

研究解説

平均場ダイナモ理論から見た太陽磁場の反転機構

Mean-Field Theory Interpretation of Solar Polarity Reversal

横井 喜充*・加藤 浩文**・吉澤 徹*

Nobumitsu YOKOI, Hirofumi KATO and Akira YOSHIKAWA

1. はじめに

太陽の球殻は内側から核、放射層、対流層の三つの層からなり、その外側を光球と呼ばれる太陽表面が覆っている(図1)。プラズマ状態の水素などからなる電導性流体の対流層での回転や対流運動がダイナモ作用を通して太陽磁場の生成・維持を担っていると考えられる。太陽磁場では対流層で生成されたトロイダル磁場が光球表面に浮き上がり、しばしば観測可能となる。実際、太陽の黒点は浮き上がった磁場と光球表面が交わる断面であると考えられている¹⁾。

太陽の黒点磁場には Hale の法則と呼ばれる極性則が存在する²⁾。それは以下のようにまとめることができる(図2)；

- (i) 黒点は低緯度領域に N 極と S 極の対で現われる。その極性は約 11 年で反転する。
- (ii) 先行する黒点の極性と同一半球内の極磁場の極性は一致している。黒点磁場は数千 G であるのに対して極磁場は数 G と小さい。

太陽磁場の特徴のひとつはこの周期的な極性反転にある。地球の磁場極性の反転が数十万年から数百万年という非常に長い期間の後に、しかも極めて不規則に訪れるのに対して^{3,4)}、太陽磁場の極性反転は極めて規則的に約 11 年ごとに訪れる。地球磁場と太陽磁場の性質がこのように違う理由のひとつとして、ダイナモ過程が起きる対流層および外核の球殻中に占める相対的厚みの違いが挙げられる⁵⁾。太陽の対流層に比べて地球の外核はかなり厚い構造になっている。この厚さは回転球殻に特有の対流柱の形成を容易にする。中を流体が旋回しながら昇降するため、対流柱は流体のヘリシティ(らせん度)と密接なつながりを持つ。こうして地球磁場の生成・維持にはヘリシティの効果が重要な役割を占めると考えられる⁶⁾。一方、太陽の薄い対流層では対流柱は形成されにくいので、後に見るようにヘリシティではなくクロス・ヘリシティ(速度/磁場相関)の

効果が重要になると予想される。

近年のコンピューターの発達に伴い、基礎方程式を直接数値的に解くことで太陽磁場の性質が調べられるようになってきた。太陽の対流層内の流れはレイノルズ数や磁気レイノルズ数などが非常に大きいため、現実に即したパラメータで直接数値計算を行うことは厳密な意味では不可能である。しかし最近では極性反転を再現した計算もいくつか現われ、磁場の生成機構や反転機構のある面が明らかになりつつある^{7~11)}。一方で、適当な平均操作の下で小さなスケールの運動をモデル化し、大きなスケールの平均運動を解くという平均場理論の考え方は現実に即したパラメータで現象を捉えるためには不可欠である¹²⁾。直接数値計算と平均場モデルという二つの方法は互いに相補うものとしてどちらも重要である。

本研究は後者の平均場理論の立場で、太陽磁場の極性則や反転の機構がどこまで明らかにできるかを調べるものである¹³⁾。

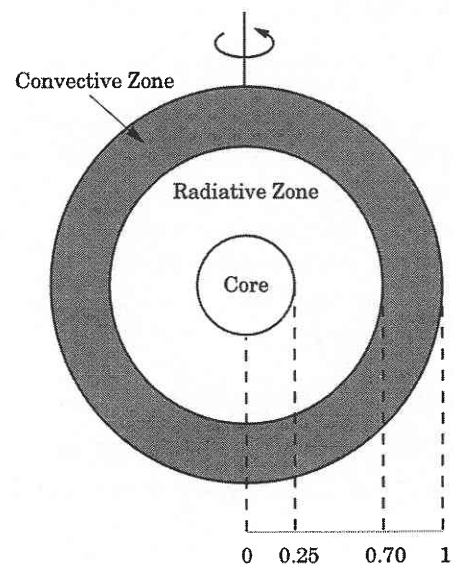


図1 太陽球殻の構造

*東京大学生産技術研究所 情報・システム大部門

**東北生活文化大学 家政学部

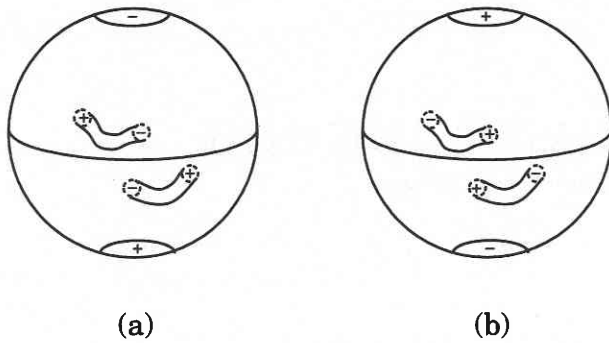


図2 Haleの極性則

II. 乱流ダイナモ

A 基礎方程式

電導性流体であるプラズマを支配する方程式として電磁流体方程式系 (magnetohydrodynamics : MHD) を考える。ただし本研究で問題にする磁場の方程式中に密度変化の表式は直接的な形では入っていないため、ここでは非圧縮性プラズマ流体を考える。このことは太陽磁場現象における圧縮性効果の重要性を否定するものではない。非圧縮性 MHD 方程式は

運動量の方程式：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \mathbf{f}_B + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \dots\dots (1)$$

磁場の方程式：

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{e}, \dots\dots (2)$$

アンペールの法則とオームの法則：

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{e} + \mathbf{u} \times \mathbf{b}), \dots\dots (3)$$

ソレノイダル条件：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \dots\dots (4)$$

となる。ここで \mathbf{u} は速度、 p は圧力、 \mathbf{j} は電流密度、 \mathbf{b} は磁場、 \mathbf{e} は電場である。また ν は粘性率、 λ は磁気拡散率を表わす。浮力による外力を \mathbf{f}_B と表わすが、その詳細は以下の解析の範囲で直接的問題とならない。

式 (1) - (4) で磁場や電流密度などはアルペーン速度単位を用いて表記されている。そのため \mathbf{b} 、 \mathbf{j} などは本来の磁場 \mathbf{b}^* 、電流密度 \mathbf{j}^* などと

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}^*}{\sqrt{\rho\mu}}, \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}^*}{\sqrt{\rho/\mu}}, \mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}^*}{\sqrt{\rho\mu}}, p = \frac{p^*}{\rho} \dots\dots (5)$$

の関係で結ばれている (ρ : 密度、 μ : 透磁率)。

式 (3) を式 (2) に代入し電場 \mathbf{e} を消去すると磁場の誘導方程式：

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{b} \dots\dots (6)$$

が得られる。

適当な統計平均の操作 $\langle \cdot \rangle$ を導入して、場の量 f を平均 F とそこからのゆらぎ f' に分解する；

$$f = F + f', F = \langle f \rangle, \dots\dots (7)$$

ここで

$$f = (\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, \mathbf{j}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}), \dots\dots (8a)$$

$$F = (\mathbf{U}, \mathbf{B}, P, \mathbf{J}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\Omega}), \dots\dots (8b)$$

$$f' = (\mathbf{u}', \mathbf{b}', p', \mathbf{j}', \mathbf{e}', \boldsymbol{\omega}'), \dots\dots (8c)$$

である。

式 (7) の分解を式 (1), (6), (4) に代入し、ゆらぎ自体は平均操作でゼロになることに注意すると、平均場の方程式として

平均速度：

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \mathbf{U} = -\nabla \left(P + \left\langle \frac{\mathbf{b}^2}{2} \right\rangle \right) + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot (-\mathbf{R}) + \mathbf{F}_B + \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \dots\dots (9)$$

磁場：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla \times \mathbf{E}_M + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}, \dots\dots (10)$$

ソレノイダル条件：

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \dots\dots (11)$$

を得る。式 (9) で \mathbf{F}_B は浮力による外力の平均部分である。

式 (9) と式 (10) で \mathbf{R} および \mathbf{E}_M は平均場中の乱れの影響を表す量である。それぞれレイノルズ応力および乱流起電力と呼ばれ、

$$R^{\alpha\beta} \equiv \langle u^\alpha u'^\beta - b'^\alpha b'^\beta \rangle, \dots\dots (12)$$

$$E_M \equiv \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle \dots\dots (13)$$

と定義される。MHD 乱流の統計理論的解析から、レイノルズ応力と乱流起電力は

$$R^{\alpha\beta} = \frac{2}{3} K_R \delta^{\alpha\beta} - \nu_K S^{\alpha\beta} + \nu_M M^{\alpha\beta}, \dots\dots (14)$$

$$E_M = \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma \boldsymbol{\Omega} \dots\dots (15)$$

と表される¹²⁾。ただし式 (14) 中で K_R は乱流残留エネルギー、 \mathbf{S} は速度歪みテンソル、 \mathbf{M} は磁場歪みテンソルで、それぞれ

$$K_R \equiv \frac{1}{2} \langle u'^2 - b'^2 \rangle, \dots\dots (16)$$

$$S^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}, \dots\dots (17)$$

$$M^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial B^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\beta} \dots\dots (18)$$

で定義される。輸送係数の ν_K 、 ν_M 、 α 、 β 、 γ は調節可能なパラメータではなく、乱流場の性質で決まる量である。

統計理論的研究から、それぞれが乱流残留ヘリシテイ H , 乱流エネルギー K , 乱流クロス・ヘリシテイ W と

$$\alpha \Leftarrow H \equiv \langle -\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle, \dots\dots\dots (19)$$

$$\nu_K, \beta \Leftarrow K \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2 \rangle, \dots\dots\dots (20)$$

$$\nu_M, \gamma \Leftarrow W \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle \dots\dots\dots (21)$$

のように関係づけられることがわかっている^{14,15,16,17}. ここでは最も簡単に一点物理量 (K, ε, H, W) のみにより

$$\alpha = C_\alpha \frac{K}{\varepsilon} H, \dots\dots\dots (22)$$

$$\beta = \frac{5}{7} \nu_K = C_\beta \frac{K}{\varepsilon} K, \dots\dots\dots (23)$$

$$\gamma = \frac{5}{7} \nu_M = C_\gamma \frac{K}{\varepsilon} W \dots\dots\dots (24)$$

のようにモデル化する. モデル定数は

$$C_\alpha = 0.02, C_\beta = 0.05, C_\gamma = 0.04 \dots\dots\dots (25)$$

と評価される^{12,18}. 式 (22) — (24) で ε は乱流エネルギーの散逸率であり

$$\varepsilon \equiv \nu \left\langle \frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \right\rangle + \lambda \left\langle \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \right\rangle \dots\dots\dots (26)$$

で定義される量である. また, K/ε は乱流に特徴的な時間スケールを与える量である.

B 乱流場方程式

輸送係数の α, β, γ などは調節可能なパラメータではなく, 乱流場の性質で決まる量であった. そのモデル化は式 (22) — (24) で与えられるが, 自己無撞着なモデルであるためには乱流統計量の K, ε, W, H の発展方程式を同時に解く閉じた方程式系を構成しなくてはならない.

1. 乱流エネルギーと乱流クロス・ヘリシテイ

電磁流体の総エネルギー $\int (1/2) (\mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2) dV$ と総クロス・ヘリシテイ $\int \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' dV$ が保存量であることに伴い, そのゆらぎ部分の密度である乱流エネルギー K [式 (20)] と乱流クロス・ヘリシテイ W [式 (21)] は簡単な形の発展方程式;

$$\frac{DG}{Dt} = P_G - \varepsilon_G + \nabla \cdot \mathbf{T}_G \quad (G = K \text{ or } W) \dots\dots (27)$$

に従う. ここで $P_G, \varepsilon_G, \nabla \cdot \mathbf{T}_G$ はそれぞれ乱流量 G の生成率, 散逸率, 輸送率と呼ばれる量で

$$P_K = -\mathbf{E}_M \cdot \mathbf{J} - R^{ab} \frac{\partial U^b}{\partial x^a}, \dots\dots\dots (28 a)$$

$$\varepsilon_K = \nu \left\langle \left(\frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \right)^2 \right\rangle + \lambda \left\langle \left(\frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \right)^2 \right\rangle \equiv \varepsilon, \dots\dots\dots (28 b)$$

$$\mathbf{T}_K = W\mathbf{B} + \nu \nabla K + \mathbf{T}'_K = W\mathbf{B} + \nu \nabla K + \nu_K \nabla K, \dots\dots (28 c)$$

$$P_W = -\mathbf{E}_M \cdot \boldsymbol{\Omega} - R^{ab} \frac{\partial B^b}{\partial x^a}, \dots\dots\dots (29 a)$$

$$\varepsilon_W = (\nu + \lambda) \left\langle \frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \right\rangle = C_W \frac{\varepsilon}{K} W, \dots\dots\dots (29 b)$$

$$\mathbf{T}'_W = K\mathbf{B} + \lambda \nabla W + \mathbf{T}_W = K\mathbf{B} + \lambda \nabla W + \frac{\nu_K}{\sigma_W} \nabla W \dots (29 c)$$

で定義・モデル化される¹⁹. ただし $\mathbf{T}'_K, \mathbf{T}'_W$ は \mathbf{u}', \mathbf{b}' の 3 次以上の相関からなる項でここでその詳細には触れない¹⁶. また, C_W, σ_W はモデル定数で

$$C_W = 1.1, \sigma_W = 1 \dots\dots\dots (30)$$

と評価されている²⁰. 保存量の乱流 (ゆらぎ) 部分と平均流部分との関係について以下の点は重要である. K と W が保存量のゆらぎ部分であることの裏返しとして, その平均流部分である平均流エネルギー $(U^2 + B^2) / 2$ と平均流クロス・ヘリシテイ $\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}$ は

$$\frac{D}{Dt} \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 + \mathbf{B}^2) = -P_k - \dots, \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} = -P_W - \dots \dots\dots\dots (32)$$

という形の発展方程式に従う. 式 (31) と式 (32) で平均流エネルギーの生成率と平均流クロス・ヘリシテイの生成率は, それぞれ乱流エネルギーの生成率 P_K [式 (28 a)] と乱流クロス・ヘリシテイの生成率 P_W [式 (29 a)] の逆符号で表されている. このことは, 平均流部分での減少が乱流部分の増加 (あるいはその逆) をもたらすことを示しており, エネルギーなどのカスケード現象に対応している.

2. 乱流エネルギーの散逸率と乱流残留ヘリシテイ

一方, 乱流エネルギーの散逸率 ε と乱流残留ヘリシテイ H に関しては, 対応する総量が保存する性質を持たない. そのため ε と H を支配する方程式を K や W の場合のように簡単な形で書き下すことはできない.

中性流体あるいは電気伝導性を持たない流体の乱流モデリングにあってエネルギー散逸率の方程式 (ε 方程式) は工学のさまざまな流れへの適用を通じてある程度確立されている. ここではその方程式を電磁流体乱流に拡張し

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} P_K - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{K} \varepsilon + C_{\varepsilon 3} \nabla \cdot (W\mathbf{B}) + \nabla \cdot \left(\frac{\nu_K}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) \dots\dots\dots (33)$$

という形の方程式を用いる¹⁹. モデル定数は

$$C_{\varepsilon 1} = 1.4, C_{\varepsilon 2} = 1.9, C_{\varepsilon 3} = 1.4, \sigma_\varepsilon = 1.6 \dots\dots\dots (34)$$

である.

一方, 乱流残留ヘリシテイの方程式は

$$\begin{aligned} \frac{DH}{Dt} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial R^{ba}}{\partial x^b} \Omega^a - C_{Hb} \frac{\varepsilon^2}{K^3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}_M - C_H \frac{\varepsilon}{K} H \\ & + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} K \boldsymbol{\Omega} + \frac{\nu_T}{\sigma_H} \nabla H \right) \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

で与えられる^{12,21)}. ここでモデル定数は

$$C_{HB} \equiv 1, C_H \equiv 1, \sigma_H \equiv 1 \dots\dots\dots (36)$$

と予想される.

III. 定常平均場の性質

A 低緯度領域

式 (10) に乱流起電力の表式 (15) を代入すると平均磁場の方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma \boldsymbol{\Omega}) \dots\dots\dots (37)$$

となる. ここで磁気拡散率 λ は乱流磁気拡散率 β に比べ小さいので無視してある. アルファ効果 (α 項) とクロス・ヘリシティ効果 (γ 項) のうちどちらがより重要な効果となるかは, ダイナモ作用の生じる条件によるが, 低緯度領域ではプラズマのトロイダル回転が大きいので, 大規模回転や平均の渦運動と直結したクロス・ヘリシティ効果が主たる効果と考えられる. そこで, クロス・ヘリシティに関連した γ 項を主要項と考え, アルファあるいはヘリシティ効果を摂動的に取り入れる. 平均磁場と平均電流密度を

$$\mathbf{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n, \dots\dots\dots (38)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{J}_n \dots\dots\dots (39)$$

のように分解する. 添え字の n は

$$\mathbf{B}_n, \mathbf{J}_n = O(\alpha^n) \dots\dots\dots (40)$$

のように α の次数を表している.

これらを式 (37) に代入し, 最低次と第一次の方程式を表すと, 準定常状態において

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}_0 - \beta \mathbf{J}_0 + \gamma \boldsymbol{\Omega}) \equiv 0 \dots\dots\dots (41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}_1 + \alpha \mathbf{B}_0 - \beta \mathbf{J}_1) \equiv 0 \dots\dots\dots (42)$$

が成り立つ.

\mathbf{B}_0 を支配する方程式 (41) は, 特解として

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{U}, \dots\dots\dots (43)$$

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\gamma}{\beta} \boldsymbol{\Omega} \dots\dots\dots (44)$$

を持つ¹⁹⁾. ここで式 (41) 右辺の第一部分は式 (43) から恒等的に

$$\mathbf{U} \times \mathbf{B}_0 = 0 \dots\dots\dots (45)$$

と消える点に注意が必要である.

低緯度領域ではトロイダル回転が支配的だが, 式 (43) はその領域でトロイダル速度からクロス・ヘリシティ効果

によってトロイダル磁場が生成されることを示している. K と W の間には不等式

$$\left| \frac{W}{K} \right| = \left| \frac{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle}{\langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2 \rangle / 2} \right| \leq 1 \dots\dots\dots (46)$$

が成り立つ. この不等式と式 (23), (24) および式 (25) から, 式 (43) と (44) に現れる係数 β と γ の間に

$$\left| \frac{\gamma}{\beta} \right| = \frac{C_\gamma}{C_\beta} \left| \frac{W}{K} \right| < 1 \dots\dots\dots (47)$$

という不等式が成り立つ. 核融合プラズマに関する数値実験²⁰⁾ や太陽黒点磁場²²⁾, 銀河磁場²³⁾ や宇宙ジェット^{19,24)} に対するクロス・ヘリシティ・ダイナモ・モデルの適用の結果から $|\gamma/\beta|$ に関しては

$$\left| \frac{\gamma}{\beta} \right| = O(10^{-1}) \dots\dots\dots (48)$$

という評価が可能である.

次に式 (42) の解を考える. もし式 (42) の右辺の $\mathbf{U} \times \mathbf{B}_1$ を無視することができると,

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{B}_0 = \frac{\alpha \gamma}{\beta^2} \mathbf{U} \dots\dots\dots (49)$$

は式 (42) の特解になっている. 低緯度領域では主要な速度場がトロイダル回転

$$\mathbf{U} = (U^r, U^\theta, U^\phi) = [0, 0, U^\phi(r, \theta)] \dots\dots\dots (50)$$

であるため, 式 (49) から平均電流 \mathbf{J}_1 ($= \nabla \times \mathbf{B}_1$) はトロイダル成分のみを持つことになる. このときそれに伴う磁場 \mathbf{B}_1 はポロイダル磁場

$$\mathbf{B}_1 = B_1^r \mathbf{e}^r + B_1^\theta \mathbf{e}^\theta \dots\dots\dots (51)$$

である (\mathbf{e}^r と \mathbf{e}^θ は動形方向と経度方向の単位ベクトル) (図3).

トロイダル速度 [式 (50)] とポロイダル磁場 [式 (51)] により式 (42) 右辺の第一部分は

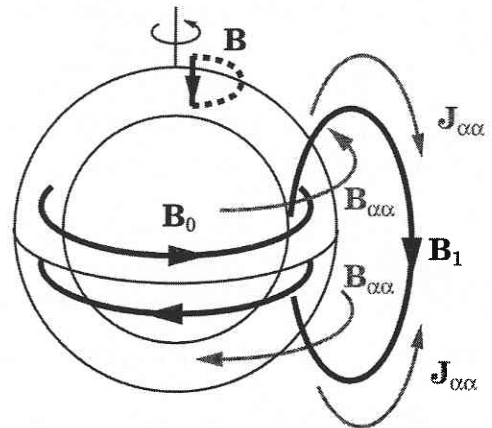


図3 クロス・ヘリシティ効果とヘリシティ効果による磁場

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}_1) = \left(0, 0, B_1^r \frac{\partial U^\phi}{\partial r} + B_1^\theta \frac{1}{r} \frac{\partial U^\phi}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (52)$$

となる。低緯度領域で磁場の動径成分 B_1^r が小さいこと、対称性からトロイダル速度 U^ϕ の赤道面をはさむ変化が小さいこと、などを考慮に入れると式 (52) のトロイダル成分あるいは ϕ 成分も小さいとしてよい。この意味で式 (42) 右辺の $\mathbf{U} \times \mathbf{B}_1$ からの寄与を無視する近似は、低緯度領域ではそれほど悪い近似ではない。

クロス・ヘリシティ効果によってトロイダル回転から生成されるトロイダル磁場 \mathbf{B}_0 [式 (43), (44)] とヘリシティ効果によって生成されるポロイダル磁場 \mathbf{B}_1 [式 (51), (49)] の大きさは、それぞれ

$$|\mathbf{B}_0| = O\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) |\mathbf{U}|, \dots\dots\dots (53)$$

$$|\mathbf{B}_1| = O\left(\frac{\gamma}{\beta} \frac{\alpha L_c}{\beta}\right) |\mathbf{U}| \dots\dots\dots (54)$$

と評価することができる。ここで L_c は対流層を特徴づける長さスケールで、例えば対流層の厚さを用いる。

B 極領域

回転速度は角速度 ω_f とする一様回転部分 \mathbf{U}_c と差動回転部分 \mathbf{U}_d に分けることができる；

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_c + \mathbf{U}_d = \omega_f \times \mathbf{r} + \mathbf{U}_d. \dots\dots\dots (55)$$

極近傍では速度自体が小さいと考えられる。また一様回転部分が支配的 ($|\mathbf{U}_c| \gg |\mathbf{U}_d|$) だとすると、渦度を

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{U} = 2\omega_f + \nabla \times \mathbf{U}_d \cong 2\omega_f \dots\dots\dots (56)$$

と近似することができる。このとき式 (37) は定常状態で

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma 2\omega_f) = 0 \dots\dots\dots (57)$$

となる。式 (57) は

$$\mathbf{B} = -\frac{2\gamma}{\alpha} \omega_f \dots\dots\dots (58)$$

を特解として持つ。式 (58) の解は α, γ の一様性の下で

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = 0 \dots\dots\dots (59)$$

を導く。また磁場のソレノイダル条件 (11) も満足している。式 (58) の係数に含まれる α と γ はどちらも擬スカラー量であり、それぞれ北半球と南半球で符号を変える。その結果 γ/α は両半球で常に同符号になる。このことは式 (58) で与えられる極近傍の磁場がダイポール型であることを示している (図 3)。

IV. 平均場理論から見た極性則

A 黒点の極性

前節で得られたダイナモ解が第 1 節で述べた太陽黒点の極性則をどの程度説明できるか調べてみる。ここで、ヘリ

シティは磁場が反転 ($\mathbf{b} \rightarrow -\mathbf{b}$) しても

$$-\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{j} \dots\dots\dots (60)$$

のように符号を変えない点に注意する。このことは、磁場の極性反転は、ヘリシティの符号反転によってではなくクロス・ヘリシティの符号反転によって、起きていることを示唆する。実際、太陽表面のヘリカル構造の調査から、磁場の極性が反転してもヘリシティの符号は同じままであることが観測されている^{4,25)}。同様に、磁場の反転を再現した回転球殻の数値シミュレーションによっても、ヘリシティの符号が磁場の極性によらないことが報告されている⁷⁻¹¹⁾。

各半球で、 γ (あるいはクロス・ヘリシティ W) と α (あるいはヘリシティ H) が

$$\gamma > 0, \alpha > 0 \quad \text{北半球}, \dots\dots\dots (61 a)$$

$$\gamma < 0, \alpha < 0 \quad \text{南半球} \dots\dots\dots (61 b)$$

の配位である場合を考える。このとき低緯度領域のトロイダル磁場は式 (43) から

$$B_r > 0 \quad \text{北半球}, \dots\dots\dots (62 a)$$

$$B_r < 0 \quad \text{南半球} \dots\dots\dots (62 b)$$

という配位になる。一方、式 (61) の場合、極近傍での磁場 [式 (58)] は、北半球でも南半球でも負となる。したがって図 2 (a) の極性を持った磁場配位が再現される。

次に式 (61) の配位からクロス・ヘリシティの符号のみが反転し、

$$\gamma < 0, \alpha > 0 \quad \text{北半球}, \dots\dots\dots (63 a)$$

$$\gamma > 0, \alpha < 0 \quad \text{南半球} \dots\dots\dots (63 b)$$

となった場合を考えると、トロイダル磁場の極性は式 (62) から反転し、

$$B_r < 0 \quad \text{北半球}, \dots\dots\dots (64 a)$$

$$B_r > 0 \quad \text{南半球} \dots\dots\dots (64 b)$$

となる。このとき極近傍磁場は北半球でも南半球でも正となる。この状況は図 2 (b) の場合に対応している。

B 乱流エネルギーの生成・維持機構

磁場の反転現象自体は本質的に非定常過程である。この過程を平均場ダイナモ理論の枠組みで扱うために乱流エネ

ルギーと乱流クロス・ヘリシティの時間発展を考えてみる。

乱流エネルギーの生成率 P_K は式 (28 a) で与えられる。その表式に磁場の分解式 (38) と (39) を代入する。まずレイノルズ応力は

$$R^{\alpha\beta} = R_0^{\alpha\beta} + R_1^{\alpha\beta}, \dots (65)$$

ただし

$$\begin{aligned} R_0^{\alpha\beta} &= \frac{2}{3} K_R \delta^{\alpha\beta} - v_K S^{\alpha\beta} + v_M M_0^{\alpha\beta} \\ &= \frac{2}{3} K_R \delta^{\alpha\beta} - v_K \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^2 \right] S^{\alpha\beta} \cong \frac{2}{3} K_R \delta^{\alpha\beta} - v_K S^{\alpha\beta}, \end{aligned} \dots (66)$$

$$R_1^{\alpha\beta} = v_M M_1^{\alpha\beta} \dots (67)$$

と書くことができる。ここでテンソル $A^{\alpha\beta}$ の大きさとして $\|A\| = (A^{\alpha\beta} A^{\alpha\beta})^{1/2}$ を考えると $R_0^{\alpha\beta}$ と $R_1^{\alpha\beta}$ の大きさの比は

$$\frac{\|R_1^{\alpha\beta}\|}{\|R_0^{\alpha\beta}\|} = O\left(\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|^2 \left|\frac{\alpha L_C}{\beta}\right|\right) \dots (68)$$

と評価できる。このことからレイノルズ応力は

$$R^{\alpha\beta} \cong R_0^{\alpha\beta} = \frac{2}{3} K_R \delta^{\alpha\beta} - v_K S^{\alpha\beta} \dots (69)$$

と書き表わせる。次に乱流起電力は

$$E_M = E_{M0} + E_{M1}, \dots (70)$$

ここで

$$E_{M0} = -\beta J_0 + \gamma \Omega = 0, \dots (71)$$

$$E_{M1} = \alpha B_0 + \alpha B_1 - \beta J_1 = \alpha B_1 \dots (72)$$

となる。式 (69) と式 (71), (72) から P_K は

$$P_K = P_{K0} + P_{K1} \dots (73)$$

となる。ただし

$$P_{K0} = -E_{M0} \cdot J_0 - \frac{1}{2} R_0^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} v_K (S^{ab})^2, \dots (74)$$

$$\begin{aligned} P_{K1} &= -E_{M0} \cdot J_0 - E_{M1} \cdot J_0 - \frac{1}{2} R_1^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \\ &= -\alpha B_1 \cdot J_0 - \frac{1}{2} v_M M_1^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \cong 0 + O\left[\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2\right] \end{aligned} \dots (75)$$

である。 $O[(\gamma/\beta)^2]$ の量を無視すると、結局

$$P_K \cong P_{K0} = \frac{1}{2} v_K (S^{ab})^2 \dots (76)$$

と表わせる。式 (76) は、乱流エネルギーの生成率は $S^{\alpha\beta}$ で表わされる差動回転で決まり、クロス・ヘリシティの効果は無視できることを示している。

C 乱流クロス・ヘリシティの生成・維持機構

クロス・ヘリシティの生成率 P_w は式 (29 a) で与えられる。エネルギー生成率の場合と同じように

$$P_w = P_{w0} + P_{w1}, \dots (77)$$

ただし

$$P_w = -E_{M0} \cdot \Omega - \frac{1}{2} R_0^{\alpha\beta} M_0^{\alpha\beta}, \dots (78)$$

$$P_{w1} = -E_{M1} \cdot \Omega - \frac{1}{2} R_1^{\alpha\beta} M_0^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R_0^{\alpha\beta} M_1^{\alpha\beta} \dots (79)$$

を得る。式 (69), (71), (72) と式 (43) から

$$P_{w0} = \frac{\gamma}{\beta} \left[\frac{1}{2} v_K (S^{ab})^2 \right] = \frac{\gamma}{\beta} P_K, \dots (80)$$

$$P_{w1} = -\alpha B_1 \cdot \Omega - \frac{1}{2} R_0^{\alpha\beta} M_1^{\alpha\beta} \cong -\alpha B_1 \cdot \Omega \dots (81)$$

となる。式 (81) の最後の近似では速度勾配の回転 (渦度) に関連する項と歪みに関連する項のうち回転に直接関連する項だけを残した。結局、クロス・ヘリシティの生成率は

$$P_w \cong \frac{\gamma}{\beta} P_K - \alpha B_1 \cdot \Omega \dots (82)$$

と表わすことができる。

D 極性反転の平均場理論による解釈

クロス・ヘリシティの生成率 P_w [式 (29 a)] には、クロス・ヘリシティ効果で差動回転から生じるもの P_{w0} [式 (80)] とアルファ効果で誘起されるポロイダル磁場から生じるもの P_{w1} [式 (81)] の二つあることがわかった。

磁場成長期はクロス・ヘリシティの生成率のうち P_{w0} が P_{w1} に卓越している段階 ($|P_{w0}| \gg |P_{w1}|$) と考えることができる。この段階では

$$P_w > 0 \quad (W > 0 \text{ の領域}), \dots (83 a)$$

$$P_w < 0 \quad (W < 0 \text{ の領域}) \dots (83 b)$$

となり、正のクロス・ヘリシティが存在する領域で正のクロス・ヘリシティが生成され、負の領域では負のクロス・ヘリシティが生成される。

アルファ効果を通してポロイダル磁場が成長し大きくなると P_{w1} も P_{w0} と同じくらいに大きくなる ($|P_{w0}| \cong |P_{w1}|$)。生成されたポロイダル磁場のためにクロス・ヘリシティの生成率が減少し、弱められたクロス・ヘリシティ効果のためトロイダル磁場も小さくなる。この段階が磁場減衰期であり、結果的には磁場極性の反転へつながらと考えられる。

アルファ効果によってポロイダル磁場が生じると乱流クロス・ヘリシティが減少するという上述の関係を別の視点からとらえると次のようになる。図 3 の B_1 にさらにアルファ効果がはたらくと B_1 に平行な電流 $J_{\alpha\alpha}$ が生成される。この $J_{\alpha\alpha}$ に付随する磁場 $B_{\alpha\alpha}$ は本来のトロイダル磁場 B_0 と同じ向きを向いている。このことは $U \cdot B$ で定義される平均流クロス・ヘリシティの絶対値が大きくなることを意

味している。式 (32) で見たように、クロス・ヘリシティの保存性から平均流クロス・ヘリシティ $\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}$ の生成と乱流クロス・ヘリシティ $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$ の消滅は (逆) カスケード過程を通じて直結している。 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}$ が増加すると $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$ の減少がもたらされる。これがアルファ効果で誘起されたポロイダル磁場が乱流クロス・ヘリシティの生成を抑えることの物理的起源である。

E 簡単なモデル 反転とその周期

これまで見てきたように、磁場極性の反転は、平均速度場 \mathbf{U} やヘリシティ H あるいは α は変わらないまま、クロス・ヘリシティ W あるいは γ の符号が変化することで起きる。以上のダイナモ機構の本質を抽出することで、簡単な反転モデルを考えることができる。トロイダル磁場とポロイダル磁場の大きさをそれぞれ B_T, B_P 、トロイダル速度の大きさを U_T 、また、ヘリシティとクロス・ヘリシティの大きさの指標をそれぞれ α^*, γ^* とすると、モデル方程式は

$$B_T = \gamma^* U_T, \dots (84)$$

$$\frac{dB_P}{dt} = \alpha^* B_T, \dots (85)$$

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = -\delta B_P \dots (86)$$

となる。式 (84) はクロス・ヘリシティ・ダイナモの解 (43) に対応しており、クロス・ヘリシティ効果によってトロイダル回転 U_T からトロイダル磁場 B_T が生成されることを表している。式 (85) は摂動アルファ・ダイナモ解 (49) に対応しており、ヘリシティ効果によりトロイダル磁場 B_T からポロイダル磁場 B_P が生成されることを表している。式 (86) はクロス・ヘリシティの生成率 [式 (81)] に対応しており、アルファ効果によって誘起されたポロイダル磁場 B_P の効果でクロス・ヘリシティ γ^* が減少することを示している。

式 (84) — (86) から B_T, B_P を消去すると

$$\frac{d^2 \gamma^*}{dt^2} = -\omega_r^2 \gamma^* \dots (87)$$

となる。ただし

$$\omega_r = \sqrt{\alpha^* \delta U_T} \dots (88)$$

である。式 (87) はクロス・ヘリシティの周期的変動を示唆している。

式 (88) から反転周期の評価をしてみよう。式 (43), (49), (81) との対応から

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{\beta}, \alpha^* = \frac{\epsilon}{K} \frac{\alpha L_C}{\beta}, \delta = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{\epsilon} \omega_F, \dots (89)$$

であることに注意すると、反転の振動数 ω_r は

$$\omega_r^2 = \left(\frac{\alpha L_C}{\beta} \right)^2 \frac{R}{L_C} \omega_F^2 = \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^2 \left(\frac{B_P}{U_T} \right)^2 \frac{R}{L_C} \omega_F^2 \dots (90)$$

と書き表わせる。トロイダル磁場とポロイダル磁場に関する大きさの評価式 (53) と (54)、および $|\gamma/\beta|$ についての評価式 (48) と太陽のパラメータ

$$L_C = O(10^{-1})R, \omega_F = \frac{2\pi}{0.07} = O(10^2)yr \dots (91)$$

(R : 太陽半径) を用いると

$$\omega_r = O(10^{5/2}) \frac{B_P}{B_T} yr^{-1} \dots (92)$$

が言える。つまり周期は

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_r} = O(10^{-3/2}) \frac{B_T}{B_P} yr \dots (93)$$

と表される。太陽の極性反転が 11 年ごとに起きる (周期は 22 年) ことから

$$T_r = O(10)yr \dots (94)$$

である。これを与えるためのポロイダル磁場とトロイダル磁場の大きさの比は

$$\frac{B_P^*}{B_T} = O(10^{-5/2}) \dots (95)$$

である。この比は観測結果と矛盾しない。

F 極方向への表面流

平均場方程式のダイナモ解が極方向への表面流 (meridional motion) をどの程度説明できるか調べてみよう。平均速度場の方程式 (9) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \mathbf{U} = \dots + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot (-\mathbf{R}) + \dots \dots (96)$$

という形をしている。いま極座標系 (r, θ, ϕ) を考え、トロイダル回転が支配的であるとする;

$$\mathbf{U} = (U^r, U^\theta, U^\phi) = (0, 0, r\omega_F \sin \theta) \dots (97)$$

それに伴う平均渦度は

$$\boldsymbol{\Omega} \cong 2\boldsymbol{\omega}_r = (2\omega_r \cos \theta, -2\omega_r \sin \theta, 0) \dots (98)$$

となる。式 (43) と (44) で与えられるクロス・ヘリシティのダイナモ解に式 (97) と (98) を代入する。その結果、ローレンツ力の表式として

$$\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 = \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^2 \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^2 r \omega_F^2 (-2\sin^2 \theta, -\sin 2\theta, 0) \dots (99)$$

を得る。ポロイダル方向の力は

$$(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0)^\theta = -\left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^2 r \omega_F^2 \sin 2\theta \dots (100)$$

である。この表式は観測で得られている

$$C \sin \theta - \sin 2\theta \quad (C \cong 0.2) \dots (101)$$

の表式と大きく違わない。

実際に表面流速を評価してみよう。定常状態でローレンツ力の項とレイノルズ応力の項がつり合うとすると、 U_M を表面流の速度として

$$|\mathbf{J} \times \mathbf{B}| \cong |\nabla \cdot (-\mathbf{R})| = |v_K \nabla^2 U_M| \dots\dots\dots (102)$$

が成り立つ。ポロイダル方向のローレンツ力は式 (100) より

$$|\mathbf{J} \times \mathbf{B}| \cong -\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 r \omega_F^2 \sin 2\theta = O(10^{-3}) \frac{U_T^2}{R} \dots\dots\dots (103)$$

と評価できる。ただし、 $(\gamma/\beta)^2 = O(10^{-2})$, $r = R$, $\sin 2\theta = O(10^{-1})$ などとしている。また、式 (23), (25) から

$$v_K = O(10^{-1}) \frac{K^2}{\varepsilon} = O(10^{-1}) \frac{u_T^4}{u_T^3 / l_T} = O(10^{-1}) u_T l_T \dots\dots\dots (104)$$

と書くことができる。ここで u_T は乱れの特徴的速度で、その大きさは差動回転の一割程度であり、トロイダル回転速度 U_T の 1% 程度である；

$$u_T = O(10^{-1}) U_D = O(10^{-2}) U_T. \dots\dots\dots (105)$$

また、 l_T は乱れの特徴的長さで、球殻の厚み L_C の一割程度であり、太陽半径 R の 1% 程度である；

$$l_T = O(10^{-1}) L_C = O(10^{-2}) R. \dots\dots\dots (106)$$

式 (105), (106) を用いると、式 (102) の最右辺の各部分は

$$v_K = O(10^{-5}) U_T R, \dots\dots\dots (107)$$

$$|\nabla^2 U_M| = \frac{|U_M|}{l_T^2} = O(10^4) \frac{|U_M|}{R^2} \dots\dots\dots (108)$$

と評価できる。式 (103), (107), (108) を式 (102) に代入すると、結局

$$|U_M| = O(10^{-2}) U_T = O(10^{-2}) O(10^3) \text{ms}^{-1} = O(10) \text{ms}^{-1} \dots\dots\dots (109)$$

という評価が得られる。この値は観測されている表面流の大きさと良く一致している。

V. ま と め

回転運動や大規模な渦運動が伴う現象では、アルファ効果よりもクロス・ヘリシティ効果が支配的になると考えられる。クロス・ヘリシティ効果とアルファ効果の両方を組み込んだダイナモ・モデルを太陽球殻の磁場生成現象に適用した。低緯度領域ではクロス・ヘリシティ効果により回転速度からトロイダル磁場が生成される。極領域ではヘリシティとクロス・ヘリシティのはたらきによりダイポール

型の磁場が生成される。その結果、太陽の定常磁場の低緯度領域に現われる黒点磁場と極領域の磁場の極性に関する観測的に確立された規則を矛盾無く説明できることが判明した。低緯度領域でアルファ効果によって誘起されるポロイダル磁場が、今度はクロス・ヘリシティの生成を抑制し、トロイダル磁場を弱めて太陽磁場の極性反転に導く可能性が示唆された。極性反転を表現する簡単なモデルが提案され、そこから評価される反転周期は観測と矛盾しないことが示された。極方向への表面流速の評価も行なわれ、観測値と良く一致することが示された。

(2000年11月13日受理)

文 献

- 1) E. R. Priest, *Solar Magnetohydrodynamics* (D. Reidel, Dordrecht, 1982).
- 2) G. E. Hale, *Nature* **119**, 708 (1927).
- 3) P. Melchior, *The Physics of the Earth Core* (Pergamon, Oxford, 1986).
- 4) R. T. Merrill, M. W. McElhinny, and P. L. McFadden, *The Magnetic Field of the Earth* (Academic, San Diego, 1996).
- 5) A. Yoshizawa and N. Yokoi, *Phys. Plasmas* **3**, 3604 (1996).
- 6) A. Yoshizawa, N. Yokoi, and H. Kato, *Phys. Plasmas* **6**, 4586 (1999).
- 7) G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, *Nature* **377**, 203 (1995).
- 8) A. Kageyama and T. Sato, *Phys. Plasmas* **2**, 1421 (1995).
- 9) W. Kuang and J. Bloxham, *Nature* **389**, 371 (1997).
- 10) H. Kitauchi and S. Kida, *Phys. Fluids* **10**, 457 (1998).
- 11) P. Olson, U. Christensen, and G. A. Glatzmaier, *J. Geophys. Res.* **104**, 10383 (1999).
- 12) A. Yoshizawa, *Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows: Modelling and Statistical Theory* (Kluwer, Dordrecht, 1998).
- 13) A. Yoshizawa, H. Kato, and N. Yokoi, *Astrophys. J.* **537**, 1039 (2000).
- 14) M. Steenbeck, F. Krause, and K.-H. Rädler, *Z. Naturforsch. A* **21**, 369 (1966).
- 15) A. Pouquet, U. Frisch, and J. Léorat, *J. Fluid Mech.* **77**, 321 (1976).
- 16) A. Yoshizawa, *Phys. Fluids B* **2**, 1589 (1990).
- 17) N. Yokoi, *Phys. Fluids* **11**, 2307 (1999).
- 18) F. Hamba, *Phys. Fluids A* **4**, 441 (1992).
- 19) A. Yoshizawa and N. Yokoi, *Astrophys. J.* **407**, 540 (1993).
- 20) N. Yokoi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65**, 2353 (1996).
- 21) A. Yoshizawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65**, 124 (1996).
- 22) A. Yoshizawa, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **45**, 129 (1993).
- 23) N. Yokoi, *Astron. Astrophys.* **311**, 731 (1996).
- 24) S. Nishino and N. Yokoi, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **50**, 653 (1998).
- 25) A. A. Pevtsov, R. C. Canfield, and T. R. Metcalf, *Astrophys. J.* **440**, L 109 (1995).