

円管内旋回乱流の数値解析における非線形 k-ε モデルの問題点

Numerical Simulation of Turbulent Swirling Flows in Circular Pipes by a Nonlinear k-ε Model

西島 勝一
Shoiti NISHIZIMA

1. はじめに

工学における乱流の数値解析では、k-ε モデルが多用されている。このモデルは工学上重要な幾つかの乱流を的確に予測出来ないという欠点も指摘され、その一つに旋回乱流の特性再現の問題点があげられている。その欠点の改良を目指して多くの試み¹⁾⁴⁾がなされてきている。

本論文では、管壁が管軸を中心として回転することによって発生する「回転円管内旋回乱流」と、外壁は静止しているが導入部に設置された羽根車等により誘起される「直円管内旋回乱流」の、2種類の数値解析を行い、k-ε モデルのレイノルズ応力表現についての問題点を検討する。

2. 3次非線形 k-ε モデルによる円管内旋回乱流の解析

2.1 3次非線形 k-ε モデル

図1で表される回転円管内旋回乱流と直円管内旋回乱流の数値解析を、円柱座標系を用いて行なった。両解析とも、円周(θ)方向への統計量の変化無しと壁上滑り無し条件

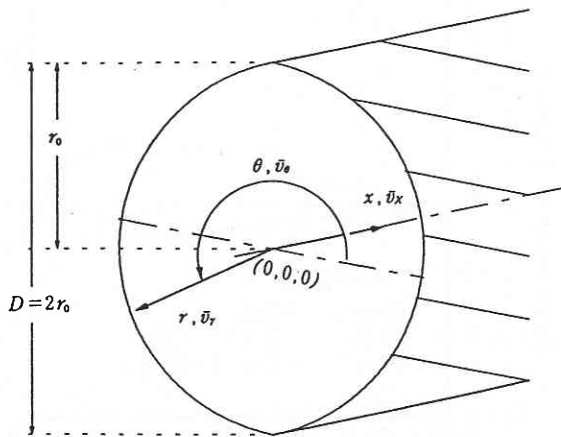


Fig. 1 Coordinate system of pipe flows.

を課し、時間差分法には安定性を重視して Crank-Nicolson スキームを用いたこと、半径(r)方向の計算格子点を不等間隔に62個配置した方法は、同様である。

レイノルズ応力表現は、次の3次非線形渦粘性 k-ε モデル^{4),5)}を用いた。

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta} + v_{TN}S_{\alpha\beta} - N_1\left[S_{\alpha\alpha}S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha}S_{\alpha\alpha} - \frac{2}{3}S^2\delta_{\alpha\beta}\right] - N_2\left[S_{\alpha\alpha}\Omega_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha}\Omega_{\alpha\alpha}\right] + N_3\left[S_{\alpha\alpha}S_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha}S_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\alpha}\right] + N_4\left[S_{\alpha\alpha}\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha}\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\alpha} - \frac{2}{3}S_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta}\right]. \dots (1)$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad v_{TN} = v_i \frac{(1 + C_{vk}C'_v)}{(1 + C'_v\chi^2)^{2/3}}$$

$$v_i = C_v f_v \frac{k^2}{\epsilon}, \quad \chi = \sqrt{\frac{k^2}{\epsilon^2}(C_s S^2 + C_\Omega \Omega^2)}, \quad S^2 = S_{\alpha\beta}^2,$$

$$N_{1(or 2)} = \frac{C_{N1(or N2)}k}{C_v \epsilon (1 + C'_v\chi^2)}, \quad N_{3(or 4)} = C_{N3(or N4)} \frac{v_{TN}^2}{\epsilon}. \dots (2)$$

本レイノルズ応力表現は壁乱流へ適用するために、安倍らの低レイノルズ数型 k-ε モデル⁶⁾(定数等の変更はなし)と結合した⁴⁾。式(1), (2)の定数は、溝乱流、一様剪断乱流、矩形管内乱流、回転円管内旋回乱流の解析を通して次の通り決めた。

$$C_v = 0.09, \quad C'_v = 0.0214, \quad C_{vx} = 14.5, \quad C_{N1} = 0.005, \\ C_{N2} = 0.0123, \quad C_{N3} = -0.3, \quad C_{N4} = 0.03, \quad C_s = C_\Omega = 0.5 \dots (3)$$

ここで、 $C'_v = C_{N1} = C_{N2} = C_{N3} = C_{N4} = 0$ とすると、本モデルは k-ε モデル⁶⁾に帰結する。

2.2 外壁が回転している円管内旋回乱流への適用

軸(x)方向への統計量は変化無し、半径方向流速 \bar{v}_r 、零、壁上で

*東京大学生産技術研究所 第5部

$$\bar{v}_x = k = 0, \quad \varepsilon \approx v \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dk}{dr} \right), \quad \bar{v}_{\theta wall} = 0 \sim \bar{v}_{xave}, \dots \dots \dots (4)$$

の境界条件，空間に不等間隔中心差分を用いて計算を行った。解析対象は，菊山ら⁷⁾の実験結果と比較検討するために，断面平均流速 \bar{v}_{xave} と直径に基づくレイノルズ数 $Re \approx 20000$ ，管壁の周速度 $\bar{v}_{\theta wall}$ で表す回転率 $N = \bar{v}_{\theta wall} / \bar{v}_{xave}$ を 0 ~ 1 の，旋回乱流とした。

図 2 ~ 図 4 に示した結果は，式(1)S, Ω の 3 次項 ($C_{N3} = -0.3, C_{N4} = 0.03$) まで組み込むことによって，周方向流速の

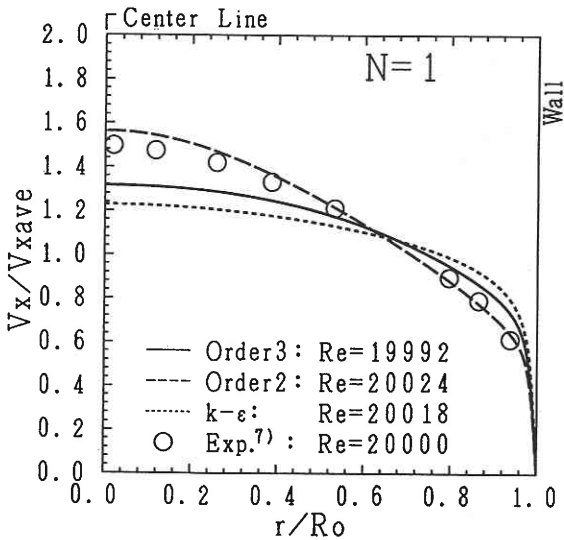


Fig. 2 Axial velocity \bar{v}_x in a rotating pipe.

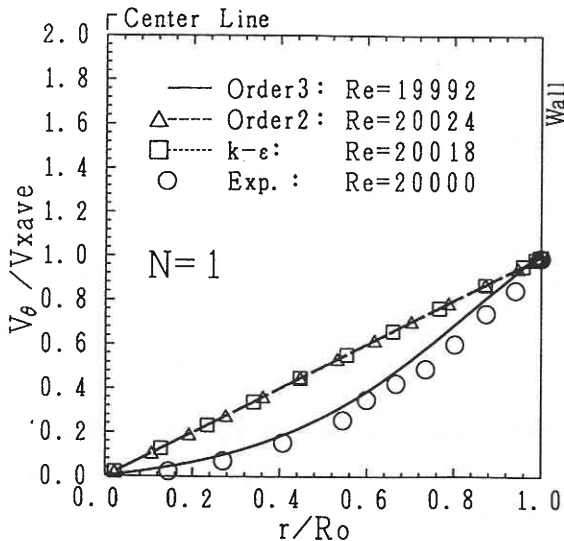


Fig. 3 Tangential velocity \bar{v}_θ in a rotating pipe.

実験結果もよく再現出来る事を表している。尚，図中の Ord. 2 とはレイノルズ応力表現を 2 次項まで，Ord. 3 は 3 次項まで取り込んだ結果を各々示している。

2.3 直円管内旋回乱流への適用

流量等の誤差を少なくするために流れ関数を導入し，管中心で，

$$\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0, \quad \frac{df}{dr} = 0 (f = \bar{v}_x, k, \varepsilon), \quad \frac{F}{r} \approx \frac{F'}{r}, \dots \dots \dots (5)$$

の境界条件を適用。軸方向への格子配置は等間隔で 200 点，空間差分精度は移流項のみ 1 次風上で，他は中心差分とした。

解析対象としては，詳細な実験⁸⁾結果が得られており，それに対応する応力モデルによる数値解析^{9), 10)}も行われている次の流れを採用した。

$$\Omega = 2\pi \rho \int_0^{r_0} \frac{\bar{v}_x \bar{v}_\theta r^2}{\rho \pi r_0^3 V_m^2} dr = 0.24 \text{ (計算入口: 実験 } x/d = 12.3 \text{)},$$

$$\Omega = 0.18 \text{ (計算中間: 実験 } x/d = 25.7 \text{)},$$

$$\Omega = 0.12 \text{ (計算出口: 実験 } x/d = 39 \text{)}, \quad Re = \frac{V_m 2r_0}{\nu} = 50000. \dots (6)$$

ここで V_m は断面平均流速， r_0 は円管の半径， ρ は流体の密度である。応力モデルによる結果⁹⁾，実験値⁸⁾と比較した数値解析結果を図 5 ~ 図 7 に示す。

結果から，回転円管内旋回乱流の特性再現に有効であった S, Ω の 3 次項が，直円管内旋回乱流の解析においてはその特性を殆ど捕捉できないことが解かった。特に，図 6

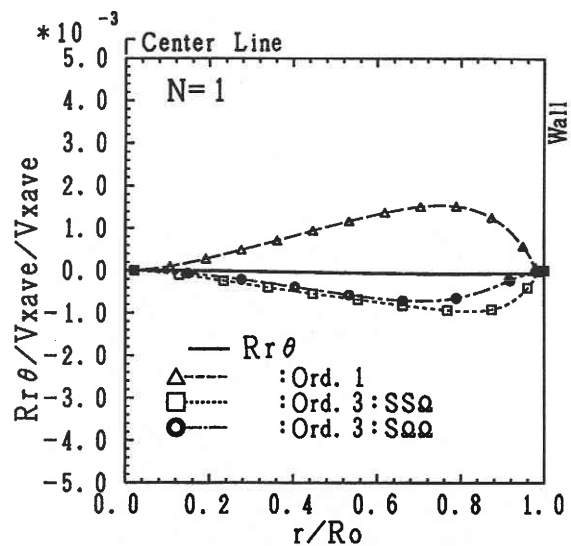


Fig. 4 Details of $R_r \theta$ in a rotating pipe.

に示した円周方向流速の特性再現にあたり、応力モデルが定性的に特徴を再現していることと対比すると、本3次モデルが通常 k-ε モデルよりも不十分であることがわかる。この主要な原因は、図7のレイノルズ応力値 $R_{r\theta}$ が実験値と大きくかけ離れている事にあると推察できる。

3. レイノルズ応力 $R_{r\theta}$ 成分表現の検討

図8に直円管内乱流における、レイノルズ応力 $R_{r\theta}$ 成分の各次数項の収支を示す。式(1)を円管内乱流に適用すると、回転円管では式(7)、直円管内乱流においては式(8)となる。

$$R_{r\theta} = v_{TN} S_{r\theta} + N_3 S_{xr} (S_{xr} \Omega_{r\theta} + S_{r\theta} \Omega_{xr}) - N_4 \{ S_{r\theta} (\Omega_{xr}^2 + 2\Omega_{r\theta}^2) - S_{xr} \Omega_{xr} \Omega_{r\theta} \} \dots (7)$$

$$R_{r\theta} = v_{TN} S_{r\theta} - 2N_1 \{ S_{xr} S_{x\theta} + S_{r\theta} (S_{rr} + S_{\theta\theta}) \} - N_2 \{ S_{xr} \Omega_{x\theta} + S_{x\theta} \Omega_{xr} (S_{rr} - S_{\theta\theta}) \Omega_{r\theta} \} + N_3 \{ S_{xr} (S_{xr} \Omega_{x\theta} + S_{x\theta} \Omega_{xr}) + S_{xr} (S_{xr} \Omega_{r\theta} + S_{rr} \Omega_{x\theta} + S_{r\theta} \Omega_{xr}) + S_{x\theta} (S_{r\theta} \Omega_{x\theta} - S_{x\theta} \Omega_{r\theta} + S_{\theta\theta} \Omega_{xr}) + (S_{rr}^2 + S_{\theta\theta}^2) \Omega_{r\theta} \} + N_4 \{ (S_{xr} \Omega_{xr} - S_{x\theta} \Omega_{x\theta}) \Omega_{r\theta} - (S_{rr} + S_{\theta\theta}) \Omega_{xr} \Omega_{r\theta} - S_{r\theta} (\Omega_{xr}^2 + \Omega_{x\theta}^2 + 2\Omega_{r\theta}^2) \} \dots (8)$$

図4と図8から、本モデルの $R_{r\theta}$ 値と実測結果の差は、式(7), (8)の右辺第1項、すなわち通常 k-ε モデルのレイノルズ応力表現そのものから主に発生していることがわかる。この項は、旋回の強い管中心 ($r \approx 0$) 付近で円周方向流速 (図3, 図6) を $v_\theta \approx C_1 r + C_2 r^2 + C_3 r^3 + \dots$ と近似すると、

$$R_{r\theta} \approx v_{TN} S_{r\theta} \approx v_{TN} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \approx v_{TN} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \approx v_{TN} (C_2 r + 2C_3 r^2 + \dots) \dots (9)$$

となる。 $S_{r\theta}$ は v_θ の r 方向の曲率を表しており、旋回が強くなれば絶対値で非常に大きな値をとること、正負のいずれともなりうる事がわかる。図4の回転円管内旋回流では図3の v_θ 分布が下に凸なので $S_{r\theta}$ は正で、大きさも式(7)

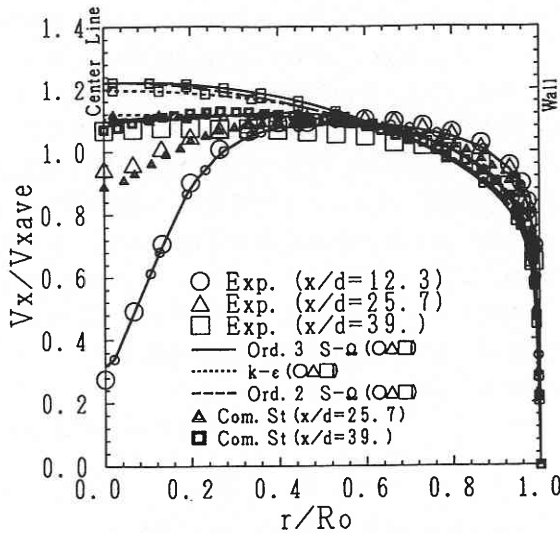


Fig. 5 Axial velocity \bar{v}_x in a non-rotating pipe.

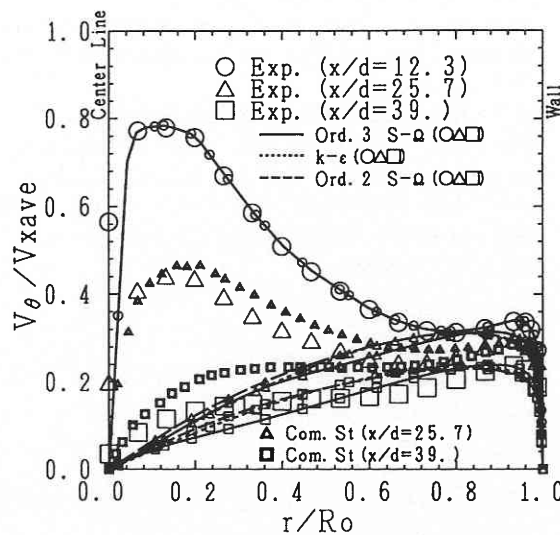


Fig. 6 Tangential velocity \bar{v}_θ in a non-rotating pipe.

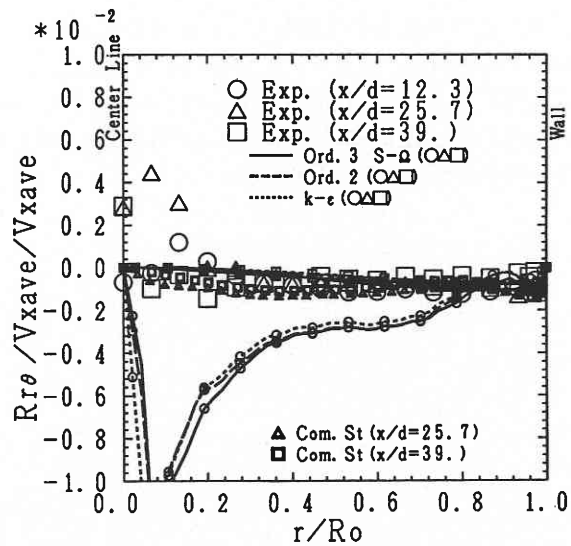
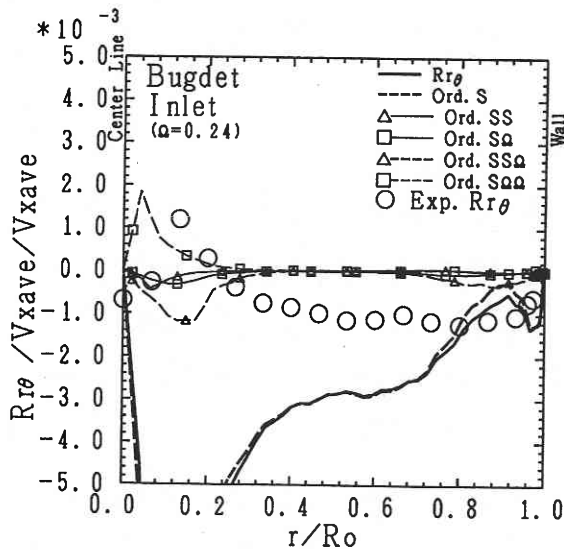


Fig. 7 Reynolds stress $R_{r\theta}$ in a non-rotating pipe.

Fig. 8 Details of $R_{r\theta}$ in a non-rotating pipe.

右辺第2, 3項で補正できる程度の値であった。一方, 直円管内旋回乱流における $S_{r\theta}$ は, 負の大きな値を持ち, S , Ω の3次項では符号も異なり大きさも補正不可能であることが図8から解る。

この共通する $k-\epsilon$ モデルの欠点を回避するために, 小林-依田はレイノルズ応力の $R_{r\theta}$ 成分だけに r (のべき乗) を乗じて $r \approx 0$ 付近での値を抑制するモデル¹⁾を提案している。レイノルズ応力値を実測値に近似して解析をすすめる応力モデルによる結果^{8), 9)}が, 定性的に実測の特徴をよく再現しているのは, 以上の渦粘性 $R_{r\theta}$ 表現の欠点をもたないためである。

一方, $R_{r\theta}$ 表現に大きく依存している主流方向流速 \bar{v}_x の実験結果の再現は, ヘリシテイ効果の導入³⁾や $R_{r\theta}$ と \bar{v}_θ の適正な補正によって比較的容易に可能である。それゆえ, 旋回乱流の渦粘性 $k-\epsilon$ モデルによる解析においては, $R_{r\theta}$ 成分表現の改善が大きな課題と考えられる。

4. 結 論

統計理論的に導出された3次の非線形 $k-\epsilon$ モデルを用いて, 管壁が管軸を中心として回転することによって発生する「回転円管内旋回乱流」と, 外壁は静止しているが導入部に設置された羽根車等によって誘起される「直円管内旋回乱流」の, 2形状旋回乱流の数値解析を行った。

回転円管内旋回乱流の解析において, レイノルズ応力表現の3次項が, 旋回乱流特性再現に有効であることがわかった。一方, 直円管内旋回乱流の解析においては, S , Ω の3次項を含む $k-\epsilon$ 渦粘性レイノルズ応力表現が特性再現に有効で無いことがわかった。

この二つの数値解析結果を比較検討して, $k-\epsilon$ モデルのレイノルズ応力 $R_{r\theta}$ 成分表現が特性再現の妨げになっていることがわかった。 $R_{r\theta}$ 成分表現の歪み速度テンソル $S_{r\theta}$ の過大な振る舞いを抑制する経験的なモデルは提案されてきている¹⁾が, 統計理論的結果による一般化渦粘性表現の探求は今も引き続き課題である。例えば, 統計理論からは, 式(1)に $\Delta k v U$ 項が付加される事が可能である。この項の $R_{r\theta}$ 成分には $\frac{dk}{dx} S_{r\theta}$ 表現が含まれており, $S_{r\theta}$ の過大な振る舞いを抑制する可能性がある。これらを検討して簡便さの特徴を維持し旋回乱流特性の再現に有効な $k-\epsilon$ モデルの追求は興味ある課題である。

(1999年10月13日受理)

参 照 文 献

- 1) 小林・依田, 機論, B 52-481 (1986) 3230.
- 2) 河村・三島, 機論, B 57-536 (1991) 1251.
- 3) 西島・横井, 機論, B 58-553 (1992) 2714.
- 4) 西島, 生産研究, 51-1 (1999) 21.
- 5) Yoshizawa, A., Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows: Modeling and Statistical Theory (Kluwer, 1998).
- 6) 安倍・長野・近藤, 機論, B 58-554 (1992) 3003.
- 7) 菊山・村上・西堀・前田, 機論, B 48-432 (1982) 1431.
- 8) Kitoh, O., J. Fluid Mech. (1991), Vol. 225, pp. 445-479.
- 9) 清水・吉田, 第29回伝熱シンポ (1992), A 234, pp.385-386.
- 10) 鷺津・島・岡本, 第12回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (1998)185.