研　究　速　報

回転球殻内乱流ダイナモ

―磁場エネルギーが運動エネルギーに卓越する機構―

Turbulent Magnetohydrodynamic Dynamo in a Rotating Spherical Shell for Storing Magnetic Energy Much Higher than Kinetic Energy

加　藤　浩　文*・横　井　喜　充**・吉　澤　　徴**

Hirofumi KATO, Nobumitsu YOKOI and Akira YOSHIZAWA

1. は じ め に

地球や木星，太陽等の天体では，電気伝導性流体の運動がつくり出すダイナモ作用によって，固有磁場が生成維持されている．これらの星では，流体運動は球殻という幾何学的な性質をもつ対流層で起こり，星の自転によるコリオリ力の影響を強く受ける．また，対流層の空間スケールの大きさのため，流体運動は乱流状態にあると考えられる．

ここで，地球のダイナモ作用に注目しよう．地球は中心より，内核，外核，マントル，地殻という領域で構成されている．このうち，双極子型の主磁場を生成維持するダイナモ作用が起こっているのは，外核である．外核の主成分は鉄であり，高温のために溶融状態にある．そして，温度あるいは密度の差から生じる浮力によって，溶融状の鉄が対流していると考えられている．外核内の流体運動の様相を観測から直接知ることはできないが，地球磁場の観測等から，流体運動の代表的な速さは，10^{-4}m/s と推定されている[1]．一方，地球磁場は，動径方向の成分をもつポロイダル磁場を地表または人工衛星から観測することができる．動径成分がないトロイダル磁場は，地表では観測することができないが，ポロイダル磁場の1～100倍程度の大きさをもつと考えられている．これらのことから，外核内には数gaussから数百gaussの大きさの磁場が存在すると推測できる．いま，外核における磁場の強さを5 gauss，流体運動の速さを10^{-4}m/sとすると，磁場エネルギーは運動エネルギーよりも約2000倍大きくなる．このように磁場エネルギーが運動エネルギーに卓越することは，地球ダイナモのもつ特徴の一つである．

地球を含めた天体ダイナモの研究には長い歴史がある[2]．研究の初期には，ある規定された層流状の流れによる磁場生成の機構が研究された．そして，乱流の効果を乱流起電力という形で磁場の誘導方程式に取り入れた，平均場ダイナモ理論あるいは乱流ダイナモ理論が広く研究されるようになった．乱流ダイナモ理論では，平均磁場と平行な電流をつくり出すα効果と乱流抵抗を表すβ効果が広く受け入れられてきた[2]．さらに，近年，平均渦度と平行な電流を生成するクロスヘリシティ効果が提案され，乱流ダイナモの研究において新たな展開がもたらされた[3,4]．α効果は速度と渦度との相関であるヘリシティに密接する発電効果であり，クロスヘリシティ効果は速度と磁場との相関であるクロスヘリシティに結びついた発電効果である．これまでにクロスヘリシティダイナモによって，降着円盤における双極ジェットの発生機構[5]や銀河磁場の生成機構[6,7]，核融合プラズマにおけるトカマクのHモードや負磁気シアモードで出現するポロイダル回転流の発生機構[8,9,10]等が説明されている．

本研究では，α効果，β効果，クロスヘリシティ効果を組み合わせた乱流ダイナモモデルを地球ダイナモに適用し，地球ダイナモがもつ以下のような特徴を説明する．

(Ⅰ) 生成された磁場エネルギーは，浮力によって駆動されている流体の運動エネルギーに卓越する．

(Ⅱ) 磁場から生じるローレンツ力は浮力に比べて弱い．

(Ⅲ) トロイダル磁場はポロイダル磁場より10倍程度大きくなる．

2. 乱流ダイナモ方程式

2.1 基礎方程式

ここでは，Boussinesq近似を用いた，次のようなMHD方程式を扱う．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p+\mathbf{f}_C+\mathbf{f}_B+\mathbf{j}\times\mathbf{b}+\nu\Delta\mathbf{u}, \quad \cdots\cdots(1)$$

*東北生活文化大学　家政学部

**東京大学生産技術研究所　第1部

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \lambda \Delta \mathbf{b}, \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad \cdots\cdots (4)$$

ここで，$\mathbf{u}, p, \mathbf{b}, \mathbf{j}, \nu, \lambda$は，それぞれ速度，圧力，磁場，電流密度，動粘性率，磁気拡散率である．なお，磁場はAlfvén速度を単位として定義されたものを，圧力はもともとの圧力を密度で割ったものを用いている．また，(1)の$\mathbf{f}_C$はコリオリ力の項を，$\mathbf{f}_B$は浮力の項を表している．

2.2　ダイナモモデリング

$\mathbf{u}, p, \mathbf{b}, \mathbf{j}$等の物理量$f$に集合平均の操作をほどこし，平均部分$F$と揺動部分$f'$に分解する．すなわち，

$$f = F + f', \ F = \langle f \rangle. \quad \cdots\cdots (5)$$

(1)と(2)に平均操作を行うと，次のような平均速度場，平均磁場に関する式が得られる．

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla \left(P + \frac{\langle \mathbf{b}'^2 \rangle}{2} \right) + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_B + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot (-\mathbf{R}) + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_M) + \lambda \Delta \mathbf{B}. \quad \cdots\cdots (7)$$

(6)の$\mathbf{R}$はレイノルズ応力，(7)の$\mathbf{E}_M$は乱流起電力であり，次のように定義される．

$$R_{ij} = \langle u_i' u_j' - b_i' b_j' \rangle, \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\mathbf{E}_M = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle. \quad \cdots\cdots (9)$$

(6)-(9)を閉じた方程式系にするためには，R_{ij}と$\mathbf{E}_M$を平均場や乱流を特徴づける物理量で表現する必要がある．ここでは，2スケール直接相互作用近似（TSDIA）[11]の解析により，R_{ij}と$\mathbf{E}_M$を以下のように平均場と関係付ける[3,4]．

$$R_{ij} = \frac{2}{3} K_R \delta_{ij} - \nu_T S_{ij} + \nu_M M_{ij}, \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\mathbf{E}_M = \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma (2\boldsymbol{\omega}_F + \boldsymbol{\Omega}). \quad \cdots\cdots (11)$$

ここで，$\boldsymbol{\omega}_F$は回転系の角速度である．また，K_R, S_{ij}, M_{ij}は，それぞれ乱流残存エネルギー，速度歪みテンソル，磁気歪みテンソルであり，次のように表される．

$$K_R = \left\langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{b}'^2}{2} \right\rangle, \quad \cdots\cdots (12)$$

$$S_{ij} = \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad \cdots\cdots (13)$$

$$M_{ij} = \frac{\partial B_j}{\partial x_i} + \frac{\partial B_i}{\partial x_j}. \quad \cdots\cdots (14)$$

(10)におけるν_Tは乱流粘性率（渦粘性率）である．また，(11)のαはα効果に関係する量，βは乱流（異常）抵抗率，γはクロスヘリシティ効果に関係する量である．

次に，α, β, γのモデル化，すなわち，ダイナモモデリングを行う．

TSDIAによって導出したR_{ij}と$\mathbf{E}_M$に対する本来の表式では，α, β, γは，それぞれ，乱流残存ヘリシティH，乱流エネルギーK，乱流クロスヘリシティWのフーリエスペクトル成分に依存している．ここで，H, K, Wは以下のように定義される．

$$H = -\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle + \langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle, \quad \cdots\cdots (15)$$

$$K = \left\langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{b}'^2}{2} \right\rangle, \quad \cdots\cdots (16)$$

$$W = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle. \quad \cdots\cdots (17)$$

H, K, Wのスペクトル成分に基づいた表式は，大変込み入ったものになり，地球ダイナモのような，平均場の空間変化に由来する非一様性が中心的な役割を果たす自然現象に，そのまま適用するのは困難である．それゆえ，ここではスペクトル，すなわち，空間の2点以上の情報は扱わず，α, β, γを空間一点，一時刻の実空間の物理量のみを用いて表現する．このようなモデル化を行うために，Kの散逸率であるεを導入する．εは次のように定義される．

$$\varepsilon = \nu \left\langle \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle + \lambda \left\langle \left(\frac{\partial b_j'}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle. \quad \cdots\cdots (18)$$

(15)-(18)を用いて，次元解析からα, β, γを次のようにモデル化する[3-5]．

$$\alpha = C_\alpha \frac{K}{\varepsilon} H, \quad \cdots\cdots (19)$$

$$\beta = \frac{5}{7} \nu_T = C_\beta \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad \cdots\cdots (20)$$

$$\gamma = \frac{5}{7} \nu_M = C_\gamma \frac{K}{\varepsilon} W. \quad \cdots\cdots (21)$$

(19)-(21)に現れるモデル定数は，次のように評価され

ている[12,13]．

$$C_\alpha \cong 0.02, C_\beta \cong 0.05, C_\gamma \cong 0.04. \tag{22}$$

(10)と(11)を(6)と(7)に代入すると，ダイナモモデルを含む平均場の方程式は以下のようになる．

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla\left(P + \frac{\langle \mathbf{b}'^2 \rangle}{2} + \frac{2}{3}K_R\right) + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_B + \mathbf{J}\times\mathbf{B} + \nu_T\Delta\mathbf{U} - \nu_M\Delta\mathbf{B}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times\left(\mathbf{U}\times\mathbf{B} + \alpha\mathbf{B} - \beta\mathbf{J} + \gamma\mathbf{\Omega}_T\right). \tag{24}$$

ここで，$\mathbf{\Omega}_T$ は全渦度を表し，以下のように定義される．

$$\mathbf{\Omega}_T \equiv \mathbf{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_I \tag{25}$$

なお，(23)と(24)において，分子粘性率 ν と分子抵抗率 λ は，乱流粘性率 ν_T と乱流抵抗率 β に比べてずっと小さいと考えられるので，省略してある．また，ν_T と ν_M の空間変化の効果は，簡単のためにここでは取り入れていない．

(23)において特に興味深い点は，右辺に $\nu_M\Delta\mathbf{B}$ が含まれることである．$\nu_T\Delta\mathbf{U}$ が常に平均流を減衰させるのに対し，$\nu_M\Delta\mathbf{B}$ は平均流を駆動する可能性を有する．$\nu_M\Delta\mathbf{B}$ の項は，これまでの乱流ダイナモ理論では注目されてこなかったが，平均流に対して大きな効果をもち得る．$\nu_M\Delta\mathbf{B}$ のもつ役割については，3.2で述べる．

本研究のダイナモモデルを閉じるためには，H，K，W，ε の輸送方程式をモデル化する必要があるが，その詳細については参考文献を参照されたい[3,4]．

3. 回転球殻における乱流ダイナモ

3.1 対流カラムとヘリシティ生成

地球外核の半径は，内核の半径の約3倍あり，太陽の対流層に比べると，地球外核は厚い球殻であるといえる．回転の影響を強く受けた球殻内の熱対流では，回転軸と平行な軸をもつカラム状の対流運動が出現することが理論的に示されている[14]．また，磁場エネルギーが運動エネルギーよりも大きな状態の回転球殻内MHD熱対流においても，カラム状の対流運動が存在することが，最近の計算機シミュレーションによって示されている[15,16]．地球外核のような厚い球殻では，対流カラムは南北方向に長く伸び，東西方向の渦運動と南北方向の流れによって，流体運動は大きなヘリシティをもつと考えられる．これらのことに基づき，本研究ではヘリシティが支配的な役割を果たすようなダイナモ過程を考える．

3.2 定常状態

ここではまず，磁場の定常状態について調べる．磁場が定常であるための十分条件は，磁場の誘導方程式(24)より，

$$\mathbf{U}\times\mathbf{B} + \alpha\mathbf{B} - \beta\mathbf{J} + \gamma\mathbf{\Omega}_T = 0. \tag{26}$$

3.1で述べたように，厚い球殻中のダイナモ作用では，ヘリシティの効果が重要であると考え，(26)の $\alpha\mathbf{B}$ が $\beta\mathbf{J}$ とほぼ釣り合うとする．すなわち，

$$\mathbf{J} \cong \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{B}. \tag{27}$$

(27)は，乱流ヘリシティ効果あるいは α 効果の特徴を明示している．すなわち，平均電流は平均磁場とほぼ平行になる．このような状態では，ローレンツ力 $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ はゼロに近くなり，$\mathbf{B}$ は無力場配位（force-free field）に近づく．こうして，流体運動を駆動する浮力に比べて，ローレンツ力が弱い状態が実現する．

ここで，(26)の $\mathbf{U}\times\mathbf{B}$ の項について考える．この項は流体運動によって磁力線が引き伸ばされることを表すもので，磁場エネルギーの増加に寄与する．それゆえ，$\mathbf{U}$ と $\mathbf{B}$ が揃って，$\mathbf{U}\times\mathbf{B}$ がゼロとなれば，磁場エネルギーの成長は飽和し，速度場の定常状態をつくり出す．この観点から，流体の運動方程式(23)を調べる．

(23)の $\nu_T\Delta\mathbf{U}$ は，乱流粘性として広く知られる項で，流れの構造を壊す効果をもつ．このような効果は，レイリー数やレイノルズ数が大きい地球外核の対流運動では，強くなると考えられ，対流カラムの構造が維持されるためにはこの破壊効果を緩和するものが求められる．(23)の右辺最後の項 $\nu_M\Delta\mathbf{B}$ に注目しよう．(27)で表される無力場配位のもとでは，流れに対する磁場の直接的な影響は，この項を通して与えられる．いま，磁場の成長とともに $\nu_M\Delta\mathbf{B}$ が大きくなり，$\nu_T\Delta\mathbf{U}$ と同程度の大きさになった場合を考える．すなわち，

$$\nu_M\Delta\mathbf{B} \cong \nu_T\Delta\mathbf{U}. \tag{28}$$

(28)の状態が実現すれば，$\nu_T\Delta\mathbf{U}$ のもつ流体構造の破壊効果を $\nu_M\Delta\mathbf{B}$ が緩和して，対流カラムが安定に存在し得る．また，β と γ の空間依存性を無視すると，(28)より次式を得る．

$$\mathbf{B} \cong \frac{\beta}{\gamma}\mathbf{U}. \tag{29}$$

(29)は，$\mathbf{U}$と$\mathbf{B}$が平行か反平行に近い状態になることを示す．このような状態は，上に述べたように，磁力線の引き伸ばしによる磁場エネルギーの成長を飽和させ，定常的なMHD状態の実現をもたらす．

3.3 磁場エネルギーと運動エネルギー

(29)より，磁場エネルギーT_Mと運動エネルギーT_Kの比は，次のように評価できる．

$$\frac{T_M}{T_K} \cong \left(\frac{K}{W}\right)^2. \quad (30)$$

K/Wの大きさは現象によって異なるが，本研究のダイナモモデルを降着円盤やトカマクなどの現象に適用して，以下のような評価を得ている[6,9,12]．

$$\left|\frac{K}{W}\right| = O\left(10^1\right) \sim O\left(10^2\right). \quad (31)$$

(30)と(31)より，磁場エネルギーは運動エネルギーの10^2から10^4倍の大きさになり，磁場エネルギーが卓越する状態が実現される．そして，このエネルギーの比は，地球外核において推測される値とよい一致を示す．

3.4 ポロイダル磁場とトロイダル磁場

(29)より，ポロイダル磁場$\mathbf{B}_P$はポロイダル速度場$\mathbf{U}_P$と密接な関係があることがわかる．すなわち，

$$|\mathbf{B}_P| \cong \left|\frac{K}{W}\right| |\mathbf{U}_P| \quad (32)$$

K/Wの大きさとして10，$\mathbf{U}_P$の大きさとして10^{-4}m/sを用いると，磁束密度の単位に変換した$\mathbf{B}^*_P$の強さは，

$$|\mathbf{B}^*_P| = O(1)\mathrm{gauss}, \quad (33)$$

となる．興味深いことに，(33)の評価は地球の双極子磁場の強さと同程度のものになる．

地球磁場の観測や計算機シミュレーションの結果から，トロイダル速度場$\mathbf{U}_T$は$\mathbf{U}_P$よりも大きいと考えられる．いま，$\mathbf{U}_T$の大きさを10^{-3}m/sとすると，トロイダル磁場の強さは，次のように評価できる．

$$|\mathbf{B}^*_T| = O(10)\mathrm{gauss}, \quad (34)$$

3.5 無力場配位からのずれ

最後に，(26)から(27)を得るときに落とした項$\gamma\mathbf{\Omega}_T$の役割について考えよう．

(29)を用いて(26)を書き直すと，次式が得られる．

$$\left(1-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2\right)\mathbf{J} - \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{B} \cong 2\frac{\gamma}{\beta}\boldsymbol{\omega}_F. \quad (35)$$

γ/βは(20)と(21)より，$\gamma/\beta = C_\gamma W/C_\beta K$となり，(31)を考慮すると，(35)の左辺第1項は単純に$\mathbf{J}$としてよい．そして，このことから無力場配位を乱す主要な要因は，クロスヘリシティを媒介とした系の回転であることがわかる．

4. ま と め

本研究では，地球外核のような回転球殻におけるダイナモ作用を，乱流の統計理論に基づいて考察した．本研究で提案したダイナモ過程では，強いα効果のもとで，無力場配位に近い磁場が生成される．このような磁場配位と，クロスヘリシティと結合した磁気歪みテンソルの働きによって，対流のカラム構造は安定に存在し得る．また，クロスヘリシティ効果のために磁場と速度場が揃い，磁場エネルギーは飽和する．そして，磁場エネルギーが運動エネルギーに卓越する状態が実現する．さらに，トロイダル磁場はポロイダル磁場よりも10倍程度強いと評価された．

本研究の詳細は文献17に述べられている．

(1999年10月18日受理)

参 考 文 献

1) R. T. Merrill, M. W. McElhinny, and P. L. McFadden, *The Magnetic Field of the Earth* (Academic Press, 1996).
2) H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, 1978).
3) A. Yoshizawa, Phys. Fluids B **2**, 1589 (1990).
4) A. Yoshizawa, *Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows: Modelling and Statistical Theory* (Kluwer Academic Publishers, 1998).
5) A. Yoshizawa and N. Yokoi, Astrophys. J. **407**, 540 (1993).
6) N. Yokoi, Astron. Astrophys. **311**, 731 (1996).
7) A. Brandenburg and V. Urpin, Astron. Astrophys. **332**, L 41 (1998).
8) A. Yoshizawa, Phys. Fluids B **3**, 2723 (1991).
9) N. Yokoi, J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 2353 (1996).
10) A. Yoshizawa, N. Yokoi, S.-I. Itoh, and K. Itoh, Phys. Plasmas **6**, 3194 (1999).
11) A. Yoshizawa, Phys. Fluids **27**, 1377 (1984).
12) F. Hamba, Phys. Fluids A **4**, 441 (1992).
13) A. Yoshizawa, J. Phys. Soc. Jpn, **65**, 124 (1996).
14) F. Busse, J. Fluid Mech. **44**, 441 (1970).
15) G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, Phys. Earth Planet. Inter. **91**, 63 (1995).
16) A. Kageyama and T. Sato, Phys. Plasmas **2**, 1421 (1995).
17) A. Yoshizawa, N. Yokoi, and H. Kato, Phys. Plasmas **12**, 4596 (1999).