

# 回転系 Rayleigh-Bénard 対流における乱流ヘリシティー生成機構

小山省司

Shoji KOYAMA

## 1. はじめに

本研究では、座標系の回転が乱流運動に与える影響について調べるため、回転系における Rayleigh-Bénard 対流の 3 次元直接数値シミュレーション (Direct numerical simulation: DNS) を行なう。Rayleigh-Bénard 対流は、流体が下の温かい壁と上の冷たい壁に挟まれて浮力により駆動される対流であり、一般的な熱対流現象を簡明化した例に相当し、その基本特性は理論解析 (e.g. Chandrasekhar<sup>1)</sup>、実験 (e.g. Rossby<sup>2)</sup>)、そして数値解析等により良く調べられてきた。3次元 DNS による Rayleigh-Bénard 対流の研究は、Lipps<sup>3)</sup> や Grötzbach<sup>4), 5)</sup> により、層流から乱流までの流れの性質や統計量 (エネルギー、Nusselt 数等) などが調べられている。また、系の回転の影響下にある熱対流現象は宇宙、地球流体現象 (太陽や巨大惑星の対流層や地球大気・海洋対流等) にとって重要な性質である (Julien et al.<sup>6)</sup>)。これらはいずれも、Reynolds 数の高い乱流状態にあると考えられ、本研究が注目する所となっている。

系の回転の影響により卓越してくるヘリシティーは、

$$H = \int \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{A} dV \dots\dots\dots (1)$$

で定義され、ベクトル場のねじれ度合いを表わしている。ここで  $\vec{A}$  は任意のベクトルで、極性ベクトルの場合  $\text{rot} \vec{A}$  は軸性ベクトルとなるので  $H$  は擬スカラー量となり、鏡像対称の状態においてはゼロとなるが、非対称な境界条件の下で鏡像対称の破れが生じると値を持つことになる。流体の電気伝導性を考慮した電磁流体力学 (Magnetohydrodynamics: MHD) のダイナモ理論によると、流体のヘリカルな運動により大規模な磁場が生成・維持される  $\alpha$  効果が知られている。このヘリカルな運動を表わす物理量が力学ヘリシティー  $\int \vec{u} \cdot \text{rot} \vec{u} dV$  ( $\vec{u}$  は速度ベクトル) で、 $\alpha$  効果と結びつき重要な役割を演じる。Moffatt<sup>7)</sup>

\*東京大学生産技術研究所 第 1 部

により小スケールの乱流ダイナモモデルが研究され、 $\alpha$  効果は小スケールの変動速度場に関係があることが分かっている。そこで本研究では、回転系 Rayleigh-Bénard 対流における乱流力学ヘリシティー密度 (以下簡単にヘリシティーと呼ぶ) の分布と生成過程を調べる事を目的とした。

また本速報の以降の構成は以下のとおりになっている。セクション 2 では基礎方程式の定式化と計算例の設定を行ない、セクション 3 では数値計算の結果とヘリシティーに関する考察を試み、そしてセクション 4 で今回のまとめを行なう。

## 2. 問題の定式化

### 2.1 基礎方程式

本研究の熱対流現象を記述するための基礎方程式系は、連続の方程式、Navier-Stokes 方程式、そして熱輸送の方程式である。簡単のため Boussinesq 近似を採用した。これは、NS 方程式中の浮力項を除くこれらの式の中の全ての項において、密度の物理特性を一定にするという仮定である。本研究は 3次元カーテシアン座標系を採用し、 $x$ ,  $y$  を水平軸、 $z$  を鉛直軸とすると、速度成分  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ : 指標 1, 2 そして 3 はそれぞれ  $x$ ,  $y$  そして  $z$  に対応させる)、圧力  $p$ 、温度  $\theta$  の時間発展を支配する無次元方程式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \delta_{i3} - \frac{1}{Ro} \epsilon_{3ji} u_j, \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}, \dots\dots\dots (4)$$

$$Re = \frac{UL}{\nu}, Pr = \frac{\nu}{\kappa}, Ra = \frac{\beta g \Delta \theta L^3}{\kappa \nu}, Ro = \frac{U}{fL} \dots\dots (5)$$

となる。ここでは、同じ下付きの指標が 2 回重なった時、全ての項に対し Einstein の規約則を適用する。シンボル  $L$ ,

研究速報

Case	Pr	Ra	Ro	$n_x$	$n_y$	$n_z$	$A_x$	$A_y$	$\Delta t$	$n_s$
1 (without rotation)	0.71	87300	$\infty$	32	32	32	3.2	3.2	$1.0 \times 10^{-2}$	900
2 (with rotation)	0.71	87300	1.0	32	32	32	3.2	3.2	$1.0 \times 10^{-2}$	900

表1 計算例及び計算パラメーターの詳細.  $Pr = 0.71$  は空気を想定している.  $(n_x, n_y, n_z)$  はメッシュ数,  $\Delta t$  は時間刻み.  $n_s$  は時間平均をとったステップ数で, 今回は  $100 \leq t \leq 1000$  で平均化を行なっている. また, 空間は全ての軸方向を等間隔で刻んでいる.

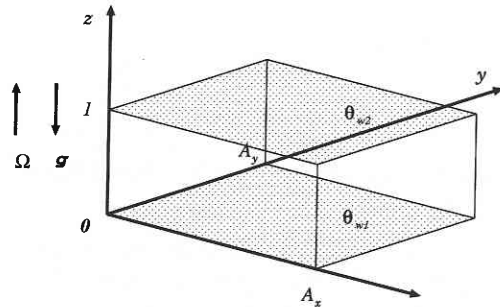


図1 計算領域. 系の回転角速度ベクトルは, 重力加速度ベクトルに対して反平行とする. 壁の温度はそれぞれ  $\theta_{w1} = 0, \theta_{w2} = -1$  に固定している.

$U, \beta, g, \Delta\theta, \kappa, \nu$  そして  $f$  はそれぞれ系の代表長さ, 系の代表速度, 体積膨張率, 重力加速度, 系の代表温度, 熱拡散率, 動粘性率そしてコリオリパラメーター ( $f = 2\Omega$ :  $\Omega$  は系の回転角速度) である. またここで現われた無次元パラメーターはそれぞれ  $Re$ : Reynolds 数,  $Pr$ : Prandtl 数,  $Ra$ : Rayleigh 数, そして  $Ro$ : Rossby 数 (但し Rossby 数の代わりに Taylor 数  $Ta = (fL^2/\nu)^2$  を導入する場合もある) である. 本研究では  $\Omega > 0$  とし, その結果系は  $z$  軸を回転軸とし反時計回りをする. 更に代表長さ, 速度, 温度としてそれぞれ, 上下壁間隔  $d$ , 乱流鉛直成分  $\sqrt{\beta g \Delta\theta d}$ , 上下壁温度差  $\Delta\theta$  ( $=\theta_{w1} - \theta_{w2}$ ) を採用すると, 各パラメーター間の関係は  $Re = \sqrt{Ra / Pr}$ ,  $Ro = \sqrt{Ra / Pr Ta}$  となり, 流体運動を支配するコントロールパラメーターは  $Pr, Ra$  そして  $Ro$  の3成分となる. また今回の計算例は, 非回転系と回転系の各1例を比較する事とし, 各パラメーターの値は上記の表1に示した. ここで  $A_x, A_y$  はアスペクト比で  $A_x = L_x/L, A_y = L_y/L$  である. それゆえ, (2)-(4) の解は, 図1のような領域  $A_x \times A_y \times 1$  で計算される. なお, 本研究の数値計算スキームは, 方程式の全て項の空間微分に対し有限差分法を, 時間積分に対し Adams-Bashforth 法をそれぞれ2次精度で適用した.

2.2 初期条件及び境界条件

基礎方程式系の時間発展を進行させるため, 速度場と温度場には初期条件と境界条件が必要となる. 本研究では, 初期条件として流体は時間  $t = 0$  の時, 静水圧平衡を保ち

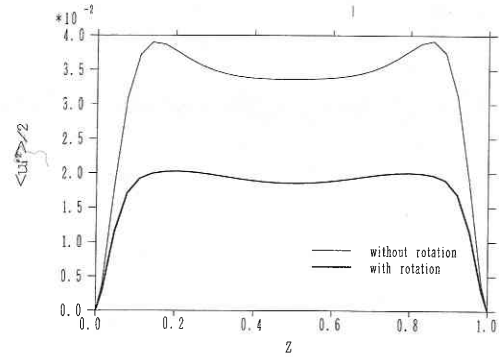


図2 乱流エネルギー  $k = \langle u_i^2 \rangle / 2$  の鉛直分布.

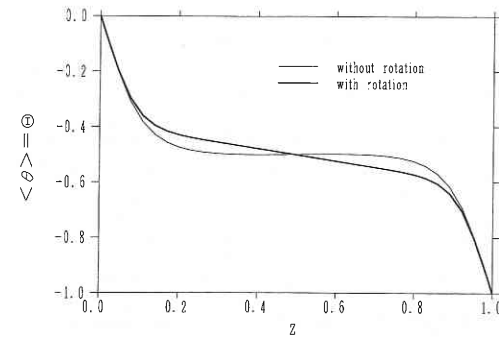


図3 平均温度分布  $\langle \theta \rangle = \theta$  の鉛直分布.

静止しているとし, その時の熱伝達は伝導のみで温度場は鉛直方向に対し線形分布をしている. そこに, 最大振幅が0.05の乱数値を温度場に重ね合わせ対流の種としている.

境界条件は, 上下の壁上で速度場には no-slip 条件を課し, 温度場は下記の一定値に固定した.

$$u_\alpha(x, y, 0) = 0, u_\alpha(x, y, 1) = 0, \dots \dots \dots (6)$$

$$\theta_{w1} = \theta(x, y, 0) = 0, \theta_{w2} = \theta(x, y, 1) = -1. \dots \dots \dots (7)$$

また, 水平方向に関しては速度場, 温度場とも周期境界条件を課した.

$$u_\alpha(x + A_x, y + A_y, z) = u_\alpha(x, y, z), \dots \dots \dots (8)$$

$$\theta(x + A_x, y + A_y, z) = \theta(x, y, z). \dots \dots \dots (9)$$

3. シミュレーションの結果

3.1 乱流エネルギー及び平均温度分布

定量的な解析を行なうために, 非定常時の計算結果を適当に平均化し評価しなければならない. このため本研究は,  $xy$  面平均かつ時間平均 (表1) を行ない, この平均化の表記を  $\langle f \rangle$  とした. 従って任意の物理量は  $f$  は

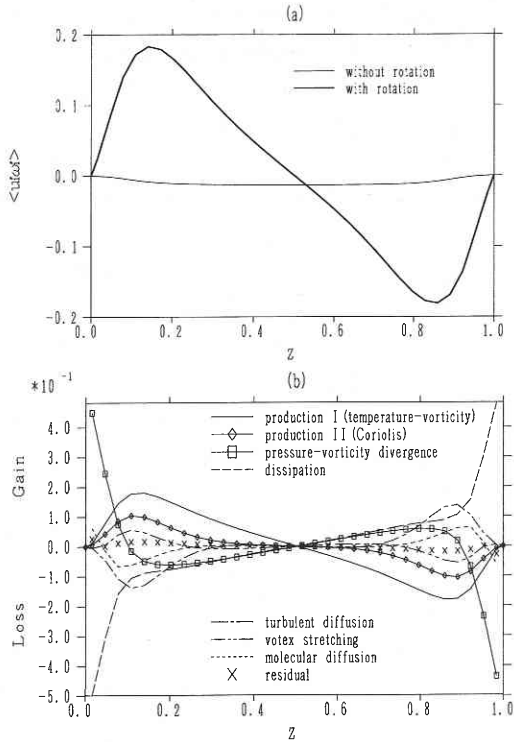


図4 (a) ヘリシティー  $\langle u_i' \omega_i' \rangle$  の鉛直分布. (b) Case 2 のヘリシティー収支の鉛直分布

$$f(x, y, z) = \langle f \rangle(z) + f'(x, y, z) \dots (10)$$

の様に分解される. ここで  $f'$  は平均からのずれである.

今回の計算例がどの程度の強度を持つ乱流運動かを確認するために, 乱流エネルギーと平均温度分布を調べた. 図2に乱流エネルギー  $k = \langle u_i'^2 \rangle / 2$  の鉛直分布を示す.  $k$  は壁の影響で水平方向のエネルギーが増加し, 図のように両壁近傍で極値を示す傾向がある. 非回転系 (Case 1) と比べて回転系 (Case 2) では  $k$  の値が小さくなっている. これは, 今回の例のような中性流体 (非電磁流体) では, 系の回転が乱流運動を抑制する1つの要素になっていることがわかる. この事実は, 平均温度の鉛直分布からも指摘され, それを図3に示す. 非回転系と比べて回転系では, 乱流運動が不活性となり中心付近の平坦な領域が減退し, より低い Rayleigh 数の非回転系の対流と似た分布を持つことがわかる.

3.2 ヘリシティー生成機構の考察

図4(a)に非回転系 (Case 1) 及び回転系 (Case 2) におけるヘリシティー  $h = \langle u_i' \omega_i' \rangle$  の鉛直分布を示す (ここで  $\bar{\omega}$  は渦度を表わす:  $\bar{\omega} = \text{rot} \bar{u}$ ). 非回転系において  $h$  はまだ統計平衡に達していないが, 回転系では鉛直方向の下部 ( $0 \leq z \leq 0.5$ ) では正, 上部 ( $0.5 \leq z \leq 1$ ) では負の値をそれぞれ示すという図のような反対称分布を持つ.

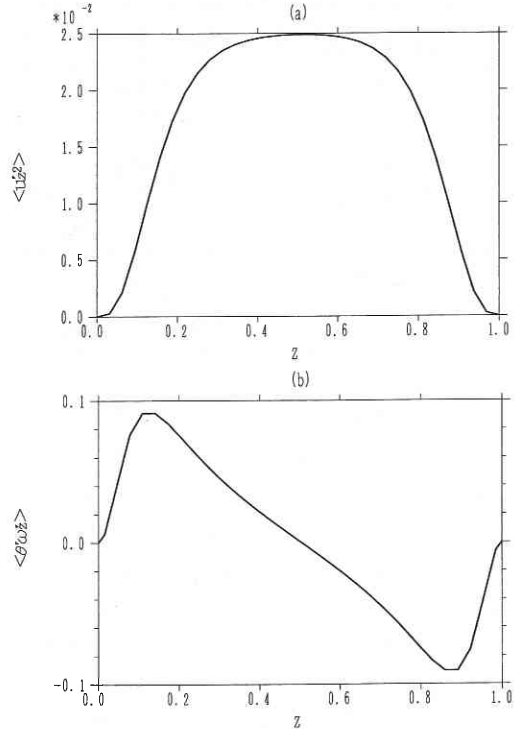


図5 (a) Case 2 の  $z$  成分の速度分散  $\langle u_z'^2 \rangle$  の鉛直分布. (b) Case 2 の温度-渦度相関  $\langle \theta' \omega_z' \rangle$  の鉛直分布.

回転系においてヘリシティーが何故このような鉛直分布を示すのかを考察するため, 下記の様な  $h$  の収支式を考え, 結果を図4(b)に示す.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & \underbrace{2 \langle \theta' \omega_z' \rangle}_{\text{production I}} + \underbrace{\frac{1}{Ro} \frac{\partial}{\partial z} \langle u_z'^2 \rangle}_{\text{production II}} - \underbrace{\frac{2}{Re} \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i'}{\partial x_j} \right\rangle}_{\text{dissipation}} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left\langle \left( \frac{1}{2} u_i'^2 - p' \right) \omega_i' - u_i' \omega_i' u_z' \right\rangle}_{\substack{\text{vortex stretching} \\ \text{pressure-vorticity} \\ \text{turbulent diffusion}}} + \underbrace{\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}}_{\text{molecular diffusion}} \dots (11) \end{aligned}$$

各項の鉛直分布を見ると, 温度-渦度相関項とコリオリ項が  $h$  の主要な生成項になっていることがわかる. 回転系におけるヘリシティー生成の概要は次のとおりである. まず, 系の回転により流体運動に加わるコリオリ力による項, Pro II は, 正定値  $1/Ro$  と鉛直方向の速度分散  $\langle u_z'^2 \rangle$  の勾配である. 図5(a)に  $\langle u_z'^2 \rangle$  の鉛直分布を示す. これを見ると  $\langle u_z'^2 \rangle$  の勾配は, 下部で正, 上部で負の値をそれぞれ示すことがわかる.  $\langle u_z'^2 \rangle$  の勾配にかかる係数は正定値なので, Pro II の符号は  $\langle u_z'^2 \rangle$  の勾配の符号だけで決まる. つまり Pro II が  $h$  の鉛直分布する符号を決める役割を

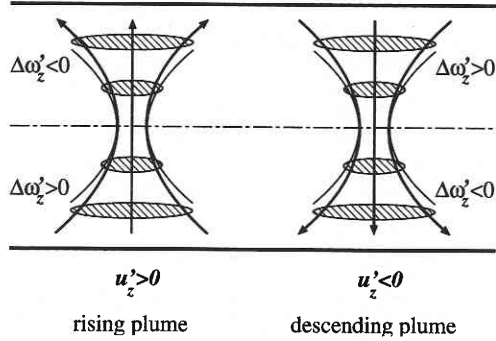


図6 プルームの運動に伴う渦の伸張及び縮減.

演じる. 一方,  $h$  の絶対値を大きくする役割を演じるのが Pro I で, 温度-渦度相関項  $\langle \theta' \omega_z' \rangle$  の 2 倍である. 図 5 (b) に  $\langle \theta' \omega_z' \rangle$  の鉛直分布を示す.  $\langle \theta' \omega_z' \rangle$  は  $h$  と相似的な分布を示し,  $h$  に正味の寄与をすることがわかる.

得られた計算結果から,  $h$  の分布とその収支式を用いて上記のような考察を試みる事ができたが, 今度はヘリシティー生成過程を物理的な観点から考察する. Pro I と Pro II は, ヘリシティーの水平成分  $h_{||}$  ( $= h_x + h_y$ ) と鉛直成分  $h_z$  にそれぞれ半分ずつの寄与をするため, 比較的取り扱い易い  $h_z$  に考察を限定する. まず Pro II は, 元々  $\omega_z'$  の発展方程式中の渦伸張項 (vortex stretching term)  $(1/Ro)(\partial u_z'/\partial z)$  で, 速度ひずみの効果により渦を鉛直方向に引き伸ばしたり, 押し縮めたりすることで  $\omega_z'$  を時間的に増減させる. この項だけによるヘリシティーの変化は, 微小時間間隔  $\Delta t$  における  $\omega_z'$  変化量を  $\Delta \omega_z' (= 1/Ro)(\partial u_z'/\partial z) \Delta t$ ,  $h_z$  の変化量を  $\Delta h_z$  とすると  $\Delta h_z = u_z' \Delta \omega_z'$  と表わせる. 仮に  $u_z' > 0$  とすると, 渦が引き伸ばされる時 ( $\Delta \omega_z' > 0$ ) は  $\Delta h_z > 0$  となり  $h_z$  は増加し, 渦が押し縮められる時 ( $\Delta \omega_z' < 0$ ) は  $\Delta h_z < 0$  となり  $h_z$  は減少する. 同様な議論が  $u_z' < 0$  の時にも当てはまり,  $\Delta \omega_z' > 0$  の時  $\Delta h_z < 0$ ,  $\Delta \omega_z' < 0$  の時  $\Delta h_z > 0$  となる. そこで今回の Rayleigh-Bénard 対流のケースを考慮する. ここでは, 熱的に励起され鉛直方向に強い流れを引き起こすプルームに注目する. プルームは両壁近傍で生成され, 下の温かい壁から熱を受け取り浮力で上昇する上昇プルーム (rising plume) と, 上の冷たい壁に熱を受け渡し重力で下降する下降プルーム (descending plume) の 2 種類存在し, 前者が  $u_z' > 0$ , 後者が  $u_z' < 0$  に相当する. 上昇プルームを例に挙げると, プルームは鉛直下部 ( $0 \leq z \leq 0.5$ ) では浮力により加速され  $u_z'$  が増加するために引き伸ばされ, 渦度が増加しヘリシティーは増える. また鉛直上部 ( $0.5 \leq z \leq 1$ ) では, 壁の影響で減速し  $u_z'$  が減少するために押し縮められ, 渦度が減少しヘリシティーは減る. 同様な議論を下降プルームにも当てはめると (図 6), 上昇・下降の両プルームとも鉛直下部ではヘリシティーを増やし, 鉛直上部ではヘリシティーを減らす方向に働く事がわかる. 一方, Pro I は熱

の輸送と強く関係している. 熱は温かい下の壁から冷たい上の壁へ輸送されるので, 乱流熱流束は鉛直変化に対し常に正である ( $\langle \theta' u_z' \rangle > 0$ ).  $h_z$  は正負の値を示す ( $\langle u_z' \omega_z' \rangle > 0 (< 0)$ ) ため, 温度-渦度相関も  $\langle \theta' \omega_z' \rangle > 0 (< 0)$  となる. つまり浮力の効果でヘリシティーの値が高められることがわかる. また  $h_z$  は,  $\langle \theta' \omega_z' \rangle$  の収支式中の生成項  $-u_z' \omega_z' (\partial \theta / \partial z)$  を担い,  $\langle \theta' \omega_z' \rangle$  の生成に正味の寄与をしているため, 両者は相手を生成することで自分自身も生成される相乗的な作用をし, 互いに強め合うわけである.

また全ヘリシティー  $H = \int_0^1 h dz$  は,  $h$  の反対称性から明らかにゼロとなり, 系全体でヘリシティーは増えていない. これは, 収支式(1)の積分をとるとわかるように擬スカラー量の性質と Rayleigh-Bénard 対流のような対称性の良い境界条件の下では, 各項がそれぞれ自身で相殺してしまい, 外部から系への全ヘリシティーの供給が無いことがわかる.

#### 4. ま と め

本研究は, 回転系 Rayleigh-Bénard 対流における乱流力学ヘリシティーについて調べた. その結果は以下のとおりである.

- ・乱流力学ヘリシティーは上下反対称な分布を示す.
- ・乱流力学ヘリシティーは主にコリオリ項と温度-渦度相関項により生成され, 前者によりその上下分布の符号が決まり, 後者により絶対値が助長される.
- ・Rayleigh-Bénard 対流のような対称性の良い境界条件の下では, 全ヘリシティーはゼロとなる.

また今後の課題として, メッシュ数を増やし今回よりも値の大きい Rayleigh 数における乱流を計算し, 更に非対称境界条件における乱流力学ヘリシティー生成の考察や MHD シミュレーションに拡張する予定である.

(1999 年 10 月 20 日受理)

#### 謝 辞

本研究の一部は本所選定研究費の助成を受けて行われた. ここに記して感謝いたします.

#### 参 照 文 献

- 1) S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford University Press, 1961).
- 2) H. T. Rossby, J. Fluid Mech. 36, 309-335 (1969).
- 3) F. B. Lipps, J. Fluid Mech. 75, 113-148 (1976).
- 4) G. Grözbach, J. Fluid Mech. 119, 27-53 (1982).
- 5) G. Grözbach, J. Comp Phys. 49, 241-264 (1983).
- 6) K. Julien, S. Legg, J. McWilliams and J. Verne, J. Fluid Mech. 322, 243-273 (1996).
- 7) H. K. Moffatt, Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids (Cambridge University Press, 1978).