

Dynamic SGS モデルによる MHD 乱流の解析

LES of MHD Channel Flow Using Dynamic SGS Model

大島 まり*・谷口 伸行**

Marie OSHIMA and Nobuyuki TANIGUCHI

1. 緒 言

溶融鉄の流動制御やシリコン単結晶の生成過程においては、流体が高温であるため、磁場作用下での導電性流体の実験による測定は困難である¹⁾。このような問題を克服する手段として数値解析は有利であり、多大な貢献をもたらしている。しかし、これらの研究は層流に対するものが主であり、電磁流体乱流 (MHD 乱流) に関する研究は少なく直接計算 (DNS) によるもの²⁾、Smagorinsky モデルを用いた LES による計算³⁾ などが行なわれている程度である。加えて、MHD 乱流では磁場印加に伴い壁面の減衰関数が増加すると予想されるため、Smagorinsky モデルによる LES では乱れの減衰効果を的確に捉えることは難しく、信頼性に欠けると考えられる。一方、Dynamic SGS モデルはモデル係数を流れ場に応じて動的に計算することができるため、磁場の影響によって変化する流れ場、特に壁面近傍の流れを正確に捉えることができる。

そこで、本報では Dynamic SGS モデルを用いて MHD 乱流の数値解析を行うことにより、磁場印加時の Smagorinsky モデルに対する減衰関数の決定において、有効な知見を得ることを目的としている。また、最近の流れ制御ではチャンネルスパン方向を導電状態とした制御法も考案されていることから、この電氣的境界条件を考慮した場合の解析を行う。これらの解析を通して、MHD チャンネル乱流の特徴である速度分布の平坦化効果と乱流強度の減衰効果等を DNS、Smagorinsky モデルと比較し、MHD 乱流における本手法の有効性を検証する。

2. 基礎方程式

非圧縮性電磁流体の支配方程式は流体の支配方程式である連続の式と Navier-Stokes の方程式、電磁場の支配方程式

式である Maxwell の方程式と Ohm の法則で構成される。ここで、以下の条件を仮定する⁴⁾。

- 1) 変位電流を無視する。(良導体の仮定)
- 2) 電荷分布をゼロとする。(電氣的中性の仮定)
- 3) 電磁場変動が微小であり、物質定数は一定とする。

また、本研究で対象となる溶融鉄の磁気レイノルズ数 ($R_{em} = \sigma \mu_m u_\tau \delta$, σ : 電氣伝導度, μ_m : 透磁率, u_τ : 摩擦速度, δ : チャンネル半幅) は $R_{em} \approx 10^{-3}$ (< 1) であることから、電場 e は静電スカラーポテンシャル ϕ を用いて表すことができる。すなわち、

$$e = -\nabla\phi \quad \dots\dots\dots (1)$$

したがって、MHD 流体の LES のための基礎方程式は以下のようにまとめられる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = & -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_{er}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ & + \delta_{i1} + \frac{Ha^2}{Re_{er}} \left\{ (-\nabla \bar{\phi} + \bar{u} \times \bar{B}) \times \bar{B} \right\}_i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\nabla^2 \bar{\phi} = \nabla \cdot (\bar{u} \times \bar{B}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\bar{\phi} = \phi / Re_{er}$ であり、 $\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$ の SGS 応力である。また、 u_i ($i = x, y, z$)、 P は速度、圧力、 Re ($= u_\tau \delta / \nu$, ν : 動粘性係数)、 Ha ($= \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} B_0 \delta$, ρ : 密度、 B_0 : 印加磁場) はレイノルズ数とハルトマン数を表す。

3. 解析手法

本研究では GS スケールの基礎方程式 (2) ~ (4) にテストフィルタを施して得られるサブテストスケール応力 T_{ij} と SGS 応力 τ_{ij} に対する SGS モデルとして Smagorinsky モデルを用いる。さらに Lilly による最小自乗近似を適用することによってモデル係数 C_s を動的に算出するダイナミッ

*東京大学生産技術研究所 人間・社会大部門

**東京大学情報基盤センター

研 究 速 報

ク SGS モデルを採用する⁵⁾。なお、差分法におけるテストフィルタの定式化には谷口的手法⁶⁾を用いる。

空間方向の離散化は 2 次の中心差分を用い、時間積分には 2 次の Adams-Bashforth 法を用いている。速度・圧力の解法は SMAC 法に準ずる。

4. 解 析 条 件

解析対象は Fig. 1 に示すチャンネル乱流を用い、壁垂直方向に磁場、すなわち $B = (0, B_0, 0)$ を印加する。また、スパン方向の電氣的境界条件を導電状態と絶縁状態とした 2 通りの計算を行っている。主な計算パラメータを Table 1 に示す。速度場についての境界条件は主流方向とスパン方向はいずれも周期境界条件、壁方向には、流体は no-slip 条件を課し、電磁場については絶縁壁とする。初期条件は十分発達した乱流場を用い、一定磁場をステップ関数的に印加している。

5. 解 析 結 果

Fig. 2 に磁場なし、および $Ha = 6$ の時、絶縁あるいは導電境界条件の時の、 C_s の分布をまとめている。磁場の印加により、モデル係数は壁面近傍で分布が低下し、導電境界条件を課した場合には、さらに大きく減衰する。また、Fig. 3 にみられるように、 Ha が増加すると壁面近傍での分布はさらに減少する。

Fig. 4 に絶縁境界条件のもと、 $Re_\tau = 150$ において磁場なし、および $Ha = 4$ を印加した場合の主流方向の平均速度分布の結果を DNS の結果と比較している。磁場を印加することにより、緩和層領域で流速が増大し、速度分布が平

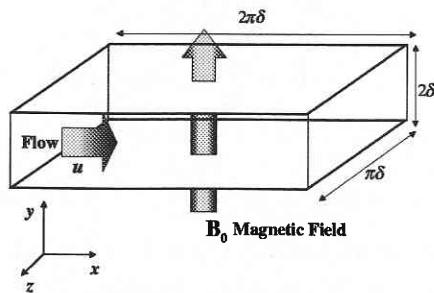


Fig. 1 Analysis model

Table 1 Analysis conditions

CASE	Re_τ	Ha	Grid	B.C.
A-1	150	4.0	32 x 64 x 32	Insulated
B-1	180	6.0	32 x 64 x 32	Insulated
B-2	180	6.0	32 x 64 x 32	Conductive
C-1	650	6.0	32 x 64 x 32	Insulated
C-2	650	6.0	32 x 64 x 32	Conductive
C-3	650	12.0	32 x 64 x 32	Insulated
C-4	650	12.0	32 x 64 x 32	Conductive
D-1	650 $R_m=29000$	26.25	64 x 64 x 64	Insulated

坦化するハルトマン効果が再現されている。本解析の結果は DNS の結果と比較して、定性的に一致しているが、定量的には対数領域で過大評価されている。このことは、本報の Dynamic SGS モデルによるモデル係数が過大評価される傾向にあるためである。また、計算格子の解像度も影響していると考えられる。

強磁場下 $Ha = 26.25$ における速度分布を Fig. 5 にまとめてある。チャンネル中央部で速度勾配がほぼゼロになり、ハルトマン効果が最も顕著である。また、Shimomura³⁾ の結果とも良好な一致を示している。

Fig. 6 に絶縁境界条件、Fig. 7 に導電境界条件の時の $Re_\tau = 650$ での主流方向平均流速分布を示す。図からわかるように、導電境界条件の場合には主流方向平均流速

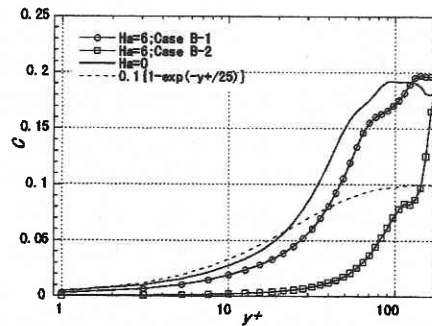


Fig. 2 Effect of boundary condition on profile of C_s coefficient

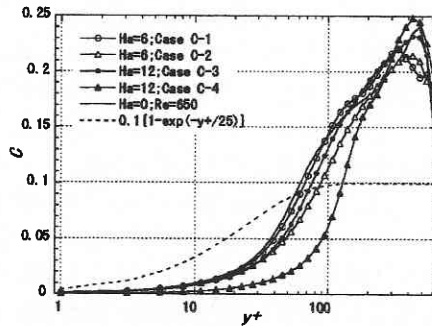


Fig. 3 Effect of magnetic field on profile of C_s coefficient

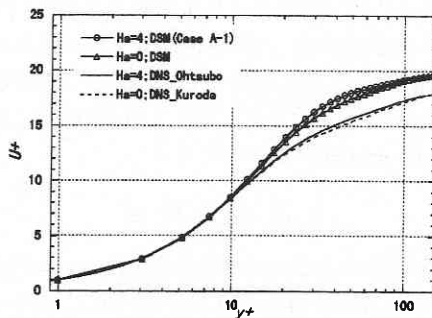


Fig. 4 Profile of mean velocity in the streamwise direction at $Re_\tau=150$

が大きく減少している。絶縁境界条件の場合にはチャンネル内電流が正味ゼロとなるため、チャンネル内部の導電性流体が閉回路を形成し、主流方向を軸とする2方向の渦電流が平均的には同じ強度で発生する。このため、バルク平均流速より速い部分は+z方向の電流により減速され、逆に-z方向の電流により壁面近く流速の遅い部分は加速される。一方、導電境界条件の場合には+z方向に向かって電流が自由に流れるため、主流方向の平均流速により誘起されるローレンツ力を速度場全体が受け、平均流速全体が低下すると考えられる。

Fig. 8に本モデルで得られた乱流強度と大坪¹⁾のDNSの結果と比較する。いずれも磁場の影響による乱流強度の減

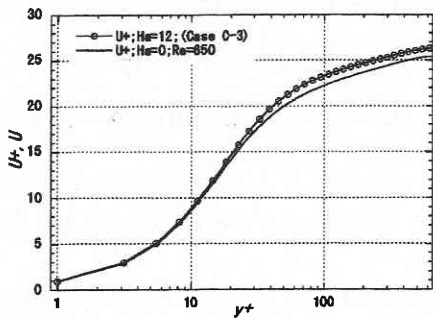


Fig. 5 Profile of mean velocity in the streamwise direction at $Re_{cr}=150$

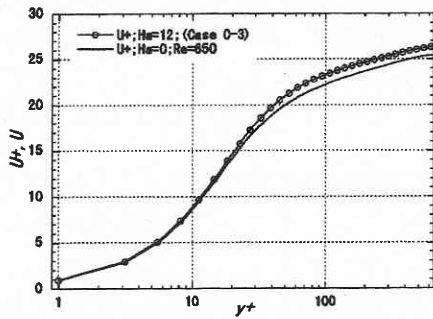


Fig. 6 Profile of mean velocity in the streamwise direction (insulated boundary condition)

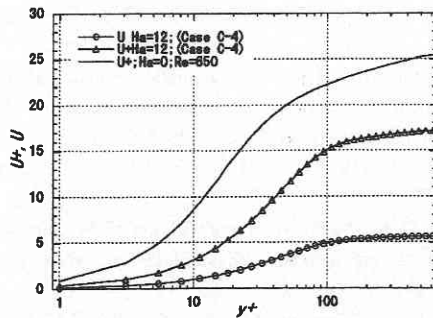


Fig. 7 Profile of mean velocity in the streamwise direction (conductive boundary condition)

衰が見られる。しかし、 $Ha = 0$ の時にDynamic SGSモデルがDNSにたいして、主流方向では過大評価し、他の2方向では過小評価しているため、定量的に比較を行うことができない。そこで、これらの違いに対して、減衰率を以下のように求めて、比較を行う。

$$\eta_i = \frac{\left[\frac{1}{2\delta} f \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_i \rangle dy \right]_{Ha=4}}{\left[\frac{1}{2\delta} f \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_i \rangle dy \right]_{Ha=0}} \dots \dots \dots (5)$$

本解析 (DSM) と DNS による減衰率を Table 2 にまとめる。本解析の結果は DNS の結果と良好な一致を示しており、主方向の減衰率 η_x は少なく、他の2成分はほぼ同程度の減衰をしている。これより、減衰は非等方的であるといえる。

$Re_{cr} = 650$, $Ha = 12$ の場合の絶縁境界条件および絶縁境界条件による乱流強度分布の変化を Fig. 9 と Fig. 10 に示す。導電境界条件の場合には、絶縁境界条件と比較して大きく減衰しており、層流化が促進されていることがわかる。したがって、導電境界条件は、主流方向の平均速度分布を

Table 2 Decay rate of turbulent intensity by magnetic field

	η_x	η_y	η_z
DSM	0.928	0.885	0.872
DNS	0.930	0.850	0.854

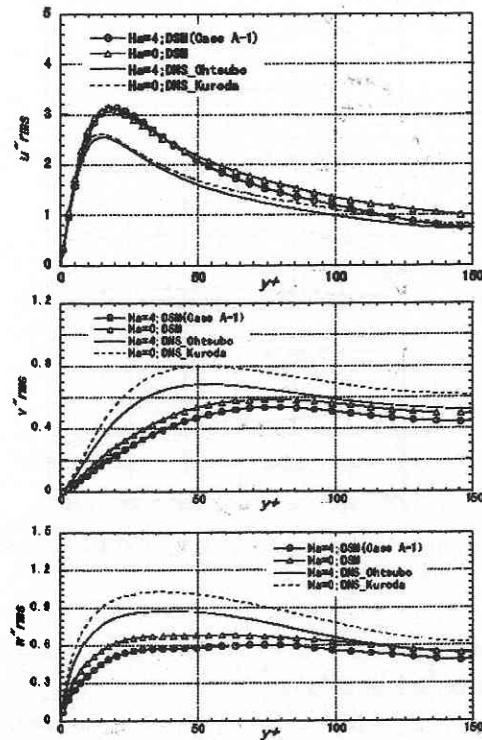


Fig. 8 Profile of turbulent intensity at $Re_{cr}=150$, $Ha=4.0$ (insulated Boundary)

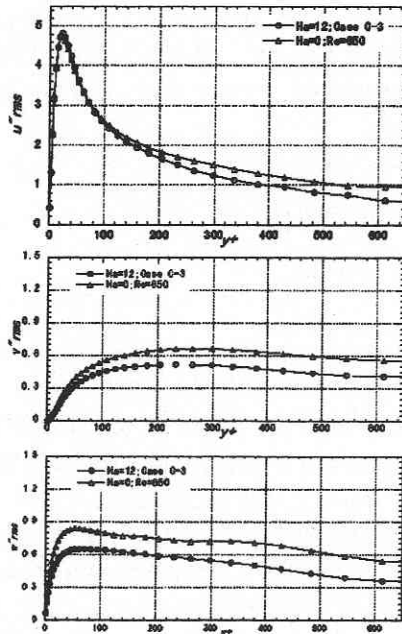


Fig. 9 Profile of turbulent intensity at $R_{cr}=650$, $Ha=12$ (insulated boundary)

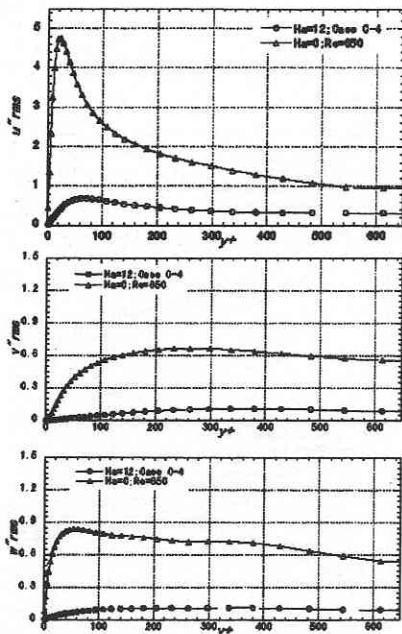


Fig. 10 Profile of turbulent intensity at $R_{cr}=650$, $Ha=12$ (conductive boundary)

大きく減少させるブレーキ効果だけでなく、乱れ分布にも強い抑制効果を与えている。

Fig. 11 に $R_{cr} = 650$ において、磁場と境界条件の違いによるレイノルズ応力の変化を示す。磁場を印加することにより電磁力から発生するせん断応力が生じ、その分レイノ

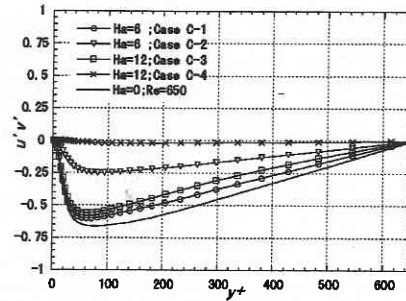


Fig. 11 Profile of Reynolds Stress at $R_{cr}=650$

ルズ応力が減少する。また、導電境界条件の場合には、乱流強度と同様、減衰量が増大する。

6. 結 言

Dynamic SGS モデルによる MHD 乱流の LES を行い、以下の結論を得た。

- 1) 弱磁場下での解析において、速度分布が平坦化するハルトマン効果が見られ、また DNS の結果と定性的に一致した。
- 2) $Ha = 4.0$ における乱流強度の非等方的減衰効果が確認され、DNS との減衰率と比較したところ、定量的にも良好な一致を示した。
- 3) 導電境界条件は絶縁境界条件と比較して、主流方向の平均速度分布および乱流強度分布を強く抑制する効果があることを示した。
- 4) Dynamic SGS モデルによる MHD 乱流の数値解析は様々な異なるレイノルズ数やハルトマン数に対して適切な乱流の速度場の予測が行えることを示した。

(2000 年 11 月 24 日受理)

参 考 文 献

- 2) 大島, 「磁界印加チヨクラスキー法における単結晶融液の有限要素法による三次元電磁-熱-流体解析」, 機論 B, Vol. 59, pp. 1818-1853 (1993).
- 3) 大坪, 「液体金属乱流中のスカラー輸送に関する直接数値シミュレーション」, 東京大学修士論文 (1992).
- 4) Shimomura, Y., "Large eddy simulation of magnetohydrodynamic turbulent channel flows under a uniform magnetic field," Physics of Fluids, A, vol.3, no.12, pp. 3098-3106 (1991).
- 5) 棚橋, 「電磁熱流体の数値解析」, 森北出版株式会社 (1995).
- 6) Lilly, D. K., "A Proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method", Phys. Fluids, A, Vol.4, pp. 633-635 (1992).
- 7) 谷口伸行, "Dynamic SGS モデルの差分法による定式化," 生産研究, 47-2, pp. 42-45 (1996).