

回転系 Rayleigh-Bénard 対流における乱流エネルギー減少機構

The Mechanism of The Turbulent Energy Reduction in Rayleigh-Bénard Convection with Rotation

小 山 省 司*

Shoji KOYAMA

1. はじめに

本研究では、座標系の回転が乱流運動に与える影響について調べるため、回転系における Rayleigh-Bénard 対流の 3 次元直接数値シミュレーション (Direct numerical simulation: DNS) を行う。Rayleigh-Bénard 対流は、流体が下の温かい壁と上の冷たい壁に挟まれて浮力により駆動される対流であり、一般的な熱対流現象を簡明化した例に相当する。Rayleigh-Bénard 対流に関する研究は、Bénard¹⁾ や Rayleigh²⁾ を初めとして、今日まで非常に多く報告されている。その代表例として、流体の安定性解析に関する研究としては、Veronis³⁾ や Chandrasekhar⁴⁾ があり、回転系及び非回転系の実験的研究は Rossby⁵⁾ により成され、Rayleigh-Bénard 対流の基本特性が示されている。一方、3 次元 DNS による Rayleigh-Bénard 対流の研究は、Somerville^{6,7)}、Lipps^{7,8)}、そして Grözbach^{9,10)} により層流から乱流までの流れの性質や基本統計量 (乱流エネルギー、平均温度分布、Nusselt 数等) などが調べられている。また、系の回転の影響下にある熱対流現象は、宇宙・地球流体现象 (太陽や巨大惑星の対流層や地球大気・海洋対流等) にとって重要な性質である (Julien *et al.*¹¹⁾)。これらはいずれも、Reynolds 数の高い乱流状態にあると考えられ、本研究が注目する所となっている。

系の回転の影響は、流体の運動方程式の右辺にコリオリ力として陽的に付加される (第 2 節参照)。コリオリ力は、流体粒子の進行方向に対し垂直に作用するため仕事をせず、従って陽的には流体の運動エネルギーの増減に関与しない。Chandrasekhar⁴⁾ は、Rayleigh-Bénard 対流について流体の基本場に無限小振幅を与え、流体方程式中の非線形項を無視する線形解析の結果をまとめている。それによると、非回転系の場合、壁上で流体は滑らないという条件 (no-slip 条件) の下で、

$$Ra_c = 1707.762, k_c = 3.117 \dots \dots \dots (1.1)$$

と示している。ここで Ra_c は臨界 Rayleigh 数で、流体運動が対流になるためのしきい値であり、 k_c はその時の水平方向波数である。一方、回転系における臨界 Rayleigh 数と臨界波数の値は、系の回転強度に依存して両者とも増加する事が示されている。これは、非回転系と比べて回転系では、乱れを抑え系の安定性が増加し、水平方向の長さスケールが減少する事を意味している。Kato¹²⁾ は、3 次元 DNS で、非線形項が比較的小さいケース [$Ra = 6400 \sim 3.75 Ra_c$, $Ta = 1.6 \times 10^3$: ここで Ra と Ta はそれぞれ Rayleigh 数と Taylor 数である (第 2 節参照).] の運動エネルギーの時系列を調べたところ、回転系におけるエネルギーの減少を数値的に示している。

このように、回転系におけるエネルギーの減少は、しばしば指摘されているが、どのような物理過程で減少するのか明確な定性的考察は殆ど成されていない。そこで本研究では、回転及び非回転系における Rayleigh-Bénard 対流の非線形項が十分効いている乱流場を対象に、乱流エネルギーの分布とその減少過程を調べることを目的とした。

また本報告書の以降の構成は以下の通りになっている。第 2 節では、問題の定式化として基礎方程式の導入と計算例の設定を行い、第 3 節では、数値計算の結果と乱流エネルギー減少に関する考察を試み、そして最後に第 4 節で今回のまとめを行う。

2. 問題の定式化

本研究の熱対流現象を記述するための基礎方程式系は、連続の方程式、Navier-Stokes 方程式、そして熱輸送の方程式である。簡単のため Boussinesq 近似を採用した。これは、NS 方程式中の浮力項を除いたこれら式中の全項に対して、密度の物理特性を一定にするという仮定である。本研究は 3 次元カーテシアン座標系を採用し x, y を水平軸、

*東京大学生産技術研究所 情報・システム大部門

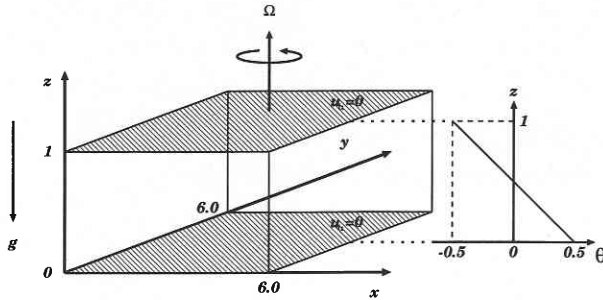


図1 計算領域. 系の回転角速度ベクトルは, 重力加速度ベクトルに対して反平行とする. 壁の温度はそれぞれ $\theta_{w1} = 0.5$, $\theta_{w2} = -0.5$ に固定している.

z を鉛直軸とすると, 速度成分 u_i (指標 1, 2 そして 3 はそれぞれ x, y そして z を対応させる), 圧力 p そして温度 θ の時間発展を支配する無次元方程式は

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \dots \dots \dots (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \delta_{i3} + \frac{1}{Ro} \epsilon_{ij3} u_j, \dots \dots \dots (2.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}, \dots \dots \dots (2.3)$$

$$Re = \frac{UL}{\nu}, Pr = \frac{\nu}{\kappa}, Ra = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\kappa \nu}, Ro = \frac{U}{fL} \dots \dots \dots (2.4)$$

となる. ここでは, 同じ下付きの指標が 2 回重なった時, 全ての項に対し Einstein の総和則を適用する. シンボル $L, U, \beta, g, \Delta T, \kappa, \nu$ そして f はそれぞれ系の代表長さ, 系の代表速度, 体積膨張率, 重力加速度, 系の代表温度, 熱拡散率, 動粘性係数そしてコリオリパラメータである (Ω を系の回転角速度とすると, $f = 2\Omega$). また, ここで現れた無次元パラメータ Re, Pr, Ra そして Ro はそれぞれ Reynolds 数, Prandtl 数, Rayleigh 数そして Rossby 数である (但し Rossby 数の代わりに Taylor 数 $Ta = (fL^2/\nu)^2$ を導入する場合もある). 本研究では $\Omega > 0$ とし, その結果系は z 軸を回転軸とし, 上から見て反時計回りをする. 更に代表長さ, 速度そして温度としてそれぞれ上下壁間隔 d , 乱流鉛直速度成分 $\sqrt{\beta g \Delta T d}$, そして上下壁温度差 $\Delta T = T_{w1} - T_{w2}$ を採用すると, 各パラメータ間の関係は $Re = \sqrt{Ra/Pr}, Ro = \sqrt{Ra/PrTa}$ となり, 流体運動を支配するコントロールパラメータは Pr, Ra そして Ro の 3 成分となる.

基礎方程式系の時間発展を進行させるため, 速度場と温度場には初期条件と境界条件が必要となる. 本研究では,

表 1 乱流強度パラメータ.

	$R_\lambda (z=0.483)$	$v_i/\nu (z=0.483)$	Nu
非回転系	26.2	9.28	6.3
回転系	12.9	2.26	6.3

初期条件として流体は時刻 $t = 0$ の時, 静水圧平衡を保ち静止しているとし, その時の熱伝達は伝導のみで温度場は鉛直方向に線形分布をしている. そこに, 最大振幅が 0.05 となる乱数値を温度場に重ね合わせ対流の種としている. また境界条件は, 上下の壁上で速度場には no-slip 条件を課し, 温度場は下記的一定値に固定した.

$$u_\alpha (x, y, 0) = 0, \quad u_\alpha (x, y, 1) = 0, \dots \dots \dots (2.5)$$

$$\theta_{w1} = \theta(x, y, 0) = 0.5, \quad \theta_{w2} = \theta(x, y, 1) = -0.5. \dots \dots (2.6)$$

また, 水平方向に関しては速度場, 温度場とも周期境界条件を課した.

$$u_\alpha (x + 6.0, y + 6.0, z) = u_\alpha (x, y, z), \dots \dots \dots (2.7)$$

$$\theta (x + 6.0, y + 6.0, z) = \theta (x, y, z). \dots \dots \dots (2.8)$$

今回の計算例は, 非回転系と回転系の各 1 例を比較する事とし, 各パラメータの値はそれぞれ $Ra = 381225$ ($\sim 223Ra_c$) そして $Pr = 0.71$ ($Re \approx 733$) とし, 更に回転系の場合 $Ro = 1.0$ ($Ta = 5.37 \times 10^5$) とした. 計算領域 (図 1) は $6.0 \times 6.0 \times 1$ で, 数値解像度は $128 \times 128 \times 64$ 格子点とし, 鉛直方向を両壁近傍で細くなるような不等間隔格子で刻んでいる (最小格子間隔は 0.002). 時間間隔は 0.0005 で, 時間進行は 4×10^5 ステップ, つまり $t = 200$ まで実行し, 乱流場が殆ど統計平衡に達している $100 \leq t \leq 200$ のデータを解析した. なお, 本研究の数値計算スキームは, 方程式中の全ての空間微分項に対し有限差分法を, 時間積分に対し Adams-Bashforth 法をそれぞれ 2 次精度で適用した.

3. シミュレーションの結果

定量的な解析を行うために, 非定常時の計算結果を適当に平均化し評価しなければならない. このため本研究では, xy 面平均かつ時間平均を行い, この平均化の表記を $\langle f \rangle$ とした. 従って任意の物理量 f は

$$f(x, y, z, t) = F(z) + f'(x, y, z, t), \quad F \equiv \langle f \rangle \dots \dots \dots (3.1)$$

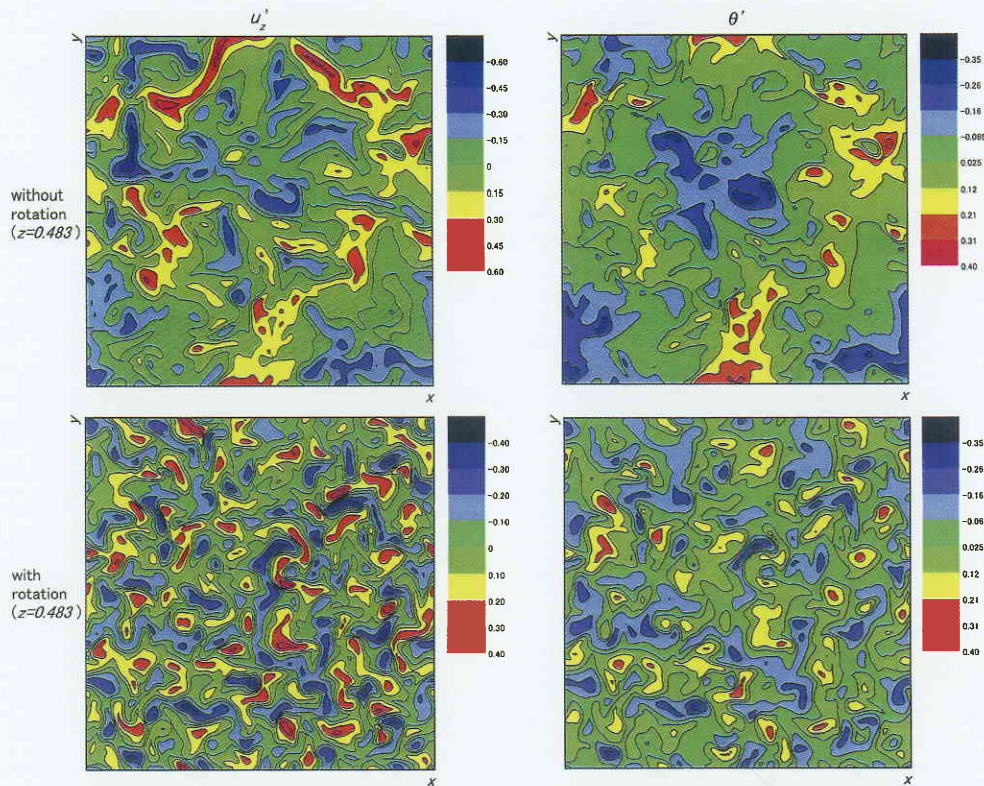


図2 u'_z (第1列) と θ' (第2列) の水平切断面. 第1行は非回転系で, 第2行は回転系.

の様に分解される. ここで f は平均からのずれである.

3.1 乱流強度

今回の計算例が, どの程度の強度を持つ乱流運動かを確認するために, 乱流 Reynolds 数 (R_λ), 乱流粘性と分子粘性の比 (ν_t/ν) そして Nusselt 数 (Nu) を調べた. 本研究では, Taylor のマイクロスケールに基づく乱流 Reynolds 数を次のように定義する. :

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{20k^2}{3\nu\varepsilon}} \dots\dots\dots (3.2)$$

ここで k と ε は

$$k = \frac{1}{2} \langle u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \rangle, \quad \varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \dots\dots\dots (3.3)$$

で, それぞれ乱流エネルギーと散逸率である. また ν_t と ν の比は, 乱流粘性を渦粘性近似により $\nu_t = C_\nu (k^2/\varepsilon)$ ($C_\nu = 0.09$) と仮定すれば (3.2) より

$$\frac{\nu_t}{\nu} = 0.0135 R_\lambda^2 \dots\dots\dots (3.4)$$

となる. 更に Nusselt 数は

$$Nu = \frac{\langle T'u'_z \rangle - \kappa(\partial\langle T \rangle/\partial z)}{\kappa(\Delta T/d)} \dots\dots\dots (3.5)$$

で定義する無次元化された熱流束で, 系の熱輸送効率を表す. つまり, 流体運動が激しくなれば大きい値を示す. これらの結果を表1にまとめた. 乱流 Reynolds 数を乱流運動が激しい中心付近で評価したところ, 非回転系と比べて回転系では値が減少し, 乱流が抑えられていることがわかる. そして粘性比においても, 非回転系では約9倍であるが, 回転系では約2倍となり乱流拡散が弱まっていることがわかる. また Nusselt 数においては, 今回の2つのケースでは殆ど値が変わらないという結果であった. 確かに本ケースの例のように, Rossby 数が1程度の回転強度では Nusselt 数の値が殆ど変化しないという結果ではあったが, 予備実験において, 本ケースより Rossby 数が小さく, 系の回転強度が大きくなれば回転系での熱輸送効率は減少する傾向にあることがわかっている.

3.2 水平方向の対流構造

系の回転が対流運動にどう影響するのか現象的評価をするために, 鉛直速度 u'_z と温度ゆらぎ θ' の水平切断面 ($t = 100, z = 0.483$) における等高線図を求めた (図2). 非回転系, 回転系とも u'_z と θ' は互いに相似的な構造になっていることがわかる. これは, u'_z と θ' が正の相関を持つこ

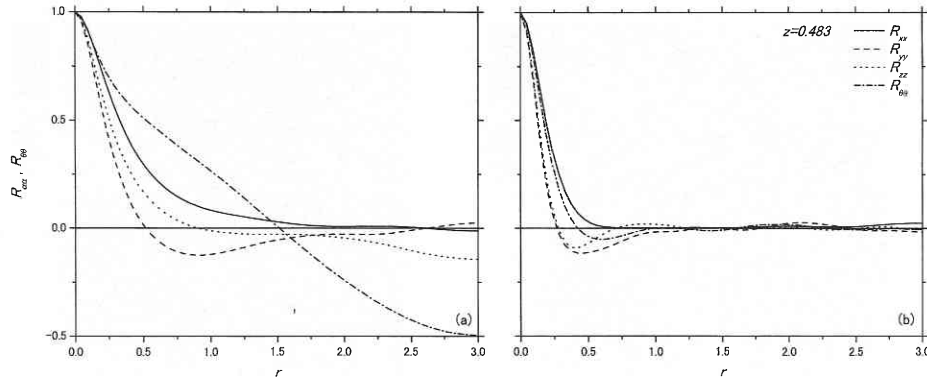


図3 x方向の二点相関係数(縦軸は相関係数 $R_{\alpha\alpha}$ と $R_{\theta\theta}$, 横軸は二点間距離 r). (a) 非回転系と (b) 回転系.

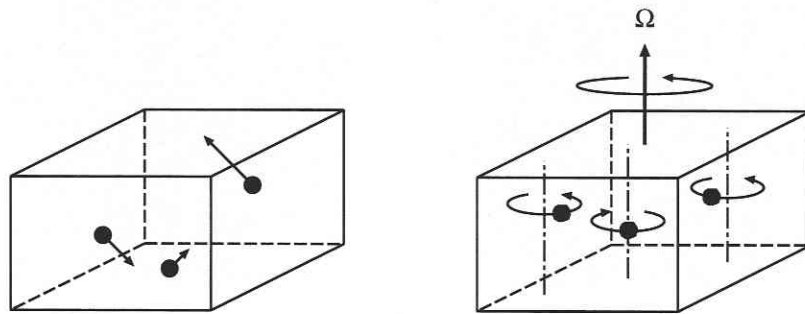


図4 非回転系(左)と回転系(右)における流体粒子の運動状態を表した模式図.

とを示唆して、下の温かい壁から上の冷たい壁へ熱が輸送されている様子がわかる。また非回転系と比べて回転系では、 u'_z と θ' ともに水平方向の対流構造が細かくなっていることがわかる。そこで定量的な考察をするため、速度と温度ゆらぎに対するx方向の二点相関係数を調べた(図3)。下記にその定義式を示す。

$$R_{\alpha\alpha}(r, z) = \frac{\langle u'_\alpha(x+r, y, z)u'_\alpha(x, y, z) \rangle}{\langle u'^2_\alpha(x, y, z) \rangle}, \dots\dots (3.6)$$

$$R_{\theta\theta}(r, z) = \frac{\langle \theta'(x+r, y, z)\theta'(x, y, z) \rangle}{\langle \theta'^2(x, y, z) \rangle}. \dots\dots (3.7)$$

速度3成分及び温度ゆらぎいずれも、非回転系と比べて回転系では相関値が早く減衰していることがわかる。このことは、x方向の長さスケールが小さくなることを意味し、線形解析の結果と一致する。これは定性的に次のように考えられる。非回転系では、流体粒子は水平方向に自由に運動することができるが、回転系では、コリオリ力によって流体粒子が回転軸方向に束縛され、水平方向の運動範囲が制限されるためだと思われる(図4)。この現象は、荷電粒子が磁場に束縛を受けるLarmor運動と同じである。

3.3 乱流エネルギー

図5に非回転系(a)と回転系(b)における乱流エネルギーの鉛直分布図を示す。非回転系と比べて回転系では、乱流エネルギーが減少することがわかる。特に、乱流運動の激しい中心付近では減少率が高く、平坦な領域が広がることをわかる。

このような回転系での乱流エネルギー減少を考察するために、その収支式を導き右辺の各項を評価した。但し本研究では、浮力よりエネルギー供給を受ける鉛直方向のエネルギー $k_z (= \langle u'^2_z \rangle / 2)$ に着目した。何故なら水平方向のエネルギー $k_x (= \langle u'^2_x \rangle / 2)$ と $k_y (= \langle u'^2_y \rangle / 2)$ は、浮力による直接的エネルギー供給ではなく、 k_z からエネルギーを再分配されるからである。

$$\frac{\partial k_z}{\partial t} = \langle \theta' u'_z \rangle + \left\langle p' \frac{\partial u'_z}{\partial z} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial z} \left\langle \left(\frac{1}{2} u'^2_z + p' \right) u'_z \right\rangle - \varepsilon^z + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 k_z}{\partial z^2}, \dots\dots (3.8)$$

where $\varepsilon^z = \frac{1}{Re} \left\langle \frac{\partial u'_z}{\partial x_j} \frac{\partial u'_z}{\partial x_j} \right\rangle. \dots\dots (3.9)$

ここでの右辺各項はそれぞれ、浮力生産項(B), 再分配項(R), 拡散項[乱流拡散項(T)と圧力拡散項(P)],

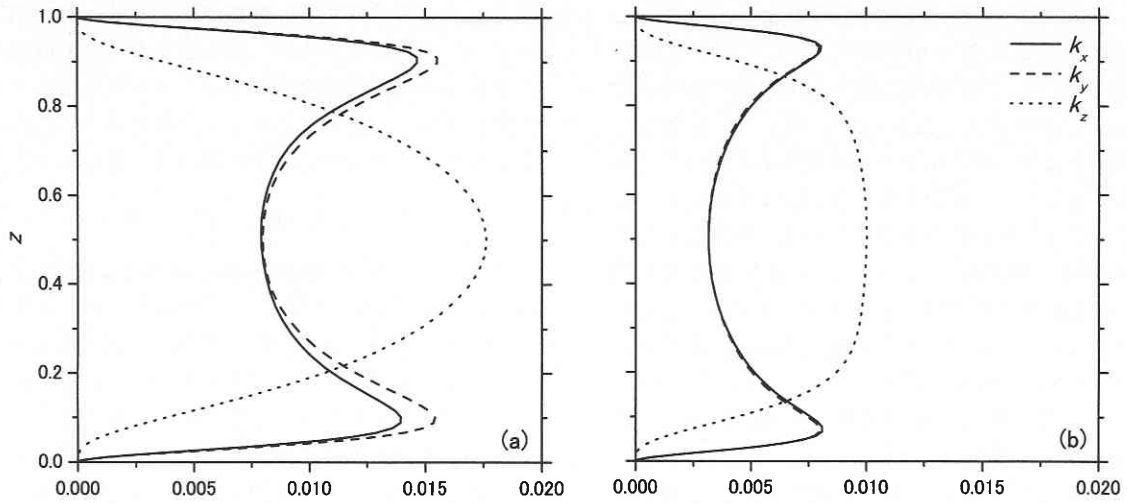


図5 乱流エネルギーの鉛直分布図. (a) 非回転系と (b) 回転系.

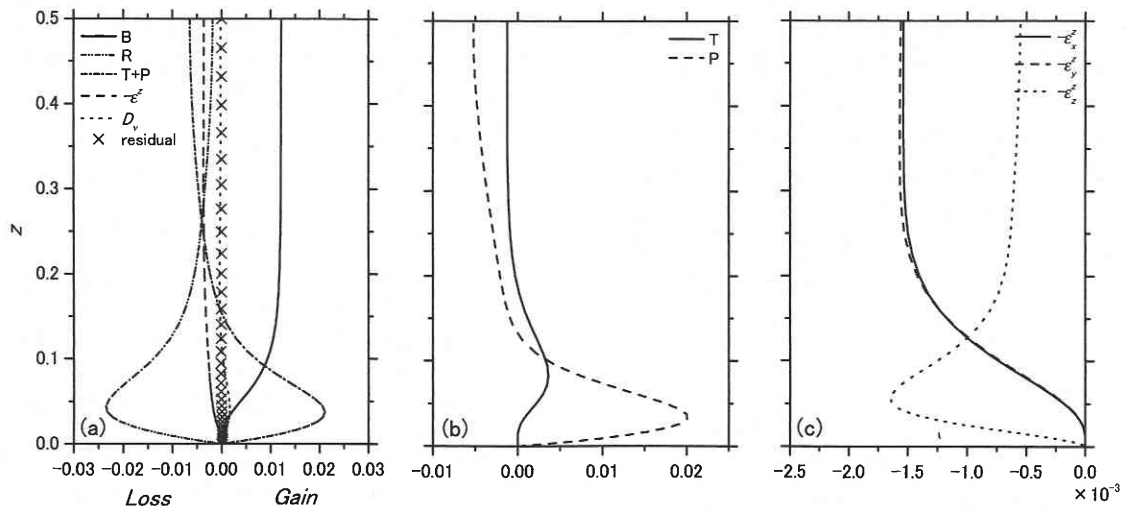


図6 非回転系における (a) 乱流エネルギーの鉛直方向からの寄与 k_i の収支, (b) 拡散項の詳細として (c) 散逸項の詳細の各鉛直分布図.

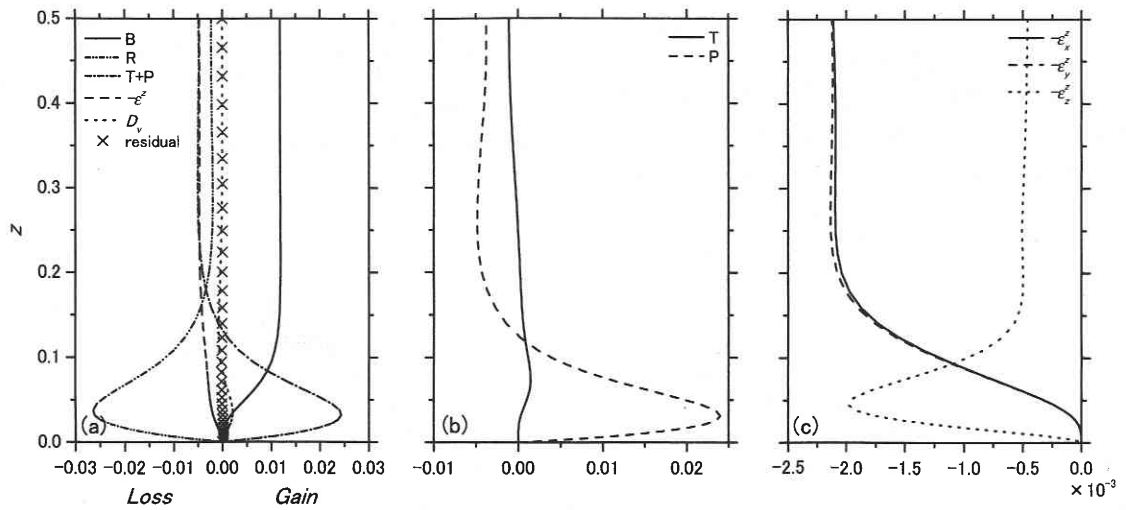


図7 回転系 (内容は図6に同じ).

散逸項 (ε^z : (3.9)において j をそれぞれ x , y そして z とした ε_x^z , ε_y^z そして ε_z^z の寄与がある), そして分子拡散項 (D_v) である. 図6に非回転系, 図7に回転系の各項の鉛直分布図をそれぞれ示す. 図6 (a) と図7 (a) を比較し回転系を評価すると, エネルギー供給源である浮力生産項が鉛直方向に対して殆ど変化していないことがわかる. ここで注目する項は, 拡散項と散逸項である. 非回転系と比べて回転系では, 壁近傍 ($0 \leq z \leq 0.2$) で拡散項の絶対値が増加し, 再分配項と散逸項の絶対値が増加することで釣り合いを保っている. ここで再分配項の増加は, 水平方向のエネルギー供給の増加を意味する. 一方, 中心付近 ($0.2 \leq z \leq 0.5$) では拡散項の絶対値が減少し, 散逸項の絶対値が増加することで釣り合いを保っている. そこで図6 (b) と図7 (b) で拡散項の詳細を評価すると, 非回転系と比べて回転系では, 壁近傍で乱流拡散項の絶対値が減少し, 圧力拡散項の絶対値が増加していることがわかる. また中心付近では, 両項とも大きな増減はない. まず乱流拡散項について考察すると, 非回転系と比べて回転系では, 乱流拡散項が z 方向に対してほぼ0ということは, 鉛直方向に対する u_z^2 の一様化を示唆している. これは, 回転系に特有な現象の一つである Taylor-Proudman の定理の現れであると思われる. 次に圧力拡散項について考察すると, 非回転系と比べて回転系における壁近傍の絶対値の増加は, 上述より u_z^2 の値が鉛直方向に対しほぼ一様であるとすれば, 鉛直方向における圧力差の増加と考えて良い. この壁近傍における圧力差増加機構も, 回転系に特有な現象の一つである Ekman ポンピングの現れであると思われる. また図6 (c) と図7 (c) で散逸項の詳細を評価すると, 非回転系と比べて回転系では, 壁近傍で鉛直方向からの寄与 ($-\varepsilon_z^z$) の絶対値が増加し, 中心付近で水平方向からの寄与 ($-\varepsilon_x^z$ と $-\varepsilon_y^z$) の絶対値が増加して散逸項全体で大きく増加に転じていることがわかる. このことは回転系における水平方向の長さスケールの減少が, 速度の空間微分である散逸項に反映して増加したものである.

ここまでの結果を要約すると, 非回転系と回転系の2つのケースでエネルギー供給は殆ど変化しないが, 非回転系と比べて回転系では, 散逸項が増加する. 散逸量が増変した結果, エネルギー収支の釣り合いを保つために拡散項が

変化しそれを調節する. 拡散項は局所的に負の値に転じエネルギーの損失を示すが, 輸送項であるため直接エネルギーを減少させる役割を担わない. 一方散逸は, エネルギーを熱に変換し, それを消失する役割を演じるため, 散逸の増加が乱流エネルギー減少の原因だと思われる.

4. ま と め

本研究は, 回転系 Rayleigh-Bénard 対流における乱流エネルギー減少過程について調べた. その結果は以下の通りである.

- (1)非回転系と比べて回転系では, 乱流エネルギーは減少する. 特に, 乱流運動の激しい中心付近で減少率が高く鉛直依存性が小さくなる傾向にある.
- (2)非回転系と比べて回転系では, 乱流エネルギーの収支において, 浮力生産項は殆ど変化しないが, 水平方向の長さスケール縮小に付随し散逸項の絶対値が大きくなり, エネルギーが減少に転じる.

また今後の課題として, 格子点数を増やして今回よりも値の大きい Rayleigh 数における発達した乱流場を再現する事と, 水平方向のエネルギーに対する減少過程を明確にする予定である.

(2000年11月6日受理)

参 照 文 献

- 1) H. Bénard, Rev. Gen. Sciences Pure Appl. **11**(23), 1261-1271, **11**(24), 1309-1328 (1900).
- 2) Lord Rayleigh, Phil. Mag., ser. 6, **32**(192), 529-546(1916).
- 3) G. Veronis, J. Fluid Mech. **5**, 401-435(1959).
- 4) S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford University Press, 1961).
- 5) H. T. Rossby, J. Fluid Mech. **36**, 309-335(1969).
- 6) R. C. J. Somerville, Geophys. Fluid Dyn., **2**, 247-262(1971).
- 7) R. C. J. Somerville and F. B. Lipps, J. Atmos. Sci. **30**, 590-596 (1973).
- 8) F. B. Lipps, J. Fluid Mech. **75**, 113-148(1976).
- 9) G. Grözbach, J. Fluid Mech. **119**, 27-53(1982).
- 10) G. Grözbach, J. Comp Phys. **49**, 241-264(1983).
- 11) K. Julien, S. Legg, J. McWilliams and J. Werne, J. Fluid Mech. **322**, 243-273(1996).
- 12) H. Kato, Dissertation, Tohoku University(1991).