記 念 講 演

計算固体力学の発展

東京大学生産技術研究所　第2部　　都井　　裕　教授

1．は じ め に

ご紹介いただきました都井でございます．よろしくお願いいたします．さっそく，「計算固体力学の発展」と題しまして講演を始めさせていただきます．

固体力学と申しましても非常に広い範囲の内容を含んでおります．私が今日お話をさせていただきますのは，構造あるいは材料にかかわる力学，特に構造崩壊とか，材料破壊といった，構造とか材料の強度にかかわる力学を中心にお話をさせていただきたいと思います．こういった力学を「計算」，いわゆる計算機を使った数値シミュレーションの立場から体系化した学問分野，これを計算固体力学（computationnal solid mechanics）というふうに呼んでおります．

よくご存知の方もたくさんいらっしゃると思いますが，この分野では有限要素法，Finite Element Method（FEM）と申しますが，この方法が数値計算の方法として中心的に使われてきております．後ほど詳しく申しますが，有限要素法というのは実は1950年代初頭に開発された計算手法でございまして，少しフライングなんですが，ほぼ50年の歴史を持っている，そういう数値計算手法でございます．したがいまして，この方法を中心にした計算固体力学という分野も約50年の歴史を持っているといってよろしいかと思います．

年表（図1）のほうを皆様方のお手元に資料として配布させていただいておりますが，1950年から2010年ぐらいまでのところで，主な研究のトピックスにつきまして並べたものでございます．時間に沿いまして計算固体力学のこれまでの大きな研究トピックスにつきましてその内容をご紹介させていただく，特に最近10年間の研究成果の延長として，今後10年ぐらいの動向あるいは展望について最後に述べさせていただく，そんなぐあいにしてお話を進めさせていただきたいと思います．

図1　計算固体力学の発展（年表）

2．有限要素法の起源

まず1950年，50年前に遡りまして，有限要素法の起源ということですが，何人かの人の名前を挙げることができます．いずれも有限要素法のごく初期の研究を行った人として知られている人でございまして，まず有名な数学者のCourantという人がおります．この人は42年に数学の論文の中で，有限要素法的な計算手順を示唆しています．ただ計算の詳細は書かれておりませんので，この論文は有限要素法の起源というふうには見なされておりません．

10年ぐらいたちまして54年に，Argyrisという人は，長方形要素を使って二次元の弾性問題を解くというようなことをやっております．その2年後にTurner，Clough，Martin，Toppと，4名の連名の論文が米国の航空学会で発表されております．この論文は，実は1952年から53年にかけて米国のボーイング社で，B 52という最高速度がほぼ音速の航空機の翼の解析のために従来の計算手法では精度が足りないということで，精度の高い計算手法を求めた開発プロジェクトが行われまして，その成果として有限要素法が出てきたというふうに言われております．

ここでは三角形の有限要素を用いておりまして，三角形の要素は任意形状のものに適合させることができます．あわせてこの論文の中では,三角形要素のサイズを変えたり，要素の形状を歪めたり，そういったときの解の収束性，精度なども検討されておりまして，この仕事が現代の有限要素法につながる先駆的な業績と言われております．これは56年のことです．ちなみにTurner氏とTopp氏の2人がボーイング社のエンジニアでCloughさんというのはカリフォルニア大学の方，Martinさんというのはワシントン大学の教授です．このClough教授は，その後も有限要素法の基礎研究を続けまして，Finite Element Methodという名称はClough教授が付けたと言われております．

この頃から活躍している人で忘れてはならない人は，英国のZienkiewicz教授でございまして，大変よく売れた有限要素法のテキストを書いておられます．

Turner氏以下の論文では，非常に簡単な問題が解かれており，正方形の板の応力解析が行われています．要素に切る，要素のサイズを変える，あるいは要素を歪めるとか，そういったときの解の様子を数値的に検討しています．要素は四辺形になっていますけれども，さっき申しましたように，もともとの定式化は三角形でございまして，四つの三角形を組み合わせて四辺形となっているわけです．

3．有限要素（変分原理）

有限要素法という手法を使いますと，複雑な形状の構造体の応力解析ができるということですが，基本的な考え方は，複雑な形状のものでも，小さな要素に分割をする．そうすると，ひとつひとつの要素にかかる力と変形の関係は非常に簡単な式で近似ができる．それを計算機の力を借りて，構造全体にわたって重ね合わせる，組み合わせることによって複雑な構造の解析をする．これが有限要素法の基本的な考え方でございます．ですから，有限要素法で計算をするときにまず必要になるのは，有限要素の定式化ということで，それが最初に必要な作業になります．

1950年代から60年代にかけては，いろいろな変分原理に基づいて有限要素の定式化が行われております．力学の問題ですから，仮想仕事の原理であるとか，あるいは最小ポテンシャルエネルギーの原理とか，こういうものが支配原理として当初から使われておりました．それ以外のものとしてHu-Washizuの原理とか，あるいはHellinger-Reissnerの原理，あるいは最小コンプリメンタリエネルギーの原理，あるいは補仮想仕事の原理，こういったものがその後使われております．

これらの変分原理は，変位が未知量であったり，応力が未知量であったり，あるいは変位と応力をミックスして使うとか，いろいろなものがございますけれども，変分法の言葉で申しますと，Friendrichs変換により，系統的に誘導していくことができます．

こういった有限要素法の世界では古典的な変分原理に対して，64年にMITのPianという人が，少し性質の違った変分原理を誘導しております．有限要素では線形解の収束性を保証するために，要素間で変位とか，あるいはその微係数を連続にするという制約がございます．Pianが行いましたのは，その連続条件を少しゆるめたような，Variational principles with relaxed continuity requirements，連続条件を緩和した変分原理というものを提案しております．これは東大の鷲津先生によってハイブリッド型の変分原理というような呼ばれ方もしておりまして，この名称も広く普及しております．

4．有限要素（退化要素）

有限要素の定式化ということにつきましては，70年代，80年代は第2期に入ります．その段階ではどういうことが行われたかと言いますと，それ以前は，はり理論とか，あるいは板理論とかシェル理論とか，そういったものに基づいて有限要素の誘導が行われておりました．ところがこの時期は，三次元の要素から出発をして，応力とか変形に対する仮定を途中で導入するというやり方で，三次元要素からの退化要素，英語ではDegenerated elementと申しますけれども，そういう形でいろいろな有限要素が誘導されております．70年代にはそういった手法でたくさんのアイソパラメトリック要素と言われるものが研究されております．

その過程でロッキングと申しまして，要素が数値的にロックする，Shear locking，あるいはMembrane lockingと申

しますけれども，そういう現象が現れて，80年代はその対策がいろいろ行われました．具体的には変位場，ひずみ場，あるいはその他の修正を施す．それから，最もよく行われた方法は，数値積分の修正ということで，剛性マトリックスを評価する際の数値積分のスキームを変えてやる．具体的には積分のオーダーを落とすのですけれども，そういうことをしてやることによってロッキングを防ぐことができるということがわかりました．Uniform / selective reduced integration（一様/選択型次数低減積分）というような呼び方をされております．

この方法は非常に簡単でかつ効果的な，実用性の高い方法であったわけですが，ただこれだけでやりますと，メッシュの歪みの影響であるとか，あるいはHourglass modeという物理的に意味のないゼロエネルギーモードが発生するというような別の問題点も出てまいりまして，この方法だけで全く数値的に問題のない，完全無欠な要素を導くということは困難であると一般には認識されております．

90年代は，そういった問題点を全部解消して，要するにproblem-freeの要素を導くということが目指されたわけですが，完全なものが得られたかどうかわかりませんけれども，実用上はあまり支障のない要素モデルが得られているという言い方ができると思います．

そういった有限要素開発の第1期，第2期を経て，一次元，二次元，あるいは三次元といった有限要素モデルが整備され，要素ライブラリーが整っていったということです．

5．非線形有限要素法

70年ぐらいから，それまでは線形の問題に有限要素法を使っていたのが，非線形の問題にだんだん応用範囲が広がっていきました．構造力学で非線形性といいますと，材料非線形（material nonlinearity）と幾何学的な非線形（geometrical nonlinearity）が基本的な非線形性です．塑性とかクリープとか，固体力学の基礎式の中の応力・ひずみ関係式に入ってくる非線形性を材料非線形と呼んでおります．

もう一つの幾何学的な非線形性は大変形，有限変形とか，あるいは座屈とか，基礎式の中でひずみと変位の関係式のところに入ってくる非線形性，これを幾何学的な非線形と呼んでおります．

そのほかにも力学的な境界条件，あるいは幾何学的な境界条件，こういったものが時々刻々変わる，接触問題のような非線形性もございます．ですから，その三つが典型的な非線形性という言い方ができます．

応力とひずみの非線形性，つまり材料非線形性の一例としては，塑性変形を起こすことによって応力とひずみのパスが曲がってくるということがあります．

それから幾何学的非線形性につきましては，有限変形問題としては荷重漸増型とか荷重低減型，構造安定問題としましては分岐座屈とか，あるいは飛移り座屈とか，屈伏座屈とか，こういったものが幾何学的非線形性の典型例でございます．いずれにいたしましても，荷重と変位の関係が直線的でなくて曲がるということであります．

有限要素法でこういった問題はどうやって解析するかと申しますと，全体を一度に解くのではなくて，これをいくつかの微小な区間に分割をいたします．そういたしますと，全体としては非常に曲がったパスですけれども，一つの区間の中ではほぼ直線的であると考えることができます．ですから問題を区分的に線形化して，区分的な線形解析の繰り返しで解く．具体的には初期状態から出発して，微小な荷重増分を与え，それに対する変位増分を計算する．またそこから同じことをやる．その繰り返しで非線形問題を解く，いわゆる荷重増分法というやり方が最も一般的な解法として使われております．

6．増　分　理　論

その荷重増分法の基礎になる理論が増分理論（incremental theory）と言われているものです．この増分理論につきましては，60年代後半から70年代にかけていろいろな仕事が行われているわけですけれども，例えば68年に生研の名誉教授の山田嘉昭先生が，有限要素法で弾塑性解析を行っておられます．これは世界でも先駆的な仕事と言われております．

それから，それ以降，大ひずみとか，幾何学的な非線形ということをHofmeisterとかStricklin，Marcal，Pian，こういう人たちがやりまして，70年代ぐらいには非線形解析のための増分理論の基礎がかたまったということが言えます．

7．汎用商用コード

今，有限要素の定式化，それから非線形ということをお話ししましたが，こういう発展を背景として70年代ぐらいから有限要素法の汎用商用プログラムがたくさん出てきております．ごく有名なものをいくつか挙げますと，MARCとかANSYS，MSC/NASTRAN，ADINAとかABAQUSなどです．いずれも70年代にリリースされて，その後バージョンアップを重ねて，現在でも広く使われている，有限要素法のプログラムの老舗的な存在でございます．

この中で，例えばNASTRANは，60年代から米国のNASAで開発が行われて，71年にMacNeal Schwendler Corporationというところから売り出され，MSC/NASTRANと言われております．

NASTRANは，初めは線形解析の機能だけ持っていて，だいぶ後になってから非線形の機能を付け加えたというわ

けです．それからMARC，これはMarcalという人がつくったプログラムですけれど，この人は非線形の増分理論のところでも名前が出てきました．これは初めから非線形解析を売り物にしたプログラムということでございます．

これらはいずれも米国でリリースされたプログラムですけれども，中心になって開発をした人は必ずしも米国人ではございません．Marcalという人はマカオの出身の人です．ADINAをつくったBatheという人は西ドイツ．ABAQUSはHibbit，Karlsson，Sorensenの3人ですが，英国，スウェーデン，デンマークということで，キー・ディベロッパーの出身地は様々です．米国が，こういうある意味のベンチャービジネスの場を提供したということが言えます．

8．構造崩壊，材料破壊

これまでお話しした有限要素法の発展というのは，どちらかといえば構造解析，あるいは非線形の場合には構造崩壊，そういうものを対象にした発展でした．固体力学の分野では，構造崩壊という話と材料破壊という話がありまして，ある意味で区別をして話をしないといけない二つのトピックスです．ここで定義を述べておきますが，構造崩壊（structural collapse）のほうは，「構造物が塑性変形とか座屈などによって，マクロなき裂，あるいは破断を伴うことなく耐荷力を失う」，こういうふうに定義いたします．

それに対して材料破壊（material failure）は，「材料にマクロなき裂が発生する，あるいは破断する」ということで，要するに材料が切れるか切れないかという区別です．この両者の区別は非常に重要でございまして，構造崩壊のほうはある意味で現象を支配する原理，物理法則というのはわかっています．ですから計算をするということにエネルギーが集中できたわけです．有限要素法の分野で，構造解析が先導役を果たしてきたというのは，そういうことに事情があります．ですから計算というものの状況は，構造崩壊のほうでは非常に成熟したレベルにある，実用的なレベルにあるということができます．

それに対して材料破壊のほうは，あとで述べますマルチスケール性というようなこともございまして，現象そのもののフィジックスがよくわからない部分もたくさんあるということで，計算の状況としては構造崩壊に比べるとまだ未成熟といいますか，逆に言えば将来的な可能性が非常に高いということでもありますけれども，そういう区別が非常に重要であります．

図2は構造崩壊の一例で，円筒の鋼管が軸圧縮力を受けてクラッシュしております．変形自体は非常に大きく起こっておりますが，き裂とか，そういったものは発生していない．破断はしていないわけです．こういう現象が構造崩壊ということの例です．

図3では，多結晶体の中にマイクロクラックが出て，あるいはそれがつながって，マクロなクラックになる．要するにき裂が走り材料が破断しているわけです．材料破壊というのはこういう現象です．これは計算結果です．

9．計算破壊力学

破壊という分野で，有限要素法というのはどういう使われ方をしてきたのか．これも歴史を遡ると60年代後半から70年代ぐらいにそういうことが始まっております．破壊力学（fracture mechanics）という学問分野は，50年代のIrwinのStress intensity factor（応力拡大係数）の概念の提案とか，あるいはRiceによるJ積分とか，基本的に重要なものはこの頃に出てきています．

こういったものを計算するために有限要素法を使うということは60年代後半から行われていたと思いますが，例えば69年東大の宮本先生の日米セミナーの論文などがございます．それから80年代半ばぐらいには，Atluriという人が，こういったところの成果を取りまとめたテキストを出しております．

宮本先生のごく初期の解析例では，長方形の板にクラックが入っている，これを引っ張った，そのときの，き裂の先端の応力集中，具体的には応力拡大係数ですが，それを計算しています．

10. 計算不連続体力学

その頃，破壊ということとある程度関係があるのですが，それまでの有限要素法の流れと異なる別の数値計算手法の開発の時期がございました．これは計算不連続体力学（computational discontinuum mechanics）というものでございまして，有限要素法には，要素間で変位を連続にするとか，あるいは微係数を連続にするとか，そういう制約がございます．そうすると，すべり線とか塑性関節線とか，あるいは粒状体の解析をするとか，あるいは破砕現象を解くとか，あるいは分離脆性破壊，多体相互作用とか，そういったものを解析することにはあまり向いていない，相応しくありません．そういう反省に立って，70年代には有限要素法とちょっと毛色の違った計算手法がいろいろ提案されております．

例えばHodgeは，72年に，Finite element limit analysisということをやっておりますし，生研の名誉教授で私の恩師でもあります川井教授は70年代に塑性解析法を数値的な立場から一般化することを目的に，剛体・ばねモデル，あるいは離散化極限解析法というものを展開しております．

それから，土木のほうで有名なCundall，この人が個別要素法（Distinct Element Method）というものを考案したのが70年代です．それからJohnsonのNeighbour algorithmとか，WilliamsのDiscrete Element Method，これはCICEという商用のプログラムになっておりますけれども，こうい

ったものが出てきたのが70年代から80年代にかけてということでございます．

不連続体力学モデルの一例で，さっき申しました剛体・ばねモデルは，二次元では任意多角形の剛体要素を考え，それの隣あったものをばねでつなぐ,そういうモデルです．このばね定数をうまくコントロールすれば，そこにき裂が入るとか，あるいは接触はく離とか，あるいはクーロン摩擦とか，そういうものはばね定数のコントロールで簡単に入ってくるということです．

そういうモデルを使った計算例として，これは土木のほうの話ですが，発泡スチロールすなわちEPSブロックを盛土材料として使います．図4は道路の拡幅工事で道路の舗装の下に敷いているところですが，こういう独立したブロックからなる構造体の地震応答解析というようなことに剛体・ばねモデルを使っております．

図5は，いまのEPSブロックをいくつか積み上げたものの振動解析例です．同じようなブロック構造体の例は，石を積み重ねたアーチ構造です．これの集中荷重による崩壊解析，あるいは煉瓦積みのトンネル構造の解析とか，そんなことに計算不連続体力学モデルが，これだけではありませんけれども，例えばこんなことに非常に便利に使われております．

11. 計算損傷力学

もう一つ破壊絡みで，80年代ぐらいから盛んになってきた分野がございます．それを計算損傷力学と呼んでおります．理論的な背景としては，連続体という枠の中でマイクロクラックとかマイクロボイドといったような微視的な損傷を表現する，そういう連続体力学の一分野あるいは破壊力学の一分野といってもいいのですが，そういう分野として連続体損傷力学（continuum damage mechanics）というものがございます．58年にKachanovという有名な人が，Continuity，今は損傷変数と言っていますが，こういう場の変数を含んだ力学を提案して，これが連続体損傷力学の出発点と言われております．60年代はまだそれが実用に至らない時期でした．ただし，その間にRabotnovによる有効応力，損傷力学の定式化を行う際の基本的に重要な概念ですが，有効応力というものの提案がございました．

70年代に理論がだんだん整っていって，75年ぐらいには早くもというべきか,損傷力学と有限要素法を組合せて，固体の中で微視的な損傷が発生し，それが発展してマクロなき裂あるいは破断に至る，そういうところまでを一貫して計算する，Local approach to fracture（局所的破壊解析法）と呼んでおりますけれども，そういうことが最初に試みられたのがこの頃です．この時はクリープ破壊の問題が解かれています．

80年代に入りまして熱力学，マイクロメカニックスをベースにして，損傷力学の理論の基礎固め，いろいろな工学の問題への応用ということが行われるようになっております．その過程で，いろいろ数値的な問題点も指摘され，解が要素サイズに著しく依存するというような問題点も指摘されておりまして，その辺のところは現状でまだ完全に解決されるには至っておりません．

私どもの研究室で行った損傷力学を使った破壊解析の例を2，3ご紹介しますと，橋梁のボックスガーダーを溶融亜鉛めっきするときに，450℃という非常に高温の溶けた亜鉛の中に浸けます．

肉厚が場所によって違いますから，温度の不均一ができます．発生した熱応力によって，例えばパネルが座屈する，スティフナの端部に非常に大きな応力あるいはひずみが発生する，悪い場合はき裂が入る，そういうことが起こりえます．

そういう現象を損傷力学の構成式を使った有限要素解析でシミュレートしたということでございます．図6は，パネルにスティフナが溶接されて付けられた部分の三次元の解析ですけれども，溶接ビードの端のところに非常に大きな損傷が出ている．実際こういうところで割れが入るわけですが，そういうことが計算で出ております．

同じような問題が，送電鉄塔のメンバーのめっき時にも発生いたします．山形材にボルト穴があいています．ボルト穴の近傍のところで，めっきしたときに割れが入ることがある.そのボルト穴の近傍を三次元のメッシュに切って，損傷力学を使って計算をしております．図7はボルト穴の近傍のところです．なるほど損傷が高いレベルで発生しているということがわかります．

スティールとセラミックスから成る傾斜機能材，そういうものをコーティング材として使う，それが温度サイクルを受ける，そのときの損傷解析ということも行っております．コーティングの部分に非常に高い応力が発生して，その結果として損傷が少し出る場合があります．こういった解析が計算損傷力学の例でございます．

12.「計　算　力　学」

初めから計算固体力学とか計算力学という言葉を使ってきておりますけれども，有限要素法という言葉は50年代から使われておりましたが，「計算力学」という言葉はそう古い歴史があるわけではございません．例えば86年にComputational Mechanicsの国際的組織IACMができまして，同じ86年にIACMの主催で，World Congress on Computational Mechanics，計算力学の世界会議の第1回が開かれました．それから，『Computational Mechanics』というジャーナルが発刊されたのが86年，このWCCMの第3回が幕張で行われたのは94年です．このことをきっかけに95年に日本計算工学会，計算力学会ではなくて計算

工学会が発足しております．80年代半ばぐらいから計算力学という言葉が一般に使われるようになったということでございます．

13. メッシュ・アダプテーション

その頃から有限要素法につきましても，いろいろな新たな発展が出てきております．そういったものをこれからお話ししますが，まず一つ目はメッシュ・アダプテーション（mesh adaptation）ということです．有限要素法というのは，初めからお話ししているように要素に切るということが出発点ですが，どういうふうに切るか，どの程度細かく切るかということは難しい問題ではっきりした基準はございません．いわば経験と勘で切るということをやっていたわけですが，それをもう少し合理的なものにしよう，あるいは自動化しようということでメッシュ・アダプテーションという考え方が80年代初期に出てきております．

これは，とにかく何かメッシュを切って計算する．出てきた結果から，離散化誤差を何らかの方法で事後評価する．事後評価された誤差に基づいて，誤差の大きそうなところは有限要素モデルをもっと精密なものにするという，そういうことです．精密にしたモデルでまた計算をして誤差の評価をし，それが所要の誤差の値に収まるまでこれを繰り返す，そういうアプローチです．

有限要素モデルを精細化する方法として，ふつう，r法，p法，h法と三つ種類があります．それからそのコンビネーションもございます．80年代にこういうものが出てきました．

90年代になりまして，それを非線形の問題に応用するということが行われるようになりました．ただし非線形になりますと，誤差の定義から始まって，メッシュの細分化のタイミングなど，線形のときにはなかったいろいろな問題点が出てまいりますので，非線形のメッシュ・アダプテーションにつきましては，まだ確立された計算技術というところまでは至っていないということでございます．

それから，本当はメッシュ・アダプテーション以前に，最初のメッシュを切る作業，メッシュ・ジェネレーションということも非常に大きな問題なのですが，これは力学的なトピックスではありませんので，ここでは取り上げません．

メッシュを精細化するときのr法，p法，h法の説明ですが，オリジナルなメッシュで計算して，ある要素の誤差が大きかった．そのときにrelocation，すなわちr法では節点の位置をずらして，誤差の大きい要素を小さくする．p法のpというのは，要素の中で仮定された変位場の次数です．オーダーです．それを上げることによってその要素の精度を上げる．h法は，h-refinementです．hというのは要素サイズです．ですから要素をさらに細分化することによってその部分の精度を上げる．そういう三つの方法がとられます．

14. 品　　質

そういうものと前後して有限要素解の品質というものの議論が非常に関心を集めるようになっております．

有限要素解の信頼性ということですが，そういったものを決定するファクターは二つございます．一つは，数学的なモデル化の段階で入ってくる誤差，それの品質ということです．これは力学現象，あるいは物理現象を，微分方程式，あるいは変分原理に置き換える，要するに数学的なモデル化の過程で入ってくる，そういうエラーです．

これは例えば，構造体の次元を一次元でやるか二次元でやるか三次元でやるか,あるいは応力・ひずみ関係として，どういう構成式を使うか，材料定数をどう決めるか，非線形性としてどんなものをどの程度考慮するか，あるいは境界条件，初期条件として，実際のものは理想的なものではありませんので，どうやってその実態にあわせるかとか，こういったところでの品質の問題でありまして，こういったものは解析をする人，あるいは汎用プログラムのユーザーが判断して決めることです．ですからこの品質を上げるためには解析者の教育ということが一番重要な問題であります．

もう一つは，数学的にモデル化されて微分方程式が得られた，それを有限要素法で解く，その段階で入ってくる，いわゆる離散化誤差であります．これにつきましては，例えば空間メッシュに対しましてはさっき言いましたようなメッシュ・アダプテーションというような手法がございますし，時間方向，増分方向についてもいろいろな自動化が試みられているということで，この辺はプログラムの機能の問題です．これらの総合されたものとして全体の品質が決まってくるということになります．絡むファクターが非常に多いので複雑な問題ということになります．

一方，数学のほうで，精度保証付数値計算ということが言われますが，これは打切り誤差とか丸め誤差の話で，非常に細かい話です．かつ精度評価は普通の計算の1000倍ぐらいの時間がかかるというのが常識のようでございまして，計算力学のほうでは通常計算と同程度か，あるいは数倍ぐらいの手間で誤差を評価しよう，あるいは改善しようとしております．だいぶ次元の異なった話でございます．

15. スマートアルゴリズム

それからメッシュ・アダプテーションのように，ある意味で自律的に品質を改善する，そういうアルゴリズムをもっと広い名称でスマートアルゴリズム（smart algorithm）といってよろしいかと思うのですが，そういうものの一例として，これはわれわれの研究室で開発したものですが，

骨組構造の有限要素崩壊解析のための順応型Shifted Integration法（ASI法）についてご紹介させていただきます．

これは要素剛性を評価する際の数値積分点の位置を順応的にシフトすることによって，塑性ヒンジとか破断とかを厳密に考慮する方法です．ある意味で有限要素法と計算不連続体力学を融合したような手法です．

基本になるのは有限要素と計算不連続体力学モデルの等価性ということでございまして，積分点の位置をいろいろ変えますと，要素内で発生する破断とか塑性ヒンジの位置を厳密にコントロールできるということが両方の比較からわかります．

細かいことは省略しますが，そういう方法でやると，スタティックな崩壊問題において非常に早く解が得られる．動的な問題でも，非常に収束性のよいアルゴリズムになるということがわかります．こういう方法を使って，例えば三角形のフレームが衝撃荷重を受けると，非常に大きなクラッシュ変形をするわけですが，そういう現象も非常に少ない要素で計算できます．

図8は東京ビッグサイトの骨組の模型です．こういったものの耐震の解析では，いろいろなところで塑性ヒンジが発生して，最終崩壊状態に至っておりますが，こういう解析とか，あるいは古くなったビルを爆破解体する，図9のようなシミュレーション，そんなことに非常に便利に使える，高い計算効率で，かつ精度を維持しながら計算ができるということを実証しております．

16. 並列計算，領域分割法

次のトピックスは，並列計算，領域分割法です．計算は精度を高める，品質を上げるということとスピードを上げるということが重要になってまいります．地道な計算アルゴリズムの改良でスピードを上げることは限界がございまして，やはり解析領域を有限個のサブドメインに分けて，各サブドメインを一つのCPUで計算をする，同時並列的に全体を解くという，いわゆる並列計算，あるいは超並列計算というようなやり方が計算時間を圧倒的に短くするためには必要なテクニックになります．こういう方面の研究では，88年に偏微分方程式のための領域分割法（DDM）の第1回の国際シンポジウムが開かれております．最近の商用コード，汎用コードで数十万自由度規模の解析が一応限界のようですが，こういった手法を使いますと，それが数百万とか1000万とか，そういった自由度の系が解けるようになるだろうと言われております．

17. 構造トポロジー最適化

もう一つのトピックス，それは構造のトポロジー最適化ということです．最適化ということは，数学の表現で言いますと，ある制約条件のもとで目的関数を最小化する設計変数解を求めるということになります．いわゆる数学的ないろいろな最適化の理論を構造の最適化に応用するというようなことは，わりあい早い時期から行われておりまして，70年代にGallagherとZienkiewiczの本が出ていますし，85年にはHaftkaが書いています．この辺ではどういう最適化が行われていたかと申しますと，Sizing optimization，あるいはShape optimization，はりの断面寸法とか，あるいは板厚とか，そういうものを最適化する，せいぜいものの形を最適化する，こういうことが行われてきたわけです．それが88年のBendsoeとKikuchiの論文で，均質化法を使うことによってトポロジーの最適化もできるということになりました．この方面の研究は近年非常に進んでおりまして，将来性の豊かな分野だということができます．95年にBendsoeのテキストなども出ております．

固体を四角い穴のあいた正方形のセル，そういったマイクロストラクチャーを持つものというふうに仮定いたします．穴の大きさを設計変数にして，これの最適化を行う．そうすると，結果として穴が非常に小さくなったところは材料を配置しないといけない．穴が大きくなったところは材料がなくてもいい，そういう解釈ができるわけです．そうすると，骨組のようなものもトポロジー最適化の結果として，解として得ることができるということになるわけです．

18. 計算メソ力学

次は計算メソ力学ということですが，これは破壊と非常に関係の深いテーマです．これも80年代終わり頃から90年代にかけて研究が盛んになった分野です．Haritosらが88年の論文で，「Mesomechanicsの概念」について述べておりますけれども，微視的な構造とか挙動と，マクロな物性との関係づけを不連続体力学を使って行う，橋渡しをする，そういうふうに定義をしております．

大ざっぱな言い方をしますと，マクロ連続体というのはミリメータースケール以上の話です．一方，原子，分子という話になりますと，ナノメーターとかオングストロームとか，そういうオーダーの話になります．メソというのは，スケール的にはその中間でございまして，ミクロン，10^{-6}m，マイクロメーターぐらいのオーダーの話と，大ざっぱにはご理解いただければいいと思います．マクロスケールとメソスケールをつなぐ架け橋として，さっき言いました損傷力学というものがあるのですが，メソスケールとミクロスケールのほうはまだちょっとはっきりこれをつなぐ理論体系というものはできておりません．

メソ力学と解釈できるいろいろな研究というのは80年代終わりごろから出ていまして，私もその頃からマイクロクラッキング脆性固体を対象にしてメソ解析法の開発ということをやっております．

それを若干ご紹介しますと，固体の一部分，Constitutive elementと申しますが，これを取り出すと，多結晶体ですと，図10のような形をしているわけです．これは計算のためのメッシュです．ボロノイ分割でつくっています．こういうものを計算機の中で引っ張ってやる．そうすると図11のように，結晶粒界のところにマイクロクラックが発生するということがわかります．

別の例としましては，二次元の問題ですけれども，マクロき裂にいわゆるモードIという，開口型のストレスをかけます．そうするとこれが進展していきますけれども，このき裂先端の非常に小さい部分をさらに細かく分割いたしまして，マクロき裂の進展の様子をメソスケールで追い掛けてみました．

単層の材料ですと，図12のようにマイクロクラックがいろいろなところに出ながら，メインのパスが進展していく．それから，図13は二層材料です．アルミナにジルコニアの粒を混ぜた,セラミックスの二層材料ですけれども，そういうものの中のき裂の進展です．そういったものをメソスケールで解析しているという例です．

そのような計算をやりまして，いわゆるき裂進展抵抗曲線，すなわちき裂の抵抗力と長さの関係をグラフにしますと，出てくる結果から破壊靭性の議論ができる．メソスケールのいろいろな物性条件とマクロの破壊靭性の関係が把握できるということになるわけです．こういう方面も現在進展しつつある分野の一つです．

19. メッシュレス法

メッシュレス法（meshless method）というのがございます．これも90年代の一つの大きな流れだろうと思いますが，有限要素法でメッシュを切る作業は非常に大変です．ですからメッシュを切らなくても解けるような計算手法があり得ないかということで，90年代に続々といろいろな計算手法が提案されております．有名なものとしては，Element-Free Galerkin法というBelytschkoのものがございます．それから，NEM（Natural Element Method）という方法もございます．よく知られているものです．

この方法では，要素に切るのではなくて，ノード（節点）だけを分布させています．三角形や四角形のメッシュというものはない．ノードだけを分布させる．ノード単位で変位場の仮定，形状関数といいますが，そういうものを仮定いたします．その仮定の仕方はいろいろございますけれども，いったんノード単位で変位場が仮定されれば，あとは有限要素法と同じようなプロセスで計算が進みますが，これですとメッシュを切らなくていい．そういう観点からのメリットもございますが，また一方，き裂を進展させたいというようなときに，有限要素法ですと，要素境界線の方向ということでき裂が進展するパスが制約されます．そのためremeshが必要となりますが，メッシュレス法ではノードをrelocateするだけでよく，材料破壊の問題などにも非常に便利に使えるということで，Element-Free Galerkin法などはかなり早い時期からき裂の進展解析などにも使われております．

20. 複雑な系

最後は，複雑な系ということですが，すでに触れましたけれども，材料破壊ではマルチスケール性ということが非常に大きな問題になっております．それから，力学的なことだけでなくて物性論，冶金学，化学とか，ほかのフィールドのこともいろいろかかわってくる，マルチ物理の問題です．

それから構造崩壊のほうも，あまりこういう言い方はされませんけれども，やはりミリメータースケールからキロメータースケールに至るマルチスケールの問題があります．それから，構造もいろいろな場におかれる．力学的な場だけではなくて熱とか電磁気とか流体とか，そういうものを考えるとマルチ物理の問題ということで，こういった複雑な系をどんどん解析の対象とするようになっている．これも一つの方向であります．

21. まとめ

最後にまとめたいと思います．これまで有限要素法，あるいは計算固体力学の50年の歴史をずっと見てまいりましたけれども，特に最近10年ぐらいの動向を見ますと，スマートアルゴリズムなどによる計算の良質化，並列計算などの高速化，構造最適化さらには材料設計といったある意味の知能化，メッシュレス法，不連続体力学といった計算手法の多様化，構造・損傷・破壊，そういったものの融合する統合化，それからメソ力学とか分子動力学といった微視化，最後に申しましたマルチスケールあるいはマルチ物理という複雑化，こういったことが進行しているという言い方ができます．前半のものは，どちらかといえば計算にウエートがあって，構造解析のほうからのニーズで進展している．後半のものは，どちらかといえば力学的な研究テーマで，材料破壊のほうの要求からこういう研究が行われているという言い方ができると思います．

90年代は，いろいろな方向の芽が出てまいりまして，やや混沌とした状況ということが言えると思いますが，今後10年ぐらいの間に，こういったそれぞれの分野が成熟し，内容も整理統合されて，実用的な計算システムが次から次へと出てくる，そういう時代になるのではないかというふうに考えております．その辺のイナーシャを今日のお話から感じ取っていただければ幸いでございます．

以上で講演を終わらせていただきます．ご清聴ありがとうございました．

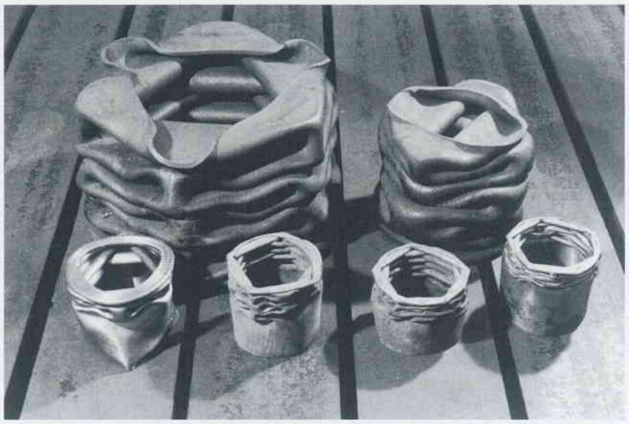

図2　円筒鋼管のクラッシュ崩壊

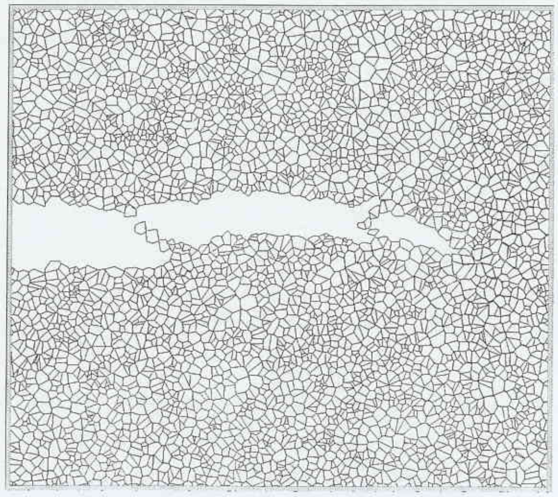

図3　多結晶脆性固体のき裂破壊

図4　EPS工法による道路拡幅工事

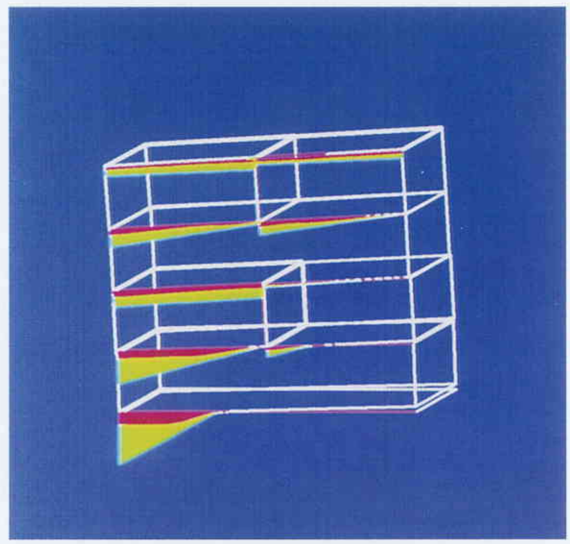

図5　EPSブロック集合体の水平振動

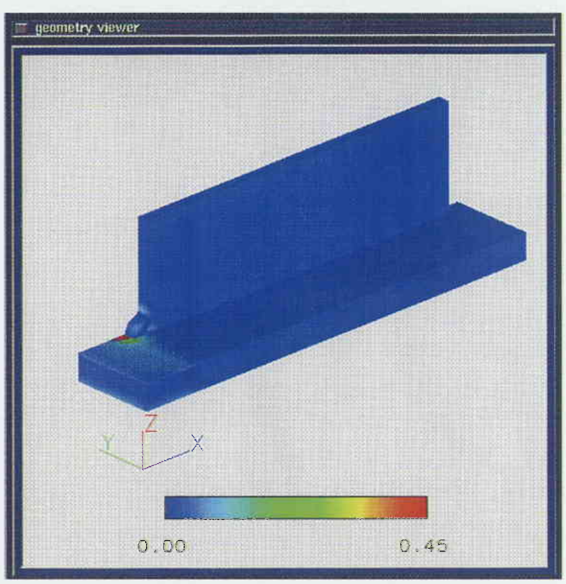

図6　溶融亜鉛めっき時の板桁橋梁部材の損傷

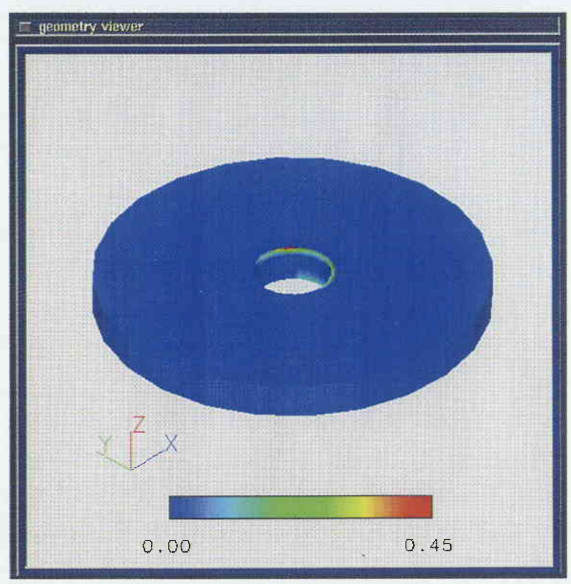

図7　溶融亜鉛めっき時の送電鉄塔部材の損傷

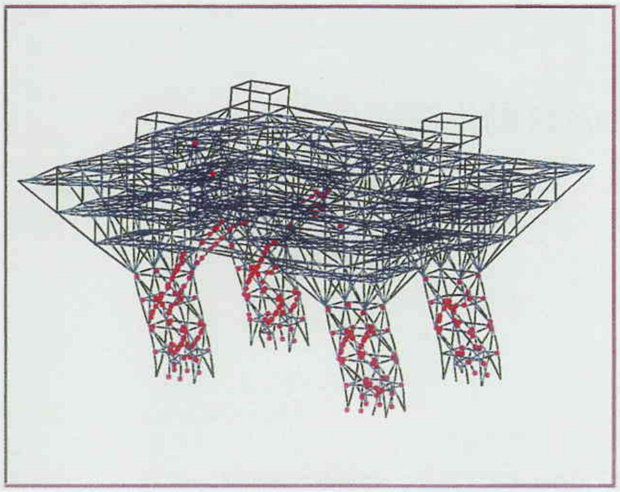

図8　空間骨組構造体の地震崩壊

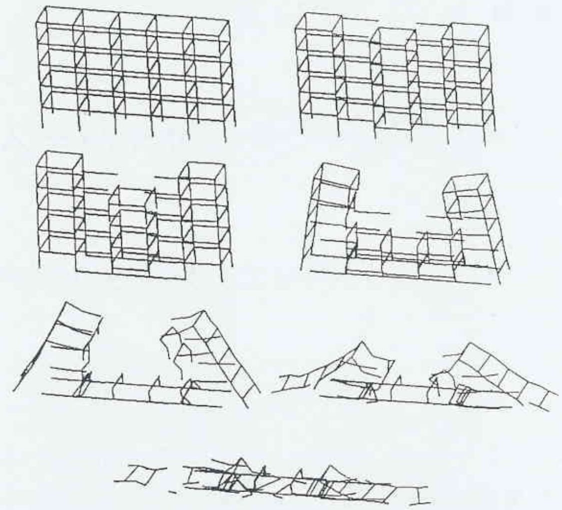

図9　老朽化ビルの爆破解体

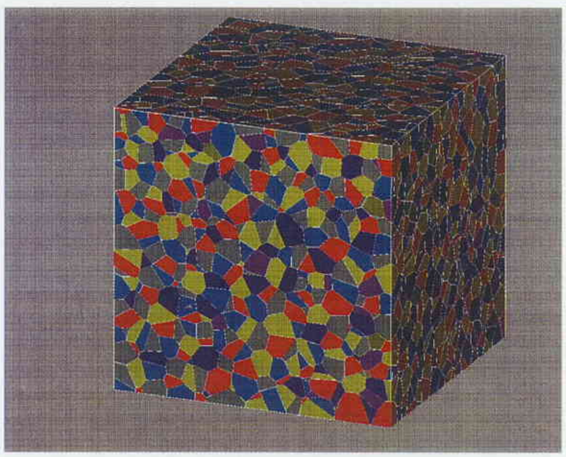

図10　多結晶体のメソ力学モデル

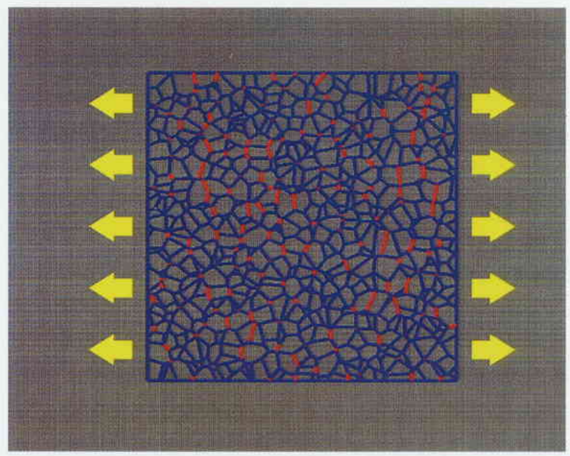

図11　多結晶体のマイクロラッキング

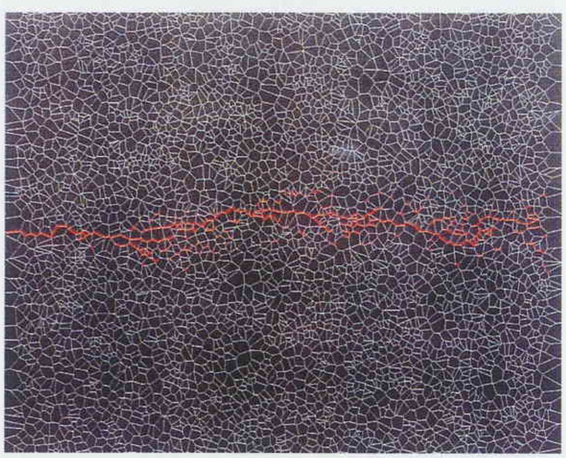

図12　単相材料におけるメソスケールのき裂進展

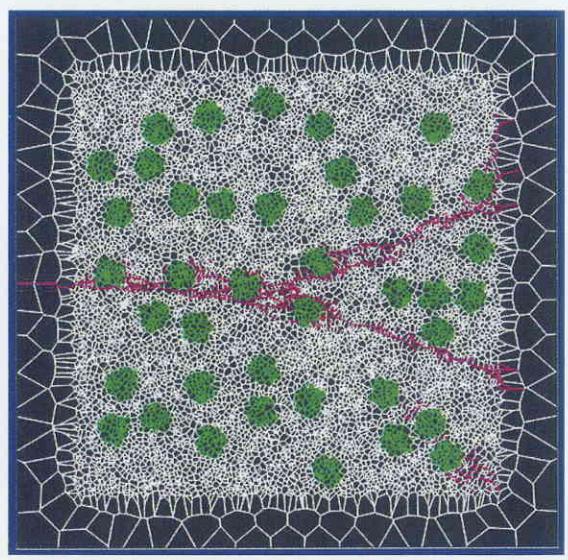

図13　二相材料におけるメソスケールのき裂進展