

# 数値コロモゴロフスケールを用いた SGS モデルの改良

—第 1 報 モデルの導出—

Reconstruction of SGS Model By Using Numerical Kolmogorov Scale

— 1 st Report, Derivation of New SGS Model —

張 会来\*・谷口伸行\*・小林敏雄\*\*

H. ZHANG, Nobuyuki TANIGUCHI and Toshio KOBAYASHI

## 1. はじめに

本論文では乱流 LES (Large Eddy Simulation) において瞬時場の特性を考慮した SGS (Sub-Grid Scale) モデルの改良を試みる。LES は格子フィルターサイズにより、乱流場を GS (Grid Scale) 成分と SGS 成分に分けて解析する。すなわち、GS 成分は直接数値計算できる成分であり、SGS 成分はその影響をモデル化すべき成分である。フィルター操作した運動方程式、つまり GS 成分の輸送方程式と連続方程式は、

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

のように書ける。ここで、SGS 応力項  $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$  がモデル化すべき項であり、たとえば、渦粘性仮定に従えば、

$$\tau_{ij} = 2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} \tau_u \delta_{ij}$$

とかかれ、渦粘性係数  $\nu_{SGS}$  はスマゴリスキモデル<sup>1</sup>では  $\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2}$  と与えられるが、このモデル化については幾つかの問題が指摘されている。

まず、重要なのはスマゴリスキモデルが瞬時的な SGS 成分から GS 成分へのエネルギー逆輸送 Back-Scatter<sup>2, 3, 4, 5</sup> を全く考慮しえないことである。これは、渦粘性仮定から導かれる性質であるが、DNS データによるアプリオリテストからは瞬時局所場においてこの仮定が有効でないことが示されている。

次の問題はスマゴリスキ係数  $C_s$  値の同定である。Lilly<sup>6</sup> は一様等方乱流にコロモゴロフ慣性小領域 ( $-5/3$  則領域) を仮定して関係式、

$$C_s^2 = \left( \frac{3}{2} \alpha_K \right)^{-3/2} \pi^2$$

からコロモゴロフ定数  $\alpha_K = 1.5$  (Champagne ら<sup>7</sup>) としてモデル定数  $C_s = 0.169$  を与えた。局所等方性の仮定に従えば、格子サイズを慣性小領域に切ることによって  $C_s$  は流れに普遍的な定数と期待される。しかし、実際の計算結果からは流れ場形状に応じて  $C_s$  の最適値が平均流せん断強さなどに依存することが指摘されており、一様等方乱流では 0.2、自由せん断流で 0.12 ~ 0.15、チャンネル流では 0.1 が用いられる。係数  $C_s$  の流れ依存性はスマゴリスキモデルが統計平均的にも不適であることを示唆する。

三番目は壁面近くの粘性低層での渦粘性の壁への漸近性が正しくない (壁で零にならない) ことで、実用計算では減衰関数  $([1 - \exp(-y^+/A)]^2, \text{Van Driest}^8)$  をフィルターサイズ  $\Delta$  に乗じて粘性底層の渦粘性分布を表現している。

これらの問題に対して Germano ら<sup>9, 10, 11</sup> はスマゴリスキモデル係数  $C_s$  を数値解から算定するダイナミック SGS モデルを提案した。ダイナミック SGS モデルは形式的には負の係数 ( $C_s^2$ ) を算出しようが、その変動量や空間分布は必ずしも物理的意味を持つとはいえず、また、負渦粘性係数は計算上の数値不安定を生じるため、一様方向やラグラジアン座標に沿った平均操作を採ることが必要である。このような平均手段によりダイナミック SGS モデルの解析法が得られ、第 2、第 3 にあげた統計平均的な問題には改善を与えることが報告されているが、当然ながら“ダイナミック的な”計算利点も失い、Back-Scatter の予測機構の適切なモデルを与えるとは言いがたい。さらに、平均的な  $C_s$  値についても差分誤差や外力項がある場合には従来の定式では必ずしも正確な予測を与えないことが指摘される。

そこで、本論文ではスマゴリスキモデルにおいて瞬時場の特性を陽的に考慮するための評価パラメータとして新たに数値コロモゴロフスケール ( $\eta_N$ ) を導入する。また、格子スケールについても解像度スケール ( $\Delta_R$ )、フィルターサイズ ( $\Delta_F$ ) とを区別することでより正確な定式化を提案する。

\*東京大学生産技術研究所 第 2 部

\*\*東京大学国際・産学共同研究センター

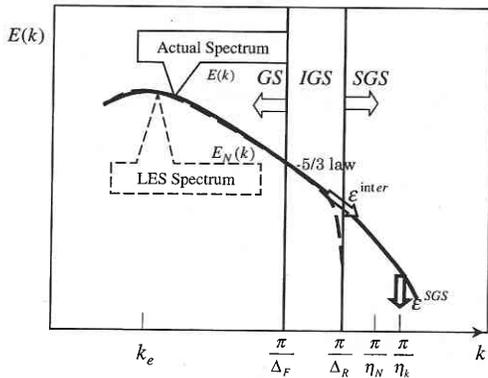


Fig. 1 Sketch of energy transfer and relation between the numerical spectrum and actual spectrum in Fourier space.

## 2. スマゴリンスキモデルの改良

図 1 に新しいモデル ( $\eta_N$ -SGS モデルと呼ぶ) の基礎となる概念図として発達した乱流場の波数空間のエネルギースペクトル分布を示している。ここで、スマゴリンスキモデルの導出には 4 つの仮定が用いられる。すなわち、

**仮定 1 :** Re 数十分大きい条件の下での SGS 応力の近似として渦粘性を仮定できる。

**仮定 2 :** GS 成分から SGS 成分へのエネルギー伝達率と SGS 成分から熱への散逸率とは局所平衡にある。

**仮定 3 :** GS 成分の分子粘性による散逸率は無視できる。

**仮定 4 :** 計算格子が慣性小領域にあるならば、格子スケール近傍のスペクトルはコロモゴロフスペクトル法則に従う。

以上の仮定は次の式で表現される。

- (1)  $\epsilon^{inter} = \nu_{SGS} (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})$ ;
- (2)  $\epsilon^{inter} = \epsilon^{SGS}$ ;
- (3)  $\epsilon^{GS} = 0$  or  $\epsilon^{total} = \epsilon^{inter} = \epsilon^{SGS}$ ;
- (4)  $E(k) = \alpha_K (\epsilon^{total})^{2/3} k^{-5/3}$

しかしながら、これらの条件を実際の流れ場解析で全て満足することは難しい。たとえば、壁面近傍では分子粘性の影響が大きく、また、格子を集中することを考えると、実質的な格子解像度は高くなるので原理的には正確な LES が可能なはずであるが、少なくとも仮定(3)には適切な修正が必要である。

ここで、乱流の真の解と LES 解を比較して、波数空間で前者を全空間スペクトル (Actual Spectrum), 後者を計算空間スペクトル (LES Spectrum) と考える。従来のスマゴリンスキモデルは、LES 計算空間スペクトルを GS (Grid Scale) とみなし、その最も高波数 (図 1 の  $\pi/\Delta_R$ ) におい

て上記の仮定を当てはめている。しかし、実際の LES 解は空間的、時間的にランダム性、間欠性をもつので GS (Grid Scale) と SGS (Subgrid Scale) を明確に切り分ける根拠に乏しい<sup>12</sup>。そこで、本研究では計算空間スペクトルを、計算格子によりほぼ完全に解像される GS 成分と全く解像されない SGS 成分との間に部分的に解像される IGS (Intermediate Grid Scale) 成分を加えた 3 つの領域に分けて考える。ここで、0 から  $\pi/\Delta_F$  までを GS 成分、 $\pi/\Delta_F$  から  $\pi/\Delta_R$  までを IGS 成分、 $\pi/\Delta_R$  により大きい波数成分を SGS 成分とすると、 $\Delta_F$  は定義されたフィルタサイズと、 $\Delta_R$  は LES 解スペクトルの解像スケールとそれぞれ関連付けられると考えられる。

このとき、新しい概念での GS 成分 (以下では単に GS と呼ぶ) はエネルギー保有領域を、同じく新しい概念での SGS 成分は散逸領域を良く近似するものと考え、仮定 3 において実際の格子解像度による依存性は以下のように考慮される。

$$\begin{aligned} \epsilon^{GS} + \epsilon^{IGS} \neq 0 \Rightarrow \epsilon^{total} &= \epsilon^{GS} + \epsilon^{IGS} + \epsilon^{inter} \\ &= \epsilon_N^{GS} + (\epsilon_N^{IGS}) + \epsilon_N^{SGS} \end{aligned}$$

(下添字 N は LES 数値解に基づくことをあらわす) 重要なのは LES がカットオフ波数以下の波数領域 (GS と IGS) しか計算できず、かつ、IGS 成分は全ての乱流スペクトルを含んでいないことであり、これらの LES 数値解による既知の情報のみから全波数空間の散逸率を正しく評価することが求められる。

## 3. $\eta_N$ -SGS モデルの導出

### 3.1 スマゴリンスキ定数の再評価

スマゴリンスキモデルに従えば、全波数空間 (Actual Spectrum) において解像される場 (GS + IGS) から解像されない場 (SGS) へのエネルギーの伝達は：

$$\epsilon^{inter} = \epsilon_N^{SGS} = 2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \dots \dots \dots (1)$$

$$\nu_{SGS} = C' \Delta^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \dots \dots \dots (2)$$

とモデル化される。 $\Delta$  は次元解析より導入した SGS 渦粘性の空間代表スケールである。ここで、LES 解スペクトルが IGS で減衰することを考慮すると渦粘性に寄与する  $\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$  は GS 成分 (0 から  $\pi/\Delta_F$  までのスペクトル) で近似できると考えられる。そのカットオフスケール  $\Delta_F$  が慣性小領域にあるとするならばコロモゴロフのスペクトル法則 ( $E(k) = \alpha_K (\epsilon^{total})^{2/3} k^{-5/3}$ ) が適用でき次のように評価できる<sup>13</sup>：

$$(2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}) = 2 \int_0^{\pi/\Delta_F} k^2 E(k) dk = \frac{3}{2} \alpha_K (\epsilon^{total})^{2/3} \left(\frac{\pi}{\Delta_F}\right)^{4/3} \dots \dots \dots (3)$$

これを式 (1) に代入すると,

$$C' = \left(\frac{3}{2}\alpha_K\right)^{-3/2} \pi^{-2} \left(\frac{\Delta_F^2}{\Delta^2}\right) \frac{\varepsilon^{inter}}{\varepsilon^{total}} \dots\dots\dots (4)$$

とあらわされる.

高 Re 数等方乱流のもとではスマゴリンスキモデルの仮説 3  $\varepsilon^{inter} = \varepsilon^{total}$  からモデル定数  $C' (= Cs^2)$  が定められるが, より一般的にはエネルギースペクトル関数  $E$  の発展方程式,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = F - 2\nu k^2 E; \int_0^\infty dk F = 0 \dots\dots\dots (5)$$

から  $\varepsilon^{inter}$  と  $\varepsilon^{total}$  の関係が求められる.

$$\begin{aligned} \varepsilon^{total} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty E dk = 2\nu \int_0^\infty k^2 E dk; \\ \varepsilon^{inter} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi/\Delta} F dk = 2\nu \int_{\pi/\Delta}^\infty k^2 E dk \\ \frac{\varepsilon^{total}}{\varepsilon^{inter}} &= 1 - \frac{\int_0^{\pi/\Delta} E(k) k^2 dk}{\int_0^\infty E(k) k^2 dk} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで, GS + IGS 成分が解像する速度場のカットオフ波数 ( $\varepsilon^{inter}$  を評価する) を  $\pi/\Delta_R$  としている.

**3.2 数値コロモゴロフスケール  $\eta_N$  の導入**

Hinze<sup>14</sup> は, ある波数  $k$  がエネルギー保有波数  $k_e$  より十分に大きい場合 ( $k \gg k_e$ ), 高波数空間に対して時間微分項  $\partial E(k)/\partial t$  が小さく, 積分  $\partial/\partial t \int_{k > k_e} dk E(k)$  が無視でき, 総散逸は  $\varepsilon^{total} = 2\nu \int_0^{\infty} dk k^2 E(k)$  のように算定されると指摘している.

一般にコロモゴロフスケール波数  $k = 2\pi/\eta$  がこの条件を満たすと考えられるが, LES 数値解から  $\eta$  を直接与えることはできない. そこで, LES 数値解による近似値,

$$\eta_N = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon_N^{GS}}\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3}{2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}\right)^{1/4} \dots\dots\dots (7)$$

を数値コロモゴロフスケールとして導入する. 上記の考察に従い数値コロモゴロフスケール  $\eta_N$  を用いて式 (6) を書きなおせば,

$$\frac{\varepsilon^{inter}}{\varepsilon^{total}} = 1 - \frac{\int_0^{\pi/\Delta_R} E(k) k^2 dk}{\int_0^{\pi/\eta_N} E(k) k^2 dk} \dots\dots\dots (8)$$

となる. 2つのスケール  $k = \pi/\Delta_R$  と  $k = \pi/\eta_N$  とも慣性小領域に入ると考えてコロモゴロフスペクトル則:

$$E(k) = \alpha_K (\varepsilon^{total})^{3/2} k^{-5/3} \text{ を適用すると,}$$

$$\int_0^{\pi/\Delta_R} k^2 E(k) dk = \frac{3}{2} \alpha_K (\varepsilon^{total})^{2/3} \left(\frac{\pi}{\Delta_R}\right)^{4/3} \dots\dots\dots (8 a)$$

$$\int_0^{\pi/\eta_N} k^2 E(k) dk = \frac{3}{2} \alpha_K (\varepsilon^{total})^{2/3} \left(\frac{\pi}{\eta_N}\right)^{4/3} \dots\dots\dots (8 b)$$

と評価される. ここで, 二倍の数値コロモゴロフスケール ( $2\eta_N$ ) をもつ, そのカットオフ波数 ( $\pi/\eta_N$ ) は総散逸  $\varepsilon^{total} = 2\nu \int_0^{\infty} dk k^2 E(k)$  のような算出条件を満たされると考えられるが, 必ずしもコロモゴロフスペクトル則:  $E(k) = \alpha_K (\varepsilon^{total})^{3/2} k^{-5/3}$  を満たされるとは限らない. 式 (8 b) は波数 ( $\pi/\eta_N$ ) の仮設として使われる. 両式を式 (8) に代入して

$$\begin{aligned} C' &= \left(\frac{3}{2}\alpha_K\right)^{-3/2} \pi^{-2} \left(\frac{\Delta_F^2}{\Delta^2}\right) \left[1 - \left(\frac{\eta_N}{\Delta_R}\right)^{4/3}\right] \\ &= Cs^2 \left(\frac{\Delta_F^2}{\Delta^2}\right) \left[1 - \left(\frac{\eta_N}{\Delta_R}\right)^{4/3}\right] \end{aligned}$$

実質的なモデル定数は改めて定義すると

$$C = \left(\frac{3}{2}\alpha_K\right)^{-3/2} \pi^{-2} \left[1 - \left(\frac{\eta_N}{\Delta_R}\right)^{4/3}\right] = Cs^2 \left[1 - \left(\frac{\eta_N}{\Delta_R}\right)^{4/3}\right] \dots\dots\dots (4 a)$$

LES 数値解により算出可能な定式が得られる. 本報では, この新しい SGS モデルを  $\eta_N$ -SGS モデルと呼ぶ. SGS 応力の最終的な定式ではスマゴリンスキーモデルの渦粘性代表スケール  $\Delta$  が消去されて,

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{ii} \delta_{ij}; \\ \nu_{SGS} &= (Cs \Delta_F)^2 \left[1 - \left(\frac{\eta_N}{\Delta_R}\right)^{4/3}\right] (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる.

ここで,  $\eta_N$ -SGS モデルの定式 (9) について従来のスマゴリンスキーモデルと比較してみると, 渦粘性係数の次元解析の長さスケール  $\Delta$  がフィルタースケール  $\Delta_F$  として再定義されたともみなせるが, これは従来のコロモゴロフ定数の理論的検討<sup>9</sup> と矛盾しない. よって,  $\eta_N$ -SGS モデルのモデル定数  $Cs$  は, 一様等方性乱流の慣性小領域において定められる物理的なスマゴリンスキー普遍係数 ( $Cs \sim 0.17$ ) を LES 格子解像度によらずに採用できると考えられる.

**3.3 格子解像スケール  $\Delta_R$  とフィルタースケール  $\Delta_F$**

$\eta_N$ -SGS モデルでは, 従来のスマゴリンスキーの導出過程を再評価して 2 つ長さスケール, **格子解像スケール  $\Delta_R$  とフィルタースケール  $\Delta_F$**  を導入した. 実際の LES 数値解析に適用するには, これらのスケールを採用した空間フィルタと数値スキームに適合するように定式化する必要がある.

差分格子に依存した体積平均フィルタを採用するとき, 格子解像スケール  $\Delta_R$  を LES 数値解の最大解像度にとるならば三次元スペクトル空間の波数  $k$  と差分格子上の一次元カットオフ波数  $k_1$  との関係  $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$  より<sup>23</sup>,

$$\Delta_R = \left[ \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta_3}\right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

研 究 速 報

と与えられる。一方、フィルタスケール $\Delta_f$ は差分格子上的のカットオフ波数 $k_1, k_2, k_3$ の代表値になるよう、

$$\Delta_f = \left[ \frac{3}{\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta_3}\right)^2} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (11)$$

が適当と考えられる。格子アスペクト比が1であれば

$$\Delta_f = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$$

となり、従来のスマゴリンスキーモデルとも整合性する。

従来のスマゴリンスキーモデルでは壁面漸近性を補正するためにフィルタスケール $\Delta$ に対してダンピング関数を適用している。 $\eta_N$ -SGS モデルでは壁面近傍における低レイノルズ数効果は取り入れられていると考えられるが、非等方性の影響は考慮されていない。その影響は主に $\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}$ を介して現れると考えられることから、ここでは、 $\Delta_f$ に対してのみ Van Driest 型の減衰関数 $f_\mu = [1 - \exp(-y^+/A)]^2$ を課す。

4. ま と め

この論文ではスマゴリンスキーモデルの導出過程について再評価を試み、格子解像度スケール ( $\Delta_R$ )、フィルタスケール ( $\Delta_f$ )、および、数値 Kolmogorov スケール ( $\eta_N$ ) の三つの新しいスケールを導入することによって LES 数値解の格子解像度の依存性を考慮して、新たに  $\eta_N$ -SGS モデルを導出した。

$\eta_N$ -SGS モデルは従来のスマゴリンスキーモデルに対して以下のような長所をもつと期待できる。

- 1) モデル定数は LES 数値解の格子解像度によらず、スマゴリンスキー定数の理論値 ( $C_s \sim 0.17$ ) から与えられる。
- 2) SGS 渦粘性の定式化において格子解像度の影響が考慮され、実質的なモデル定数  $c = c_s^2 \left[ 1 - \left(\frac{\eta_N}{\Delta_f}\right)^{10} \right]$  が局所格子分割と流れ場の状況に応じて調整される。
- 3) 実質的なモデル定数  $C$  は LES 数値解によりダイナミックに与えられるので Backward Scatter 現象予測の可能性がある。一方、コロモゴロフスペクトル則に基づいた定式であるので過大な数値変動は避けられる。
- 4) 格子解像スケール $\Delta_R$ とフィルタスケール $\Delta_f$ を区別して再定義したことにより、フィルタ定義と SGS モデルの関係が明示的に定式化される。混相流など複雑乱流場への展開に際して渦粘性モデルの導出過程をより詳細に検討できる。
- 5) 格子解像度の指標とした ( $\eta_N/\Delta_R$ ) は、高レイノルズ数の乱流で慣性小領域にカットオフ・フィルタがとられた場合には0に漸近し従来のスマゴリンスキーモデルに近づく。逆に、粘性散逸領域に格子が切られる場合は  $\eta_N/\Delta_R = 1$  となり DNS に漸近する。

なお、実際の LES 数値解析に適用した数値検証については次報に示す。

謝 辞

本研究は文部省科学研究費 (No. 10217135) の助成を受け行われた。また、本研究所の吉澤教授と半場助教授から多くの助言を頂きましたことに、ここでご感謝の意を心より申し上げます。

(1999年11月17日受理)

参 考 文 献

- 1) J. Smagorinsky "General circulation experiments with the primitive equations I the basic experiment". Mon. Weather Rev. 91 (1963), pp. 99-164.
- 2) K. Horiuti, "Numerical investigation of turbulent channel flow" Phys. Fluids A 1 (1989.2), pp. 426-428
- 3) U. Piomelli, W. H. Cabot, P. Moin and S. Lee, "Subgrid-scale backscatter in turbulent and transitional flow", Phys. Fluid A 3 (1991), pp. 1766-1771.
- 4) J. A. Domaradzki, R. S. Rogallo and A. A. Wray, "Inter-scale energy transfer in numerically simulated turbulent", Proceeding of the 1990 Summer Program (Center for Turbulence Research) pp. 319-329.
- 5) C. Hartel and L. Kleiser "Analysis and modeling of subgrid-scale motions in near-wall turbulence" J. Fluid Mech. 356: 327-352 (1998).
- 6) D. K. Lilly, "On the application of the eddy viscosity concept in the inertial subrange flow" NCAR Manuscript 123, 1966.
- 7) F. H. Champagne, C. A. Friehe, J. C. LaRue and J. C. Wyngaard, "Flux measurement, flux estimation techniques and fine scale turbulence measurements in the unstable surface layer over land" J. Atmos. Sci. 34: pp. 515-30 (1977).
- 8) E. R. Van Driest, "On turbulent flow near a wall", J. Aero. Sci. 23 (1956), pp. 107-1011 (1956).
- 9) M. Germano, U. Piomelli, P. Moin and W. H. Cabot, "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model" Phys. Fluids A 3 (7), July 1991, pp. 1760-1765 (1991).
- 10) D. K. Lilly, "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method" Phys. Fluids A 4(3) pp. 633-35 (1992).
- 11) U. Piomelli, "High Reynolds number calculation using the dynamic subgrid-scale stress model" Phys. Fluids A 5 (6): 14845-90 (1993).
- 12) J. Bardina, "Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows" Ph.D. dissertation, Stanford University (1983).
- 13) G. K. Batchelor, "The theory of homogeneous turbulence" Great Britain at the University Press, Cambridge (1953).
- 14) J. O. Hinze, "TURBULENCE" McGraw-Hill BOOK COMPANY, INC (1959).
- 15) H. L. ZHANG, "Large Eddy Simulation of In-Cylinder Flow" Univ. of Tokyo, Ph.D. Thesis, 1999. 8.