

## レイノルズ応力の実現性と非線形 K-ε モデル

Realizability for The Reynolds Stress in Nonlinear K-ε Model

半場 藤 弘\*

Fujihiro HAMB

## 1. はじめに

乱流モデルは流体の基礎方程式からさまざまな仮定を経て導かれるので、その解が非物理的なふるまいを示すことがある。例えばレイノルズ応力の対角成分  $\langle u_\alpha^2 \rangle$  は非負でなくてはならないが、K-εモデルでの単純な渦粘性近似では速度勾配  $\partial U_\alpha / \partial x_\alpha$  が正で大きい場合  $\langle u_\alpha^2 \rangle$  が負の値をとりうる。すなわちレイノルズ応力の実現性条件<sup>1,2)</sup>を満たしていない。

また、流れ場の非等方性をより正確に表すため速度勾配の2次や3次の項を用いた非線形渦粘性モデルが開発されつつある。そのような高次の項は流れ場によっては非等方性を過大評価する可能性があり、それを修正するため代数応力モデルを元にしたリパデ近似を用いて、分母に速度歪みや渦度の大きさを含むモデルが提案されている<sup>3~10)</sup>。その際レイノルズ応力の実現性は重要な指針となる<sup>7~10)</sup>。例えばFu *et al.*<sup>8)</sup>は単純剪断流などいくつかの基本的な流れ場を選び、Gatski and Speziale<sup>3)</sup>のモデルの定数が満たすべき不等式を導いた。ただし一般の複雑な流れ場で実現性が満たされるかはわからない。

K-εモデルのような乱流モデルを導くのに有用な方法の一つに2スケール相互作用近似(TSDIA)<sup>4)</sup>がある。この統計理論によってパデ近似型の非線形渦粘性モデルが提案されているが<sup>4)</sup>、必ずしも実現性は満たしていない。したがってこの理論で用いた仮定のいくつかに実現性を破るものがあることになる。そこで本研究ではそれらの仮定を修正し実現性を満たす渦粘性モデルの導出を試みる。得られたモデルは流れ場によらず実現性を満たすはずである。そのモデルを一様剪断流、チャンネル乱流、平面衝突噴流に適用し、特にレイノルズ応力の非等方性や噴流が壁にぶつかる所での乱流エネルギーの過大評価について考察する。

## 2. 統計理論の改良と渦粘性モデルの導出

TSDIA<sup>4)</sup>では速度揺らぎを空間についてフーリエ変換し微小なパラメータ  $\delta$  を用いて展開する。

$$u_i(\mathbf{k}, t) = u_{0i}(\mathbf{k}, t) + \delta u_{1i}(\mathbf{k}, t) + \delta^2 u_{2i}(\mathbf{k}, t) + \dots \quad (1)$$

するとレイノルズ応力は次のように表される。

$$\begin{aligned} \langle u_i u_j \rangle = & \int d\mathbf{k} \left( \langle u_{0i}(\mathbf{k}, t) u_{0j}(-\mathbf{k}, t) \rangle + \delta \langle u_{1i}(\mathbf{k}, t) u_{0j}(-\mathbf{k}, t) \rangle \right. \\ & + \delta \langle u_{0i}(\mathbf{k}, t) u_{1j}(-\mathbf{k}, t) \rangle + \delta^2 \langle u_{2i}(\mathbf{k}, t) u_{0j}(-\mathbf{k}, t) \rangle \\ & + \delta^2 \langle u_{1i}(\mathbf{k}, t) u_{1j}(-\mathbf{k}, t) \rangle + \delta^2 \langle u_{0i}(\mathbf{k}, t) u_{2j}(-\mathbf{k}, t) \rangle + \dots \Big) / \delta(0) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $\delta(0)$  はデルタ関数  $\delta(\mathbf{k})$  (ただし  $\mathbf{k} = 0$ ) である。素直に  $\delta^2$  で展開を打ち切ると実現性を破る原因となる。そこで本研究では(2)の  $\delta^2$  の3項のうち  $u_{1i} u_{1j}$  の項だけを残し

$$\langle u_i u_j \rangle = \int d\mathbf{k} \left( \langle u_{0i}(\mathbf{k}, t) + \delta u_{1i}(\mathbf{k}, t) \rangle \langle u_{0j}(-\mathbf{k}, t) + \delta u_{1j}(-\mathbf{k}, t) \rangle \right) / \delta(0) \quad (3)$$

と改良する。

さらに理論計算を進め、得られたレイノルズ応力の近似式を  $R_{ij}$  とする。レイノルズ応力の縮約が  $2K$  になることを満たすため今までのTSDIAでは

$$\langle u_i u_j \rangle = \frac{2}{3} K \delta_{ij} + R_{ij} - \frac{1}{3} R_{kk} \delta_{ij} \quad (4)$$

の形にした後、近似式  $R_{ij}$  を代入した。しかしこの形も実現性を破る一因となる。そこで本研究では(4)の代わりに

$$\langle u_i u_j \rangle = K \frac{R_{ij}}{R_{kk}/2} \quad (5)$$

の形を用いる。レイノルズ応力の縮約が  $2K$  であることと同時に実現性を満たすことができる。

最終的にレイノルズ応力のモデルは次のように書ける。

\*東京大学生産技術研究所 情報・システム大部門

研 究 速 報

$$\begin{aligned} \langle u_i u_j \rangle &= \frac{2}{3} K \delta_{ij} - 2\nu_i S_{ij} + N_1 \left( S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S^2 \delta_{ij} \right) \\ &+ N_2 (S_{ik} W_{kj} + S_{jk} W_{ki}) + N_3 \left( W_{ik} W_{kj} + \frac{1}{3} W^2 \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots (6)$$

ただし

$$\nu_i = C_{v1} f \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad N_1 = C_{v2} f \frac{K^3}{\varepsilon^2} \quad \dots\dots (7)$$

$$N_2 = C_{v3} f \frac{K^3}{\varepsilon^2}, \quad N_3 = C_{v4} f \frac{K^3}{\varepsilon^2} \quad \dots\dots (8)$$

$$f = \left[ 1 + C_{v5} \frac{K^2}{\varepsilon^2} S^2 + C_{v6} \frac{K^2}{\varepsilon^2} W^2 \right]^{-1} \quad \dots\dots (9)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots (10)$$

$$S^2 = S_{ij} S_{ij}, \quad W^2 = W_{ij} W_{ij} = -W_{ij} W_{ji} \quad \dots\dots (11)$$

本モデルはすでに提案されている西島<sup>5)</sup> や岡本<sup>6)</sup> の非線形モデルの2次までの項によく似ている。しかし本モデルは1次と2次の項に共通の抑制関数  $f$  が用いられているのが特徴で、それにより平方完成で簡単に非負性を示すことができる。また、実現性を満たすためのモデル定数の範囲は

$$C_{v5} \geq \max \left( \frac{1}{2} C_{v2}, \frac{9}{4} C_{v1}^2 - C_{v2} \right) \quad \dots\dots (12)$$

$$C_{v6} \geq \max \left( -\frac{1}{2} C_{v4}, \frac{1}{4} C_{v4} + \frac{9C_{v3}^2}{4C_{v2} + 16C_{v5}} \right) \quad \dots\dots (13)$$

となる。すなわち上の条件を満たすほど  $C_{v5}$ ,  $C_{v6}$  が大きく抑制関数  $f$  が小さくなればよい。

3. 一様剪断乱流とチャンネル乱流への適用

前章で導いたモデルを用いて一様剪断乱流とチャンネル乱流の計算を行う。主流の方向を  $x$ 、勾配の方向を  $y$  とすると平均流は  $\mathbf{U} = (U(y), 0, 0)$  と書ける。平均速度、乱流エネルギーとその散逸率の発展方程式は標準  $K-\varepsilon$  モデルを用いる。レイノルズ応力は

$$\langle u_x'^2 \rangle = \frac{2}{3} K + \left[ \frac{1}{12} (C_{v2} - C_{v4}) - \frac{1}{2} C_{v3} \right] f \frac{K^3}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad \dots (14)$$

$$\langle u_y'^2 \rangle = \frac{2}{3} K + \left[ \frac{1}{12} (C_{v2} - C_{v4}) + \frac{1}{2} C_{v3} \right] f \frac{K^3}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad \dots (15)$$

$$\langle u_z'^2 \rangle = \frac{2}{3} K - \frac{1}{6} (C_{v2} - C_{v4}) f \frac{K^3}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad \dots\dots (16)$$

$$\langle u_x' u_y' \rangle = -\nu_i \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \nu_i = C_{v1} f \frac{K^2}{\varepsilon} \quad \dots\dots (17)$$

$$f = \left[ 1 + \frac{1}{2} (C_{v5} + C_{v6}) \frac{K^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1} \quad \dots\dots (18)$$

と書ける。

本計算で用いたモデル定数の値を表1に示す。チャンネル乱流のように固体壁を含む計算では壁近くで減衰関数を用いる必要がある。安倍ら<sup>11)</sup> による低レイノルズ数モデルを用いて  $C_{v1} \rightarrow C_{v1} f_v$ ,  $C_{v2} \rightarrow C_{v2} f_\varepsilon$  と減衰関数  $f_v$ ,  $f_\varepsilon$  を導入した。またレイノルズ応力の2次の非線形項に対しては  $C_{v2} \sim C_{v6}$  について  $C_{v1}$  と同様に  $f_v$  をかけた。  $f_v$  が1以下であれば引き続き実現性を満足する。

まず一様等方性乱流の計算結果を示す。図1は乱流エネルギーの時間発展である。速度勾配は  $S (= \partial U / \partial y) = 7.67$  で、直接数値計算 (DNS) の  $St = 6$  の時刻の  $K$  と  $\varepsilon$  の値を初期条件として計算を行った。その時  $SK/\varepsilon = 6.1$  である。Case 1は標準  $K-\varepsilon$  モデルの結果である。よく知られているように標準  $K-\varepsilon$  モデルは渦粘性を過大評価し、乱流エネルギーの成長率が大きすぎる<sup>5,6)</sup>。抑制関数 (18) を導入することにより過大評価を直すことができる。同様な結果が西島<sup>5)</sup>、岡本<sup>6)</sup> などにより示されている。本モデルでは  $C_{v1}$  は一意には決まらないが、  $C_{v1}$  の値に応じて  $C_{v5} + C_{v6}$  の値を調節すると乱流エネルギーの時間発展がDNSとほぼ一致するようにすることができる。表1のCase 2とCase 3はそのうちの2例である。図には示さないがCase 2もCase 3と同様の結果が得られた。

図2はCase 3のレイノルズ応力の対角成分の時間発展である。時刻  $St = 6$  の各対角成分がDNSの結果と一致するように  $C_{v2} - C_{v4}$  と  $C_{v3}$  の値を求めた。  $St = 10$  を越えると

表1 モデル定数 (一様剪断乱流とチャンネル流)

	$C_{v1}$	$C_{v5}+C_{v6}$	$C_{v2}-C_{v4}$	$C_{v3}$
Case 1	0.09	0	0	0
Case 2	0.09	0.0397	0.0277	-0.0411
Case 3	0.15	0.101	0.0460	-0.0685

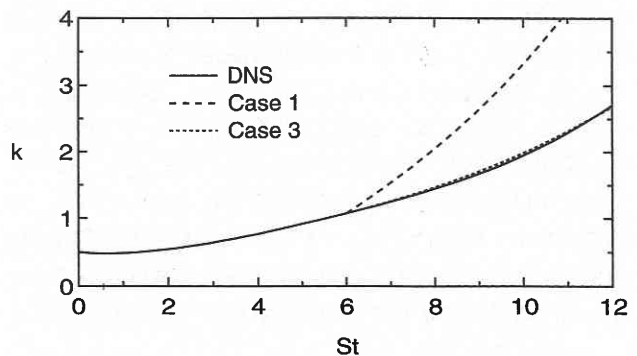


図1 一様剪断乱流の乱流エネルギーの時間発展

ややずれが見られるがそれまではよく合っている。なお Case 1 の標準 K-ε モデルでは各成分とも等しくなり非等方性は表せない。

次にチャンネル乱流の計算結果を示す。図3はレイノルズ数  $Re_{\tau} = 395$  のチャンネル乱流の平均速度分布である。Case 2 は対数領域での勾配が DNS<sup>[12]</sup> の値に比べてやや大きく、Case 3 の方が DNS に近い。一様剪断乱流では Case 2 と Case 3 は同様の結果が得られたが、チャンネル乱流の結果を考慮すると Case 3 の方が望ましいといえる。

図4にレイノルズ応力の対角成分を示す。対角成分の大

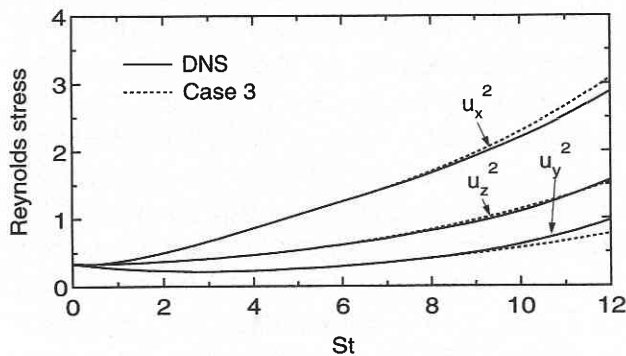


図2 一様剪断乱流のレイノルズ応力の時間発展

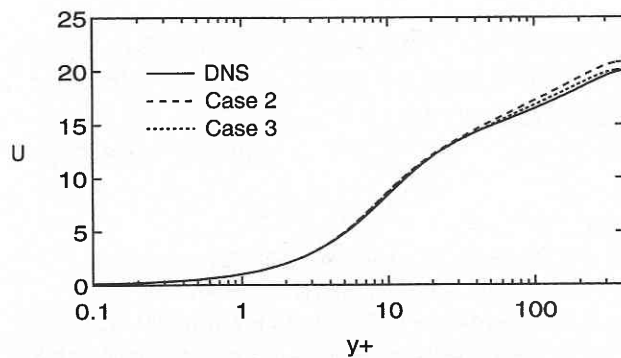


図3 チャンネル流の平均速度分布

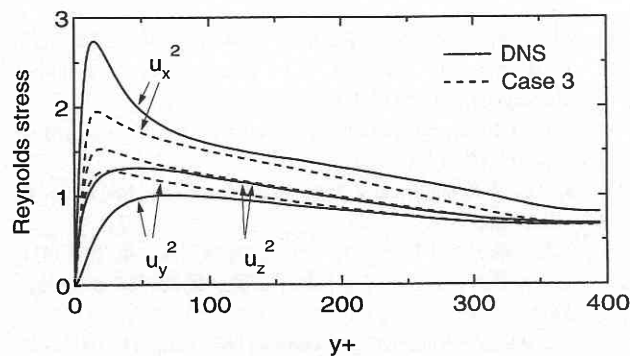


図4 チャンネル流のレイノルズ応力分布

小関係は合っているが、壁近くでの強い非等方性が再現されていない。しかし  $y^+ = 100 - 200$  の領域では DNS の結果とそれほど離れていない。チャンネル乱流の強い非等方性は剪断の効果だけでなく壁の効果大きい。壁の効果を表す減衰関数  $f_v$ ,  $f_e$  は主に  $\langle u_x' u_y' \rangle$  を考慮して得られたものである。今後は対角成分の非等方性を考慮した減衰関数の改良が必要であると考えられる。

#### 4. 平面衝突噴流への適用

次に平面衝突噴流への適用の結果を示す。坪倉<sup>[13]</sup>が実験と LES (large eddy simulation) を行ったものを参考にした。図5はその模式図である。一般に K-ε モデルは流れが壁に衝突するところで乱流エネルギーが過大評価されることが知られている。木村ら<sup>[10]</sup>は非線形 K-ε モデルを用いて角柱周辺の流れを計算し、分母に S と W を含む項を導入することで角柱前面の流れの衝突部でエネルギーの過剰生成を抑えられることを示した。本モデルでは平面衝突噴流を取り扱い、過剰生成を修正できるか着目する。平面衝突噴流の平均流は2次元であるので  $\mathbf{U} = (U(x,y), V(x,y), 0)$  と表せる。例えばレイノルズ応力の一成分  $\langle u_y'^2 \rangle$  は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \langle u_y'^2 \rangle &= \frac{2}{3}K - 2C_{v1} f \frac{K^2}{\epsilon} V_y \\ &+ f \frac{K^3}{\epsilon^2} \left\{ C_{v2} \left[ -\frac{1}{3}U_x^2 + \frac{2}{3}V_y^2 + \frac{1}{12}(U_y + V_x)^2 \right] \dots \dots \dots (19) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}C_{v3}(U_y^2 - V_x^2) - \frac{1}{12}C_{v4}(U_y - V_x)^2 \right\} \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} f &= \left( 1 + \frac{K^2}{\epsilon^2} \left\{ C_{v5} \left[ U_x^2 + V_y^2 + \frac{1}{2}(U_y + V_x)^2 \right] \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2}C_{v6}(U_y - V_x)^2 \right\} \right)^{-1} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

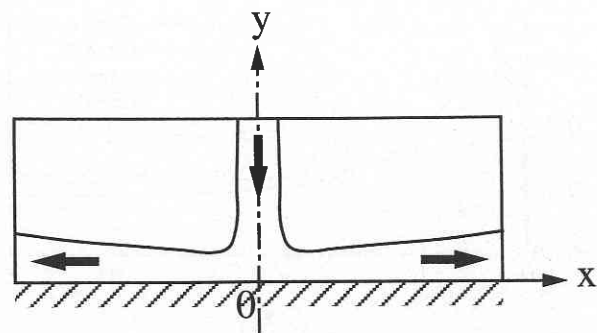


図5 平面衝突噴流

研 究 速 報

ここで添字  $x$  と  $y$  は微分を表す. 用いたモデル定数を表 2 に示す. Case 4 は標準  $K-\epsilon$  モデルに対応し, Case 5 は前章の Case 3 のモデル定数を元に設定した. また Case 6 は 2 次の非線形項をなくし抑制関数  $f$  だけを用いた.

平均量は  $y$  軸について左右対称なので図 5 の右半分だけを計算する. 計算領域は  $x$  方向に 53,  $y$  方向は 20 で, 流入口の大きさ (中心軸から右半分) は 1 である. 粘性率は  $\nu = 0.01$ . 境界条件は  $x$  軸は no-slip 条件,  $y$  軸 (中心軸) は free-slip 条件, 流入口以外の上部は free-slip 条件, 右側は流出条件 (勾配 0) を課した. 流入口の平均速度は  $V_0 = -30$ , 乱流エネルギーは  $K = 30$ , 散逸率は  $\epsilon = 180$  とした.

壁面近くでの乱流エネルギーの分布を調べるために, 原点から  $y$  軸に沿っての乱流エネルギーの分布を図 6 に示す. 標準  $K-\epsilon$  モデルの Case 4 では過大評価していることがわかる. また Case 5 でも Case 4 と同じように乱流エネルギーが大きく, 抑制関数  $f$  が過大評価を抑える働きをしていない. (9) あるいは (20) の  $f$  の式では定数  $C_{v5}$  は速度歪みの項に,  $C_{v6}$  は渦度の項に含まれている. チャネル乱流のような単純剪断流では  $S = W$  であるが, 衝突噴流では  $\partial V/\partial y$  と  $\partial U/\partial x$  が大きく  $S > W$  である. そこで本モデルがチャネル乱流では標準  $K-\epsilon$  モデルと同様な平均速度と乱流エネルギー分布を示し, 衝突噴流では乱流エネルギーの過大評価を抑えるためには, 二つの定数のうち  $C_{v5}$  を大きくして抑制関数  $f$  に対する速度歪みの影響を強くしてやればよい. Case 6 はそのうちもっとも極端なもので  $C_{v6} = 0$  とした. これにより壁近くで乱流エネルギーのピークが低くなることが図 6 からわかる. ただし  $C_{v6} = 0$  とすると定数に対する条件 (13) より  $C_{v3} = C_{v4} = 0$  としなくては

ならず, 前章の乱流エネルギーの非等方性を表すことができない. 非等方性と壁近くでの乱流エネルギーを同時に表せるモデル定数の値を見つけることが課題である.

5. ま と め

レイノルズ応力の実現性条件である対角成分の非負性に着目し, それが満たされる非線形渦粘性モデルの導出を試みた. 今までの TSDIA の統計理論で実現性を破っている個所を見つけて修正することにより, 任意の流れ場で実現性を満たすモデルを導いた. このモデルを一様剪断乱流, チャネル乱流, 平面衝突噴流に適用した. まず一様剪断乱流の乱流エネルギーの時間発展と非等方性が DNS と一致するモデル定数の組をいくつか求めた. 次にその中でチャネル乱流の平均速度が DNS と近くなる定数を求めた. しかし壁近くでの乱流エネルギーの強い非等方性は再現できなかった. 平面衝突噴流では壁面にぶつかる点での乱流エネルギーの過剰生成に着目した. 抑制関数の速度歪み項の定数を大きくすることにより過剰生成を抑えることができた. 乱流エネルギーの非等方性も同時に表せるモデル定数値を見つけることや, 統計量を実験や LES と比べて総合的に本モデルを評価することが今後の課題となる.

謝 辞

平面衝突噴流の計算は東京理科大学山本誠助教授より提供していただいたプログラムを元に修正して行った. ここに記して感謝いたします.

(2000 年 10 月 19 日受理)

参 考 文 献

- 1) U. Schumann: Phys. Fluids **20** (1977) 721.
- 2) 木田, 柳瀬: 乱流力学, 朝倉書店 (1999).
- 3) T. B. Gatski and C. G. Speziale: J. Fluid Mech. **254** (1993) 59.
- 4) A. Yoshizawa: Hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulent flows: modeling and statistical theory, Kluwer (1998).
- 5) 西島: 第 11 回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (1997) 203.
- 6) 岡本, 島: 日本流体力学会年会 '98 講演論文集 (1998) 175.
- 7) T. H. Shih, J. Zhu, and J. L. Lumley: NASA Technical Memorandum 105993 (1992).
- 8) S. Fu, T. Rung, and F. Thiele: Proc. 11 th Symp. on Turbulent Shear Flows (1997) 13-1.
- 9) K. Abe, T. Kondoh, and Y. Nagano: Int. J. Heat and Fluid Flow **18** (1997) 266.
- 10) 木村, 細田: 日本流体力学会年会 '99 講演論文集 (1999) 417.
- 11) 安倍, 長野, 近藤: 日本機械学会論文集 **58-554 B** (1992) 3003.
- 12) R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour: Phys. Fluids **11** (1999) 943.
- 13) 坪倉: 東京大学博士論文 (1996).

表 2 モデル定数 (平面衝突噴流)

	$C_{v1}$	$C_{v5}$	$C_{v6}$	$C_{v2}$	$C_{v4}$	$C_{v3}$
Case 4	0.09	0	0	0	0	0
Case 5	0.15	0.045	0.056	0.046	0	-0.0685
Case 6	0.15	0.101	0	0	0	0

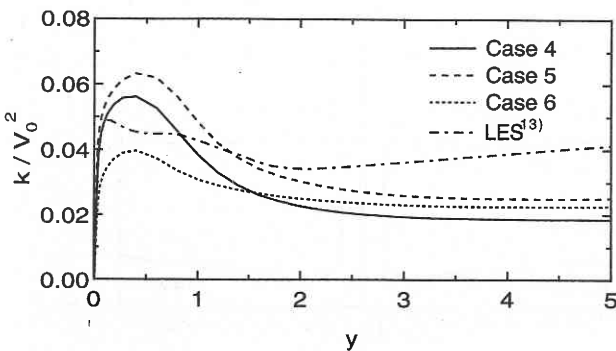


図 6 平面衝突噴流の  $y$  軸上の乱流エネルギー分布