

修士論文

球対称マクスウェル地球モデルの

変形問題

— 安定性解析 —

東京大学大学院理学系研究科

地球惑星物理学専攻

大木 裕子

2000年 2月

# 要旨

時空間スケールの大きな変動に対しては，球対称粘弾性地球モデルを用いるのが適当である．このモデルを用いたときの変動には2種類のモードが存在する．一つは変動が時間とともに緩和する（安定な状態にある）緩和モード，もう一つは変動が成長し続ける（不安定な状態にある）成長モードである．

緩和モードを議論した研究は，氷河の消長による地表の変動や地震後の変位の緩和に関連して，いくつか存在する．そのため緩和モードについては，点荷重をかけたときの応答や数理的問題点などが調べられ，アセノスフェアの粘性と地表に現れる変動とを関連づけるなどの議論がされている．しかし，成長モードについては現在のところほとんど研究がなされていない．そのうえ，球面調和関数の0次のモードについては全く議論がされていない．

成長モードの励起の原因を調べるために，均質モデル，2層モデル，現実的なモデル，Adams-Williamsonの式を満たしたモデルを用いて特性関数を計算し，安定性解析を行った．また0次のモードについて均質モデルを用いたときの安定性も調べた．

その結果，Adams-Williamsonの式に忠実に作られたモデルを用いれば，地球科学的に見て安定になることが明らかになった．0次のモードについては，2次以上の場合と全く違う傾向を示し，地球モデルに与えるパラメータ（P波速度，密度，半径）がある範囲内にあるときだけ成長モードが励起され不安定になることがわかった．

# 目次

要旨	i
第1章 はじめに	1
1.1 粘弾性地球の変形問題	1
1.2 研究の目的	3
第2章 理論	5
2.1 弾性変形	5
2.1.1 基礎方程式	5
2.1.2 $y$ 関数の微分方程式系 (完全弾性体)	7
2.1.3 微分方程式の独立解	9
2.2 粘弾性変形	10
2.2.1 粘弾性体の構成方程式と対応原理	10
2.2.2 $y$ 関数の微分方程式系 (粘弾性体)	12
2.2.3 非圧縮性を仮定した $y$ 関数の微分方程式系	13

2.2.4	自己重力無視を仮定した $y$ 関数の微分方程式系	15
2.3	境界条件と $y$ 関数の解	16
2.3.1	外力があり, 内部力源がないとき	16
2.3.2	内部力源があり, 外力がないとき	18
2.4	安定性	18
<b>第3章</b>	<b>数値積分</b>	<b>20</b>
3.1	数値積分	20
3.1.1	数値積分の方法	20
3.1.2	初期値の最適化	20
3.2	モデルのパラメータ	21
3.3	数値積分の精度	21
<b>第4章</b>	<b>成長モードの励起原因</b>	<b>23</b>
4.1	SNRVI モデルを用いたときの安定性	23
4.2	非現実的な仮定をしたときの安定性	24
4.3	Adams-Williamson の式を考慮したモデル	24
4.3.1	Adams-Williamson の式	24
4.3.2	重力的安定性	25
4.3.3	モデル	26
4.4	中立,重力安定,重力不安定モデルを用いたときの安定性	27
4.4.1	中立モデル ( $K(r)=K_0(r)$ )	27

4.4.2	重力安定モデル ( $K(r)=2K_0(r)\sim 10K_0(r)$ )	27
4.4.3	重力不安定モデル ( $K(r)=0.1K_0(r)\sim 0.8K_0(r)$ )	28
4.5	成長モードの励起原因	28
4.5.1	密集領域	28
4.5.2	散在領域	29
4.5.3	密集, 散在領域以外の特性根	29
<b>第5章</b>	<b>0 次変形の安定性</b>	<b>30</b>
5.1	0 次の $y$ 関数の微分方程式系	30
5.2	安定性	31
5.2.1	結果	31
5.2.2	考察	32
<b>第6章</b>	<b>まとめと今後の展望</b>	<b>33</b>
6.1	まとめ	33
6.1.1	成長モードの励起原因	33
6.1.2	0 次変形の安定性	34
6.2	今後の展望	34
<b>謝辞</b>		<b>36</b>
<b>参考文献</b>		<b>37</b>
<b>図一覧</b>		<b>40</b>

# 第1章 はじめに

## 1.1 粘弾性地球の変形問題

地球変形の問題を取り扱う際には、問題の時空間スケールによって適切な地球モデルを選択しなければならない。空間スケールに関しては、局所的な変動を扱う場合は、半無限体地球モデルを使用することが多い。例として、基底半径が数 km の火山の活動や、長さが数 km～十数 km の断層運動などによる変形問題がある。これに対し、広範囲の変動を扱う際には地球を球対称と仮定したモデルを用いなければならない。その例は、数百 km を越える長さの断層運動や、地球潮汐による地球変形などである。一方、時間スケールに関しては、瞬間的な変動を扱う場合は、地球を完全弾性体とみなしてかまわない。例えば 1 回の断層運動や火山の噴火活動である。しかし、長期的な変動に対しては地球を粘弾性体として扱う必要がある。氷河の消長、断層の繰り返し運動による変形などはその例である。

さて、ここからは空間的スケールが大きいとき、つまり球対称地球を仮定した変形問題の場合に話を限る。球対称地球の理論的研究は、まず完全弾性体地球について始められた。Love(1911)は地球モデルに圧縮性と自己重力を考慮した完全弾性体地球の変形理論を完成させ、この理論を用いて Alterman et. al. (1959) が現実的な地球モデルに対して数値計算を行った。

これに対し粘弾性地球については、圧縮性と自己重力を考慮した変形理論を組み立てたのは Peltier(1974)が初めてである。

Peltier(1974)より前の粘弾性地球の研究は、地球を半無限体として扱っていた。また現在、球対称の粘弾性地球モデルを用いていても、非圧縮性を仮定したり自己重力を無視したりなどの非現実的な仮定が多い。例えば Pollitz(1992)では、自己重力の効果は小さく無視できると仮定している。また、Wu and Peltier (1982)では、非圧縮性を仮定して変形が議論されている。

圧縮性と自己重力を考慮した地球変形問題の研究で対象とされる議論は 2 種類ある。一つは変動が緩和していくことを表す緩和モードに関する議論で、ここ 2, 30 年で多く扱われてきた。もう一つは変動が成長し続けることを表す成長モードに関する議論である。緩和モードの例を挙げると、Wu and Peltier(1982)では、リソスフェアや外殻を含む、球対称粘弾性地球モデルをいくつか想定し、それぞれのモデルを用いたときに励起される緩和モードについて調べた。そしてリソスフェアの影響により励起される緩和モードが、地表に現れる変形の大きさに最も影響を与えると述べた。Vermeersen et. al. (1996)は極移動における、粘弾性地球の圧縮性の重要性を述べるために、緩和モードについて詳しく調べている。Postseismic な変位の緩和については Piersanti et al. (1997)が球対称粘弾性地球モデルに有限断層を仮定して論じている。このほか緩和モードに関しては、氷河の消長に関連して議論している論文が多く存在する (Peltier, 1985 ; Han and Wahr, 1995) .

一方、成長モードについては実はほとんど研究がなされていない。これまでの研究では緩和モードが注目の対象になっていたためか、恐らくこの問題は存在しないとされ目が向けられなかったようだ。しかし、実はここに大きな問題を孕んでいた。というのは、設定したモデルによっては成長モードが励起され得ることがわかったからである。

現実的な地球モデルを用いて、成長モードの励起を一番はじめに示したのは Plag and Jüttner (1995)である。彼らは、PREM (Preliminary Reference Earth Model) (Dziewonski and Anderson, 1981)の成長モードについて詳しく調べた。扱った(球面調和関数の)次数は 6 次から 100 次で、粘性率として 3 つのパターン (4 種類: 地球内部の粘性率一定を 1 種類, 地球上部に対し下部の粘性を高くしたものを 2 種類, すべての層で連続的に変化させたのを 1 種類) を想定した。その結果から、成長モードの励起が粘性に非常に強く依存することを示した。彼らはまた、表面荷重がかかった場合に成長モードが励起される可能性を指摘し、地質学的現象(堆積盆地の進化, 造山運動の激化と劣化, 風化作用のサイクルの変化, 大陸と海洋の配置など)を例にとり、定性的な考察を行っている。

現実的な地球モデルからはなれ、数理的な観点から基本的な地球モデル—均質, 2層, 3層モデルにかえて成長モードの本質に迫ったのは Hanyk et al. (1999) である (論文に結果が示されているのは均質モデルについてだけである)。次数 2 次から 120 次を調べ, 次数と成長モードの関係をみた。また, 彼らは数理的な問題によって生じる成長モードについて詳しく調べている。

以上が球対称粘弾性体地球モデルを用いた変形問題に関する研究のおおまかな歴史である。ちなみに, 半無限粘弾性地球モデルを用いた変形問題は松浦 (1996) に詳しく述べられている。また, Wolf (1985) の理論から, 半無限粘弾性地球モデルを用いた場合, 成長モードは励起されないことがわかっている。本研究は球対称地球モデルを用いた変形についてのみ議論するので, 半無限地球モデルを用いた変形に関してはこれ以上ふれないことにする。

## 1.2 研究の目的

1.1 で述べてきたように, 地球変形問題を扱う際に使用するモデルによっては, 成長モードが励起される。今現在, 成長モードが励起される原因については一部しか解明されていないので, 他の原因を探る必要がある。

さて, Longman (1963) では, 圧縮性流体が Adams-Williamson の式を満たしていれば安定であることが述べられている。したがって Adams-Williamson の式を満たした固体のときの安定性も調べれば, 成長モードが励起される原因の足がかりがつかめる可能性がある。

ところで, これまでの球対称粘弾性地球モデルの研究は, 球面調和関数の次数 2 次以上のモードについてしか調べられていない。そのため, 0 次のモードの地球変形の安定性についても議論する必要がある。

以上を踏まえて, 本研究の目的は次の 2 点にある。

- 1) 球対称粘弾性地球モデルを用いたときの地球変形の安定性と Adams-Williamson の式との関連性を調べ, 成長モードが励起される原因を探る。
- 2) 球面調和関数の 0 次のモードについて, 球対称粘弾性均質モデルを用いたときの安定性を議論する。

これらの目的のために使用した粘弾性モデルとして, マクスウェル模型を仮



定したことを特記しておく。

ここで本論文での議論の前提として必要なことを述べておく。地球の自由振動には toroidal モードと spheroidal モードの2種類ある。前者はねじれ振動を表し、動径方向の変位がない。したがって体積歪がないため密度場への擾乱もなく重力場に影響を及ぼさない。それに対し後者は、膨張収縮型の変形をするため体積歪が生じ、変形が重力場へ影響を及ぼす。本研究では圧縮性と自己重力を考慮した地球の変形問題を扱う。したがって、議論は spheroidal モードのみに絞る。また、特に示さない限り使用したモデルは SNRVI モデル(spherically symmetric, non-rotating, viscoelastic, isotropic Earth model)である。2層モデル以外のモデルに設定した粘性率は一定値  $10^{22}$ [P]である。地球内部の熱の効果は一切考えていない。目的 1)のために、球面調和関数の次数  $n$  については 2, 3, 5, 10 次をとった。また、1次のモードは重心を移動させるので、扱っていない。

## 第2章 理論

### 2.1 弾性変形

#### 2.1.1 基礎方程式

1.1.1 に記したように、本研究では球対称の地球モデルのみを扱うので、座標は地球の中心を原点とする球座標 $(r, \theta, \phi)$ をとる。

完全弾性媒質中の運動方程式は、自己重力を無視した場合、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= (\text{div} \sigma_r, \text{div} \sigma_\theta, \text{div} \sigma_\phi) \\ &+ \frac{1}{r} (-\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{r\theta} - \sigma_{\phi\phi} \cot \theta, \sigma_{\phi r} + \sigma_{\theta\phi} \cot \theta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 $\rho$ ,  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi)$ ,  $\sigma_i = (\sigma_{ir}, \sigma_{i\theta}, \sigma_{i\phi})$  ( $i = r, \theta, \phi$ ) はそれぞれ密度、変位ベクトル、 $r, \theta, \phi$  軸に垂直な面にかかる応力であり、 $\sigma_{ij}$  ( $i = r, \theta, \phi$ ,  $j = r, \theta, \phi$ ) は応力テンソルである。

自己重力の効果が無視することができない場合、運動方程式はより複雑になる。初期状態として地球内部に静水圧平衡を仮定して定式化がなされる (Love, 1911)。本論文でもそれにしたがって議論を進める。平衡状態の密度、重力、静水圧をそれぞれ  $\rho_0$ ,  $\mathbf{g}_0$ ,  $p_0$  とする。平衡状態では重力と浮力は釣り合うので、

$$\rho_0 \mathbf{g}_0 = \text{grad } p_0 \quad (2.2)$$

となり、平衡状態から測った変位ベクトルを  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  とすると、変形後の位置  $\mathbf{r}$  での

密度は,

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho_0 - \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}) \quad (2.3)$$

となる. 変形後の位置  $\mathbf{r}$  での応力  $\sigma$  は, 変形前の位置  $\mathbf{r} - \mathbf{u}$  での初期応力と変形によって生じる付加応力  $\sigma'$  の合力なので,

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}(\mathbf{r}) &= -p_0(\mathbf{r} - \mathbf{u}) + \sigma_{ii}'(\mathbf{r}) = -p_0 + \rho_0 \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{u} + \sigma_{ii}', \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &= \sigma_{ij}'(\mathbf{r}) \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (2.4)$$

重力の擾乱については擾乱ポテンシャルを  $\psi'$  とすると,

$$\mathbf{g}' = \operatorname{grad} \psi'. \quad (2.5)$$

式(2.4)を式(2.1)に代入し式(2.2)を用いて整理すると, 以下の自己重力を考慮した運動方程式を得る (Pekeris and Jarosch, 1958).

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= \rho_0 \operatorname{grad} \psi' - \mathbf{g}_0 \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}) + (\operatorname{div} \sigma_r', \operatorname{div} \sigma_\theta', \operatorname{div} \sigma_\phi') \\ &+ \operatorname{grad}(\rho_0 \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{r} (-\sigma_{\theta\theta}' - \sigma_{\phi\phi}', \sigma_{r\theta}' - \sigma_{\phi\phi}' \cot \theta, \sigma_{\phi r}' + \sigma_{\theta\theta}' \cot \theta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

また, 式(2.6)で用いた擾乱ポテンシャルはポアソンの方程式を満たすので

$$\nabla^2 \psi' = 4\pi G \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}). \quad (2.7)$$

ここで  $G (= 6.672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2})$  はニュートンの万有引力定数である. 弾性変形によって生じる付加応力はフックの法則にしたがい,

$$\sigma_{ij}' = \lambda e_{ij} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.8)$$

である. 式(2.8)は線形等方完全弾性体の構成方程式と呼ばれ,  $\lambda, \mu$  はラメ定数,  $e_{ij}$  は歪の各要素,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタで, 添字についてはアインシュタインの総和規約をとる. 運動方程式(2.6), ポアソンの方程式(2.7), 構成方程式(2.8)の3つの方程式が弾性変形の基礎方程式となる.

変位  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}; t)$ , 応力  $\sigma = \sigma(\mathbf{r}; t)$ , 擾乱ポテンシャル  $\psi' = \psi'(\mathbf{r}; t)$  を

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.9)$$

のように時間についてフーリエ変換すると, 弾性変形の基礎方程式(2.6), (2.7), (2.8)は, フーリエ領域では次式のように表せる.

$$\begin{aligned} \rho_0 \omega^2 \mathbf{u} + \rho_0 \operatorname{grad} \psi' - \mathbf{g}_0 \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}) + (\operatorname{div} \sigma_r', \operatorname{div} \sigma_\theta', \operatorname{div} \sigma_\phi') + \operatorname{grad}(\rho_0 \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{u}) \\ + \frac{1}{r} (-\sigma_{\theta\theta}' - \sigma_{\phi\phi}', \sigma_{r\theta}' - \sigma_{\phi\phi}' \cot \theta, \sigma_{\phi r}' + \sigma_{\theta\theta}' \cot \theta) = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 \psi' = 4\pi G \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}), \quad (2.11)$$

$$\sigma_{ij}' = \lambda e_{ij} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.12)$$

ここで  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(r;\omega)$ ,  $\sigma=\sigma'(r;\omega)$ ,  $\psi=\psi'(r;\omega)$ .  $\omega$ は定数とみなせるので, フーリエ領域での方程式(2.10), (2.11), (2.12)は, 空間変数についての微分方程式系に変換できたことに注意しよう (Pekeris and Jarosch, 1958). 擾乱を表す  $\psi$  のプライムと付加応力を表す  $\sigma$  のプライムは, これ以下では混乱のおそれがないので省略する.

### 2.1.2 $y$ 関数の微分方程式系 (完全弾性体)

球対称地球を仮定している場合, Alterman *et al.* (1959)により式(2.10), (2.11), (2.12)のさらなる簡略化がなされている.

球対称地球では, 密度  $\rho$ , ラメ定数  $\mu$ ,  $\lambda$  (または P 波速度  $V_p$ , S 波速度  $V_s$ ) は, すべて動径距離  $r$  のみに依存し, 余緯度  $\theta$ , 経度  $\phi$  には依存しない. この地球モデルの球対称性を利用すると, 変位  $\mathbf{u}(r,\omega)$  と応力  $\sigma(r,\omega)$  が動径距離  $r$  だけの関数  $y_i(r)$  と, 球面調和関数  $Y_n=Y_n(\theta,\phi)$  を用いて以下のように展開できる (Alterman *et al.*, 1959).

$$\begin{aligned} u_r(r,\theta,\phi;\omega) &= y_1(r)Y_n(\theta,\phi), \\ u_\theta(r,\theta,\phi;\omega) &= y_3(r)\frac{\partial Y_n(\theta,\phi)}{\partial \theta}, \\ u_\phi(r,\theta,\phi;\omega) &= y_3(r)\frac{1}{\sin \theta}\frac{\partial Y_n(\theta,\phi)}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

式(2.13)を用いて応力  $\sigma$  は次のように表される.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, \theta, \phi) &= y_2(r)Y_n(\theta, \phi), \\
\sigma_{\theta\theta}(r, \theta, \phi) &= \left\{ \lambda \frac{dy_1(r)}{dr} + \frac{\lambda + 2\mu}{r} [2y_1(r) - n(n+1)y_3(r)] - \frac{2\mu}{r} y_1(r) \right\} Y_n(\theta, \phi) \\
&\quad - \frac{2\mu}{r} y_3(r) \left( \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_n(\theta, \phi)}{\partial\theta^2} \right), \\
\sigma_{\phi\phi}(r, \theta, \phi) &= \left\{ \lambda \frac{dy_1(r)}{dr} + \frac{\lambda + 2\mu}{r} [2y_1(r) - n(n+1)y_3(r)] - \frac{2\mu}{r} y_1(r) \right\} Y_n(\theta, \phi) \\
&\quad - \frac{2\mu}{r} y_3(r) \frac{\partial^2 Y_n(\theta, \phi)}{\partial\theta^2}, \\
\sigma_{\theta\phi}(r, \theta, \phi) &= \frac{2\mu}{r} y_3(r) \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 Y_n(\theta, \phi)}{\partial\theta\partial\phi} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial\phi} \right), \\
\sigma_{\phi r}(r, \theta, \phi) &= y_4(r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial\phi}, \\
\sigma_{r\theta}(r, \theta, \phi) &= y_4(r) \frac{\partial Y_n(\theta, \phi)}{\partial\theta}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

擾乱ポテンシャル $\psi$ については,

$$\psi(r, \theta, \phi) = y_5(r)Y_n(\theta, \phi) \tag{2.15}$$

と表すことにする．ここで，応力と歪の関係式は

$$\begin{aligned}
y_2(r) &= (\lambda + 2\mu) \frac{dy_1(r)}{dr} + \frac{\lambda}{r} [2y_1(r) - n(n+1)y_3(r)], \\
y_4(r) &= \mu \left[ \frac{dy_3(r)}{dr} - \frac{1}{r} y_3(r) + \frac{1}{r} y_1(r) \right]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

と表される．上式の $y_i(r)$  ( $i=1,2,\dots,5$ )は $y$ 関数（動径関数）と呼ばれる． $\rho$ と $g$ の添字の0は今後省略する．

式(2.13), (2.14), (2.15)にあらたに6番目の $y$ 関数

$$y_6(r) = \frac{dy_5(r)}{dr} - 4\pi G\rho y_1(r) + \frac{n+1}{r} y_5(r) \tag{2.17}$$

を導入する．この関数は，変形の前後でトータルポテンシャル（変形前のポテンシャルと擾乱ポテンシャルの和）は連続する，という以下の形で表されるポテンシャルの地表での境界条件から導くことができる．

$$\frac{\partial\psi(r, \theta, \phi)}{\partial r} - 4\pi G\rho u_r(r, \theta, \phi) = \text{continuous}. \tag{2.18}$$

6つの $y$ 関数 ( $y_i(r)$  ( $i=1,2,\dots,6$ )) を使って，弾性変形（spheroidal モード）の基礎方程式を簡略化する．式(2.10), (2.11)に式(2.13), (2.14), (2.15)を代入し，

式(2.17)を用いて整理することで、次式を得る(Takeuchi and Saito, 1972).

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1(r)}{dr} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\{ y_2(r) - \frac{\lambda}{r} [2y_1(r) - n(n+1)y_3(r)] \right\}, \\
\frac{dy_2(r)}{dr} &= -\omega^2 \rho y_1(r) + \frac{2}{r} \left[ \lambda \frac{dy_1(r)}{dr} - y_2(r) \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{2(\lambda + \mu)}{r} - \rho g \right] [2y_1(r) - n(n+1)y_3(r)] \\
&\quad + \frac{n(n+1)}{r} y_4(r) - \rho \left[ y_6(r) - \frac{n+1}{r} y_5(r) + \frac{2g}{r} y_1(r) \right], \\
\frac{dy_3(r)}{dr} &= \frac{1}{\mu} y_4(r) + \frac{1}{r} [y_3(r) - y_1(r)], \\
\frac{dy_4(r)}{dr} &= -\omega^2 \rho y_3(r) - \frac{\lambda}{r} \frac{dy_1(r)}{dr} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} [2y_1(r) - n(n+1)y_3(r)] \\
&\quad + \frac{2\mu}{r^2} [y_1(r) - y_3(r)] - \frac{3}{r} y_4(r) - \frac{\rho}{r} [y_5(r) - g y_1(r)], \\
\frac{dy_5(r)}{dr} &= y_6(r) + 4\pi G \rho y_1(r) - \frac{n+1}{r} y_5(r), \\
\frac{dy_6(r)}{dr} &= \frac{n-1}{r} [y_6(r) + 4\pi G \rho y_1(r)] + \frac{4\pi G \rho}{r} [2y_1(r) - n(n+1)y_3(r)].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ここで、 $g=|g|$ は重力の大きさを、 $n$ は球面調和関数の次数を表す。spheroidal モードの  $y$  関数は、この6つの1階常微分方程式にしたがう。

### 2.1.3 微分方程式の独立解

式(2.19)の連立一次常微分方程式系は一般に6つの独立解のセットを持つ。しかし、原点  $r=0$  で正則な解はそのうちの3セットである。均質球の場合については Takeuchi and Saito(1972)により、球ベッセル関数  $j_n(x)$  を用いて次のように与えられている。まず、独立解3セットのうちの2セットは、

$$\begin{aligned}
r y_{1_j}(r) &= n h_j(x) - f x j_{n+1}(x), \\
r^2 y_{2_j}(r) &= -(\lambda + 2\mu) f x^2 j_n(x) + 2\mu \{ n(n-1) h_j(x) + [2f + n(n+1)] x j_{n+1}(x) \}, \\
r y_{3_j}(r) &= h_j(x) + x j_{n+1}(x), \\
r^2 y_{4_j}(r) &= \mu [x^2 j_n(x) + 2(n-1) h_j(x) - 2(f+1) x j_{n+1}(x)], \\
y_{5_j}(r) &= 3 \gamma f_j(x), \\
r y_{6_j}(r) &= (2n+1) y_{5_j}(r) - 3n \gamma h_j(x) \quad (j=1, 2),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 x &= k^\pm r, \\
 (k^\pm)^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega^2 + 4\gamma}{V_P^2} + \frac{\omega^2}{V_S^2} \mp \left[ \left( \frac{\omega^2}{V_S^2} - \frac{\omega^2 + 4\gamma}{V_P^2} \right)^2 + \frac{4n(n+1)\gamma^2}{V_P^2 V_S^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \\
 \gamma &= \frac{4}{3} \pi G \rho, \quad f = \frac{V_S^2}{\gamma} \left[ (k^\pm)^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right], \quad h = f - (n+1),
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

であり,  $x=k^+r$  が  $\{y_{i1}; i=1, 2, \dots, 6\}$ ,  $x=k^-r$  が  $\{y_{i2}; i=1, 2, \dots, 6\}$  の球ベッセル関数の引数である.

残る 3 セット目の独立解は,

$$\begin{aligned}
 r y_{13}(r) &= n r^n, \\
 r^2 y_{23}(r) &= 2\mu n(n-1) r^n, \\
 r y_{33}(r) &= r^n, \\
 r^2 y_{43}(r) &= 2\mu(n-1) r^n, \\
 y_{53}(r) &= (n\gamma - \omega^2) r^n, \\
 r y_{63}(r) &= (2n+1) y_{53}(r) - 3n\gamma r^n.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

線型常微分方程式論によれば, 成層構造をしている一般の場合にも 3 つの独立解  $\{y_{i1}; i=1, 2, \dots, 6\}$ ,  $\{y_{i2}; i=1, 2, \dots, 6\}$ ,  $\{y_{i3}; i=1, 2, \dots, 6\}$  が存在することがいえる.

## 2.2 粘弾性変形

長いタイムスケールの変動を扱うとき, より現実的な地球モデルに近づけるために地球を粘弾性体とみなさなければならない. そのため, 2.1 で述べてきた弾性変形の理論を粘弾性体の変形理論に拡張する必要がある. また, 第 4 章で, 非圧縮性または自己重力無視を仮定したときの地球変形の安定性にも触れるため, この節ではそれぞれの仮定をしたときの変形理論も記す.

### 2.2.1 マクスウェル粘弾性体の構成方程式と対応原理

1 次元の粘弾性模型は弾性固体要素 (つるまきバネ) と粘性流体要素 (ダッシュポット) を組み合わせてつくることができる. 例えば, つるまきバネとダッ

シュポットを直列につないでできる模型を 1 次元マクスウェル模型という．この模型の系全体の力学的性質を表す構成方程式は

$$\dot{\sigma} + \frac{2\mu}{3\eta}\sigma = (\lambda + 2\mu)\dot{e} \quad (2.23)$$

である． $\eta$ は粘性率を表し，応力 $\sigma$ と歪み $e$ のドットは時間微分を示す．

これを 3 次元の場合に一般化すると，

$$\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\mu}{\eta}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{\parallel}\delta_{ij}\right) = \lambda\dot{e}_{\parallel}\delta_{ij} + 2\mu\dot{e}_{ij} \quad (2.24)$$

となり，これが粘弾性体（3 次元マクスウェル物体）の構成方程式である(Peltier, 1974)．

さて，粘弾性変形と弾性変形の違いは各々の構成方程式（応力—歪の関係）だけなので，粘弾性体と完全弾性体の各構成方程式の関係を見つきたい．そこで，粘弾性体の構成方程式をラプラス変換する．まず，応力と歪のラプラス変換を，ラプラス変数  $s$  を用いて，

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}(r, s) &= \int_0^{\infty} \sigma_{ij}(r, t) \exp(-st) dt, \\ \bar{e}_{ij}(r, s) &= \int_0^{\infty} e_{ij}(r, t) \exp(-st) dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

と表すとすると，式(2.24)のラプラス変換は，形式的に

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\lambda}(s)\bar{e}_{\parallel}\delta_{ij} + 2\bar{\mu}(s)\bar{e}_{ij} \quad (2.26)$$

と書ける．ただし，

$$\bar{\lambda}(s) = \frac{\lambda s + K \frac{\mu}{\eta}}{s + \frac{\mu}{\eta}}, \quad (2.27)$$

$$\bar{\mu}(s) = \frac{\mu s}{s + \frac{\mu}{\eta}} \quad (2.28)$$

である．また  $K \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu$  は体積弾性率である．式(2.26)は見かけ上，完全弾性体の構成方程式(2.8)と全く同じ形をしている．完全弾性体と粘弾性体の構成方程式がこのように対応していることを対応原理という．



### 2.2.2 $y$ 関数の微分方程式系 (粘弾性体)

対応原理を用いると，粘弾性体の変形問題も完全弾性体と同じ方法で解くことができる．したがって，変位，応力，ポテンシャルなどの物理量をラプラス変換したとき，それらがしたがうべき式の形は弾性体の微分方程式系(2.19)と同一の形式になる．つまり，方程式(2.19)で  $y_i(r) \Rightarrow y_i(r; s)$ ， $\lambda = \bar{\lambda}(s)$ ， $\mu = \bar{\mu}(s)$  と置き換えた次の式になる．

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(r; s)}{dr} &= \frac{1}{\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)} \left\{ y_2(r; s) - \frac{\bar{\lambda}(s)}{r} [2y_1(r; s) - n(n+1)y_3(r; s)] \right\}, \\ \frac{dy_2(r; s)}{dr} &= s^2 \rho y_1(r; s) + \frac{2}{r} \left[ \bar{\lambda}(s) \frac{dy_1(r; s)}{dr} - y_2(r; s) \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \left\{ \frac{2[\bar{\lambda}(s) + \bar{\mu}(s)]}{r} - \rho g \right\} [2y_1(r; s) - n(n+1)y_3(r; s)] \\ &\quad + \frac{n(n+1)}{r} y_4(r; s) - \rho \left[ y_6(r; s) - \frac{n+1}{r} y_5(r; s) + \frac{2g}{r} y_1(r; s) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\frac{dy_3(r; s)}{dr} = \frac{1}{\bar{\mu}(s)} y_4(r; s) + \frac{1}{r} [y_3(r; s) - y_1(r; s)],$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_4(r; s)}{dr} &= s^2 \rho y_3(r; s) - \frac{\bar{\lambda}(s)}{r} \frac{dy_1(r; s)}{dr} - \frac{\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)}{r^2} [2y_1(r; s) - n(n+1)y_3(r; s)] \\ &\quad + \frac{2\bar{\mu}(s)}{r^2} [y_1(r; s) - y_3(r; s)] - \frac{3}{r} y_4(r; s) - \frac{\rho}{r} [y_5(r; s) - g y_1(r; s)], \end{aligned}$$

$$\frac{dy_5(r; s)}{dr} = y_6(r; s) + 4\pi G \rho y_1(r; s) - \frac{n+1}{r} y_5(r; s),$$

$$\frac{dy_6(r; s)}{dr} = \frac{n-1}{r} [y_6(r; s) + 4\pi G \rho y_1(r; s)] + \frac{4\pi G \rho}{r} [2y_1(r; s) - n(n+1)y_3(r; s)].$$

原点で正則な独立解が 3 セットあることも完全弾性体の場合と同じで，次式になる．

セット 1, 2

$$\begin{aligned}
ry_{1j}(r; s) &= nh(s)j_n[x(s)] - f(s)x(s)j_{n+1}[x(s)] \\
r^2y_{2j}(r; s) &= -[\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)]f(s)x(s)^2j_n[x(s)] \\
&\quad + 2\bar{\mu}(s)\{n(n-1)h(s)j_n[x(s)] + [2f(s) + n(n+1)]x(s)j_{n+1}[x(s)]\}, \\
ry_{3j}(r; s) &= h(s)j_n[x(s)] + x(s)j_{n+1}[x(s)] \\
r^2y_{4j}(r; s) &= \bar{\mu}(s)\{x(s)^2j_n[x(s)] + 2(n-1)h(s)j_n[x(s)] \\
&\quad - 2(f(s)+1)x(s)j_{n+1}[x(s)]\} \\
y_{5j}(r; s) &= 3\gamma f(s)j_n[x(s)] \\
ry_{6j}(r; s) &= (2n+1)y_{5j}(r; s) - 3n\gamma h(s)j_n[x(s)] \quad (j=1, 2),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
x(s) &= k(s)^\pm r, \\
[k(s)^\pm] &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-s^2 + 4\gamma}{V_p(s)^2} - \frac{s^2}{V_s(s)^2} \mp \left[ \left( \frac{s^2 - 4\gamma}{V_p(s)^2} - \frac{s^2}{V_s(s)^2} \right)^2 + \frac{4n(n+1)\gamma^2}{V_p(s)^2 V_s(s)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \tag{2.31} \\
\gamma &= \frac{4}{3}\pi G\rho, \quad f(s) = \frac{V_s(s)^2}{\gamma} \left\{ [k(s)^\pm] + \frac{s^2}{V_s(s)^2} \right\}, \quad h(s) = f(s) - (n+1).
\end{aligned}$$

また,

$$V_p^2(s) = \frac{\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)}{\rho}, \quad V_s^2(s) = \frac{\bar{\mu}(s)}{\rho}. \tag{2.32}$$

ただし,  $x=k^+r$  がセット 1  $\{y_{i1}; i=1, 2, \dots, 6\}$  の,  $x=k^-r$  がセット 2  $\{y_{i2}; i=1, 2, \dots, 6\}$  の球ベッセル関数の引数である.

セット 3

$$\begin{aligned}
ry_{13}(r; s) &= nr^n, \\
r^2y_{23}(r; s) &= 2\bar{\mu}(s)n(n-1)r^n, \\
ry_{33}(r; s) &= r^n, \\
r^2y_{43}(r; s) &= 2\bar{\mu}(s)(n-1)r^n, \\
y_{53}(r; s) &= (n\gamma + s^2)r^n, \\
ry_{63}(r; s) &= (2n+1)y_{53}(r; s) - 3n\gamma r^n.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

### 2.2.3 非圧縮性を仮定した $y$ 関数の微分方程式系

非圧縮性は変位の発散を 0 ( $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ),  $\lambda = \infty$  とおくことで表現できる (Wu and Peltier, 1982). 2.1.2 と同じ手順で  $y$  関数の微分方程式系を導き, 2.2.1 にしたがって粘弾性体の式に変換すると,

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1(r;s)}{dr} &= -\frac{1}{r} [2y_1(r;s) - n(n+1)y_3(r;s)], \\
\frac{dy_2(r;s)}{dr} &= s^2 \rho y_1(r;s) - \frac{4\bar{\mu}(s)}{r} \frac{dy_1(r;s)}{dr} \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{2\bar{\mu}(s)}{r} - \rho g \right) [2y_1(r;s) - n(n+1)y_3(r;s)] \\
&\quad + \frac{n(n+1)}{r} y_4(r;s) - \rho \left[ y_6(r;s) - \frac{n+1}{r} y_5(r;s) + \frac{2g}{r} y_1(r;s) \right], \quad (2.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy_3(r;s)}{dr} &= \frac{1}{\bar{\mu}(s)} y_4(r;s) + \frac{1}{r} [y_1(r;s) - y_3(r;s)], \\
\frac{dy_4(r;s)}{dr} &= s^2 \rho y_3(r;s) + \frac{4\bar{\mu}(s)}{r} \frac{dy_1(r;s)}{dr} - \frac{y_2(r;s)}{r} \\
&\quad + \frac{2\bar{\mu}(s)}{r^2} [y_1(r;s) - y_3(r;s)] - \frac{3}{r} y_4(r;s) - \frac{\rho}{r} [y_5(r;s) - g y_1(r;s)]
\end{aligned}$$

となる.  $y_5(r;s)$ ,  $y_6(r;s)$ に関する微分方程式は(2.29)と同じである. 均質球に対する独立解は3セットあり, 次のようになる.

セット 1

$$\begin{aligned}
r y_{11}(r) &= n(n+1)r^{n+2}, \\
r^2 y_{21}(r;s) &= (n+1) [n \rho \gamma^{n+4} + 2\bar{\mu}(s)(n^2 - n - 3)r^{n+2}], \\
r y_{31}(r) &= (n+3)r^{n+2}, \\
r^2 y_{41}(r;s) &= 2\bar{\mu}(s)(n+2)r^{n+2}, \\
y_{51}(r;s) &= 0, \\
r y_{61}(r) &= -3n(n+1)\gamma^{n+2}
\end{aligned} \quad (2.35)$$

セット 2

$$\begin{aligned}
r y_{12}(r) &= n r^n, \\
r^2 y_{22}(r;s) &= n [\rho \gamma^{n+2} + 2\bar{\mu}(s)(n-1)r^n], \\
r y_{32}(r) &= r^n, \\
r^2 y_{42}(r;s) &= 2\bar{\mu}(s)(n-1)r^n, \\
y_{52}(r;s) &= 0, \\
r y_{62}(r) &= -3n \gamma^{n-1}
\end{aligned} \quad (2.36)$$

セット 3

$$\begin{aligned}
 ry_{13}(r) &= 0, \\
 r^2 y_{23}(r) &= \rho r^{n+2}, \\
 ry_{33}(r) &= 0, \\
 r^2 y_{43}(r) &= 0, \\
 y_{53}(r) &= -r^n, \\
 ry_{63}(r) &= -2(2n+1)r^{n-1}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

#### 2.2.4 自己重力無視を仮定した $y$ 関数の微分方程式系

自己重力を無視したときの微分方程式系は式(2.29)の重力に関する項をすべて除いた形になる．具体的には  $g=G=y_5(r;s)=y_6(r;s)=0$  を式(2.29)に代入して次式を得る．

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1(r;s)}{dr} &= \frac{1}{\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)} \left\{ y_2(r;s) - \frac{\bar{\lambda}(s)}{r} [2y_1(r;s) - n(n+1)y_3(r;s)] \right\}, \\
 \frac{dy_2(r;s)}{dr} &= s^2 \rho y_1(r;s) + \frac{2}{r} \left[ \bar{\lambda}(s) \frac{dy_1(r;s)}{dr} - y_2(r;s) \right] \\
 &\quad + \frac{2[\bar{\lambda}(s) + \bar{\mu}(s)]}{r^2} [2y_1(r;s) - n(n+1)y_3(r;s)] + \frac{n(n+1)}{r} y_4(r;s), \\
 \frac{dy_3(r;s)}{dr} &= \frac{1}{\bar{\mu}(s)} y_4(r;s) + \frac{1}{r} [y_3(r;s) - y_1(r;s)], \\
 \frac{dy_4(r;s)}{dr} &= s^2 \rho y_3(r;s) - \frac{\bar{\lambda}(s)}{r} \frac{dy_1(r;s)}{dr} \\
 &\quad - \frac{\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)}{r^2} [2y_1(r;s) - n(n+1)y_3(r;s)] \\
 &\quad + \frac{2\bar{\mu}}{r^2} [y_1(r;s) - y_3(r;s)] - \frac{3}{r} y_4(r;s).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

微分方程式は 6 階ではなく 4 階なので，原点  $r=0$  で正則な独立解は 2 セットある．均質球に対する独立解は球ベッセル関数  $j_n(x)$  を用いて以下のように表される．

セット 1

$$\begin{aligned}
ry_{11}(r; s) &= nj_n[x_1(s)] - x_1 j_{n+1}[x_1(s)] \\
r^2 y_{21}(r; s) &= -[\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)]x_1(s)^2 j_n[x_1(s)] \\
&\quad + 2\bar{\mu}(s)\{n(n-1)j_n[x_1(s)] + 2x_1 j_{n+1}[x_1(s)]\}, \\
ry_{31}(r; s) &= j_n[x_1(s)] \\
r^2 y_{41}(r; s) &= 2\bar{\mu}(s)\{(n-1)j_n[x_1(s)] - x_1(s)j_{n+1}[x_1(s)]\} \\
x_1(s) &= k_1(s)r, \quad k_1(s)^2 = \frac{-s^2}{V_p(s)^2}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

セット 2

$$\begin{aligned}
ry_{12}(r; s) &= -n(n+1)j_n[x_2(s)] \\
r^2 y_{22}(r; s) &= 2\bar{\mu}(s)\{-n(n^2-1)j_n[x_2(s)] + n(n+1)x_2(s)j_{n+1}[x_2(s)]\}, \\
ry_{32}(r; s) &= -(n+1)j_n[x_2(s)] + x_2(s)j_{n+1}[x_2(s)] \\
r^2 y_{42}(r; s) &= \bar{\mu}(s)\{x_2(s)^2 j_n[x_2(s)] - 2(n^2-1)j_n[x_2(s)] \\
&\quad - 2x_2(s)j_{n+1}[x_2(s)]\}, \\
x_2(s) &= k_2(s)r, \quad k_2(s)^2 = \frac{-s^2}{V_s(s)^2}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

## 2.3 境界条件と $y$ 関数の解

### 2.3.1 外力があり、内部力源がないとき

氷河による荷重変形問題など、内部に力源がなければ解は地球内部で連続である。したがって一般解は未定係数  $C_1, C_2, C_3$  と連続な独立解  $y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}$  とを用いて

$$y_i(r; s) = C_1 y_{i1}(r; s) + C_2 y_{i2}(r; s) + C_3 y_{i3}(r; s) \tag{2.41}$$

と表せる。地表  $r=a$  では、応力や重力についての 3 つの境界条件が課される。一般的にそれらは、

$$\begin{pmatrix} y_2(a; s) \\ y_4(a; s) \\ y_6(a; s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2(s) \\ q_4(s) \\ q_6(s) \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

とかける。これから  $C_1, C_2, C_3$  について

$$\begin{pmatrix} y_{21}(a; s) & y_{22}(a; s) & y_{23}(a; s) \\ y_{41}(a; s) & y_{42}(a; s) & y_{43}(a; s) \\ y_{61}(a; s) & y_{62}(a; s) & y_{63}(a; s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2(s) \\ q_4(s) \\ q_6(s) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

あるいは同じことだが,

$$M(s) = \begin{pmatrix} y_{21}(a; s) & y_{22}(a; s) & y_{23}(a; s) \\ y_{41}(a; s) & y_{42}(a; s) & y_{43}(a; s) \\ y_{61}(a; s) & y_{62}(a; s) & y_{63}(a; s) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_2(s) \\ q_4(s) \\ q_6(s) \end{pmatrix} \text{と} \text{おいて,}$$

$$M(s) \cdot C = q(s) \quad (2.43)'$$

という式が成り立つ. クラームルの公式から

$$C_1 = \frac{1}{\det M(s)} [q_2(s)\Delta_{11} + q_4(s)\Delta_{21} + q_6(s)\Delta_{31}]$$

$$= \frac{P_1(s)}{\det M(s)} \quad (2.44)$$

$$P_1(s) = q_2(s)\Delta_{11} + q_4(s)\Delta_{21} + q_6(s)\Delta_{31}$$

ここで,  $\Delta_{ij}$  は小行列式

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} y_{42} & y_{43} \\ y_{62} & y_{63} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} y_{62} & y_{63} \\ y_{22} & y_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{42} & y_{43} \end{vmatrix} \quad (2.45)$$

である.  $C_2, C_3$  についても同様の式で表現できる. 式(2.41)から境界条件を満たす  $y$  関数の解は

$$y_i(r; s) = \frac{1}{\det M(s)} [P_1(s)y_{i1}(r; s) + P_2(s)y_{i2}(r; s) + P_3(s)y_{i3}(r; s)] \quad (2.46)$$

のような形で表せる.

時間領域での解を求めるには,

$$y_i(r; t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-\infty i}^{C+\infty i} y_i(r; s) \exp(st) ds \quad (2.47)$$

で表されるラプラスの逆変換を使う. このとき,  $s=s_k$  で  $\det M(s_k)=0$  になるとすると, 留数の定理から解は

$$y_i(r; t) = \sum_{k=1}^N r_k \exp(s_k t) \quad (2.48)$$

となる. ここで,  $r_k$  は留数,  $N$  は一次の極( $s_k$ )の個数である.  $\Delta_s(a; s) = \det M(a; s)$  を特性関数,  $\Delta_s(a; s) = 0$  を特性方程式と呼ぶ. 特性方程式を満たす  $s=s_k$  を特性根と呼ぶ.

### 2.3.2 内部力源があり，外力がないとき

地球内部の  $r=r_0 < a$  に点震源などの内部力源をおくと， $r=r_0$  で解が不連続になる．このときの解は未定係数  $C_1, C_2, C_3$  を用いて

$$y_i(r; s) = C_1 y_{i1}(r; s) + C_2 y_{i2}(r; s) + C_3 y_{i3}(r; s) + \tilde{y}_i(r; s) \quad (2.49)$$

と表せる． $\tilde{y}_i(r; s)$  は震源  $r=r_0$  での励起を表し，

$$\begin{cases} \tilde{y}_i(r_0 + \varepsilon; s) = b_i & (\varepsilon \ll a) \\ \tilde{y}_i(r < r_0; s) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

という不連続な関数である (Saito, 1967; Takeuchi and Saito, 1972) . 初期値を式(2.50)の  $b_i$  として，上方に数値積分して解を求める． $r < r_s$  で  $\tilde{y}_i(r; s) = 0$  とする．このようにすると  $\tilde{y}_i(r; s)$  が微分方程式(2.29)を満たすことは明らかである．したがって式(2.49)も確かに微分方程式(2.29)を満たす．

この場合，地表が自由表面になるための応力，重力に関する境界条件は

$$y_2(a; s) = y_4(a; s) = y_6(a; s) = 0 \quad (2.51)$$

である．これから  $C_1, C_2, C_3$  について

$$\begin{pmatrix} y_{21}(a; s) & y_{22}(a; s) & y_{23}(a; s) \\ y_{41}(a; s) & y_{42}(a; s) & y_{43}(a; s) \\ y_{61}(a; s) & y_{62}(a; s) & y_{63}(a; s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tilde{y}_2(a; s) \\ \tilde{y}_4(a; s) \\ \tilde{y}_6(a; s) \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

という式が成り立つ．これは形としては式(2.43)と同一である．つまり，ラプラスの逆変換を施した時間領域での解は  $\det M(s) = 0$  の根  $s_k$  を用いて

$$y_i(r; t) = \sum_{k=1}^N r_k \exp(s_k t) \quad (2.53)$$

の形で表される．ここで， $r_k$  は留数， $N$  は一次の極( $s_k$ )の個数である．

## 2.4 安定性

外力に対する応答の式(2.48)や内部力源への応答の式(2.53)にある  $\exp(s_k t)$  に着目すると， $s_k < 0$  のとき  $t \rightarrow \infty$  で解は収束するが， $s_k > 0$  のときは  $t \rightarrow \infty$  で解が発散してしまう．すなわち， $s_k < 0$  のモードについてはその変形は緩和する方向に向かうが (安定)， $s_k > 0$  のモードについては変形が時間とともに成長し続ける (不安定)．このような地球変形の安定性は， $s_k$  の符号によって決定される．つまり，

$$\begin{cases} s_k < 0: \text{安定} \\ s_k > 0: \text{不安定} \end{cases}$$

ということである。また  $s_k > 0$  のとき,  $s_k \rightarrow 0$  ほど, 安定に近づいているといえる。特性方程式  $\det M(s) = 0$  とする  $s = s_k$  を特性根と呼ぶ。正の特性根が存在するとき, 成長モードが励起されることになる。特性根の逆数を特性成長時間と呼ぶことにする。また, 最大値をとる正の特性根の逆数を, 基本成長時間と呼ぶことにする。

第1章でみてきたように, 成長モードについてはまだ研究の初期段階にある。本研究では 1.2 で述べた目的のために, ラプラス変数  $s > 0$  の範囲に限定して特性関数  $\det M(a; s)$  の変化に注目する。

なお, ラプラス変数  $s$  が実数のみをとることは大久保(準備中)によって証明されている。



## 第3章 数値積分

### 3.1 数値積分

地球の物性が動径方向に不均質のとき，式(2.29)の解析解を得ることは大変困難であり， $y$ 関数の解は数値的に求めざるを得ない。

#### 3.1.1 数値積分の方法

$y$ 関数の3つの独立解を計算するために，6階の連立微分方程式(2.29)を数値積分する．地球中心から  $r \leq r_0 (\ll a)$  では均質と考え，均質球に対する3つの独立解(2.30)～(2.33)を数値積分の初期値として用いた．積分に使用した手法はRunge-Kutta-Gill法(4次のRunge-Kutta法)である．この手法の利点は，ステップごとにきざみ幅の異なる場合でも積分ができることにある．それゆえ，層ごとに厚さの異なる地球モデルを計算するのに大変便利である．

#### 3.1.2 初期値の最適化

均質球に対する $y$ 関数の独立解(2.30)，(2.33)は， $k(s)^2$ が小さくなると3つの解の独立性がなくなるという欠点がある．独立性を維持するため，式(2.30)，(2.33)を次のように変形した(Takeuchi and Saito, 1972)．

$$z_{ij} = \left[ y_{ij}(r_0) \cdot \left( \frac{r}{j_n[x_0(s)]} \right) - z_{i3} \cdot h(s) \right] \cdot \frac{\gamma}{x_0(s)^2} \quad (i=1,2,\dots,6, j=1,2), \quad (3.1)$$

$$x_0(s) = k^\pm(s)r_0$$

$$z_{i3} = y_{i3}(r_0) \cdot \left( \frac{1}{r_0^{n-1}} \right) \quad (i=1,2,\dots,6), \quad (3.2)$$

実際の計算には  $\{z_{i1}; i=1\sim 6\}$ ,  $\{z_{i2}; i=1\sim 6\}$ ,  $\{z_{i3}; i=1\sim 6\}$  の3つの組を初期値として用いた。

### 3.2 モデルのパラメータ

本研究に用いた地球モデルのうち、均質モデルと2層モデルのパラメータを表1、表2に示す。

半径 $a$ [km]	P波速度 $V_P$ [km/s]	S波速度 $V_S$ [km/s]	密度 $\rho$ [g/cc]	粘性率 $\eta$ [P]
6371	4.7	2.6	2.67	$10^{22}$

表1：均質モデルに用いたパラメータ

動径距離 $r$ [km]	P波速度 $V_P$ [km/s]	S波速度 $V_S$ [km/s]	密度 $\rho$ [g/cc]	粘性率 $\eta$ [P]
0~6171	12.1	7.0	5.0	$10^{22}$
6171~6371	4.7	2.6	2.67	$10^{26}$

表2：2層モデルに用いたパラメータ

### 3.3 数値計算の精度

さきに記したように、均質モデルでは地表での解析解が得られている。そこで  $r=a$  とした式(3.1)と(3.2)の  $z_{ij}(a;s)(i=1, 2, \dots, 6, j=1, 2, 3)$  の解析解と、数

値積分による数値解の結果を比較することで、数値積分の精度を評価した（表 3）。結果は次数  $n=2$ ， $s = -10^{-11}$  [1/s] の場合である。

$i \backslash j$		$i$					
		1	2	3	4	5	6
1	解析解	1.30999E-2	-1.16980E-4	6.92532E-3	-4.10097E-5	6.69079E-5	2.12768E-8
	数値解	1.30999E-2	-1.16980E-4	6.92532E-3	-4.10097E-5	6.69079E-5	2.12768E-8
2	解析解	1.50200E-2	-1.03941E-4	7.87205E-3	-9.65091E-5	1.00509E-4	5.29794E-8
	数値解	1.50200E-2	-1.03941E-4	7.87205E-3	-9.65092E-5	1.00509E-4	5.29794E-8
3	解析解	6.03886E+1	-4.25092E-1	3.01943E+1	-2.12546E-1	2.87004E-1	9.00971E-5
	数値解	6.03886E+1	-4.25092E-1	3.01943E+1	-2.12546E-1	2.87004E-1	9.00971E-5

表 3：独立解  $y_{ij}$  の、解析解と数値解の比較

表 3 から、解析解と数値解はすべて 5 桁以上の精度で一致するので、数値積分によって得られる解の精度も  $10^{-5}$  より良いといえる。

## 第4章 成長モードの励起原因

### 4.1 SNRVI モデルを用いたときの安定性

第1章で述べたように Plag and Jüttner (1995)や Hanyk et al. (1999)は、PREM や均質、2層、3層モデルを用いたときの特性関数の計算結果を調べ、成長モードが励起されることを示した。彼らの研究をここで検証するため、図4-1に均質モデル、図4-2に2層モデル、図4-4に1066A (Gilbert and Dziewonski, 1974; モデルのパラメータは図4-3)を用いたときの特性関数  $\det M(s)$ の計算結果を示す。計算方法は第3章に示したとおりで、次数  $n=2, 3, 5, 10$  について計算した。均質、2層モデルの各パラメータは表1、表2にある。また式(2.29)の微分方程式にある  $s^2$  は十分小さく無視できるので、 $s^2=0$ として計算した(準静的近似)。

図4-1, 4-2, 4-4からわかるように、確かにこれらのSNRVIモデルを用いると、 $s>0$ で特性根が存在し、成長モードが励起されるので不安定であることがわかった。基本特性時間は、均質モデルのとき数千年～数万年、2層モデルのとき数万年、1066Aのとき数百万年である。

さて、これらの図では、特性根が密集している領域と、散在している領域の2種類の領域が存在しているように見える。これ以降、このようなパターンが現れた場合には、それぞれの領域を密集領域、散在領域と呼ぶことにする。

## 4.2 非現実的な仮定をしたときの安定性

Hanyk et al. (1999) は、非圧縮性を仮定すると成長モードは励起されないと述べている。これを検証するため、非圧縮性を仮定した均質、2層モデルを用いたときの特性関数を計算した(図 4-5, 4-6)。また、これまでの研究でしばしば導入された非現実的な仮定である、自己重力を無視したときの均質、2層モデルを用いたときの特性関数も計算した(図 4-7, 4-8)。計算した次数はどちらも  $n=2, 3, 5, 10$  である。

図 4-5~4-8 から明らかなように、非圧縮性を仮定したときは  $s>0$  の範囲で常に  $\det M(s)>0$  であり、自己重力を無視したときは  $s>0$  の範囲で常に  $\det M(s)<0$  があるので、特性根  $\det M(s)=0$  は存在しない。これより、確かに非圧縮性または自己重力無視を仮定したとき、成長モードは励起されず安定であることがわかる。

## 4.3 Adams-Williamson の式を考慮したモデル

本節では 1.2 で記した Longman(1963)の研究をヒントに、Adams-Williamson の式を満たしたモデルを用いたときの安定性を議論する。ここで登場する Adams-Williamson の式は、モデル内の密度の半径方向の減少率を、密度と体積弾性率と重力を用いて表現した式である。ところで前節では、非圧縮性または自己重力無視を仮定すると安定であることがわかった。非圧縮性は体積弾性率  $\rightarrow\infty$ 、自己重力無視は重力に関するすべての項を 0 にすることで表現できるということは 2.2.3, 2.2.4 で述べた。このことから、固体の場合においても確かに Adams-Williamson の式は安定性に何らかの関係がありそうである。

本節以降は球面調和関数の次数が 2 次するときだけについての応答を示す。それは、4.1, 4.2 の結果から、それぞれの成長モードの励起パターンには、どの場合も次数  $n$  による傾向の差はないといえるからである。

### 4.3.1 Adams-Williamson の式

組成が一様な地球内部において静水圧平衡を仮定する。このとき深さが増すと圧力が増加し、それにもとない密度も増加する。半径  $r$  における静水圧  $p$  の勾

配は,

$$\frac{dp(r)}{dr} = -g(r)\rho(r) \quad (4.1)$$

と与えられ, ここに  $g$  は重力加速度,  $\rho$  は密度である. また密度の半径方向の変化は

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = \frac{d\rho(r)}{dp(r)} \frac{dp(r)}{dr} \quad (4.2)$$

であり, これに化学的均一性を仮定したときに得られる

$$\frac{d\rho(r)}{dp(r)} = \frac{\rho(r)}{K(r)} \quad (4.3)$$

という関係を用いると, 式(4.1)は,

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = -\frac{\rho^2(r)g(r)}{K(r)} \quad (4.4)$$

となる. ここで  $K(r)$  は体積弾性率である. 式(4.4)を Adams-Williamson の式という (Williamson and Adams, 1923).

### 4.3.2 重力的安定性

静水圧平衡のもとで, 地球内部の位置  $r = r_1$  にある微小体積要素 A (密度  $\rho_A(r_1)$ ) に仮想変位  $\Delta r$  を与える. A の感じる静水圧の変化  $[dp(r_1)/dr] \Delta r$  から体積変化が  $(1/K) [dp(r_1)/dr] \Delta r$  と求まるので, 位置  $r' = r_1 + \Delta r$  での A の密度  $\rho_A(r')$  は,

$$\rho_A(r') = \rho(r_1) + \frac{\rho(r_1)}{K(r_1)} \frac{dp(r_1)}{dr} \Delta r \quad (4.5)$$

となり, その周囲の密度  $\rho'$  は次式のようなになる.

$$\rho' = \rho(r_1) + \frac{dp(r_1)}{dr} \Delta r \quad (4.6)$$

このときの A の重力的な挙動を, Adams-Williamson の式をもとに 3 つの場合にわけて述べる.

まず初めに, 式(4.4)が成り立つとき, 位置  $r'$  での A の密度  $\rho_A(r')$  は周囲の密度と同じ  $\rho'$  になる. これは, 式(4.5)に式(4.1)を, 式(4.6)に式(4.4)を代入することで得られる. このとき, 浮力と重力が釣り合うため, A は位置  $r'$  で静止する. したがって, 重力的に中立といえる.

次に,

$$\frac{d\rho(r)}{dr} < -\frac{\rho^2(r)g(r)}{K(r)} \quad (4.7)$$

のとき、位置  $r'$  での A の密度  $\rho_A(r')$  は  $\rho_A(r') > \rho'$  となり、周囲の密度  $\rho'$  より大きい。そのため A は、重力によって位置  $r_1$  に復元する。したがって、重力的に安定といえる。

最後に

$$\frac{d\rho(r)}{dr} > -\frac{\rho^2(r)g(r)}{K(r)} \quad (4.8)$$

のときである。位置  $r'$  での A の密度  $\rho_A(r')$  は  $\rho_A(r') < \rho'$  となり、周囲の密度  $\rho'$  より小さくなる。すると A は浮力で上昇を始める。上昇を始めた A は位置  $r > r'$  でさらに圧力が下がって体積が増え、密度が小さくなり上昇を続ける。したがって、重力的に不安定といえる。

以上のことから、重力的不安定にならないための条件は、

$$\frac{d\rho(r)}{dr} \leq -\frac{\rho^2(r)g(r)}{K(r)} \quad (4.9)$$

となる。

### 4.3.3 モデル

重力的安定条件の式(4.9)を満たすように、モデルの密度  $\rho(r)$  と体積弾性率  $K(r)$  の組み合わせを次のようにして作る。まず密度を

$$\rho(r) = \rho_0 + cr^2 \quad (4.10)$$

とおく。ここで  $\rho_0$  は地球中心の密度、 $c$  は比例係数である。このとき重力は

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 (\rho_0 + cr'^2) dr' \\ &= \frac{4\pi G}{3} \left( \rho_0 r + \frac{3}{5} cr^3 \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

である。式(4.10)、(4.11)を式(4.9)に代入し、体積弾性率  $K(r)$  について求めると、

$$K(r) \geq K_0(r) = -\frac{4\pi G}{3} \frac{(\rho_0 + cr^2)^2 \left( \rho_0 + \frac{3}{5} cr^2 \right)}{2c} \quad (4.12)$$

となる。密度  $\rho(r)$  と、式(4.12)を満たす体積弾性率で記述されるモデルは、重力的に安定である。

さて、そのようなモデルを 3 種類にわけると、一つは重力的に中立な体積弾性

率  $K(r)=K_0(r)$  のモデルで、これを中立モデルと呼ぶことにする。もう一つは重力的に安定な体積弾性率  $K(r)>K_0(r)$  のモデルで、重力安定モデルと呼ぶことにする。さらに、もう一つモデルを考える。それは式(4.10)を満たさない、重力的に不安定な体積弾性率  $K(r)<K_0(r)$  のモデルで、重力不安定モデルと呼ぶことにする。 $\{\rho(r), K(r)\}$  の決定に用いたパラメータは半径  $a=6371$  [km], 中心密度  $\rho_0=13.0$  [g/cc], 地表密度  $\rho(a)=3.0$  [g/cc] である。また各モデルの弾性定数は  $\lambda(r)=\mu(r)$  のポアソン物質を仮定した。

## 4.4 中立、重力安定、重力不安定モデルを用いた ときの安定性

地球変形の安定性と Adams-Williamson の式の関連性を探るため、4.3.3 で設定した 3 つのモデル（中立モデル、重力安定モデル、重力不安定モデル）を用いて特性関数を計算した結果を示す。

### 4.4.1 中立モデル ( $K(r)=K_0(r)$ )

図 4-9 に特性関数の計算結果を示す。この図から、4.1.1, 4.1.2 で示した均質モデル、2 層モデル、1066A とは明らかに傾向が異なっているのがわかる。最も注目したいのは、基本成長時間がおよそ 700 億年であることである。これは地球の年齢 46 億年を越え、宇宙の年齢 150 億年をもはるかに越えている。したがって、このようなオーダーに特性根が存在し成長モードが励起されたとしても、地球科学的な意味をもたない。これより、話を地球上に限ったときは安定であるといえる。

### 4.4.2 重力安定モデル ( $K(r)=2K_0(r)\sim 10K_0(r)$ )

図 4-10 に、体積弾性率  $K_0(r)$  を整数倍 ( $K(r)=mK_0(r)$ ;  $m=2, 4, 6, 8, 10$ ) した 5 つのモデルを用いたときのそれぞれの計算結果を示す。

この図からわかるのは、どの場合も密集領域内の特性根しか存在しないことである。 $K(r)=K_0(r)$  の場合と異なり、ここで設定したどの体積弾性率を用いた場合でも、基本成長時間は数千万年である。これは地球の年齢と比べても無視で



きないので、不安定であるといえる。

#### 4.4.3 重力不安定モデル ( $K(r)=0.1K_0(r)\sim 0.8K_0(r)$ )

図 4-11 に、体積弾性率  $K_0(r)$  を  $x/10$  倍 ( $x=1, 2, 4, 6, 8$ ) した 5 つのモデルを用いたときのそれぞれの計算結果を示す。

重力不安定モデルを用いると、中立モデル、重力安定モデルの場合よりも基本成長時間は数百年～数千年と、きわだって短くなっている。重力的に不安定なモデルでの結果なので、当然不安定である。しかし、図 4-10 では散在領域がなかったが、密集領域と散在領域の両領域が存在していることには注目しておきたい。

## 4.5 成長モードの励起原因

### 4.5.1 密集領域

均質モデルを用いた結果の密集領域について詳しく調べる。この由来は数理的問題にある。

密集領域では特性関数  $\det M(s)$  が激しく振動し、特性根が無数に存在する。 $s$  が非常に小さくなると、式(2.28)より  $\bar{\mu}(s)$  は 0 に近づく。 $\bar{\mu}(s)=\rho V_s(s)^2$  であるので、 $V_s(s)^2$  も 0 に近づく。すると式(2.18)'の  $k=k(s)$  が無限大に近づく。このとき、式(2.30)～(2.33)で表される  $y$  関数の独立解にある球ベッセル関数の引数  $x(s)=k(s)r$  が無限大に近づく。引数が無限大になるとき、球ベッセル関数は漸近展開ができ、

$$j_n[x(s)] \sim \frac{1}{x(s)} \cos \left[ x(s) - \frac{(n+1)\pi}{2} \right] \quad (4.13)$$

となる。独立解が式(4.13)に比例するので、独立解で構成される  $\det M(s)$  も式(4.13)に比例する。式(4.13)は  $x(s)$  が大きくなるほど波長が短くなり、振動が激しくなる。以上の理由により  $s \rightarrow 0$  で  $\det M(s)$  が激しく振動して特性根が無数に存在し、成長モードが励起される。

### 4.5.2 散在領域

4.4の結果からわかるように、重力安定モデルを用いると散在領域が存在しない。このことから、散在領域が存在することによる成長モードの励起は、重力的不安定が原因であるといえる。

#### 4.5.3 密集，散在領域以外の特性根

中立モデルを用いた特性関数の計算結果では、密集領域と散在領域の区別がつかない。また、本章で用いたモデルは、密度勾配を考慮しただけの単純なモデルである。これらを考えると、特性根の存在は、数理的問題によるものと重力不安定によるもの以外の理由でも存在する可能性がある。

## 第5章 0 次変形の安定性

第 1 章で述べたように，球面調和関数の 0 次のモードについて調べている論文はなぜか存在しない．しかし，地球の変形は球面調和関数の各次数ごとの応答の足し合わせによって表現されるので，当然 0 次のモードも考える必要がある．本章では，均質モデルの 0 次のモードについての安定性を議論する．

### 5.1 0 次の $y$ 関数の微分方程式系

$n=0$  のときの変形は，単純圧縮，単純膨張である．微分方程式系は式(2.29)のように 6 つの微分方程式ではなく，3 つになる．

式(2.29)に  $n=0$  を代入して整理すると，

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(r;s)}{dr} &= \frac{1}{\bar{\lambda}(s)+2\bar{\mu}(s)} \left[ y_2(r;s) - \frac{2\bar{\lambda}(s)}{r} y_1(r;s) \right], \\ \frac{dy_2(r;s)}{dr} &= s^2 \rho y_1(r;s) + \frac{2}{r} \left[ \bar{\lambda}(s) \frac{dy_1(r;s)}{dr} - y_2(r;s) \right] \\ &\quad + \frac{4}{r} \left[ \frac{\bar{\lambda}(s)+\bar{\mu}(s)}{r} - \rho g \right] y_1(r;s), \\ \frac{dy_3(r;s)}{dr} &= 4\pi G \rho y_1(r;s).\end{aligned}\tag{5.1}$$

となる．均質球の場合の独立解は Saito(1974)で与えられており，

$$\begin{aligned}
ry_1(r;s) &= (kr)j_1(kr), \\
r^2y_2(r;s) &= [\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)](kr)^2 j_0(kr) - 4\mu(kr)j_1(kr), \\
y_3(r;s) &= 3\gamma[1 - j_0(kr)]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$k^2 = k(s)^2 = \frac{4\gamma}{V_p(s)^2}, \quad \gamma = \frac{4\pi G\rho}{3}, \quad V_p(s)^2 = \frac{\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)}{\rho} \tag{5.3}$$

である。計算には  $r=r_0(\ll a)$  とおいた式(5.2)を初期値に用いた。また、弾性定数  $\lambda(r) = \mu(r)$  のポアソン物質を仮定した。

さて、境界条件は 2.3 で示したとおりである。しかし、0 次のはきは式(5.1)からわかるとおり、 $y_4(r;s)$ 、 $y_6(r;s)$  についての方程式が存在しない。したがって特性根は地表  $r=a$  において  $y_2(a;s) = y_2(s) = 0$  となる  $s=s_k$  である。

## 5.2 安定性

球面調和関数の次数が 2 次以上のとき、4.5.1 で示したように密集領域の存在原因は、球ベッセル関数の引数が無限大になることであった。 $n=0$  のとき、球ベッセル関数の引数は  $k(s)$  と  $r$  であるので、 $y_2(s)=0$  となる特性根  $s_k$  が存在するかどうかは、式(5.2)、式(5.3)から半径 (球の大きさ)  $r$ 、P 波速度  $V_p$ 、密度  $\rho$  の 3 つの組み合わせと、それぞれの値のとり方によると考えられる。

### 5.2.1 結果

均質モデルの P 波速度  $V_p$  を、1[km/s] ずつ 1~10[km/s] の範囲で系統的に変化させた 10 個のモデルを用いてそれぞれ特性関数  $y_2(s)$  の計算をした (図 5-1)。同様に、密度  $\rho$  (1[g/cc] ずつ 1~10[g/cc])、半径  $r$  (1000[km] ずつ 1000~10000[km]) についても、各々 10 個のモデルを用いたときの特性関数  $y_2(s)$  の計算結果を図 5-2、図 5-3 に示す。本来、 $r$  を一定として  $V_p$  または  $\rho$  を変化させるのが地球モデルとして適当であるが、将来的に話を惑星一般にまで拡張できる可能性を考え、 $r$  を変化させたときの結果もみる。なお、変数に指定した以外のパラメータについては、表 1 の均質モデルのパラメータと同じ値を用いた。

$V_p$  を変化させたときの結果 (図 5-1) から分かるのは、 $V_p=1$ [km/s] と 2[km/s] のとき、一つだけ特性根が存在することである。

$\rho$  を変化させたときの結果 (図 5-2) と  $r$  を変化させた場合の結果 (図 5-3) で

は、ともに変数がある範囲に値をとるときだけ特性根が存在することがわかる。

### 5.2.2 考察

P 波速度を変化させたときの結果からわかるのは、0 次のモードでは  $V_p$  がある値以下（ここでは 3[km/s]未満）になると特性根が存在する，ということである（図 5.1）。これは以下の理由による。式(5.2)にある球ベッセル関数の引数（式(5.3)）は、 $V_s(s)$ によらずに  $V_p(s)$ のみによる。 $s>0$  の範囲では  $V_p(s)$ は変域が小さく、0 次のときは引数  $k(s)$ の変域も小さくなる（式(6.3)から）。そのため、次数が 2 次以上のときのように、球ベッセル関数の漸近式が激しく振動し  $j_n=0$  となる点が無数に存在する範囲まで  $k(s)$ が変化せず、 $j_n=0$  となる点が一つしか現れない範囲までしか変化しない。したがって、特性根は一つしか存在しない。

密度または半径を変化させた結果からいえるのは、特性根は密度または半径がある範囲にあるときに存在する，ということである。一定値ではなく、ある範囲というのは、 $\rho$ は 1[g/cc]ずつ、 $r$ は 1000[km]ずつ離散的に変化させていることからいえる。さて、特性根が存在する範囲は、今回使用したモデルでは、密度の場合  $3\pm 1$ [g/cc]、半径の場合  $7000\pm 1000$ [km]であった。このことから、どちらの場合もその範囲はかなり限定されるのがわかる。

# 第6章 まとめと今後の展望

## 6.1 まとめ

第4章，第5章での議論をこの章で総括する。

### 6.1.1 成長モードの励起原因

重力的安定性の条件式を満たしたモデルについて詳しくみた結果，地球に限った変形問題については，重力的に中立なモデル（Adams-Williamson の式に忠実に作られたモデル）を用いると安定であるといつてよいことがわかった。また，成長モードの励起される原因が少なくとも二つあることが明らかになった。

- 1)  $s \rightarrow 0$  で  $\mu(s) \rightarrow 0$  になるという数理的な問題による成長モードの励起。
- 2) 重力的不安定による成長モードの励起。

1) の成長モードについては，Wu and Peltier (1982)らが， $\mu(s) \rightarrow 0$  となるときには積分開始点  $r=r_0$  ( $\ll a$ ) の物質を流体であるとして計算することを提案している。しかし，これは問題の本質的な改善にはならない。なぜなら，次数  $n$  が低次のとき積分開始点は内核の半径より小さい値をとることになり，この位置の物質は固体だからである。1) の理由による成長モードを避けるための方法を，第2章で述べた理論から発展させても見つからなかった場合， $s \rightarrow 0$ —特性成長時間にして数百万年以上のオーダーの地球変形問題に，マクスウェル模型を使用すること自体を避けなければいけないのかもしれない。

- 2) の成長モードについては，当然のことながら重力的に安定なモデルなら回

避できる。

### 6.1.2 0次変形の安定性

球面調和関数の次数  $n=0$  のとき，均質球では，安定性が P 波速度，密度，半径に左右される．P 波速度については，ある値以下になると特性根が一つ存在することがわかった．つまり，均質モデルではモデルの弾性が小さくなると，不安定を起こしやすいということである．密度については，ある範囲内にあると特性根を一つ得ることがわかった．半径に関しても同様である．これらのパラメータはどれか一つが今述べた条件に当てはまれば不安定を起こす，というわけではなく，それぞれの値の組み合わせによって不安定を起こす範囲が決まってくるので，正確な数値は一概にはいえない。

## 6.2 今後の展望

本問題は研究が始められたばかりで，これまでに述べてきた中にもいくつかの改善すべき点があった．また，本研究では地球の熱的影響を完全に無視した．今後安定性の問題を扱うには，まずこの点から改良が必要であろう．

もし，成長モードは地球にはあり得ないとした場合，成長モードが確実に励起されないようなモデルの構築が必須である．地震学的観点から決められたモデル(PREM や 1066A)では，今のところ Adams-Williamson の式に忠実でない層が存在するので，このモデルを用いて変形問題を扱っても安定になることはあり得ない。

しかし逆に，成長モードを肯定的にみるといろいろと面白いことがある．何らかの外力で地球に変形がもたらされ，成長モードが励起されたとき，地球は安定に向かうように様々な変動を起こすであろう．例えば第 1 章で記した Plag and Jüttner (1995)の定性的考察にあるような，大規模な質量の移動という地質学的現象が，長きに渡って起こる可能性もある．例えば外殻の対流などの地表に現れない現象によって，不安定を解消している可能性もある．もしかすると，現在も地球は不安定な状態にあるが，観測されていないためにまだ気づいていないだけかもしれない。

このように，地球変形の安定性解析は地球物理学的にも地質学的にも広範囲

の研究分野で関連がありそうなので、今後さらに議論を深めていく必要がある。  
それに平行して観測や地球史の解明も進められると、私たちの知らない新しい  
地球の顔が見えてくるかもしれない。



# 謝辞

基礎理論の講義から本研究の指南まで，東京大学地震研究所の大久保修平教授には多くのご指導，ご助言を賜りました．ここに記して感謝の意を表します．

本研究に必要な数学，コンピュータのご指導，物理的，精神的サポートを多くの方にしていただきました．氏名は挙げきれませんが，あわせて深く感謝いたします．

最後に，本研究のために東京大学地震研究所地震予知情報センターの計算機システムを利用しました．

## 参考文献

- Aki, K. and P. G. Richards, (1980) Free oscillations of the Earth, in *Quantitative Seismology : Theory and Methods*, vol. 1, edited by Cox, A., W. H. Freeman and Company, San Francisco, pp. 337-382.
- Alterman, Z., H. Jarosch and C. L. Pekeris (1959) Oscillation of the earth, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **23**, 80-95.
- Dziewonski, A. M. and D. L. Anderson (1981) Preliminary reference Earth model, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **25**, 297-356.
- Gilbert, F. and A. M. Dziewonski (1975) An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra, *Phil. Trans. R. Soc. London A.*, **278**, 187-269.
- Han, D. and J. Wahr (1995) The viscoelastic relaxation of a realistically stratified earth, and a further analysis of postglacial rebound, *Geophys. J. Int.*, **120**, 287-311.
- Hanyk, L., C. Matyska and D. A. Yuen (1999) Secular gravitational instability of a compressible viscoelastic sphere, *Geophysical Research Letters*, **26**, 557-560.
- Longman, M. (1963) A Green's function for determining the Deformation of the Earth under surface mass loads, 2. Computations and numerical results, *Journal of Geophysical Research*, **68**, 485-496.
- Love, A. E. H. (1911) General theory of a gravitating compressible planet, in *Some Problems of Geodynamics*, Cambridge University Press, London, pp. 102-118.
- 松浦充宏 (1996) 変形と破壊, 地球連続体力学, 岩波講座地球惑星科学 **6**, 岩波書店, 東京, 第 5 章, pp. 175-237.

- 大久保修平 (1994) 地球変形, 地球内部, 現代測地学, 日本測地学会創立 40 周年記念出版「現代測地学」編集委員会編, 日本測地学会, つくば市, 6.1, 265-282.
- Pekeris, C. L. and H. Jarosch, (1958) The free oscillations of the Earth, in *Contributions in Geophysics : In Honor of Beno Gutenberg*, edited by Benioff, H., Ewing, M., Howell, B. F. Jr. and Press, F., Pergamon Press, London, New York, Paris, Los Angeles, pp. 171-193.
- Peltier, W. R. (1974) The impulse response of a Maxwell Earth, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, **12**, 649-669.
- Peltier, W. R. (1985) The LAGEOS constraint on deep mantle viscosity : Results from a new normal mode method for the inversion of viscoelastic relaxation spectra, *Journal of Geophysical Research*, **90**, B9411-9421.
- Piersanti, A., G. Spada, R. Sabadini (1997) Global postseismic rebound of a viscoelastic Earth : Theory for finite faults and application to the 1964 Alaska earthquake, *Geophysical Research Letters*, **102**, 477-492.
- Plag, H. P. and H. U. Juttner (1995) Rayleigh-Taylor instabilities of a self-gravitating earth, *J. Geodynamics*, **20**, 267-288.
- Plittz, F. F. (1992) Postseismic relaxation theory on the spherical earth, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **82**, 422-453.
- 力武常次 (1994) 固体地球科学入門—地球とその物理—第 2 版, 共立出版株式会社, 東京, pp267.
- Saito, M. (1967) Excitation of free oscillations and surface waves by a point source in a vertically heterogeneous earth, *Journal of Geophysical Research*, **72**, 14, B3689-3699.
- Saito, M. (1974) Some problem of static deformation of the earth, *J. Phys. Earth*, **22**, 123-140.
- Takeuchi, H. and M. Saito (1974) Seismic surface wave, in *Methods in Computational Physics : Advances in Research and Applications*, edited by B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg, Academic Press, New York and London, **11**, pp. 217-295.
- 谷本俊郎 (1996) 弾性体振動論, 地球連続体力学, 岩波講座地球惑星科学 **6**, 岩波書店, 東京, 第 4 章, pp. 145-173.
- Vermeersen, L. L. A., R. Sabadini and G. Spada (1996) Compressible rotational

- deformation, *Geophys. J. Int.*, **126**, 735-761.
- Williamson, E. D. and L. H. Adams (1923) Density distribution in the Earth, *Journal of the Washington Academy of Science*, **13**, 19, 413-428.
- Wu, P. and W. R. Peltier (1982) Viscous gravitational relaxation, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **70**, 435-485.
- 吉田茂生 (1996) 地球システムにおける対流とエネルギーの流れ, 地球システム科学, 岩波講座地球惑星科学 **2**, 岩波書店, 東京, 第3章, pp. 55-97.

## 図一覧

- 図 4-1. 球面調和関数の次数  $n=2, 3, 5, 10$  に対する, 均質モデルを用いたときの特性関数  $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$  となる点が特性根. 半径 6371[km], 密度 2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s],  $V_S$  2.6[km/s], 粘性率  $10^{22}$ [P].
- 図 4-2. 球面調和関数の次数  $n=2, 3, 5, 10$  に対する, 2層モデルを用いたときの特性関数  $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$  となる点が特性根. 動径距離 6171[km]までの密度 5.0[g/cc],  $V_P$  7.0[km/s],  $V_S$  12.1[km/s], 粘性率  $10^{22}$ [P]. 動径距離 6171~6371[km]の密度 2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s],  $V_S$  2.6[km/s], 粘性率  $10^{26}$ [P].
- 図 4-3. 1066A の密度, P 波速度, S 波速度プロファイル. 横軸; 深さ  $d$ [km], 縦軸; 密度  $\rho$ [g/cc], P 波速度  $V_P$ [km/s], S 波速度  $V_S$ [km/s].
- 図 4-4. 球面調和関数の次数  $n=2, 3, 5, 10$  に対する, 1066A を用いたときの特性関数  $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$  となる点が特性根. 粘性率  $10^{22}$ [P]
- 図 4-5. 球面調和関数の次数  $n=2, 3, 5, 10$  に対する, 非圧縮性均質モデルを用いたときの特性関数  $\det M(s)$ . 半径 6371[km], 密度 2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s],  $V_S$  2.6[km/s], 粘性率  $10^{22}$ [P].
- 図 4-6. 球面調和関数の次数  $n=2, 3, 5, 10$  に対する, 非圧縮性 2層モデルを用いたときの特性関数  $\det M(s)$ . 動径距離 6171[km]までの密度 5.0[g/cc],  $V_P$  7.0[km/s],  $V_S$  12.1[km/s], 粘性率  $10^{22}$ [P]. 動径距離 6171~6371[km]の密度 2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s],  $V_S$  2.6[km/s], 粘性率  $10^{26}$ [P].
- 図 4-7. 球面調和関数の次数  $n=2, 3, 5, 10$  に対する, 自己重力を無視した均質モデルを用いたときの特性関数  $\det M(s)$ . 半径 6371[km], 密度 2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s],  $V_S$  2.6[km/s], 粘性率  $10^{22}$ [P].

- 図 4-8. 球面調和関数の次数  $n=2, 3, 5, 10$  に対する, 自己重力を無視した 2 層モデルを用いたときの特性関数  $\det M(s)$ . 動径距離 6171[km]までの密度 5.0[g/cc],  $V_P$  7.0[km/s],  $V_S$  12.1[km/s], 粘性率  $10^{22}$ [P]. 動径距離 6171~6371[km]の密度 2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s],  $V_S$  2.6[km/s], 粘性率  $10^{26}$ [P].
- 図 4-9. 球面調和関数の次数  $n=2$  に対する, 中立モデル (Adams-Williamson の式を満たすモデル) を用いたときの特性関数  $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$  となる点が特性根. 粘性率  $10^{22}$ [P].
- 図 4-10. 球面調和関数の次数  $n=2$  に対する, 重力安定モデルを用いたときの特性関数  $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$  となる点が特性根. 粘性率  $10^{22}$ [P].
- 図 4-11. 球面調和関数の次数  $n=2$  に対する, 重力不安定モデルを用いたときの特性関数  $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$  となる点が特性根. 粘性率  $10^{22}$ [P].
- 図 5-1. 球面調和関数の次数  $n=0$  に対する, 10 個の均質モデルを用いたときの特性関数  $y_2(s)$ . 10 個のモデルは P 波速度  $V_P$  を 1[km/s]ずつ変えてある.  $y_2(s)=0$  となる点が特性根. 半径 6371[km], 密度 2.67[g/cc], 粘性率  $10^{22}$ [P].
- 図 5-2. 球面調和関数の次数  $n=0$  に対する, 10 個の均質モデルを用いたときの特性関数  $y_2(s)$ . 10 個のモデルは密度  $\rho$  を 1[g/cc]ずつ変えてある.  $y_2(s)=0$  となる点が特性根. 半径 6371[km],  $V_P$  4.7[km/s], 粘性率  $10^{22}$ [P].
- 図 5-3. 球面調和関数の次数  $n=0$  に対する, 10 個の均質モデルを用いたときの特性関数  $y_2(s)$ . 10 個のモデルは半径  $r$  を 1000[km]ずつ変えてある.  $y_2(s)=0$  となる点が特性根. 密度 2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s], 粘性率  $10^{22}$ [P].

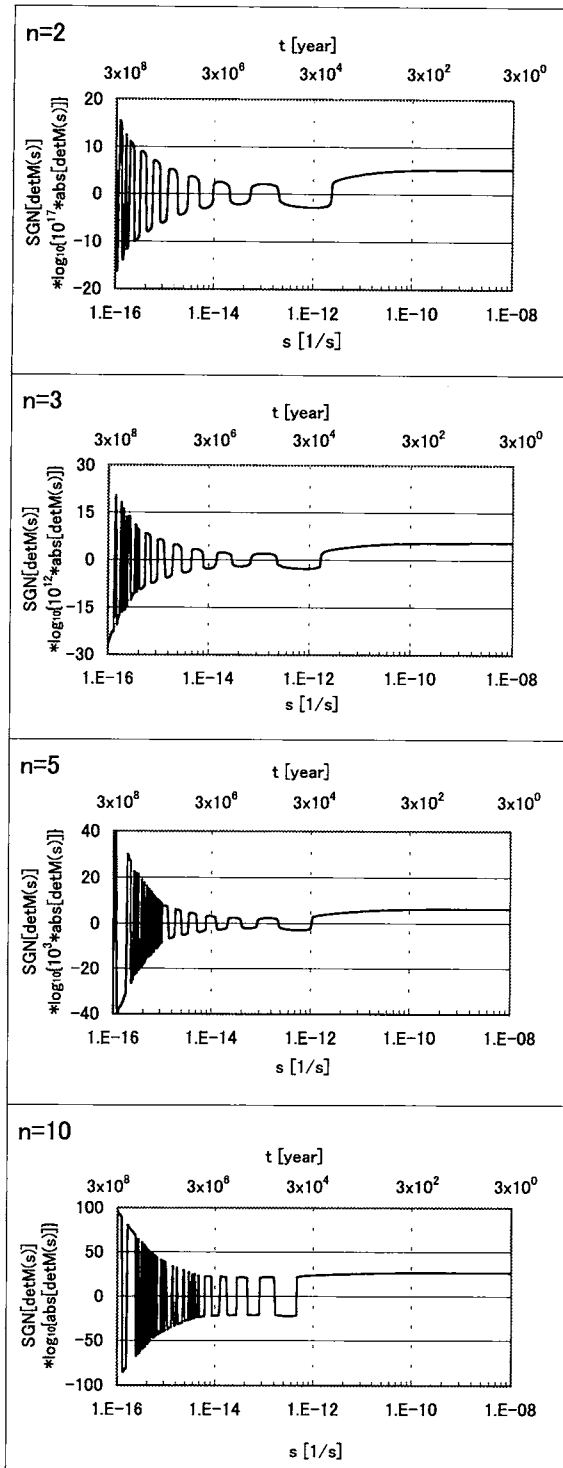


図4-1. 球面調和関数の次数 $n=2, 3, 5, 10$ に対する, 均質モデルを用いたときの特性関数 $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$ となる点が特性根. 半径 $6371[\text{km}]$ , 密度 $2.67[\text{g/cc}]$ ,  $V_P 4.7[\text{km/s}]$ ,  $V_S 2.6[\text{km/s}]$ , 粘性率 $10^{22}[\text{P}]$ .

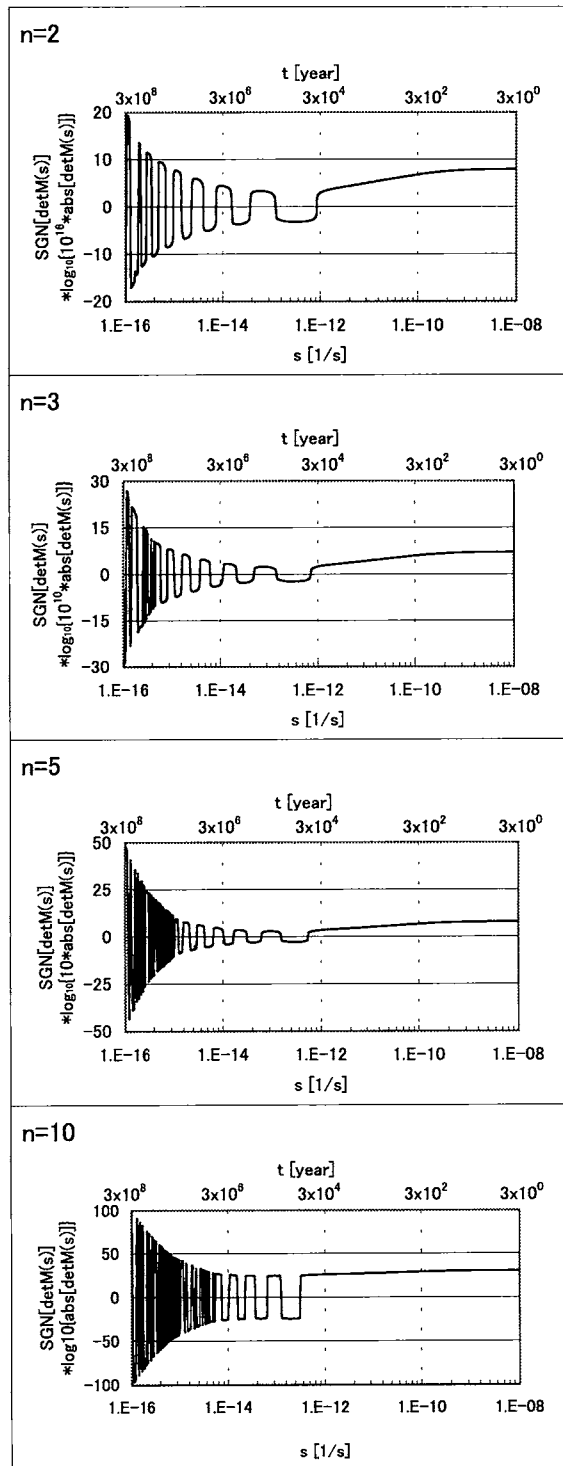


図4-2. 球面調和関数の次数 $n=2, 3, 5, 10$ に対する, 2層モデルを用いたときの特性関数 $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$ となる点が特性根. 動径距離6171[km]までの密度5.0[g/cc],  $V_P$  7.0[km/s],  $V_S$  12.1[km/s], 粘性率 $10^{22}$ [P]. 動径距離6171~6371[km]の密度2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s],  $V_S$  2.6[km/s], 粘性率 $10^{26}$ [P].



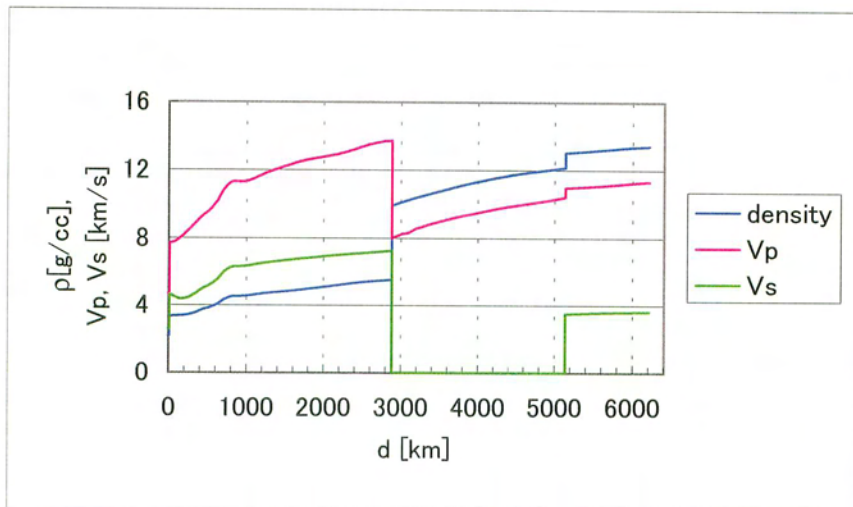


図4-3. 1066Aの密度, P波速度, S波速度プロファイル. 横軸; 深さ  $d$  [km], 縦軸; 密度  $\rho$  [g/cc], P波速度  $V_p$  [km/s], S波速度  $V_s$  [km/s].

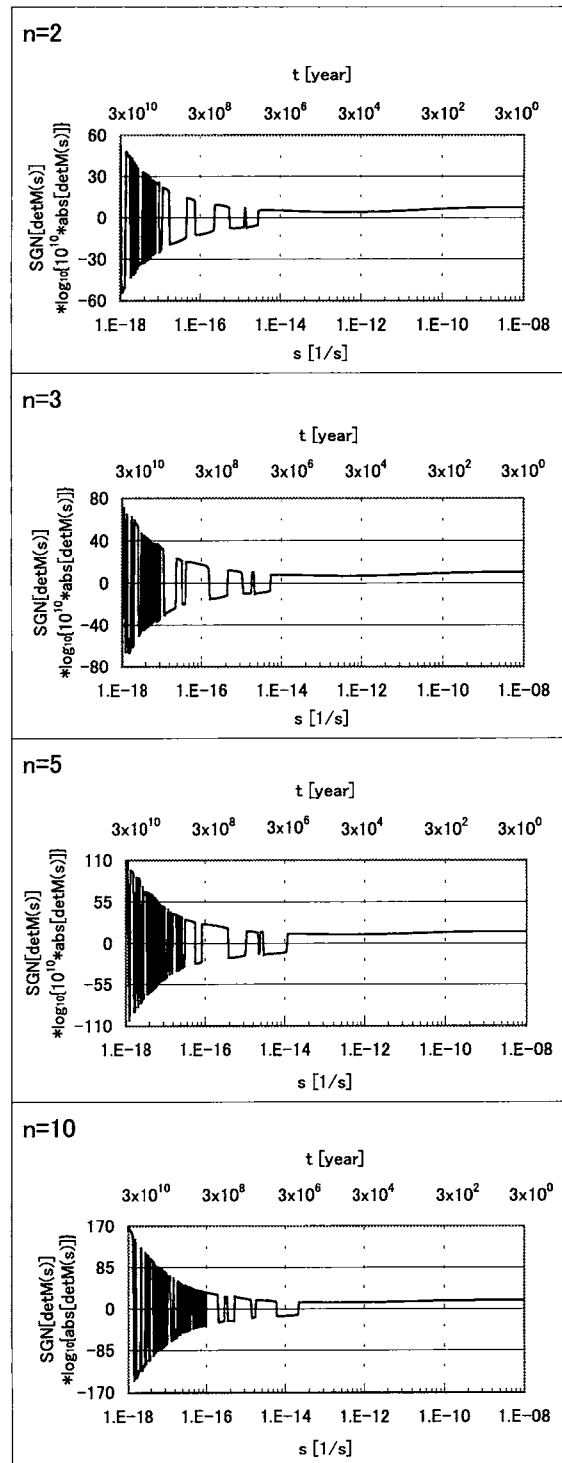


図4-4. 球面調和関数の次数 $n=2, 3, 5, 10$ に対する, 1066Aを用いたときの特性関数 $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$ となる点が特性根. 粘性率 $10^{22}$ [P].

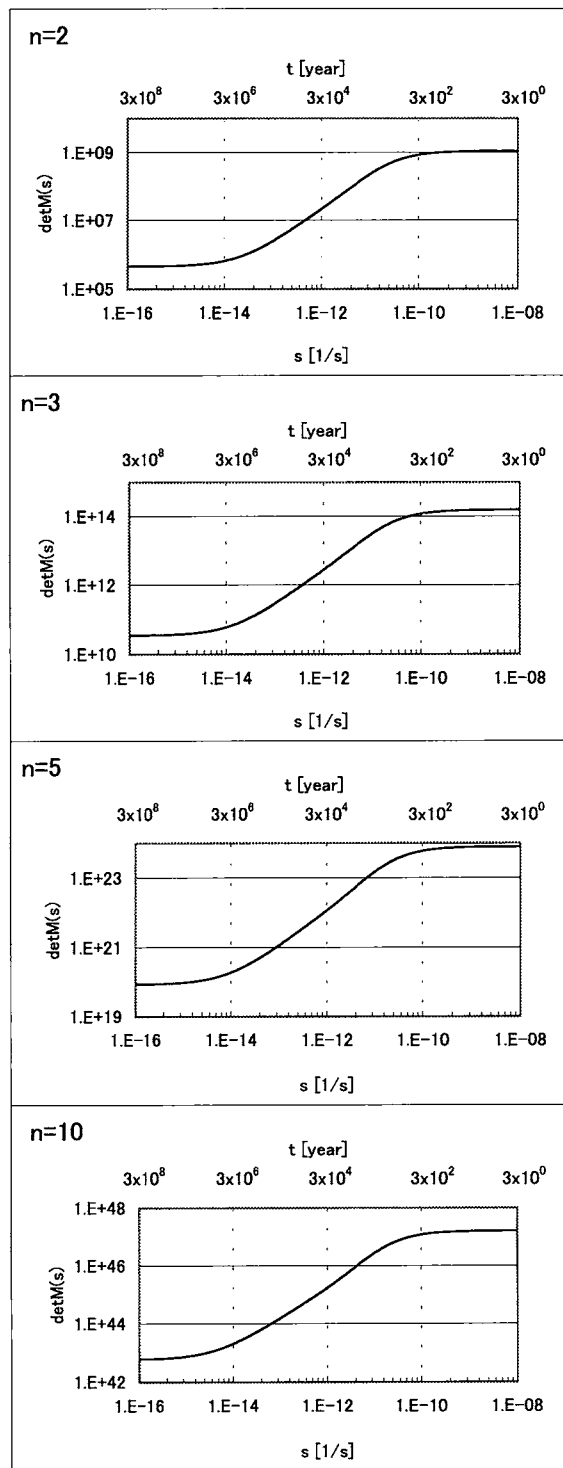


図4-5. 球面調和関数の次数 $n=2, 3, 5, 10$ に対する, 非圧縮性均質モデルを用いたときの特性関数 $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$ となる点が特性根. 半径6371 [km], 密度2.67[g/cc],  $V_p$ 4.7[km/s],  $V_s$ 2.6[km/s], 粘性率 $10^{22}$ [P].

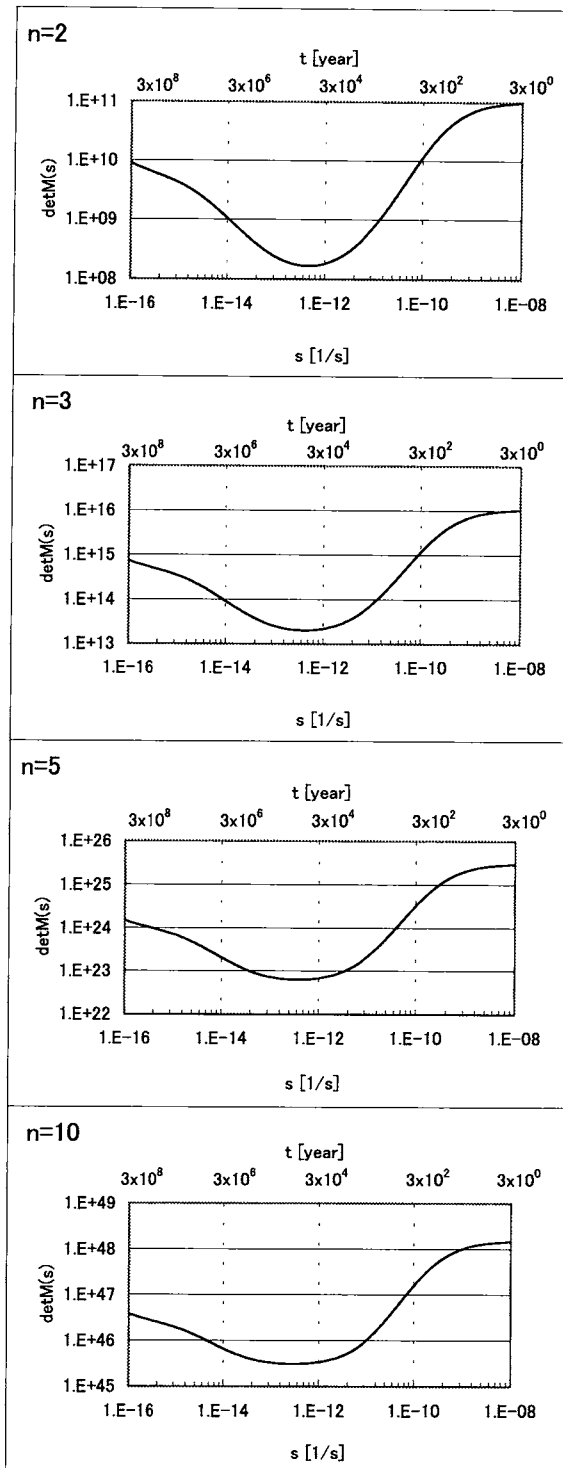


図4-6. 球面調和関数の次数 $n=2, 3, 5, 10$ に対する, 非圧縮性2層モデルを用いたときの特性関数 $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$ となる点が特性根. 動径距離6171[km]までの密度5.0[g/cc],  $V_P$  7.0[km/s],  $V_S$  12.1[km/s], 粘性率 $10^{22}$ [P]. 動径距離6171~6371[km]の密度2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s],  $V_S$  2.6[km/s], 粘性率 $10^{26}$ [P].

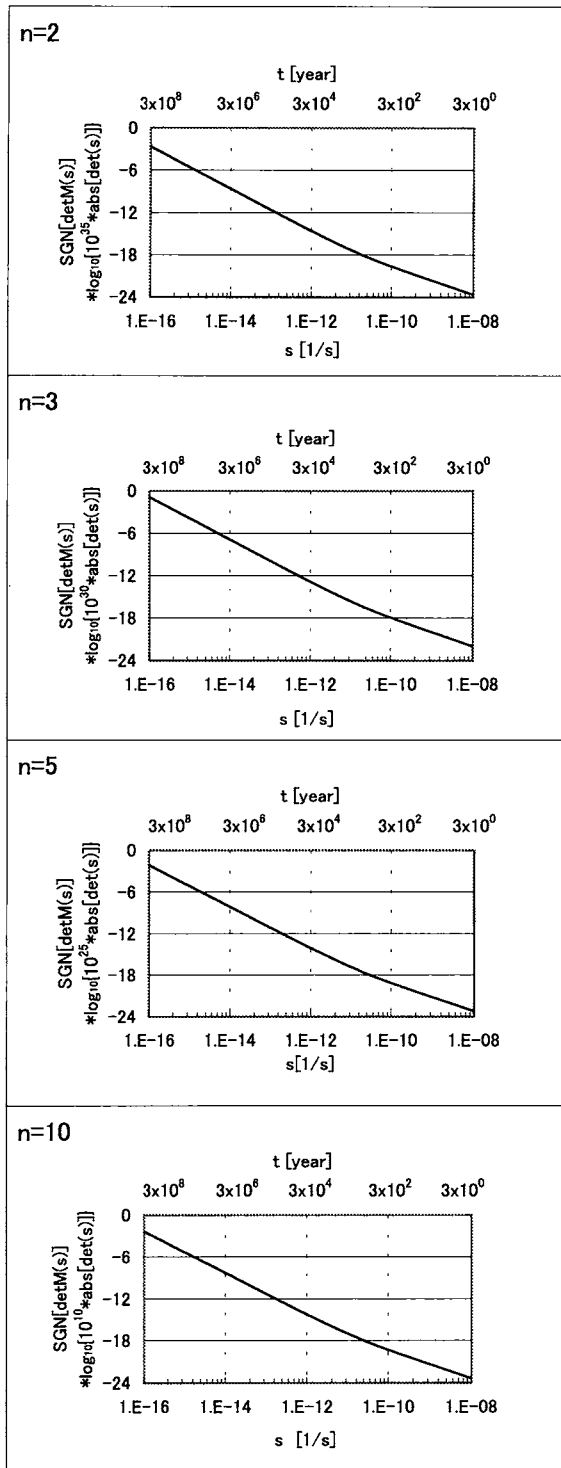


図4-7. 球面調和関数の次数 $n=2, 3, 5, 10$ に対する, 自己重力を無視した均質モデルを用いたときの特性関数 $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$ となる点が特性根. 半径6371[km], 密度2.67[g/cc],  $V_P$  4.7[km/s],  $V_S$  2.6[km/s], 粘性率 $10^{22}$ [P].

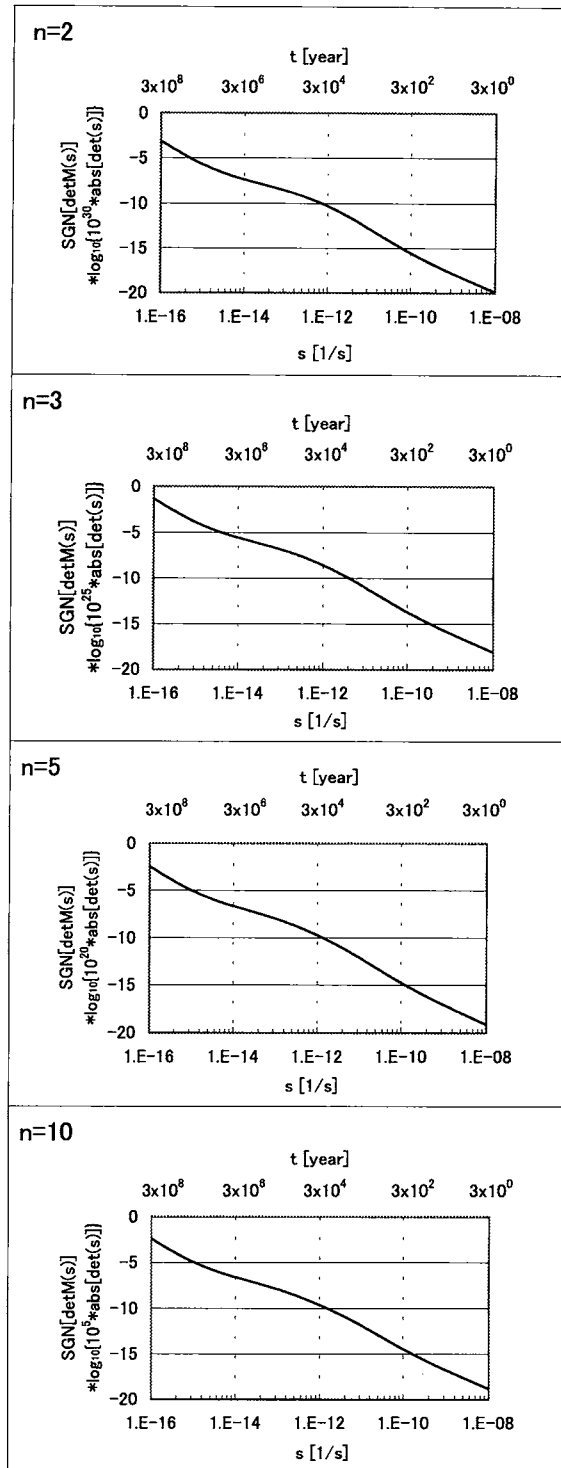


図4-8. 球面調和関数の次数 $n=2, 3, 5, 10$ に対する, 自己重力を無視した2層モデルを用いたときの特性関数 $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$ となる点が特性根. 動径距離6171[km]までの密度5.0[g/cc],  $V_P$ 7.0[km/s],  $V_S$ 12.1[km/s], 粘性率 $10^{22}$ [P]. 動径距離6171~6371[km]の密度2.67[g/cc],  $V_P$ 4.7[km/s],  $V_S$ 2.6[km/s], 粘性率 $10^{26}$ [P].

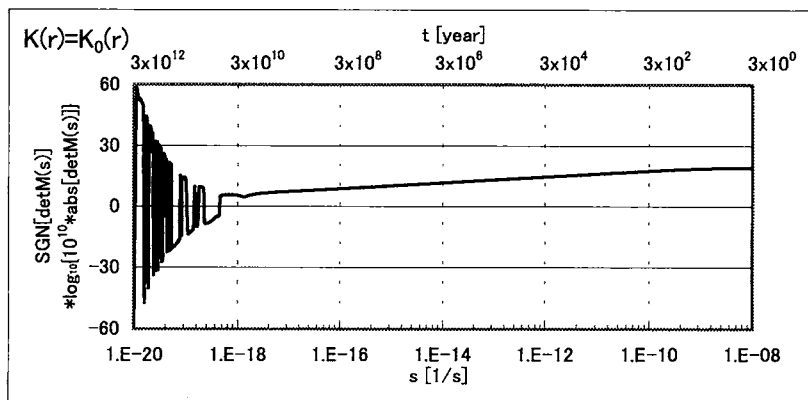


図4-9. 球面調和関数の次数 $n=2$ に対する，中立モデル（Adams-Williamsonの式を満たすモデル）を用いたときの特性関数 $\det M(s)$ ． $\det M(s)=0$ となる点が特性根．粘性率 $10^{22}$ [P]．

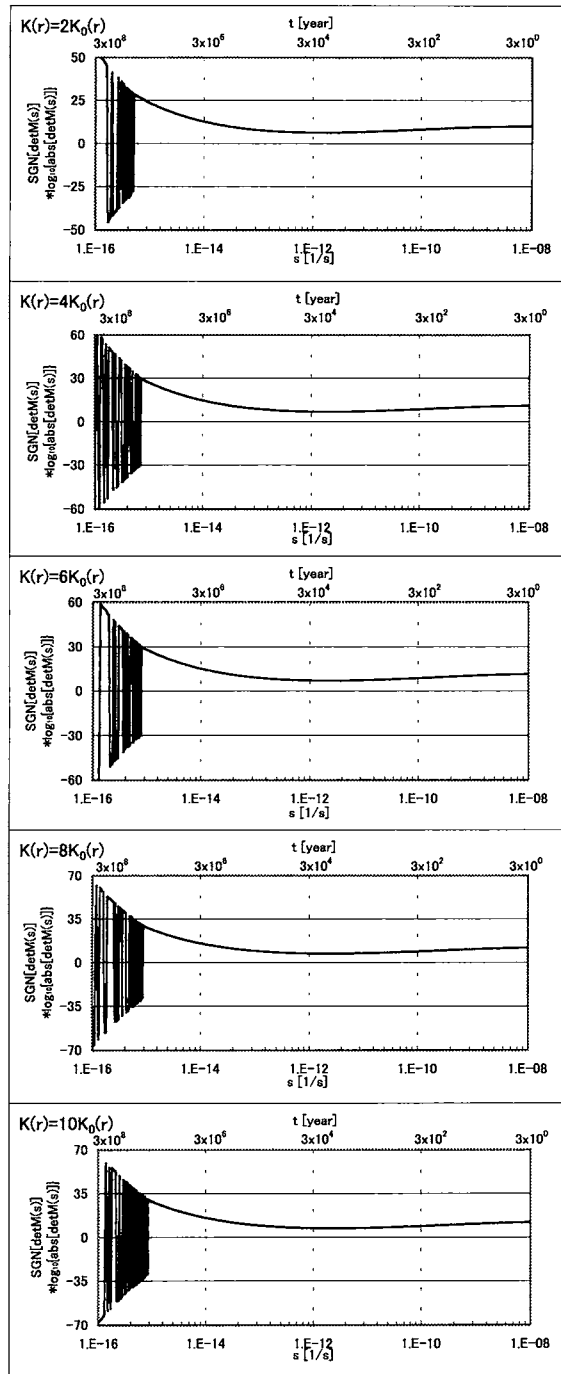


図4-10. 球面調和関数の次数 $n=2$ に対する、重力安定モデルを用いたときの特性関数 $\det M(s)$ 、 $\det M(s)=0$ となる点が特性根。粘性率 $10^{22}$  [P].



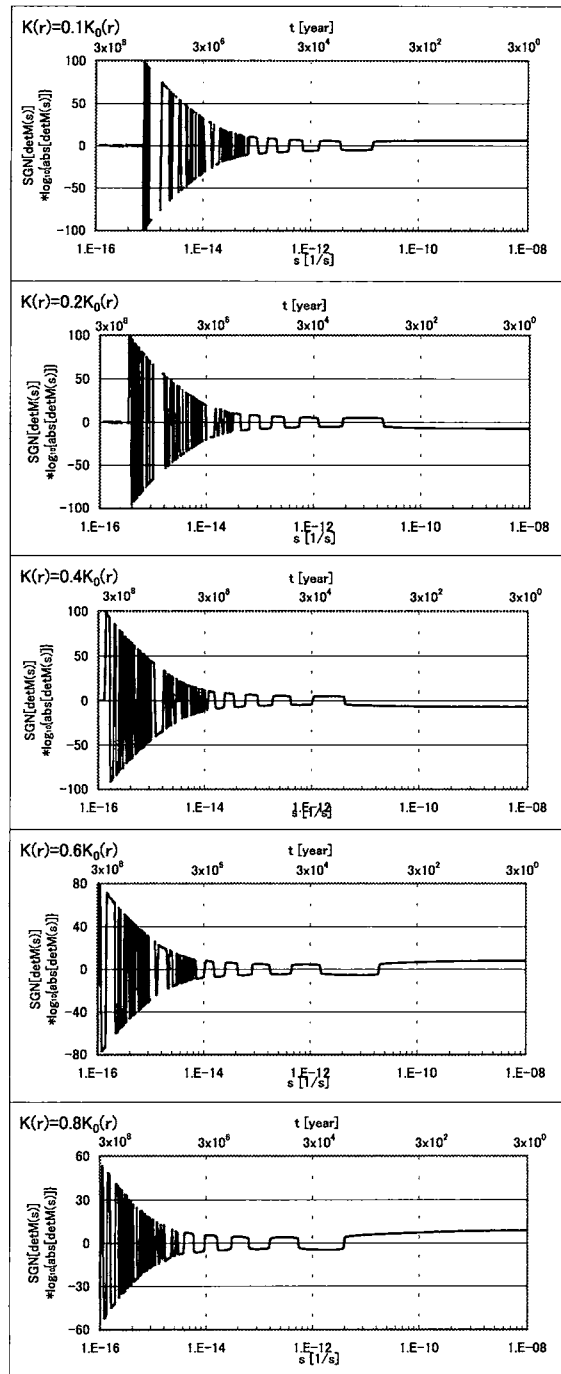


図4-11. 球面調和関数の次数 $n=2$ に対する、重力不安定モデルを用いたときの特性関数 $\det M(s)$ .  $\det M(s)=0$ となる点が特性根. 粘性率 $10^{22}$  [P].

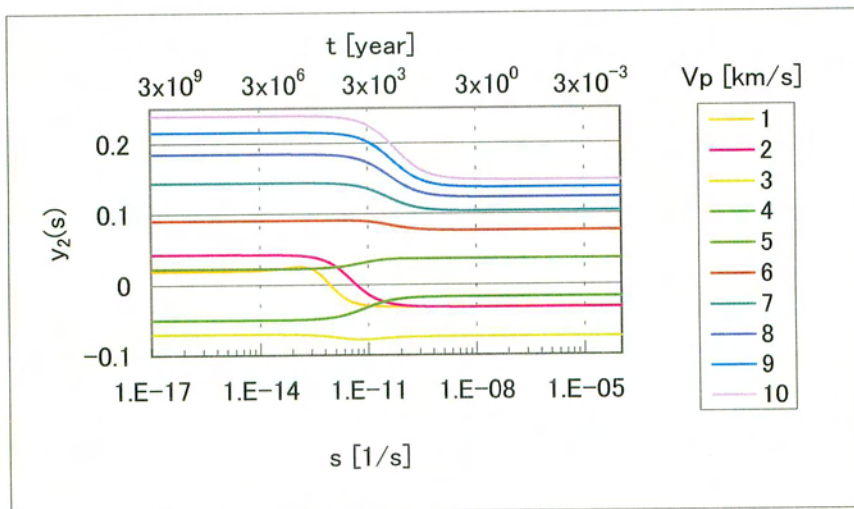


図5-1. 球面調和関数の次数 $n=0$ に対する、10個の均質モデルを用いたときの特性関数 $y_2(s)$ .  $y_2(s)=0$ となる点が特性根. 10個のモデルはP波速度 $V_p$ を1[km/s]ずつ変えてある. 半径6371[km], 密度2.67[g/cc], 粘性率 $10^{22}$ [P].

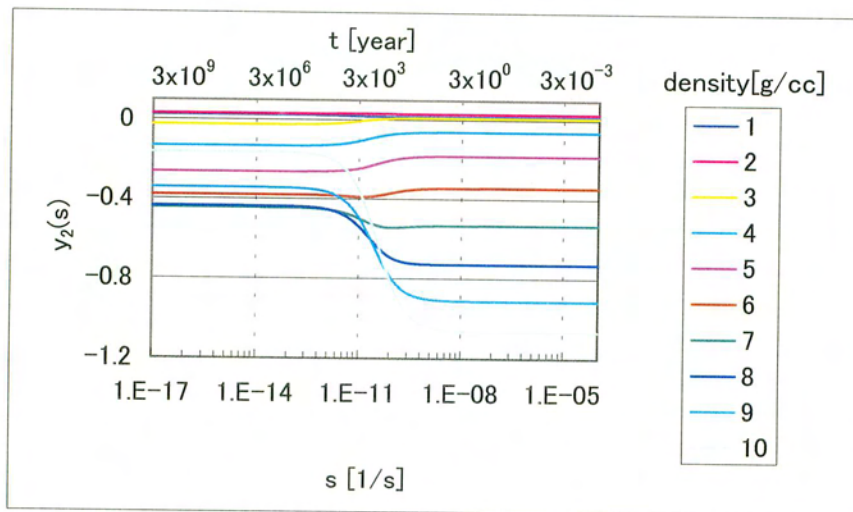


図5-2. 球面調和関数の次数 $n=0$ に対する、10個の均質モデルを用いたときの特性関数 $y_2(s)$ 。  $y_2(s)=0$ となる点が特性根。 10個のモデルは密度 $\rho$ を1[g/cc]ずつ変えてある。 半径6371[km],  $V_p$ 4.7[km/s], 粘性率 $10^{22}$ [P].

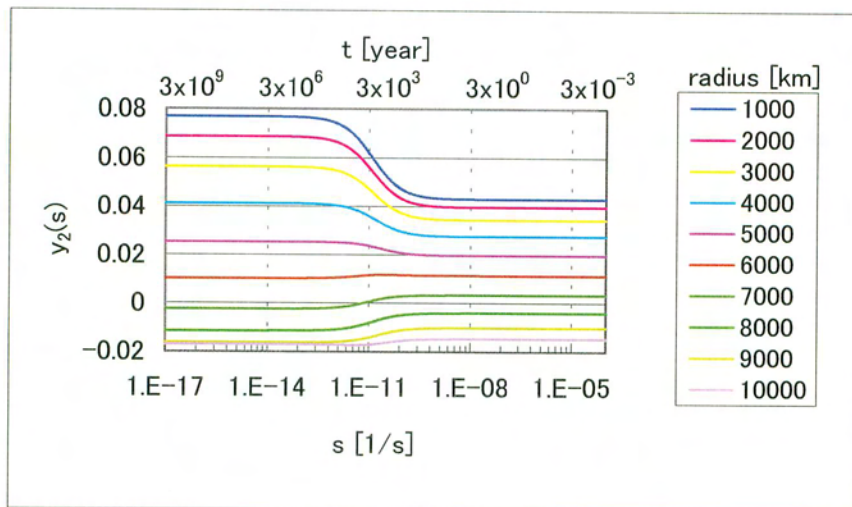


図5-3. 球面調和関数の次数 $n=0$ に対する、10個の均質モデルを用いたときの特性関数 $y_2(s)$ .  $y_2(s)=0$ となる点が特性根. 10個のモデルは半径 $r$ を1000[km]ずつ変えてある. 密度2.67[g/cc],  $V_p$ 4.7[km/s], 粘性率 $10^{22}$ [P].