

簡易圧縮性 LES によるサーマルキャビティ内の自然対流解析

Numerical Analysis of Natural Convection in Thermal Cavity based on Weakly Compressible LES

白石 靖幸*・加藤 信介*・村上 周三*・石田 義洋**

Yasuyuki SHIRAISHI, Shinsuke KATO, Shuzo MURAKAMI, and Yoshihiro ISHIDA

1. はじめに

火災時の煙流動のように流体の密度変化が大きな流れ場では、密度変化の影響を運動方程式の浮力項のみで考慮する Boussinesq 近似の適用が困難となる。そのため、筆者らは密度変化に関して定圧場を仮定する低マッハ数近似を行った圧縮性流体の基礎方程式を適用し、さらに乱流モデルとして高浮力による圧縮性を考慮した $k-\epsilon$ 型 2 方程式モデルを導入し解析を行ってきた^{例え¹⁾}。しかし、火災現象等に係わる浮力流は非定常的な乱流性状の解析が必要とされることが多いため、LES による解析が望ましい。従って、本研究では矩形サーマルキャビティ内の乱流状態の自然対流について、低マッハ数近似を行った基礎方程式に圧縮性 SGS モデルを適用した簡易圧縮性 LES 解析を行い、実験結果との比較により予測精度の検証を行った。

2. 計算概要

2.1 計算対象

解析対象は Cheesewright らの行った実験²⁾と同条件の矩形サーマルキャビティとした。計算対象を図 1 に示す。計算対象は密閉容器 (高さ $H=2.5$ [m], 幅 $L=0.5$ [m]) の左右側壁がそれぞれ加熱 ($T_h=68$ [°C]), 冷却 ($T_c=22.2$ [°C]) され、上下壁は断熱されている。左右壁面の温度差は $\Delta T=45.8$ [°C], Ra 数は 5×10^{10} 。

2.2 支配方程式

表 1 に示す低マッハ数近似を行った圧縮性流体の基礎方程式^{3), 4)}を用いる。(5)式は空間平均圧力の計算式^{注¹⁾}である。本計算では、(3)式、(5)式中の発熱量 Q はゼロ、また閉鎖空間を計算対象としているため、(5)式の左辺第 2 項もゼロである。支配方程式に空間フィルターを施し、LES 解析を行っている。

2.3 計算条件

乱流モデルは Favre filtering^{注²⁾}に基づく圧縮性 Smagorinsky モデル⁵⁾を適用した。圧縮性 SGS stress: τ_{ij} および圧縮性 SGS heat flux: h_j の定義式を表 2 に示す。(6)式の normal 成分は運動方程式の圧力項に含め計算を行っているため、normal 成分のモデル定数 C_N の設定は必要ないが、shear 成分のモデル定数 C_S を与える必要がある。本解析においては $C_S=0.12$, $Pr_{SGS}=0.5$ とした。また、グリッドスケールには、非圧縮性の S モデルと同様に Van Driest 型の damping function を乗じた。その他の計算条件に関しては表 3 参照。また、解法に関しては表 4 に詳細に示す。

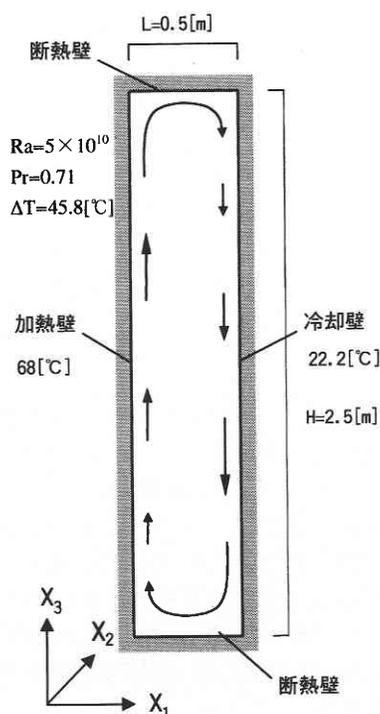


図 1 解析対象

*東京大学生産技術研究所 第 5 部

**鹿島建設株式会社

研 究 速 報
表 1 低マッハ数近似を行った圧縮性流体の基礎方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P'}{\partial x_i} + \rho g \delta_{3i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \dots (2)$$

$$C_p \left(\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{dP_0}{dt} + Q \dots\dots (3)$$

$$P_0 = \rho RT \dots\dots (4)$$

$$\frac{V}{\gamma - 1} \frac{dP_0}{dt} + \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \int_S u_i n_i dS \right) P_0 = \int_S \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS + \int_V Q dV \dots (5)$$

表 2 SGS モデル

$$\tau_{ij} = -2\bar{\rho} (C_s \bar{\Delta})^2 |\tilde{S}| \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{2}{3} \bar{\rho} C_N \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}|^2 \dots\dots (6)$$

$$h_j = -\frac{\bar{\rho} (C_s \bar{\Delta})^2 |\tilde{S}|}{Pr_{SGS}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \dots\dots (7)$$

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) \dots\dots (8)$$

$$|\tilde{S}| = \left(2\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij} \right)^{1/2} \dots\dots (9)$$

表 3 計算条件

staggered grid を使用. 離散スキームは時間に Crank-Nicolson, 空間に 2 次精度中心差分. 分子粘性係数は温度の関数として与えている. 計算領域は, X_1 - X_3 方向に実験と同じ $0.5[m] \times 2.5[m]$ とし, X_2 方向においては, $0.3[m]$ と仮定. grid 分割は $49(X_1) \times 20(X_2) \times 99(X_3)$. 速度の境界条件に関しては, ① X_1, X_3 方向壁面境界には no-slip, ② X_2 方向境界には slip-wall. 温度の境界条件に関しては, ① 加熱壁, 冷却壁は実験値, ② 上下面の断熱壁及び X_2 方向境界には勾配 0 型.

3. 計 算 結 果

3.1 平均風速

図 2 に平均速度ベクトル図を示す. 比較のため図 3 に瞬時速度ベクトル図も示す. 45.8°C の温度差では圧縮性解析による平均の流れ場の顕著な特徴は生じておらず, 全体的にはほぼ対称に時計回りの循環流を形成している. ただし, 加熱壁近傍中部から上部にかけて熱上昇流の冷却壁側へのショートサーキットが生じ, 冷却壁上部では加熱壁下部と比較して速度境界層が若干薄い. 瞬時的な流れ場は, 非対称的となっている. 図 4 に高さ $X_3 = H/2$ における $\langle u_3 \rangle$ の水平方向分布を示す. Cheesewright らの実験は, 15% 程度のヒートロスが生じているため^{注 5)}, 実験結果は流れ場の対称性が大きく崩れた結果となっているが, 速度分布の傾向としては, 実験結果と計算結果は概ね対応する. LES による計算結果では, 加熱壁, 冷却壁側共にピーク速度位置よりキャビティー内側の速度を僅かに大きく評価しているが, これは本計算ではモデル定数 C_s を 0.12 に固定して与えているためと考えられる. C_s のチューニングや dynamic procedure を用いて C_s を最適化することにより改善される可能性もあるため, 今後の検討課題としたい.

3.2 平均温度

図 5 に無次元平均温度分布を示す. 比較のため図 6 に瞬

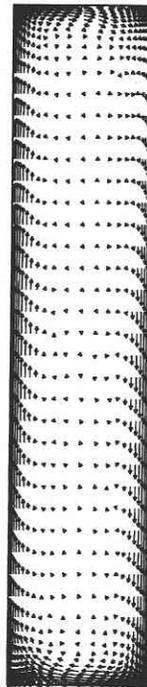


図 2 平均速度ベクトル

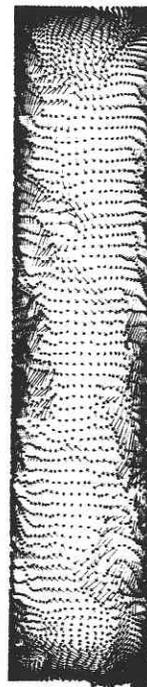


図 3 瞬時速度ベクトル

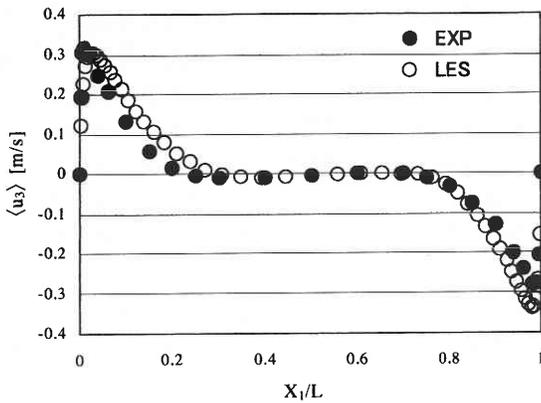


図4 <u₃> の平均風速分布 (高さ X₃=H/2)

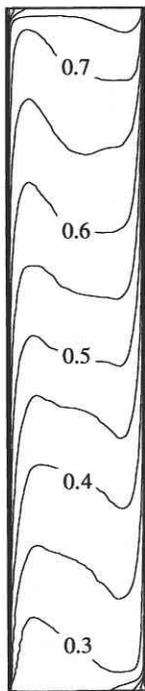


図5 平均温度分布 <T>-T_c/ΔT

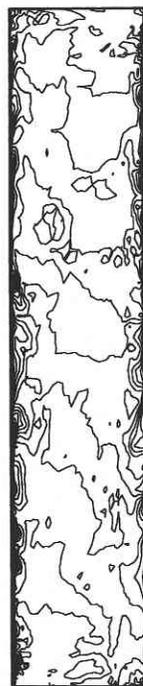


図6 瞬時温度分布

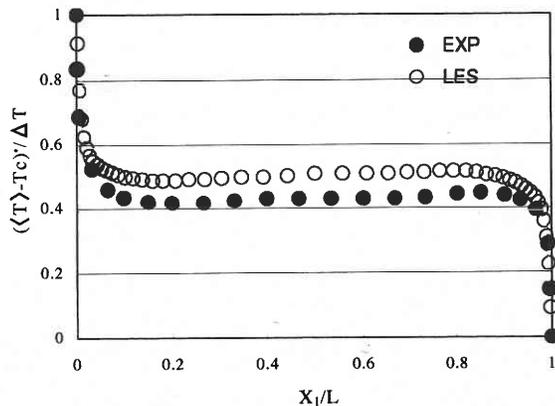


図7 平均温度分布 (高さ X₃=H/2, <T>-T_c/ΔT)

表4 解法

以下に Implicit に n+1 時点での各物理量を算出する手順を示す。ここで、m は緩和計算回数を意味する。

①空間平均圧力式(5)式より P₀^(n+1,m+1) を求める。

②エネルギー式(3)式より T^(n+1,m+1) を求める。

ここでは、①で求めた P₀^(n+1,m+1) を用いる。

③空間平均圧力式(7)式より P₀^(n+1,m+1) を求める。

④状態方程式(4)式より ρ^(n+1,m+1) を求める。

ここでは、③で求めた P₀^(n+1,m+1) を用いる。

⑤仮の圧力 P^(n+1,m) を用いて運動方程式(2)より運動量の予測値 ρu_i^{* (n+1,m+1)} を求める。

⑥圧力修正量 δP^(n+1,m+1) を求める。

ただし、δP^(n+1,m+1) = P^(n+1,m+1) - P^(n+1,m)。圧力修正量 δP のポアソン方程式は運動方程式(2)及び連続式(1)より次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial(\delta P)}{\partial x_i} \right\} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\}^{n+1} + \frac{\partial(\rho u_i)^*}{\partial x_i} \dots \dots \dots (10)$$

⑦⑥で求めた δP^(n+1,m+1) を用いて P^(n+1,m+1), ρu_i^(n+1,m+1) 及び u_i^(n+1,m+1) を求める。ただし、

$$(\rho u_i)^{(n+1,m+1)} = (\rho u_i)^{* (n+1,m+1)} - \Delta t \left\{ \frac{\partial(\delta P^{(n+1,m+1)})}{\partial x_i} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

u_i^(n+1,m+1) = ρu_i^(n+1,m+1) / ρ^(n+1,m+1) となる。

⑧各 Time step において緩和計算が収束するまで①~⑦を繰り返す。

更に、閉鎖空間を対象として解析を行う場合、各物理量の時間変化が不連続となる計算初期においては連続式を満足しにくい。運動方程式及びエネルギー式の時間項中の ρⁿ⁺¹ は、連続式より評価する。即ち、(12)式を(13)式の時間項(右辺第1項)中の ρⁿ⁺¹ に代入する。ここで、(13)式は一般形保存式の時間項と移流項のみを定義した式である。以下、Fully Implicit の場合を例に解説する。

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \Delta t \frac{\partial \rho^{n+1} u_i^{n+1}}{\partial x_i} \text{ (連続式の離散式)} \dots \dots \dots (12)$$

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \phi}{\partial x_j} \approx \frac{\rho^{n+1} \phi^{n+1} - \rho^n \phi^n}{\Delta t} + \frac{\partial \rho^{n+1} u_j^{n+1} \phi^{n+1}}{\partial x_j} \text{ (保存形離散式)} \dots \dots \dots (13)$$

$$\begin{aligned} &\approx \rho^n \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} - \phi^{n+1} \frac{\partial \rho^{n+1} u_j^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho^{n+1} u_j^{n+1} \phi^{n+1}}{\partial x_j} \text{ ((12)式を(13)式に代入)} \dots \dots \dots (14) \\ &\approx \rho^n \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \rho^{n+1} u_j^{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x_j} \text{ (非保存形離散式)} \end{aligned}$$

この式展開は、運動方程式及びエネルギー式の移流項が連続式と同様に Fully Implicit の場合、連続式の誤差を許容した形で、保存形の方程式を結果的に非保存形として解くことと同義である。また、Fully Implicit スキームを用いる限り^{注3)}、時間的に整合性のとれたスキーム^{注4)}であることを示している。

研究速報

時温度分布も示す。キャビティの上下面近傍で非対称的な温度分布を示すが、他の領域ではほぼ対照的な分布を示す。ただし、流れ場同様に瞬時温度分布も非対称となっている。また、図7に高さ $X_3 = H/2$ における無次元平均温度の水平方向分布を示す。加熱壁近傍、冷却壁近傍においてそれぞれ温度境界層が形成されておりその性状は実験結果、計算結果ともに対応する。中心部においてはヒートロスのため実験値の方が実次元に換算すると $4^{\circ}\text{C} \sim 5^{\circ}\text{C}$ 程度低い。

4. ま と め

- 1) 低マッハ数近似を行った圧縮性流体の基礎方程式を用い、矩形サーマルキャビティ内の自然対流の簡易圧縮性 LES 解析を行った。
- 2) 高さ $X_3 = H/2$ における風速、温度の計算結果は、実験結果に概ね対応した。
- 3) 今後、細密格子を用いて更に検討を行う予定である。

(1999年10月8日受理)

注

- 1) (5)式は、エネルギー式(3)を解析領域の体積 V で積分することにより導出される。また状態方程式(6)式を同様に解析領域の体積 V で積分し、(15)式を用いることにより(17)式に示す空間平均圧力の計算式も導ける⁶⁾。表4の④に示すように計算過程において、状態方程式を用いて密度を算出する場合には、質量保存のため(17)式より求めた P_0 を用いる。

$$\int_V \rho dV = \rho_0 V = \text{一定 (閉鎖空間内の質量保存則)} \dots (15)$$

$$\rho = \frac{P_0}{RT} \text{ (状態方程式)} \dots (16)$$

$$P_0 = \rho_0 R V / \int_V \frac{1}{T} dV \dots (17)$$

- 2) Favre filtering : $\tilde{\phi} = \overline{\rho\phi} / \bar{\rho}$ (18)
(オーバーバーは空間 filtering.)
- 3) (12)式、(13)式を今回筆者らが用いた Crank-Nicolson スキ

ームで離散化し、(14)式の導出と同様な操作を行った場合、連続式が完全にゼロとなっても非保存型の一般式とはならない。即ち、連続式及び運動方程式もしくはエネルギー式の移流項に Fully Implicit 以外の時間スキームを用いた場合、離散化した連続式がゼロとなっても、運動方程式もしくはエネルギー式の保存型と非保存型は一致しない。この点は、今後の研究課題としたい。

- 4) 圧力のポアソン方程式(10)式で用いる連続式の時間スキームと運動方程式、エネルギー式を保存型から非保存型へ変換する際に用いる連続式の時間スキームが同じであること。
- 5) Cheesewright らの実験は、図1の上下面及び奥行き方向の面の断熱が不十分であったと公表されている²⁾。

記 号

x_i : 空間座標の3成分, t : 時間, u_i : i 方向の流速, ρ : 密度, ρ_0 : 基準密度, T : 温度, μ : 粘性係数, P_0 : 空間平均圧力, P' : 圧力 (全圧から空間平均圧力を引いたもの), γ : 比熱比, C_p : 定圧比熱, Q : 発熱量, R : 気体定数, g : 重力加速度, δ_{ij} : クロネッカーのデルタ, V : 対象領域の容積, S : 対象領域の表面積, n_i : 界面での単位法線ベクトルの i 成分, Ra : レイリー数, Pr : プラントル数, Pr_{SGS} : SGS プラントル数, $\langle f \rangle$: 変数 f の時間平均値, \bar{f} : 変数 f に grid filter を施した値, \tilde{f} : 変数 f に favre filter を施した値

参 考 文 献

- 1) 村上周三, 加藤信介, 義江龍一郎: 日本建築学会計画系論文報告集, 第472号, pp. 45-54, 1995.
- 2) R. Cheesewright and S. Ziai: Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf., Vol. 4, 1465-1470, 1986.
- 3) Rehm, R. G. and Baum, H. R.: Journal of Research of the National Bureau of Standards Vol. 83, No. 3, May-June 1978.
- 4) G. I. Sivashinsky: Acta Astronautica. Vol. 6, pp. 631-645. Pergamon Press Ltd., 1979.
- 5) Akira Yoshizawa, Phys. Fluids, Vol. 29, No. 7, July 1986.
- 6) S. PAOLUCCI: J. Fluid Mech, Vol. 215, 1989.