

SGS 乱流応力, 及び乱流スカラー流束輸送方程式の生成項 に着目した LES モデリング

—第 1 報 渦粘性モデル, 渦拡散モデルの構築と差分法による評価—

LES modeling considering the production term of SGS turbulent stress and scalar flux transport equations.

—Part I Modeling of SGS eddy viscosity and diffusion and its assessment by finite difference method.—

坪 倉 誠*・小 林 敏 雄**・谷 口 伸 行***

Makoto, TSUBOKURA, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI

1. 緒 言

ラージエディシミュレーション (Large Eddy Simulation, 以下 LES) における乱流モデル, 即ちサブグリッドスケール (Subgrid Scale, 以下 SGS) モデルにおいてはスマゴリンスキーモデル¹⁾に代表される等方型渦粘性モデルがしばしば用いられる. この理由として, この種のモデルを用いた場合, 乱流エネルギーはグリッドスケール (Grid Scale, 以下 GS) から SGS に順散逸し, 粗い計算格子を用いても比較的安定に計算が行えるという工学的利点が挙げられる. また, より高度な SGS モデルを適用する際も, 散逸モデルとして渦粘性型モデルを併用する混合型モデル^{2) 3)}が実用的に採用されており LES における渦粘性モデルの有用性は高い. Yoshizawa ら⁴⁾は SGS 乱流応力の生成項に着目し, この生成項に乱流時間スケールを乗じる事で, SGS における局所平衡の仮定を用いない等方型渦粘性モデルを導出した. 著者らはさらにこの手法に対して別の乱流時間スケールを用いる事で修正した等方型渦粘性モデルを導出し, 等方型渦粘性モデルの差分法における有用性の検討を行った⁵⁾. 本研究においてはこの続報として, 既報に対してより高いレイノルズ数における有用性の検討と, さらに Yoshizawa らの手法の応用として, SGS 乱流フラックスのモデル化を行い, その有用性の検討を行う.

2. SGS モデリング

以降, グリッドフィルタ操作を $(\bar{\quad})$ およびこのときのフィルタ幅を Δ , ダイナミックモデル⁶⁾で用いられるテストフィルタ操作を $(\tilde{\quad})$ およびこのときのフィルタ幅を $\tilde{\Delta}$ とする. このとき, モデル化を必要とする SGS 乱流応力,

乱流フラックスは

$$\tau(u_i, u_j) = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \dots\dots\dots (1)$$

$$\tau(u_i, \theta) = \overline{u_i \theta} - \bar{u}_i \bar{\theta} \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる. $\tau(a, b)$ はフィルタ操作 $(\bar{\quad})$ に対する二次のモーメント $\tau(a, b) = \overline{ab} - \bar{a}\bar{b}$ を表す. ここでは特に SGS における運動の相互作用に対するモデル化のみを考慮して,

$$\tau(u_i, u_j) \approx \overline{u_i' u_j'} \dots\dots\dots (3)$$

$$\tau(u_i, \theta) \approx \overline{u_i' \theta'} \dots\dots\dots (4)$$

と, レイノルズ項のモデル化にのみ注目する. これは渦粘性性及び渦拡散モデルが小スケールの等方的散逸を表現すると考える為である. その他の項についてはスケール相似則モデル²⁾等のモデル化手法が有効であると考えられる. このときスマゴリンスキー型のモデルは次のように与えられる.

$$\tau(u_i, u_j) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau(u_k, u_k) = -2C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \dots\dots S \text{ モデル } (5)$$

$$\tau(u_i, \theta) = -C_\theta \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \dots\dots SS \text{ モデル } (6)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), |\bar{S}| = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \dots\dots\dots (7)$$

以降, (5)式を S モデル (Smagorinsky モデル), (6)式を SS モデル (Smagorinsky for Scalar モデル) と表記する. このスマゴリンスキー型渦粘性モデルに対して Yoshizawa らは, SGS 乱流応力輸送方程式の生成項,

$$P_{ij} = -\tau(u_j, u_k) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \tau(u_j, u_k) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \dots\dots\dots (8)$$

*東京工業大学大学院総合理工学研究科
 **東京大学国際・産学共同研究センター
 ***東京大学生産技術研究所第 2 部

研 究 速 報

に適切な時間スケール T を乗じ、生成項に含まれる SGS 乱流応力に等方性を仮定して (即ちで、 $j \neq j$ で、 $\tau(u_i, u_j) = 0$, $i = j$ で $\tau(u_i, u_j) = \tau(u_k, u_k) / 3$) 次のような等方型渦粘性モデルを導出した。

$$\tau(u_i, u_j) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau(u_k, u_k) = -\frac{2}{3} CT \tau(u_k, u_k) \bar{S}_{ij} \dots \dots \dots (9)$$

ここで時間スケール T , および SGS エネルギーに対してモデル化が必要なことに注意されたい。今、時間スケールに対して $T = 1/|S|$ を用い、 $\tau(u_k, u_k)$ にはスケール相似則モデル $\tau(u_k, u_k) \approx (\bar{u}_k - \bar{u}_k)(\bar{u}_k - \bar{u}_k)$ を適用すると、

$$\tau(u_i, u_j) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau(u_k, u_k) = -\frac{2}{3} \left\{ C (\bar{u}_k - \bar{u}_k)(\bar{u}_k - \bar{u}_k) / |\bar{S}| \right\} S_{ij} \dots \dots \dots \text{I モデル} (10)$$

が得られる。ここで時間スケール、及びスケール相似則モデルの適用に際して必要となるモデル係数は全て (10) 式中のモデル係数 C に含まれているとみなす。時間スケールの選定には他の候補も考えられるが、ここでは最終的に定式化されるモデルにおいてフィルタ幅で表される長さスケールが陽的に現れないという観点から上で述べた時間スケールを適用した⁵⁾。(10)式で表されるモデルをここでは I モデル (Isotropic モデル) と表記する一方 SGS 乱流スカラフラックス輸送方程式に対する生成項は、

$$P_i^\theta = -\tau(u_k, \theta) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \tau(u_i, u_k) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \dots \dots \dots (11)$$

で与えられ、SGS 乱流応力のモデル化と同様に、この生成項において SGS 乱流応力、ならびに SGS 乱流スカラー流束に対して等方性を仮定して、渦拡散モデルが得られる。ここでは (10) 式を導出した時適用した時間スケールと $\tau(u_k, u_k)$ に対するモデル化を適用して、最終的に次のような渦拡散モデルが導出される。

$$\tau(u_i, \theta) = -\frac{1}{3} \left\{ C_\theta (\bar{u}_k - \bar{u}_k)(\bar{u}_k - \bar{u}_k) / |\bar{S}| \right\} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \cdot \text{IS モデル} (12)$$

このモデルを IS モデル (Isotropic for Scalar モデル) とする。モデル中の係数については Germano ら⁶⁾により提唱され、Lilly により修正されたダイナミック SGS モデルの手法を適用する。この際、スケール相似則モデルを用いた部分のダイナミック SGS モデルの定式化に際しては Vreman ら⁷⁾により提唱されている定式化を用いている。

3. 数値解析手法

前述の S, SS, I, IS モデルをパッシブスカラー輸送を含むチャンネル乱流に適用し、その有用性を検討する。レイノルズ数は Kim ら⁸⁾、及び Horiuti⁹⁾ の DNS に合わせて壁面摩擦速度とチャンネル半幅で無次元化して 180 とする。解析領域は流れ方向、壁に垂直方向、スパン方向をそれぞれ x, y, z 方向とし、それぞれ $x = 4\pi, y = 2, z = 4/3\pi$ とする。用いた格子数はそれぞれ 32, 64, 32 である。このとき、流れ方向の格子幅は、 $\Delta x^+ = 70.7$ スパン方向は $\Delta z^+ = 23.5$ となる。また Moser ら¹⁰⁾ の DNS に合わせてレイノルズ数 590 の解析も行った。このときの解析領域は、 $x = 2\pi, y = 2, z = \pi$ で、用いた格子数はそれぞれ 64, 64, 64 である。このときの格子解像度は、 $\Delta x^+ = 57.9, \Delta z^+ = 28.9$ となっている。

基礎式の離散化には有限差分法を用いる。このとき、対流項、圧力勾配項、連続式に対して森西により提案された運動量、エネルギー保存スキームを適用する¹¹⁾。このときの対流項、圧力勾配項、連続の式に対する差分精度は 4 次である。詳しい数値解析手法は森西の文献を参照されたい。フィルタ操作の離散化についてはフィルタ幅に対して 4 次精度を考慮して

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i + \frac{\tilde{\Delta}^2}{24} \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{h^2} + O(\Delta^4) \dots \dots \dots (13)$$

で与えられる¹²⁾。ここで右下添え字 i は格子点の位置を示している。このとき、 h は格子幅であり、離散化したフィルタ操作においては Δ/h がパラメータとなり与えなければならない。本研究においてはテストフィルタ操作に対して $\tilde{\Delta}/h = \sqrt{6}$ とする。このとき、Germano らにより提案されている $\tilde{\Delta}/\bar{\Delta} = 2$ 、及びグリッドフィルタ ($\bar{\Delta}$)、テストフィルタ ($\tilde{\Delta}$)、およびグリッド・テストフィルタ ($\bar{\Delta}$) 間の関係式、 $\bar{\Delta}^2 + \tilde{\Delta}^2 = \bar{\Delta}^2$ を考慮して、本研究で採用したそれぞれのフィルタ操作におけるパラメータは表 1 で与えられる。数値解析結果のこのパラメータ値に対する依存性については既報⁵⁾を参照されたい。

なお、本研究におけるチャンネル流れにおいては壁方向については陽的なフィルタ操作を行わない。従って S モデ

表 1 各フィルタ操作におけるフィルタ幅と格子幅の比

$\bar{\Delta}/h$	$\tilde{\Delta}/h$	$\bar{\Delta}/h$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$

ル, SS モデルを用いた場合のダイナミックモデルの定式化に含まれるフィルタ幅の比については $\alpha = 2^{2/3}$ で与えている. またモデル係数のダイナミックモデルによる導出の際には, 数値不安定性を回避する為に, x および z 方向に平均操作が施される.

4. 解析結果

4.1 $Re_\tau = 590$ における渦粘性モデルの比較

S モデルに対する I モデルの有用性については $Re_\tau = 180$ の場合については既報で示した. ここではより高いレイノルズ数のケースとして最近公表された Moser らの DNS と比較し, $Re_\tau = 590$ における提案したモデルの有用性を検討する. 図 1 に平均流速, 図 2 ~ 4 に各方向の GS 乱流強度を示す. 図 1 については DNS の結果が両レイノルズ数において I モデルとほぼ一致している為, 特に対数則領域について両者の判別が困難である事に注意されたい. 平均流速については参考の為, $Re_\tau = 180$ のケースについても示す. 図 1 からわかる通り, ダイナミックモデルを用いた S モデルにおける欠点の一つとして平均流速分布の対数則領域における過大評価が挙げられ, この傾向は $Re_\tau = 590$ においては $Re_\tau = 180$ と比較してやや緩和されているが, 両レイノルズ数において観察される. これに対して I モデルを用いた結果は, 両レイノルズ数において DNS との一致は良好であり, S モデルの問題点が改善されているのがわかる.

I モデルの S モデルに対する有用性は図 2 ~ 4 の GS 乱流強度を見ても明らかである. 等方型渦粘性モデルを用いたダイナミックモデルにおける対数則領域の過大評価は壁近傍領域での GS 乱流強度が過剰に非等方的に評価される事と強く結びついており, この乱流強度の過剰な非等方性の緩和が対数則領域の過大評価を緩和する事がこれらの図からわかる. ただし興味深いのは平均流速の対数則領域に対して DNS との一致が良好な I モデルでさえ, 壁近傍の GS 乱流強度を DNS と比較した場合, 過剰に非等方的に評価している点であり, この結果はダイナミックモデルによる等方型渦粘性モデルの限界を示している物と考えられる.

なお, 既報で示した通り, I モデルにおける統計量の改善は, 渦粘性係数に対して S モデルと比較して, I モデルはより小さく評価される傾向に結びついている事が図 5 からわかる.

4.2 SGS 乱流スカラー流束モデルの比較

次にスカラーに対する渦拡散モデルである SS モデルと IS モデルの比較を行った. スカラーは流れ場に対して影響を与えないパッシブスカラーとし, このスカラー量は流

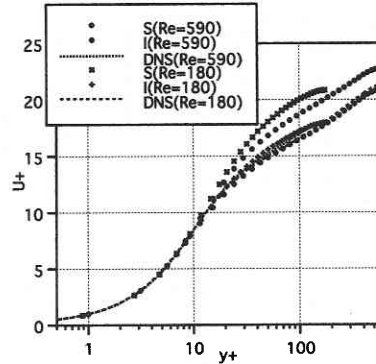


図 1 流れ方向平均流速

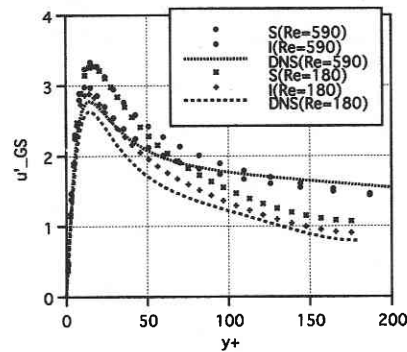


図 2 流れ方向 GS 乱流強度

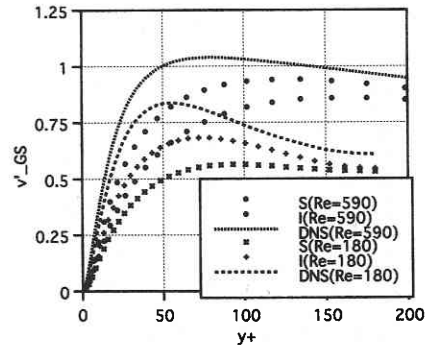


図 3 壁垂直方向 GS 乱流強度

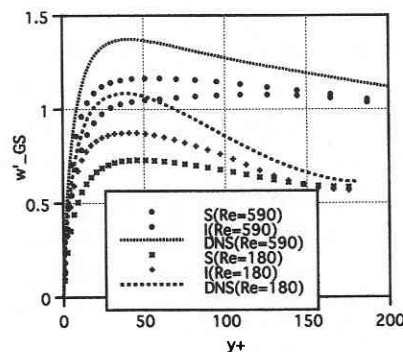


図 4 スパン方向 GS 乱流強度

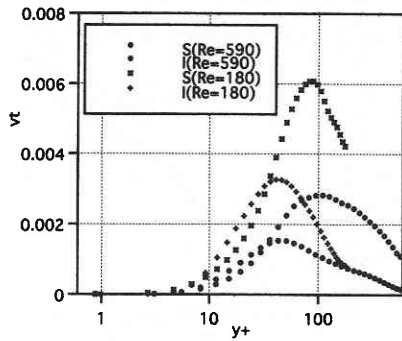


図 5 SGS 渦粘性係数の比較

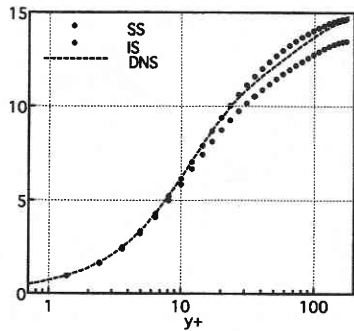


図 6 流れ方向平均スカラー分布

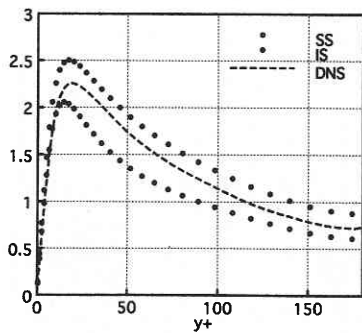


図 7 GS スカラー変動の RMS

れ場全体で一様に生成され壁面上でゼロとなるとしている。詳しくは Horiuti の論文⁹⁾を参照されたい。なお、流れ場の解析に対しては 4.1 においてスマゴリンスキー型モデルに対する有用性が示された I モデルを用いて解析を行っている。図 6 に GS スカラーの平均分布、及び図 7 に変動の自乗平均分布を示す。SS モデルと比較した場合、IS モデルの DNS との一致は良好である。なお、渦拡散係数に含まれるモデル係数の決定にはダイナミックモデルを SGS 乱流スカラー流束に拡張したモデルを用いている¹³⁾。

5. 結論と考察

本研究における解析結果から以下の知見が得られた。

- (1) 既報により示された I モデルの S モデルに対する有用性が、既報に対してより高レイノルズ数である $Re_\tau = 590$ のチャンネル乱流においても示された。
- (2) SGS 乱流応力の導出に際して用いた手法を SGS 乱流スカラー流束のモデル化に適用し、等方型渦拡散モデル (IS モデル) を導出し、その有用性をチャンネル乱流におけるパッシブスカラー輸送に適用し、スマゴリンスキー型の渦拡散モデルに対する有用性を示した。これよりダイナミック SGS モデルの適用を考慮した場合、スマゴリンスキー型渦拡散モデルに替わる等方型モデルとして IS モデルを提案する。同じ等方型の渦粘性モデル、及び渦拡散モデルに対してダイナミックモデルを適用した場合、I モデル、IS モデルがスマゴリンスキー型モデルと比較して改善された統計量を予測する理由については、I、IS モデルには長さスケール Δ が陽的に含まれていない事が一つの指針となると考えられる ((10), (12) 式参照)。即ち、通常のスマゴリンスキー型モデルを適用したダイナミックモデルにおいてはモデル式中にテスト・グリッドフィルタとグリッドフィルタの比 $\alpha = \bar{\Delta}/\Delta$ が陽的に含まれ、解析に対してアプリアリに決定する必要があるが、I、IS モデルを用いた場合にはこのモデルパラメータは現れない。よって離散化手法や離散化精度に依存すると考えられる α に対する最適化が I、IS モデルには陰的に含まれている可能性があり、現在、検証を進めている。

(1999 年 10 月 19 日受理)

参 考 文 献

- 1) J. Smagorinsky, Weather Rev. 91 (1963), pp.99.
- 2) J. Bardina et al., Rept. No. TF-19 (1983), Stanford Univ.
- 3) K. Horiuti, Phys. Fluids 9 (1997), pp. 3443.
- 4) A. Yoshizawa et al., Phys. Fluids 8 (1996), pp. 2554.
- 5) 坪倉ら, 生産研究 50-1 (1998), pp. 23.
- 6) M. Germano et al., Phys. Fluids A 3 (1991), pp. 1760.
- 7) B. Vreman et al., Phys. Fluids 6 (1994), pp. 4057.
- 8) J. Kim, et al., J. Fluid Mech. 177, pp. 133.
- 9) K. Horiuti, J. Fluid Mech. 238 (1992), pp. 405.
- 10) R. Moser et al., Phys. Fluids 11 (1999), pp. 943.
- 11) 森西, 機論 B 編 62-604 (1996), pp. 4090.
- 12) 谷口ら, 生産研究 49-1 (1997), pp. 11.
- 13) P. Moin et al., Phys. Fluids A 3 (1991), pp. 2746.