する必要がある.

第6章 結論

本研究では磁力線平行方向の運動も含めた圧力駆動不安定性の MHD 理論解析を，RT-1 の有限 β なプラズマ平衡に即して行った．第 3 章では圧縮性による安定化効果の物理的意味を確認し，磁力線平行方向の運動が安定性に与える影響を考察した．第 4 章では吊上げコイルによる磁場配位の変化が安定性に与える影響について考察をした．そして第 5 章では，RT-1 において高 β 平衡時に不安定性が生じる要因を明らかにし，その物理的解釈をまとめた．本研究における成果を整理すると以下ようになる．

1. 圧縮性による安定化効果の物理的意味

磁気圏型プラズマでは，磁場の圧縮性による安定化効果が圧力駆動による不安定性を抑えていることが確認された．この圧縮性の安定化要因は磁束管の比体積変化にあることが示され，磁力線の変位に伴う磁束管比体積の圧縮・膨張に必要なエネルギーが安定化エネルギーとなっている．磁力線の曲げられにくさは，圧力の変化と磁束管の比体積変化で表される安定条件式 (3.14) の値に依存しており，磁力線が曲げられにくい領域では，プラズマは磁力線垂直方向に変位できないため，磁力線平行方向の運動に大きく偏る．一方，磁力線が曲げられやすい領域では，プラズマの磁力線垂直方向変位は大きくなり，またこのときの磁力線平行方向のプラズマ変位は不安定性を助長させる働きがある．したがって，磁力線平行方向の圧縮性を安易に排除したモデルによる解析では，圧縮性の安定化効果を過大評価する可能性がある．ので，安定性解析を行う際には磁力線平行方向の運動も考慮に入れる必要がある．

2. 吊上げコイルによる磁場配位の変化が安定性に与える影響

ダイポール配位，セパトリックス配位それぞれにおいて，同じ圧力分布関数 $p(\psi)$ での安定性解析を行ったところ，セパトリックス配位の方が圧縮性による安定化効果が大きくなることが明らかになった．その要因は，磁束管の比体積変化にある．すなわち，吊上げコイルにより磁場配位が装置上方に引き伸ばされるような変化をすることで，磁束管の比体積が増大し，圧縮性の安定化効果が大きくなったと考えられる．また，セパトリックス近傍での磁力線では，局所的に磁場が弱くなるところでモードが局在化しやすくなることが確認された．

3. RT-1 における安定限界解析

RT-1 では高 β 平衡になるに連れて，磁場配位の変化によりコア領域では安定化し，エッジ領域では不安定化していくことが明らかになった．すなわち，コア領域での圧力勾配が大きく，不安定性が生じる圧力分布関数 $p(\psi)$ であっても，高 β 平衡になるに連れてコア領域における不安定性は安定化され，やがてエッジ領域での不安定性が生じる．このような安定限界が存在する理由は，セパトリックスの存在によって磁束管の比体積変化が制限されるためであると考えられる．すなわち，圧力の高いコア領域ではプラズマの反磁性効果により磁束管比体積が増大することで安定化するが，一方でエッジ領域における磁束管比体積は磁場配位変化の制限のために減少し，圧縮性による安定化効果が減少するために不安定性が抑えられなくなると考えられる．以上が，RT-1 の高 β 平衡時における不安定化の物理的メカニズムである．

付録A RT-1 平衡コードの計算

A.1 Grad-Shafranov 方程式

軸対称配位を考える．円柱座標系 (R, ϕ, Z) を用い，磁場を

$$\mathbf{B} = I\nabla\phi + \nabla\psi \times \nabla\phi \quad (\text{A.1})$$

と表すと，電流密度は Amperè の法則から

$$\mu_0 \mathbf{J} = -(\Delta^* \psi) \nabla\phi + \nabla I(\psi) \times \nabla\phi \quad (\text{A.2})$$

と表され，さらに MHD 平衡を記述する Grad-Shafranov 方程式は

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R J_t \quad (\text{A.3})$$

$$= -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - I \frac{dI}{d\psi} \quad (\text{A.4})$$

となる．ここで， $J_t \equiv \mathbf{J} \cdot (R\nabla\phi)$ はトロイダル電流密度， μ_0 は真空透磁率， p はプラズマ圧力， $I \equiv RB_t$ は RT-1 配位では恒等的にゼロ，Grad-Shafranov 演算子は

$$\Delta^* = R^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{R^2} \nabla \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (\text{A.6})$$

である．

なお，(A.3) 式の部分は MHD と関係なく，コイルによる電流も含め使って良い関係式である．(A.3) 式から (A.4) 式への等号は，MHD 平衡方程式から出てくるものである．

境界条件は，自由境界条件，つまり無限遠で $\psi = 0$ とする．

A.2 Grad-Shafranov 演算子に関する Green 関数

Grad-Shafranov 演算子に対して ,

$$\Delta^* G(R, Z|R', Z') = -R\delta(R - R')\delta(Z - Z') \quad (\text{A.7})$$

を満たすものを Green 関数とすると ,

$$\Delta^* G(R, Z|R', Z') = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{RR'}{k^2}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] \quad (\text{A.8})$$

と求められる . ここで , δ は Dirac のデルタ関数 ,

$$k^2 \equiv \frac{4RR'}{(R + R')^2 + (Z - Z')^2}, \quad (\text{A.9})$$

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (\text{A.10})$$

$$E(k) \equiv \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{A.11})$$

である . $K(k)$ と $E(k)$ は , それぞれ第 1 種と第 2 種の完全楕円積分である .

これらを用いると , Grad-Shafranov 方程式の解は ,

$$\psi(R, Z) = \int dR' dZ' G(R, Z|R', Z') \mu_0 J_t(R', Z') \quad (\text{A.12})$$

となる .

A.3 自由境界条件での解法

原理的には (A.12) 式を計算すれば良いが , 数値計算を行う観点からは , 面積分はグリッド数の 2 乗で計算量が増えると見積られるので好ましくない . そこで , 以下に述べる方法を採用している [22] .

数値計算を行うために , (R, Z) 平面内に有限領域 S を用意する . その境界を ∂S と書く . まず , ∂S 上で $\hat{\psi} = 0$ という境界条件の下 ,

$$\Delta^* \hat{\psi} = -g \quad (\text{A.13})$$

を解く．ソース項 g は，コイル電流あるいはプラズマ圧力勾配を表す．

次に Green の定理から，

$$\int_S dRdZ \frac{1}{R} (u\Delta^*v - v\Delta^*u) = \oint_{\partial S} dl \frac{1}{R} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (\text{A.14})$$

である．ここで， $\oint dl$ は ∂S に沿った線積分を表し， $\partial/\partial n$ は ∂S 上で S から外向き法線方向に微分することを意味する． u に $\hat{\psi}$ を， v に G を代入し，整理すると，

$$\psi(R, Z) = \hat{\psi}(R, Z) - \oint_{\partial S} dl' \frac{1}{R'} G(R, Z | R', Z') \frac{\partial \hat{\psi}(R', Z')}{\partial n'} \quad (\text{A.15})$$

となる．この式を，特に ∂S 上の点で評価すると， $\hat{\psi} = 0$ だから，

$$\psi(R, Z) = - \oint_{\partial S} dl' \frac{1}{R'} G(R, Z | R', Z') \frac{\partial \hat{\psi}(R', Z')}{\partial n'} \quad (\text{A.16})$$

を得る．この値を境界条件として用い，

$$\Delta^* \psi = -g \quad (\text{A.17})$$

を解くと，自由境界条件の下での Grad-Shafranov 方程式の解が求められる．

付録B 平衡計算のグリッド数と 安定性解析の計算精度の関連性

平衡計算では (R, Z) 平面内に，長方形の計算領域を定め，径方向 R に対して $R_{min} \leq R \leq R_{max}$ を N_R 分割し，垂直方向 Z に対して $Z_{min} \leq Z \leq Z_{max}$ を N_Z 分割して計算をしている．ここで， $R_{min}, R_{max}, Z_{min}, Z_{max}$ はそれぞれ計算領域の境界値である．平衡計算コードでは， Z 方向には Fourier 変換を用いた解法を採用しており，使用するライブラリあるいはアルゴリズムによっては N_Z が 2 の累乗でない場合に著しく効率が悪くなる場合がある．そこで本研究では， N_R も含めて $N = N_R = N_Z$ として N を 2 の累乗の値に指定している．

N を大きくし，グリッド数を大きくすれば，平衡計算の精度は上がるが，その分計算時間は長くなる．したがって，どの程度のグリッド数で計算するかは，効率の良さの面で問題となってくる．平衡計算では $N = 128, 256, 512, 1024$ とグリッド数を上げてても β_{max} や $\langle \beta \rangle$ の値はほとんど変わらず，すなわちグリッド数を少なくして計算を行っても平衡解析としては問題ないと考えられている．

一方，本研究では平衡計算による平衡量を用いた安定性解析を行うが，その平衡量は各グリッド点における磁束関数 $\psi(R, Z)$ の値であるので，平衡計算におけるグリッド数を変えることは安定性解析の精度に影響を与えられられる．したがってここでは，平衡計算におけるグリッド数 N の変化により安定性解析の精度にどのような影響があるかを確認する．

5.1.1 項と同様に，セパトリックス配位において圧力分布関数 $p(\psi) \sim \psi^7$ での安定限

界解析を，平衡計算でのグリッド数を $N = 128, 256, 512, 1024$ に変えて解析された平衡量を用いて行った．ピーク圧力に対して，不安定性の最大成長率をプロットしたものが図 B.1 である．図 B.1 から， N の値によって不安定性の成長率の大きさが異なってくることを示された．特に $N = 128$ では，安定限界も異なっていることが示されており，グリッド数が少ない平衡計算での解析結果を用いた安定性解析は，誤った安定限界値を求める恐れがある．

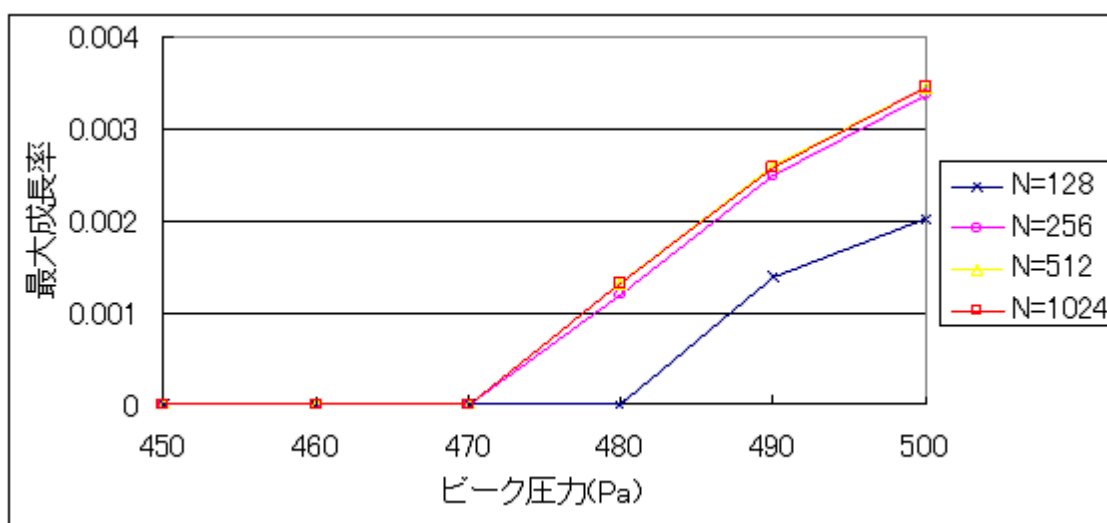


図 B.1 $p(\psi) \sim \psi^8$ における安定限界解析の比較

また，不安定性が出始めるピーク圧力 480Pa での不安定性成長率の径方向分布を表したものが図 B.2 である． $N = 256$ で計算された平衡量による解析は，図 B.1 ではそれよりグリッド数が大きいものよりも若干成長率の大きさが小さくなる程度だと思われたが，図 B.2 での成長率径方向分布では分布の形が乱れており，正確な計算結果が得られていないように思える．一方， $N = 512, 1024$ における解析では図 B.1，図 B.2 共に結果が一致していることが確認された．したがって，安定限界解析では $N = 512$ での平衡解析結果を用いれば充分であると考えられる．

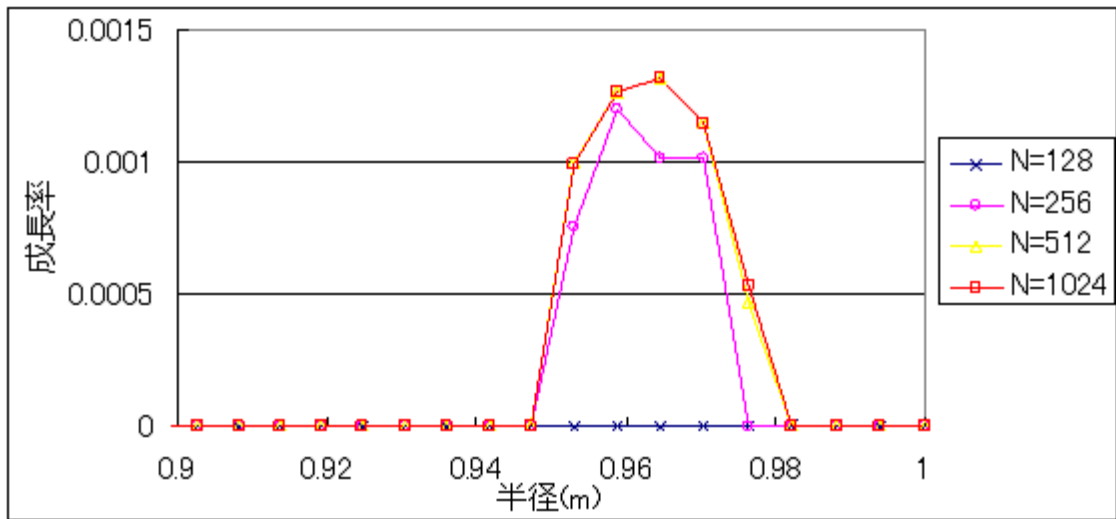


図 B.2 不安定性の成長率比較 (ピーク圧力 480Pa , $\beta_{max} = 0.777$)

本研究の安定性解析では，平衡解析において $N = 1024$ として計算された平衡量を用いている．

付録C 磁気圏プラズマにおける 非圧縮性モデルの解析について

トカマク型プラズマなどでは、しばしば非圧縮性プラズマに関して安定性解析を行う。その理由は、非圧縮モードがより不安定なモードであると考えられるからである。しかし本研究のように、磁気圏型プラズマでは非圧縮性プラズマではなく、圧縮性プラズマに関して安定性解析を行っている。ここでは本研究において圧縮性モデルで安定性解析を行った理由と非圧縮性モデルによる解析について説明する。

ξ に関する線形化された運動方程式 (2.31)(2.32) からポテンシャルエネルギーを求めると、

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{1}{2} \int_p dr [|Q_{\perp}|^2 + B^2 |\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot \kappa|^2 + \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 \\ & - 2(\xi_{\perp} \cdot \nabla p)(\kappa \cdot \xi_{\perp}) - J_{\parallel}(\xi_{\perp} \times \mathbf{b}) \cdot Q_{\perp}] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

であり、第1項がシアアルフベン波項、第2項が磁場の圧縮性項、第3項がプラズマの圧縮性項、第4項が圧力駆動項、第5項が電流駆動項である。ここで第4項と第5項が不安定化項となるが、磁気圏型磁場配位に閉じ込められるプラズマでは、磁力線に沿った方向のプラズマ電流 J_{\parallel} は無視できると考えられるので、電流駆動の不安定性は生じないと考え、本研究では圧力駆動不安定性に対して安定性解析を行っている。

トカマク型プラズマなどでは、圧縮性に関わる $\nabla \cdot \xi$ の項はポテンシャルエネルギーに対して正の寄与をし、安定化に働くので、ポテンシャルエネルギーを最小化させる危険な変位として非圧縮性を考え、

$$\nabla \cdot \xi = 0 \quad (\text{C.2})$$

という非圧縮条件を課して解析を行っている．しかし [20] では，磁気圏型プラズマのような閉じた磁力線の磁場配位に閉じ込められるプラズマでは，プラズマの圧縮性のエネルギーを最小化させるような条件は式 (C.2) ではなく，プラズマの圧縮性項はゼロにはならないと書かれている．この理由について考察することにする．今，非圧縮条件式 (C.2) を束縛条件として，変分原理により固有方程式を求めると，次のような連立方程式が導かれる．

$$-\rho\omega^2 \frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \xi_{\perp} = \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{|\hat{\mathbf{k}}|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp} \right) + 2 \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \nabla p \right) \xi_{\perp} - 4B^2 \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \left[\left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \xi_{\perp} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\parallel} \right], \quad (\text{C.3})$$

$$-\rho\omega^2 B^2 \xi_{\parallel} = -\mathbf{B} \cdot \nabla \left[2B^2 \left\{ \left(\frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}}{B^2} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \xi_{\perp} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\parallel} \right\} \right]. \quad (\text{C.4})$$

この連立方程式は，圧縮性モデルの固有方程式 (2.54)(2.55) に対して $\gamma \rightarrow \infty$ としたときと同じ形であり，すなわち非圧縮条件 (C.2) を課して方程式を導出しても圧縮性に関する項は方程式に残ることがわかる．ここで，この非圧縮性モデルの固有方程式 (C.3)(C.4) による固有値解析を 3.1 節と同様にダイポール磁場配位において圧力分布関数 $p(\psi) \propto (\psi_1 - \psi)(\psi - \psi_2)^2$ について行い，不安定性の成長率を圧縮性モデル，圧縮性無視モデルの解析結果と比較すると図 C.1 のようになる．

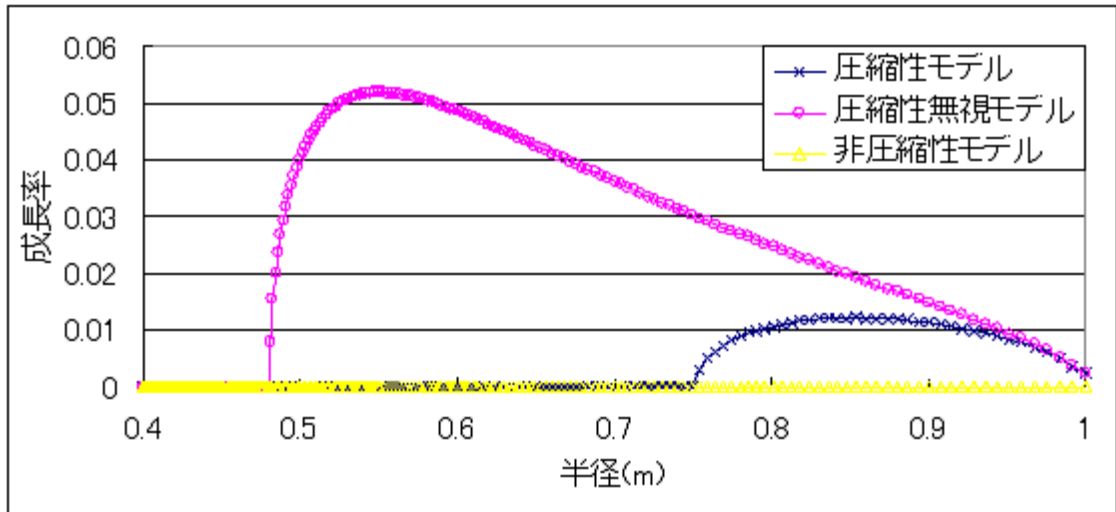


図 C.1 各モデルにおける不安定性の成長率比較

図 C.1 から，非圧縮性モデルは全域に渡って安定化されており，磁気圏型プラズマでは圧縮性プラズマよりも非圧縮性プラズマの方が安定なモードであることが示される．このとき図 3.7 と同様に，各エネルギー項の径方向分布を表すと図 C.2 のようになる．

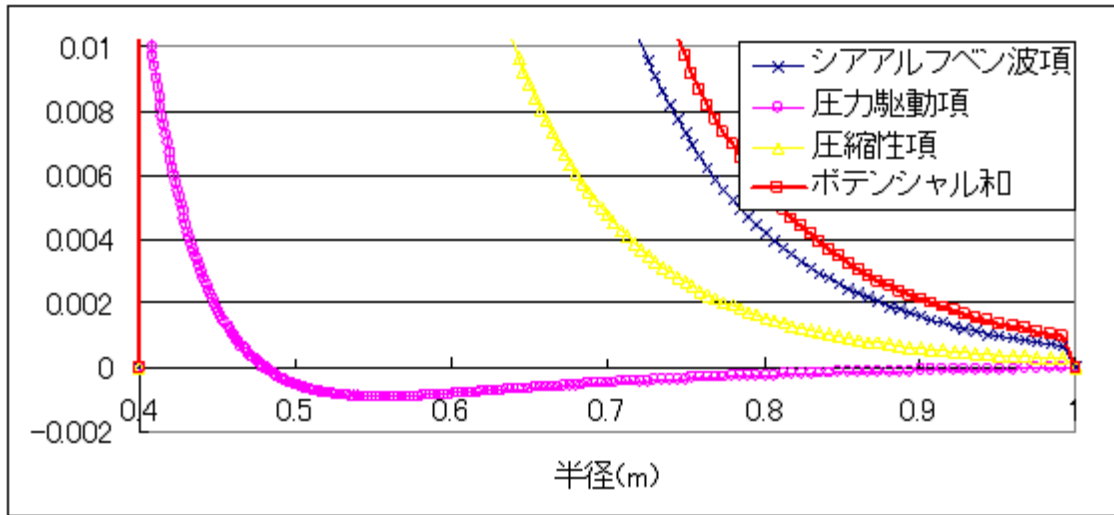


図 C.2 非圧縮性モデルのエネルギー分布

図 C.2 では，圧縮性のエネルギー項とシアアルフベン波のエネルギー項が非常に大きく，ポテンシャル和としては非常に安定なモードになっていることが確認できる．この圧縮性のエネルギー項が値を持っていることから見ても，閉じた磁力線における周期境界条件では数値解析的にも $\nabla \cdot \xi \neq 0$ であり， $\gamma p |\nabla \cdot \xi|^2$ はゼロにはならないことが確認される．図 3.7 と比較して圧縮性のエネルギー項が大きくなっていることの物理的理由は，非圧縮性プラズマでは磁束管の圧縮・膨張を許さないために，磁力線の変位に伴う磁束管の比体積変化に必要なエネルギーが非常に大きくなるためであると考えられる．また，図 3.7 と比較して特にシアアルフベン波のエネルギー項が非常に大きくなっていることがわかるが，この物理的理由は以下のように考えることができる．まずシアアルフベン波のエネルギー項は，磁力線が曲げられるときに生じる安定化エネルギーであり，磁力線が曲げられるのを妨げる作用がある．今，非圧縮性プラズマでは磁束管の圧縮・膨張が許されないために，磁束管の比体積を変化させないようにプラズマは変位する必要がある．このと

き，プラズマは磁力線が曲げられるような変位をするために，シアアルフベン波の安定化効果が大きくなったと考えられる．したがって，閉じた磁力線における非圧縮性プラズマでは，磁束管の比体積を変化させないようにして磁力線が曲げられるような変位をするために，非常に大きい安定化効果が生じていると考えられる．

以上の考察から，磁気圏型プラズマでは，非圧縮性プラズマよりも圧縮性プラズマの方がより不安定なモードとなるため，圧縮性プラズマに関して安定性解析をする必要があると考えられる．

参考文献

- [1] S. M. Krimigis *et al.*, *Science* **206**, 977 (1979).
- [2] L. J. Lanzerotti *et al.*, *Science* **257**, 1518 (1992).
- [3] A. Hasegawa, *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion* **1**, 147 (1987).
- [4] A. Hasegawa, L. Chen, and M. E. Mauel, *Nucl. Fusion*, **30**, 2405 (1990).
- [5] J. Kesner, L. Bromberg, M. Mauel, D. Garnier, and J. M. Dawson, The dipole fusion confinement concept. Technical report (1998).
- [6] D. T. Garnier, A. K. Hansen, J. Kesner, M. E. Mauel, P. C. Michael, J. V. Minervini, A. Radovinsky, A. Zhukovsky, A. Boxer, J. Ellsworth, I. Karim, and E. Ortiz, Design and initial operation of the ldx facility. *Fusion Engineering and Design*, to be published (2006).
- [7] S. M. Mahajan and Z. Yoshida, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4863 (1998).
- [8] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, *J. Math Phys.* **40**, 5080 (1999).
- [9] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 095001 (2002).
- [10] J. Shiraishi, S. Ohsaki and Z. Yoshida, *Phys. Plasmas* **12**, 092901 (2005).

- [11] Z. Yoshida, Y. Ogawa, J. Morikawa, M. Furukawa, H. Saitoh, M. Hirota, D. Hori, J. Shiraishi, S. Watanabe, S. Numazawa, Y. Yano, and J. Suzuki, *Fusion Science and Technology* **51**, 2T 29-33 (2007).
- [12] S. I. Krasheninnikov, P. J. Gatto, and R. D. Hazeltine, *Phys. Plasmas* **7**, 1831 (2000).
- [13] A. N. Simakov, P. J. Gatto, S. I. Krasheninnikov, J. J. Ramos, *Phys. Plasmas* **7**, 2526 (2000).
- [14] A. N. Simakov, R. J. Hastie, and P. J. Gatto, *Phys. Plasmas* **7**, 3309 (2000).
- [15] Natalia S. Krasheninnikova and Peter J. Catto, *Phys. Plasmas* **13** 052503 (2006).
- [16] A. Kouznetsov, J. P. Freidberg, and J. Kesner, *Phys. Plasmas* **14** 102502 (2007).
- [17] D. T. Garnier, J. Kesner, and M. E. Mauel, *Phys. Plasmas* **6**, 3431 (1999).
- [18] J. W. Conner, R. J. Hastie and J. B. Taylor, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **365**, 1 (1979).
- [19] R. L. Dewar and A. H. Glasser, *Phys. Fluids* **26**, 3038 (1983).
- [20] J. P. Freidberg, “ *Ideal Magnetohydrodynamics* ” (Plenum Press, New York, 1987).
- [21] M. N. Rosenbluth and C. L. Longmire, *Ann. Phys.* **1**, 120 (1957).
- [22] K. Lackner, *Comput. Phys. Comm* **12**, 33-44 (1976).
- [23] J. P. Goedbloed and S. Poedts, “ *Principle of Magnetohydrodynamics* ” (Cambridge Univ. Press, New York, 2004)
- [24] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, “ *Plasma Confinement* ” (Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1992)

- [25] Leonid S. Alperovich and Evgeny N. Fedorov, “ *Hydromagnetic Waves in the Magnetosphere and the Ionosphere* ” (Springer, Heidelberg, 2007)
- [26] Francis F. Chen, “ *Introduction to Plasma Physics* ” (Plenum Press, New York, 1974).
- [27] 吉田善章 , 集団現象の数理 (岩波書店 , 東京 , 1995) .
- [28] 宮本健郎 , プラズマ物理入門 (岩波書店 , 東京 , 1991) .
- [29] 宮本健郎 , プラズマ物理・核融合 (東京大学出版会 , 東京 , 2004) .

謝辞

本研究に取り組むにあたって、研究室の皆様には大変お世話になりました。この場を借りて心より御礼を申し上げたいと思います。

吉田善章教授には、僕が工学部システム創成学科に在籍していたときの学士卒業研究の頃からご指導頂き、大変お世話になりました。修士課程に入ってから、先生の意向に従わなかったことが多く、その際大変ご迷惑をお掛けしていたことには反省しています。研究指導に関しては、研究自体の指導方針だけではなく、どういう論理展開で物事を考えるべきか、どういう表現の仕方ですべての説得力を持たせるか、どういう発表の仕方ですべての聴衆に興味を持って頂くかなど、普遍的なロジカルシンキング・ロジカルプレゼンテーションの方法までご指導頂きました。しばしばミーティングで衝突することもありましたが、そのお陰で自分の主張を他の方に納得して頂くにはどう表現すれば良いかなど、常に気を付けながら考える癖が身に付き、今では良い経験だったと感じています。僕は来年度から、コンサルティング業界の一社であるアクセンチュア株式会社で働くこととなります。主な仕事は、クライアント企業の業務プロセス改革の立案と実行支援をすることです。業務プロセスの改革には必ず意見の衝突が付き物ですが、改革を達成するためには限られた時間の中でも、しっかり筋の通った論理展開でわかりやすく伝えることのできるコミュニケーション能力が必要となります。先生にご指導頂いた研究者としての姿勢は、コンサルタントとして働く上でも必ず役に立つものだと思います。

古川勝准教授には、学士卒業研究のときも含め、本研究においても研究手法や数値計算

関連のアドバイス，得られた結果に対する物理的解釈の相談まで，多くの時間と労力を割いて頂き，大変感謝しています．特に本研究における安定性解析コードは，古川先生から頂いた固有値問題数値計算コードのプロトタイプを元に作成したものです．したがって古川先生の助力が無ければ数値計算をすることが困難であったと思われます．また固有方程式の導出過程など，本来学生が自力で行わなければならないような研究の実質的・具体的なことまで手助けさせてしまったことには大変申し訳なく思うと共に，自分の不勉強さを深く反省しました．

森川さん，齋藤さんには，RT-1 実験関連でお世話になりました．僕は実際の測定までには至らなかったものの，実験グループに参加することで，実際の実験で計測することの難しさなど実感することができました．実験の現状については，実際に実験に参加しないとわからないことですので，それを体験できたことは非常に良い経験になったと思います．

梶村さん，北山さんは研究室秘書としてだけでなく，その他プライベートの面でもお世話になり，非常に楽しかったです．

研究室の先輩方にもお世話になっています．

沼澤さんは僕と同年であるにも関わらず，研究や物理・数学に対する意欲が熱心であり，こういう方が研究者になるんだなと感心していました．本研究に関しても，沼澤さんの専門外であるにも関わらず，物理的解釈や数値計算の相談まで，親身にお付き合い頂きました．沼澤さんには，感謝するとともに尊敬もしています．

矢野さんとは，僕が実験グループに参加するようになってから RT-1 実験関連で一緒に過ごす時間が長くなりました．本研究に関しては，実際の実験パラメータやデータ値について矢野さんから詳しく伺うことができたことで，本研究における理論的な解析に実験値を反映させることができました．

すでに卒業された先輩方からもお世話になっていました．

僕が学部生であった頃の D3 の白石さん，堀さんには，プラズマ物理の基礎的な知識や単純な計算方法もわからない僕に，親切に解説して頂きました．博士論文の研究に忙しかったことかと思いますが，感謝しています．

僕の一つ上の先輩である鈴木さん，小川研究室の寺井さん，坂田さんとはプライベートでお付き合いする機会が多く，楽しく過ごさせて頂きました．

また，研究室の後輩である，川面くん，水島くん，忠地くん，宍道くんには，自分が先輩らしい指導ができなかったと思います．

最後に，研究室同期の仲間である中津さん，木村くん，金城くんとは，この2年間を一緒に過ごすことができ良かったです．この2年間が楽しく，充実した時間になったのもみんながいたからだと思います．

学部の頃から合わせて3年間，研究においてもプライベートにおいても研究室の皆様と一緒に過ごさせて頂いた時間は非常に充実しており，大変貴重なことだったと感じています．アクセントをクビになった暁には，再びここに戻ってくるかもしれませんが，その時には寛容な気持ちを持ってどうぞよろしくお願いいたします．

林 裕之

学会発表

1. 第46回プラズマ若手夏の学校 口頭発表

「トロイダル流をもつプラズマにおける交換型不安定性の固有モード解析」

林 裕之, 古川 勝, 吉田 善章

2. 日本物理学会 2008 年秋季大会 口頭発表

「磁気圏型プラズマ閉じ込めにおけるバルーニングモードに対する安定限界解析」

林 裕之, 古川 勝, 吉田 善章

3. 第14回NEXT(数値トカマク)研究会 ポスター発表

「Stability analysis of pressure driven modes in plasmas confined
by a magnetosphere-like configuration」

林 裕之, 古川 勝, 吉田 善章

4. 第12回若手科学者によるプラズマ研究会 口頭発表・ポスター発表

「磁気圏型閉じ込め装置 RT-1 における平衡の実験的推定と安定性の理論的解析」

林 裕之, 矢野 善久, 古川 勝, 吉田 善章

5. 日本物理学会第64回年次大会 口頭発表

「磁気圏型プラズマ閉じ込めにおける圧力駆動不安定性に対する安定限界解析」

林 裕之, 古川 勝, 吉田 善章